COURS

MÉCANIQUE ET MACHINES.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon soit du texte, soit des gravures, ou toute traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le courant de 1865, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

COURS

DE

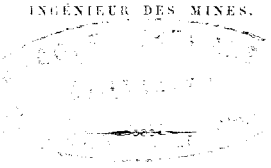
MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. EDM. BOUR,

INGÉNIEUR DES MINES.



Multa pars mei.

PREMIER FASCICULE.

CINÉMATIQUE

AVEC ATLAS DE 30 PLANCHES IN-4°.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1865

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE..... 1

PREMIÈRE SECTION.

CINÉMATIQUE PURE.

CHAPITRE PREMIER. — Mouvement simple d'un point..... 18

CHAPITRE II. — Mouvement d'un point relativement à un système mobile..... 75

CHAPITRE III. — Mouvement d'un corps ou système solide..... 97

CHAPITRE IV. — Composition des mouvements simples d'un corps solide..... 141

DEUXIÈME SECTION.

THÉORIE DES MÉCANISMES OU ÉLÉMENTS DE MACHINES.

CHAPITRE PREMIER. — Généralités sur les machines et sur les transmissions ou transformations de mouvement..... 173

CHAPITRE II. — Organes de machines. — Classe A. — Sens de la transmission constant. — Rapport des vitesses constant..... 189

CHAPITRE III. — Combinaison des organes à rapport de vitesses constant: roues, poulies et tambours..... 239

CHAPITRE IV. — Organes de machines. — Classe B. — Sens de la transmission constant. — Rapport des vitesses variable..... 265

CHAPITRE V. — Organes de machines. — Classe C. — Sens de la transmission variant périodiquement. — Rapport des vitesses constant ou variable..... 279

CHAPITRE VI. — Organes servant à établir, interrompre ou modifier une liaison de mouvement..... 301

CHAPITRE VII. — Moyens d'observation et appareils propres à découvrir expérimentalement la loi d'un mouvement..... 313

COURS
DE MÉCANIQUE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

La *Mécanique* est la science du *mouvement* et des *forces*.

Nous savons tous ce que c'est que le mouvement; nous savons tous aussi ce que c'est que le *temps* et l'*espace;* et pourtant on peut affirmer qu'il n'est pas possible de définir clairement ces deux notions fondamentales, dont la combinaison produit l'idée de mouvement.

« Réunissez », dit Charles Nodier, « Orphée, Épicure, Démocrite, Aristote, Hippocrate, Archimède, Marc-Aurèle, Cicéron, Montaigne, Bacon, Locke, Leibnitz, Bossuet, Kant, Georges Cuvier, et toi aussi, mon cher Ballanche; donnez-leur pour rapporteur ce bon prince de la Mirandole, qui s'était engagé à soutenir une thèse contre tout venant, *de omni re scibili;* et demandez à ces gens-là s'ils savent ce que c'est que le temps et l'espace : ils vous répondront qu'ils ne le savent pas, que l'homme ne peut pas le savoir. »

Essayerons-nous de dire, avec Leibnitz, que l'espace est l'*ordre des choses qui coexistent*, et le temps, l'*ordre des existences successives.* Mais il est évident, non-seulement que nous n'avons rien expliqué, rien défini, mais encore que nous avons fait un cercle vicieux, l'idée de succession dérivant nécessairement de celle de temps.

La *Géométrie* est la science de l'espace et de sa mesure. On fait déjà quelquefois intervenir en Géométrie le mouvement;

par exemple, quand on définit une ligne comme décrite par le *mouvement* d'un point, une surface par le *mouvement* d'une ligne.

On pourrait définir la surface de la sphère, en disant que tous ses points sont à égale distance d'un point intérieur appelé *centre*. Mais quand on regarde cette même surface comme engendrée par le *mouvement* d'une demi-circonférence qui tourne autour de son diamètre, l'image devient infiniment plus nette, plus continue, plus lumineuse : on a tout de suite l'objet défini devant les yeux, et on saurait l'exécuter au besoin. On n'est pas plus embarrassé quand on rencontre en Géométrie des définitions, telles que celle de l'hélice, basées sur des combinaisons de mouvement plus ou moins compliquées. Et en définitive ces emprunts de la science de l'espace à celle du mouvement n'offrent pas le plus léger inconvénient, puisqu'ils ne donnent lieu à aucune pétition de principe, et qu'ils présentent à notre esprit des images d'une grande netteté, la notion du mouvement étant au nombre de celles qui nous sont certainement le plus familières.

Le mouvement et ses propriétés générales, dit d'Alembert, sont le premier et le principal objet de la Mécanique. Cette science, dont l'étude doit suivre immédiatement celle de la Géométrie, s'en distingue nettement par l'introduction d'une notion nouvelle : celle du *temps* qui s'écoule pendant que les mobiles dont on s'occupe, passant d'une position à une autre, parcourent un certain chemin dans l'espace.

On sait que le lieu d'un corps dans l'étendue se détermine au moyen de certaines grandeurs géométriques nommées *coordonnées*. Si l'on observe ce corps (que nous réduirons, pour plus de simplicité, à un point mathématique), et que l'on mesure ses coordonnées à des instants suffisamment rapprochés, on connaîtra la série des positions successives de ce point; on pourra construire la courbe lieu géométrique de ces positions, courbe qu'on appelle la *trajectoire* du mobile. On n'a fait jusqu'ici que de la Géométrie.

Si, de plus, on a soin de noter le temps qui s'écoule entre deux observations consécutives quelconques, on connaîtra le mouvement d'une manière complète; et on le séparera de tous

les autres mouvements qui s'en distinguent, soit parce que la trajectoire n'est pas la même, soit parce que des espaces égaux sont parcourus dans des temps différents. C'est ce dernier point dont on n'avait pas à se préoccuper en Géométrie.

L'Astronomie vous enseignera les moyens de mesurer le temps. Les appareils d'*horlogerie*, aussi bien ceux qu'on emploie dans la vie commune que ceux qui servent aux expériences de précision, sont en effet réglés sur les phénomènes célestes. L'unité de temps, dans la Mécanique, est invariablement la *seconde de jour solaire moyen*, comme l'unité de longueur est toujours le *mètre*.

Quand, par l'observation simultanée d'un corps en mouvement et d'une horloge à secondes, on est arrivé à déterminer les espaces parcourus par le mobile et les temps employés à parcourir ces espaces, on dit qu'on connaît la *loi du mouvement;* et l'on est en état de résoudre le double problème suivant :

1° *Quelle est, à un instant donné, la position du point mobile dans l'espace ?*

2° Réciproquement : *Le lieu du mobile ayant été déterminé par l'observation, quelle heure est-il ?*

C'est par la connaissance de la loi des mouvements des astres que l'Astronomie sait assigner le point du ciel où se trouvera, à une époque donnée, tel corps céleste que l'on voudra; qu'elle calcule plusieurs années à l'avance le lever et le coucher du soleil, de la lune et des planètes; qu'elle prédit les éclipses, les marées, et tous les phénomènes qui intéressent, à des degrés divers, l'astronome, le géographe ou le navigateur.

Inversement, l'observation de ces phénomènes donne les moyens de déterminer avec une grande précision, soit l'heure du lieu où l'on se trouve, soit même l'heure simultanée d'un autre point du globe, éléments dont la différence est égale, comme on sait, à la longitude de la station, prise par rapport à un point connu.

Dans un autre ordre d'idées, c'est par la connaissance des mouvements des mécanismes qu'on est parvenu, depuis un siècle environ, à remplacer presque partout, dans nos ateliers, la main de l'ouvrier par les forces aveugles de la nature inanimée. C'est ainsi que l'industrie a été dotée de ces engins

merveilleux, esclaves obéissants qui tissent nos vêtements, transportent nos fardeaux, façonnent les métaux pour les usages les plus variés, accomplissent en un mot toutes les fonctions qui semblaient jusqu'ici l'apanage exclusif du travail intelligent.

Il est évident que par l'observation directe, aidée de l'application seule de la Géométrie et du calcul, on peut, *sans le secours d'aucun principe nouveau*, trouver les propriétés générales du mouvement, varié suivant une loi quelconque. C'est ainsi qu'ont procédé les créateurs de la Mécanique proprement dite, les Kepler et les Galilée.

Mais, comment arrive-t-il que le mouvement d'un corps suive telle ou telle loi particulière ? C'est sur quoi la Géométrie seule ne peut rien nous apprendre; et c'est aussi ce qu'on doit regarder comme le premier problème qui appartienne, à proprement parler, à la Mécanique.

On voit d'abord fort clairement qu'un corps ne peut se donner le mouvement à lui-même. Il ne saurait donc être tiré du repos que par l'action de quelque cause étrangère (*).

Telle est la loi fondamentale de l'*inertie*, sur laquelle nous aurons à revenir pour en faire apprécier le véritable caractère et la haute portée. Bornons-nous, pour le moment, à dire que quand un corps (dont nous pouvons toujours supposer les dimensions plus petites que toute grandeur assignable, infiniment petites, pour parler le langage de l'Analyse), quand un pareil corps, dis-je, passe de l'état de repos à l'état de mouvement, ce phénomène a nécessairement une cause; et cette cause, d'après notre principe, il la faut chercher *en dehors* du corps qui en subit l'action.

L'étude des causes capables de faire naître le mouvement, et la recherche des relations qui existent entre ces causes et le mouvement produit, sont de la plus grande importance au point de vue des applications. En effet, la connaissance approfondie de ces causes motrices peut seule nous permettre, en les mettant convenablement en jeu, d'obtenir dans nos manufactures

(*) D'ALEMBERT, *Traité de Dynamique*, nouvelle édition. Paris, 1758; Discours préliminaire, p. VII, VIII et IX.

les mouvements dont nous avons besoin, de nous opposer, au contraire, à ceux qui seraient inutiles ou nuisibles.

Cette étude est le deuxième objet dont la Mécanique ait à s'occuper.

Or, les mouvements qui nous sont le plus familiers sont ceux que, dès notre enfance et par le moyen de nos organes, nous imprimons journellement soit à notre propre corps, soit aux objets qui nous entourent. La cause de ces mouvements (remarquez que je ne dis pas la cause première); la cause immédiate de ces mouvements est ce que nous appelons notre force musculaire, dont le déploiement est la condition indispensable de la manifestation des phénomènes qui nous occupent.

La force de l'homme, telle est la première cause de mouvement qui ait été connue, la première qu'on ait utilisée pour les travaux les plus essentiels à la vie.

Mais on n'a pas dû tarder beaucoup à connaître et à employer d'autres agents naturels, capables de suppléer à l'insuffisance de notre force musculaire. C'est ainsi qu'on a eu recours d'abord à la *force* des animaux, convenablement dirigée, puis à la *force* de l'eau, du vent; à celle de la vapeur, qui vient d'opérer pour ainsi dire sous nos yeux toute une révolution dans les conditions de la vie sociale; à celle de l'électricité, qui réserve à ceux qui viendront après nous des transformations peut-être encore plus inattendues.

En général, et nous conformant en cela au langage vulgaire, nous donnerons le nom de *force* à toute cause produisant ou pouvant produire le mouvement. Par exemple, un corps que nous cessons de soutenir se met en mouvement, il tombe. La cause de ce mouvement, d'après notre définition, est une force : c'est celle qui a reçu le nom de *pesanteur*.

Maintenant, quelle est la cause de la pesanteur? Si nous répondons que c'est l'attraction de la terre, on nous demandera quelle est la cause de l'attraction, et ainsi de suite. Aussi nous abstiendrons-nous, avec le plus grand soin, de toute discussion relative à des questions de ce genre, ainsi que de toute hypothèse sur l'essence intime de la matière; ces problèmes ne paraissant pas, en ce moment du moins, susceptibles d'une solution basée sur l'expérience et le raisonnement.

Nous avons dit que l'objet de la Mécanique est l'étude du *mouvement* et des *forces*. La division de notre cours ressort tout naturellement de cette définition, suffisamment éclaircie par les explications que je viens de donner.

I. *L'étude des mouvements considérés en eux-mêmes, tels que nous les observons dans les corps qui nous environnent, et spécialement dans les appareils appelés machines*, constitue une première partie à laquelle nous donnerons le nom de *Cinématique*, d'après une dénomination introduite par Ampère, et aujourd'hui généralement adoptée (*).

J'ai déjà indiqué, d'après d'Alembert, le caractère essentiel de cette partie en quelque sorte préliminaire, qui n'exige aucun nouveau principe, qui n'invoque aucun fait d'expérience, et qui doit plutôt être rapportée à la Géométrie qu'à la Mécanique.

Non-seulement la Cinématique étudie le mouvement comme effet, sans chercher à remonter aux causes; mais encore elle considère uniquement les éléments géométriques des corps, en faisant abstraction de la matière dont ils sont composés. Aussi les théorèmes de la Cinématique sont-ils indépendants de la connaissance plus ou moins complète que nous pouvons avoir de la constitution des corps, et ont-ils toute la valeur des vérités géométriques.

On n'entre réellement dans le domaine de la Mécanique, continue d'Alembert, que quand on se demande comment il arrive que le mouvement d'un corps, placé dans des conditions déterminées, suive telle ou telle loi plutôt que telle autre.

Or nous verrons que, pour résoudre ce problème, nous aurons besoin de poser des principes, des axiomes spéciaux, et de doter la matière, plus ou moins arbitrairement, de certaines propriétés, telles que celle de l'inertie dont nous avons déjà parlé; et l'on comprend qu'avant d'avoir recours à de nouveaux axiomes, toujours, dans une certaine mesure, hypothétiques, on tienne à s'être bien rendu compte de tout ce qui ne dépend pas de la vérité ou de la fausseté de ces axiomes.

(*) *Essai sur la Philosophie des Sciences*, p. 50; 1834.

Carnot signale à plusieurs reprises la haute importance, à la fois pour la Géométrie et pour la Mécanique, de l'étude des *mouvements géométriques;* notamment dans sa *Géométrie de position*, p. 336 :

« Il me semble même que la Géométrie ne devrait point se borner là, et qu'elle pourrait embrasser les mouvements qui ne résultent pas de l'action et de la réaction des corps les uns sur les autres; car la Mécanique n'est pas, à proprement parler, la science du mouvement, mais la science de la communication du mouvement.

» L'idée de mouvement est aussi simple que celle de dimension, et peut-être en est-elle inséparable. Les premières notions de la Géométrie enseignent à regarder la ligne comme la trace d'un point qui se meut, et cette notion s'accorde avec l'opération matérielle par laquelle on trace effectivement une ligne sur le papier, avec une plume ou un crayon; elles enseignent de même à regarder une surface comme produite par le mouvement d'une ligne, et le solide comme produit par le mouvement d'une surface. Pourquoi n'irait-on pas plus loin, en considérant ce que produit à son tour le mouvement du solide dans l'espace? Ce n'est pas ce mouvement en lui-même qui fait l'objet de la Mécanique, mais l'effet des modifications qu'il éprouve.... »

Et plus loin (p. 338) : « Si la théorie des mouvements géométriques était approfondie, la Mécanique et l'Hydraulique seraient infiniment simplifiées; elles se réduiraient au développement du principe général de la communication du mouvement, qui n'est autre chose que celui de la réaction toujours égale et contraire à l'action. Les grandes difficultés analytiques qu'on rencontre dans la science de l'équilibre et du mouvement viennent principalement de ce que la théorie des mouvements géométriques n'est point faite : elle mérite donc toute l'attention des savants. »

C'est Ampère qui a définitivement constitué la science des mouvements géométriques, en la définissant d'une manière précise, traçant les limites de son domaine, enfin en lui donnant un nom que chacun s'est empressé d'adopter.

Il est juste de dire que, bien antérieurement, le général Poncelet avait professé à l'École d'application et à l'hôtel de

ville de Metz ce que nous appelons aujourd'hui la *Cinématique*. Depuis, M. Chasles, à qui la Géométrie du mouvement doit une partie de ses récents progrès, lui donna une place dans son cours de Machines (cours autrefois séparé du cours de Mécanique) à l'École Polytechnique. Enfin, aujourd'hui, le vœu de Carnot se trouve entièrement réalisé : la théorie des mouvements géométriques est faite. Sous le nom de *Cinématique*, elle constitue une science de deuxième ordre, laquelle a sa place marquée entre la Géométrie pure et la Mécanique proprement dite.

Elle emprunte à la Géométrie ses méthodes, et par une juste réciprocité elle lui fournit de puissants secours pour la résolution de ses problèmes les plus transcendants.

D'un autre côté elle se rattache à la Mécanique, pour le compte de laquelle elle se charge d'élucider toutes les propriétés *nécessaires* du mouvement, celles qui sont du même ordre que le théorème du carré de l'hypoténuse, et qui ne sauraient dépendre en aucune façon, ni de la nature des causes motrices, ni des conditions physiques de la réalisation du mouvement.

Le mot de *Cinématique* ayant été pris, par les divers auteurs qui se sont occupés de cette science, dans des acceptions qui diffèrent légèrement l'une de l'autre, il convient de rappeler ici la définition donnée par Ampère.

« La Cinématique, dit-il, doit renfermer tout ce qu'il y a à dire des différentes sortes de mouvement, indépendamment des forces qui peuvent les produire.

» Elle doit d'abord s'occuper de toutes les considérations relatives aux espaces parcourus dans les divers mouvements, aux temps employés à les parcourir, à la détermination des vitesses d'après les diverses relations qui peuvent exister entre ces espaces et ces temps.

» Elle doit ensuite étudier les différents instruments à l'aide desquels on peut changer un mouvement en un autre (*). »

C'est donc à la Cinématique qu'appartient la connaissance des organes ou instruments servant à changer la direction ou

(*) AMPÈRE, ouvrage cité, p. 50.

la vitesse d'un mouvement donné, connaissance qui, plus ou moins instinctive chez tous les hommes voués à la pratique des machines, leur inspire tant d'ingénieuses inventions. Il suffit à cet égard de nommer le métier à la Jacquart, les filatures mécaniques, les machines à coudre, etc.

De là une sous-division de la Cinématique, à laquelle on peut donner avec Robert Willis le nom de *Théorie des mécanismes*, division qui a une très-grande importance au point de vue pratique, et qui a fait depuis quelque temps de bien notables progrès. La théorie géométrique des mécanismes nous apprend à produire, au moyen d'un moteur donné, les mouvements les plus divers; son application comporte une assez grande précision. Il existe même un grand nombre de machines, notamment dans l'horlogerie, pour lesquelles l'étude géométrique des mécanismes employés est pour ainsi dire rigoureusement suffisante, tant est secondaire la considération des forces qui doivent leur donner le mouvement.

Hâtons-nous pourtant d'ajouter que l'emploi exclusif de la Cinématique expose à de graves mécomptes ceux qui se livrent à la recherche de nouvelles combinaisons mécaniques, sans essayer de se rendre compte des forces qu'il faudra développer pour donner naissance aux mouvements qu'ils ont en vue. On citerait une foule de mouvements géométriques qui ne sont pas réalisables utilement, soit à cause des frottements, soit à cause des efforts considérables qui s'exercent entre les diverses pièces, soit enfin pour un grand nombre de raisons que nous étudierons à propos de chaque mécanisme.

Par exemple : tout le monde sait ce que c'est qu'une vis et qu'un écrou ; tout le monde sait aussi qu'en tournant la vis on l'enfonce dans son écrou supposé fixe. Géométriquement, on devrait donc, en poussant la vis dans l'autre sens, l'obliger à se dévisser. Or ceci n'est généralement pas possible : c'est même sur cette propriété qu'est fondée la presse à vis, dans laquelle en tournant une vis on exerce sur un corps un effort considérable, sans que la réaction de celui-ci, quelque grande qu'elle soit, puisse avoir pour effet de desserrer la vis abandonnée à elle-même.

Autre exemple. Considérons la combinaison très-simple et bien connue qui constitue le rouet de la fileuse. Il est évident

qu'en tournant la roue à la main on fera prendre à la pédale un mouvement d'oscillation autour de son point d'attache. Résulte-t-il de là qu'en imprimant directement ce mouvement à la pédale, on soit assuré de produire la rotation continue du rouet? C'est là une chose qui n'est rien moins qu'évidente : elle n'aura lieu en effet que sous certaines conditions, que l'habitude enseigne promptement aux fileuses, mais dont nous aurons à faire une étude approfondie quand nous voudrons appliquer le même principe géométrique à des machines puissantes.

De là la nécessité de se rendre un compte exact des efforts qui s'exercent entre toutes les pièces des mécanismes étudiés en Cinématique, et en général d'apprendre à calculer les forces qu'il faut appliquer à un corps donné pour lui faire prendre un mouvement déterminé : tel est l'objet de la deuxième partie du cours, de la *Dynamique*.

II. La *Dynamique* est relative aux forces, à leur mesure, et à la manière dont elles produisent ou modifient le mouvement. Cette science comprend l'ensemble des principes et des théorèmes qui nous mettront à même de résoudre le double problème suivant :

1° *Étant données les forces qui agissent sur un corps quelconque, déterminer le mouvement qui prendra naissance, si le corps est au repos; ou, dans le cas contraire, chercher comment se modifiera le mouvement acquis en vertu de causes antérieures.*

2° Réciproquement : *Connaissant le mouvement d'un mobile, trouver les forces qui agissent actuellement* (*) *sur ce mobile.*

Lorsqu'un corps, primitivement en repos, vient à se trouver soumis à l'action de plusieurs forces, il ne se met pas nécessairement en mouvement : c'est là un fait d'expérience journalière. On voit souvent l'état de repos persister malgré la

(*) Il faut bien remarquer le mot *actuellement*; car, philosophiquement, il est impossible de conclure des phénomènes actuels aux causes antérieures; et toute induction de ce genre doit être reléguée dans le domaine fantaisiste de l'hypothèse.

présence des forces; on dit alors que les forces se font *équilibre*, ou que le corps est en *équilibre* sous l'action des forces.

Des forces appliquées à un corps en mouvement peuvent aussi se faire équilibre. On le reconnaît en ce que le mouvement du corps n'est pas changé, selon qu'on introduit ou qu'on supprime ces forces.

Les questions relatives à l'équilibre sont évidemment comprises parmi celles qui font l'objet de la Dynamique; elles embrassent tous les cas où le mouvement cesse d'être. Ces questions sont cependant beaucoup trop importantes pour qu'on puisse se borner à les traiter plus ou moins légèrement dans un chapitre de la Dynamique.

En effet, l'art de la construction n'est autre chose que la recherche des moyens économiques de disposer des matériaux en équilibre, sous l'action des forces auxquelles l'édifice projeté doit se trouver soumis; et d'autre part, bien que les machines soient faites pour être en mouvement, pour marcher, nous verrons que les cas où elles sont en équilibre donnent en réalité la clef de tous les phénomènes du fonctionnement normal.

La science de l'équilibre constitue une division spéciale de la Mécanique, division qui a reçu le nom de *Statique*.

Nous avons dit, et l'esprit conçoit aisément, qu'on peut déduire la Statique de la Dynamique. Inversement, d'Alembert a su réduire à une simple question de Statique le problème général de la Dynamique que nous venons d'énoncer, et qui paraît au premier abord d'un ordre de complication infiniment supérieur.

Mais il faut bien se garder d'escamoter ainsi l'une des deux sciences au profit de l'autre. Chacune d'elles a ses principes distincts, son enchaînement de théorèmes, ses applications spéciales : chacune a donc le même droit que l'autre à l'indépendance.

Historiquement, la naissance de la Statique a précédé de beaucoup celle de la Dynamique. Archimède nous a laissé deux traités relatifs à la théorie de l'équilibre. Il s'appuie sur le *principe du levier*, lequel consiste, comme on sait, en ce que, si un levier droit est chargé de deux poids quelconques placés de part et d'autre du point d'appui, à des distances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes

poids, ce levier sera en équilibre, et son appui sera chargé de la somme des deux poids.

Pour trouver le premier exemple de la résolution d'un problème de Dynamique, il faut franchir d'un bond dix-huit siècles, et passer d'Archimède à Galilée; car, suivant la belle expression de Lagrange, l'intervalle qui sépare ces deux grands génies disparaît dans l'histoire de la Mécanique. Galilée a trouvé les lois de la chute des graves, et celles du mouvement parabolique des projectiles. Huygens, Newton, et leurs successeurs, développant les idées de Galilée, ont résolu la plupart des problèmes qui se rapportent au mouvement des corps sous l'influence de forces données.

C'est ainsi qu'a été fondée la Mécanique céleste, science véritablement prodigieuse, si l'on considère à la fois la grandeur de son objet, la simplicité de ses méthodes, et la rigoureuse précision de ses résultats; science prodigieuse, ai-je dit, et qui pourtant doit en définitive être regardée comme la plus facile entre toutes les branches de la Mécanique appliquée, grâce à la netteté des conditions des problèmes, à l'ancienneté des observations dont on dispose, et surtout à ces instruments puissants qui nous font connaître les astres les plus éloignés aussi bien que les objets tombant immédiatement sous nos sens.

Mais quittons le ciel de Newton et de Laplace pour revenir à ce qui nous intéresse plus particulièrement aujourd'hui, à l'objet et au plan de notre *Cours élémentaire*. Nous avons distingué dans la science du *mouvement* et des *forces* trois grandes divisions traitant respectivement :

1° Du *mouvement*, abstraction faite des forces qui l'ont fait naître;

2° Des *forces*, indépendamment du mouvement qu'elles peuvent produire;

3° Enfin, du mode d'action des forces relativement au mouvement, c'est-à-dire de la manière dont les forces font naître le mouvement, ou modifient celui qui est acquis.

Ces trois parties :

CINÉMATIQUE,
STATIQUE,
DYNAMIQUE,

constituent ce qu'on appelle communément la *Mécanique rationnelle*. L'épithète de *rationnelle* indique que les spéculations de la Mécanique ne s'appliquent, *immédiatement*, qu'à des *êtres de raison*, c'est-à-dire à des êtres purement fictifs, que la raison conçoit, mais qui n'existent pas dans la nature.

Ainsi nous considérerons les corps solides, tels que les métaux, les pierres, comme indéfiniment durs et rigides, quels que soient les efforts auxquels on les soumette; les liquides, au contraire, seront dotés d'une absence complète de cohésion et d'une incompressibilité absolue; les cordes seront parfaitement flexibles et inextensibles; et ainsi du reste.

Mais, dira-t-on, à quoi bon cette savante étude de corps purement imaginaires, pourquoi tout ce laborieux échafaudage de notions *théoriques* uniquement propres à fausser les idées, de calculs qui ne trouvent leur application que dans le ciel? Cette objection est spécieuse: elle mérite que nous nous arrêtions un instant à la discuter, car elle touche à l'une des choses qui ont été et qui seront longtemps encore également fatales aux progrès des sciences et de l'industrie; je veux parler de l'antagonisme radical qu'on cherche trop souvent à établir entre ce qu'on nomme la *théorie* et la *pratique*.

Quand la science d'Archimède et de Galilée, fière d'avoir soumis les espaces célestes et trouvé le secret des mouvements des astres capricieux de notre système solaire; quand la Mécanique, dis-je, descendant du ciel sur la terre, voulut appliquer ses puissants moyens d'investigation aux questions de la pratique technique et industrielle, elle trouva, dans la constitution moléculaire des corps matériels, comme autant d'univers nouveaux attendant à leur tour un législateur.

« Sortes de systèmes, dit M. Biot (*), non moins merveilleux que le monde planétaire, mais d'une complication infiniment supérieure; où des myriades de particules indiscernables, agissant et réagissant les unes sur les autres à des distances qui défient les moyens d'observation les plus perfectionnés, offrent au calculateur des difficultés incomparablement plus grandes que les mouvements réguliers qui s'opèrent dans la solitude des cieux. »

(*) Biot, *Mélanges*, t. I, p. 12.

Il faut le dire : on n'est pas encore parvenu à introduire en toute rigueur les considérations mathématiques dans l'étude de ce nouvel ordre de phénomènes. En attendant, le progrès suit son cours : l'industrie fait tous les jours de nouvelles découvertes, partout de puissantes machines sont créées, de gigantesques manufactures s'élèvent; et la science, impuissante à régulariser l'essor de la pratique, doit faire au moins tous ses efforts pour contenir les écarts inévitables dans des limites non dangereuses pour le développement de la civilisation. C'est ainsi que les Navier, les Coriolis, les Poncelet, ont créé une science de transition, si l'on peut s'exprimer ainsi, science que nous appellerons la *Mécanique appliquée*, par opposition à la *Mécanique rationnelle*.

Le cours de l'École Polytechnique ne peut en aucune façon passer pour un cours pratique. Mais quand on a fixé les bases des programmes actuels, on a voulu que, préparant aux travaux variés des diverses carrières militaires ou civiles, notre enseignement renfermât à côté des principes de la Mécanique rationnelle, lesquels dérivent de la raison, des principes d'un tout autre ordre, qui nous sont révélés par une observation attentive des phénomènes que présentent les corps considérés par rapport au mouvement.

Il importe, dès à présent, de nous bien pénétrer de l'esprit qui nous dirigera dans la partie du cours consacrée aux applications de la Mécanique.

Après avoir reconnu tout de suite l'impossibilité, pour ainsi dire absolue, de résoudre rigoureusement la plus simple des questions de ce genre, empressons-nous d'ajouter qu'une pareille solution serait tout aussi inutile au point de vue des applications (lequel nous préoccupe actuellement) que pourrait l'être en Géométrie une solution exacte du fameux problème de la quadrature du cercle, par exemple. Tout ce qu'il faut, c'est que l'exactitude des résultats soit suffisante pour les besoins de l'industrie. Or, ceci nous conduit tout naturellement à comprendre l'utilité pratique des spéculations relatives aux êtres de raison.

En effet, après avoir étudié physiquement les corps soumis à l'expérience, et les conditions où ces corps se trouvent placés,

nous imaginerons des corps fictifs, doués de propriétés qu'on leur attribuera de manière à simplifier la question, tout en s'écartant le moins possible des propriétés que l'observation aura révélées dans les corps naturels. Ce dernier point est essentiel.

C'est à ces corps hypothétiques, à ces êtres de raison bien définis qu'on appliquera le calcul. La solution obtenue ne s'appliquera évidemment pas au problème qu'on avait à résoudre, puisqu'on a supposé les corps différents de ce qu'ils sont dans la nature; mais du moins elle ne différera pas beaucoup de la solution cherchée, dont elle fournira *une première approximation.*

Il faudra ensuite corriger cette solution, en évaluant numériquement les petites erreurs qui proviennent de l'inexactitude des hypothèses fondamentales. Enfin, on passera à la vérification des résultats théoriques définitifs; car il ne faut jamais oublier qu'une solution fournie par la méthode que je viens de décrire ne saurait être valable pratiquement qu'après avoir été soumise à la sanction de l'expérience, et *dans les limites* où la vérification expérimentale a eu lieu.

Nous verrons, dans la suite de ce cours, un certain nombre de théories où l'accord intelligent du calcul et de l'expérience conduit à des résultats qui, sans avoir la prétention de suppléer d'une manière absolue à la pratique proprement dite, fournissent cependant des indications précieuses à l'architecte, au mécanicien, à l'ingénieur. Et si dans d'autres cas nos efforts moins heureux ne parviennent pas à triompher des difficultés d'un problème plus rebelle, il faudra bien nous résigner à avouer franchement notre impuissance, et nous borner à reconnaître et à signaler les écueils, fameux souvent par quelque illustre naufrage.

C'est d'ailleurs toujours une chose assez fâcheuse, que de voir la science pure forcée d'abdiquer la direction de l'activité industrielle d'une époque; car c'est l'ère des tâtonnements, des erreurs et des mécomptes; c'est l'ère des efforts sublimes et des chutes douloureuses, de Dédale et d'Icare, audacieux et infortunés précurseurs de Montgolfier; c'est l'ère de la machine à vapeur avant Watt, des machines caloriques ou électro-magnétiques encore aujourd'hui.

J'espère que ces quelques considérations préliminaires n vous auront pas paru trop inutiles : il importe, avant de se lancer dans une carrière aussi vaste que celle de la Mécanique, de savoir clairement d'où l'on part, et où l'on va.

Cela fait, on peut se mettre en route. Mais il faut avoir le plus grand soin d'observer attentivement le pays qu'on traverse, afin de retrouver plus tard son chemin sans hésitation, quel que soit le point où l'on se voie accidentellement transporté, et de recommencer au besoin sans guide la route que nous allons aujourd'hui parcourir ensemble.

Nous reviendrons d'ailleurs très-fréquemment et pour ainsi dire à satiété, dans toute la suite de ce cours, sur les principes généraux dont je viens de vous exposer l'enchaînement, principes qui s'éclairciront peu à peu par la vertu de la plus puissante des figures de rhétorique, la répétition. Enfin, quand nous reprendrons une dernière fois ces notions, dans les leçons consacrées à la révision, nous serons, je l'espère, tout à fait en mesure d'embrasser d'un coup d'œil l'harmonieuse unité de la Mécanique théorique et expérimentale, en comprenant comment tout se réduit en définitive à un petit nombre de principes, et à un très-petit nombre de conséquences fondamentales, qui sont ce qu'on doit surtout s'attacher à retenir.

PREMIÈRE SECTION.

CINÉMATIQUE PURE.

Nous distinguons deux sections dans la science des mouvements géométriques, telle que nous l'avons définie dans nos préliminaires :

La *Cinématique pure* (*), sorte de Géométrie transcendante dans laquelle on étudie, comme le demandait Carnot, *ce que produit le mouvement d'un solide dans l'espace*, le temps se comportant *ici, pour ainsi dire, comme une quatrième dimension ultra-géométrique* ;

La *Théorie des mécanismes*, comprenant l'application des théorèmes de la Cinématique pure au tracé géométrique des organes de machines.

Nous nous occuperons d'abord, pour suivre l'ordre logique, de la première des deux divisions que nous venons d'indiquer; et comme il est évident qu'on connaît le mouvement d'un corps quand on connaît le mouvement des divers points de ce corps, nous commencerons la Cinématique pure par l'étude du mouvement d'un point géométrique.

(*) J'emprunte la dénomination de *Cinématique pure* à M. Resal, qui a publié sous ce titre un Traité complet des mouvements, considérés au point de vue géométrique (1 vol. Mallet-Bachelier, 1862).

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT SIMPLE D'UN POINT.

On détermine la position d'un point dans l'espace en rapportant ce point à un système de comparaison fixe et invariable, généralement à trois axes rectangulaires. Pour savoir si un point est en repos ou en mouvement, il faut mesurer à des intervalles de temps déterminés les coordonnées de ce point par rapport à trois axes rectangulaires fixes, ou à tout autre système de coordonnées bien défini. Si ces coordonnées varient, c'est que le point est en mouvement.

On voit que, dans ce cas, nos observations nous font connaître une série de positions successives du point mobile, c'est-à-dire la trajectoire de ce point, si ces positions sont suffisamment rapprochées. Elles donnent aussi, si l'on a eu soin de noter les temps des observations, les instants (*) du passage de ce mobile à certains points bien déterminés de sa trajectoire; et l'on a ainsi les deux éléments de ce que nous avons appelé la *loi du mouvement étudié*.

C'est par l'application de cette méthode qu'on voit la liste des planètes télescopiques s'enrichir chaque année de plusieurs noms nouveaux. Les astronomes voués à ce genre de recherches explorent avec soin les régions du zodiaque dont ils possèdent des cartes exactes. Aperçoivent-ils un astéroïde non marqué sur ces cartes, ils en mesurent chaque jour les coordonnées célestes, et, s'ils trouvent constamment les mêmes valeurs, le nouveau corps doit être rapporté aux étoiles fixes;

(*) Il ne faut pas attribuer au mot *instant* le sens d'intervalle de temps très-court, *dt* : l'instant est à la durée ce que le point est à l'étendue.

Quant au mot de *moment*, synonyme d'*instant* dans le langage vulgaire, nous le rencontrerons plus tard fréquemment en Mécanique, pris dans l'acception du latin *momentum*.

dans le cas contraire, ce corps est une planète ou une comète. De plus, quand les observations sont en nombre suffisant, on en conclut les éléments de l'orbite de la planète ou de la comète, et son moyen mouvement : on est alors à même de décider d'une manière définitive à quelle catégorie appartient l'astre qu'on vient de découvrir.

Nous avons dit que la connaissance complète de la loi du mouvement d'un point comprend deux parties parfaitement distinctes (*), qui sont :

1° La recherche de la trajectoire ;

2° L'étude de la loi qui lie, sur cette trajectoire supposée connue, les espaces parcourus aux temps employés à les parcourir.

Nous traiterons séparément ces deux éléments ; en commençant par le deuxième, c'est-à-dire par la relation des espaces parcourus sur une trajectoire donnée, aux temps employés à parcourir ces espaces.

§ I. — Étude de la loi du mouvement d'un point, indépendamment de la nature de la trajectoire.

Supposons la trajectoire connue : une position M du point mobile sur cette trajectoire (*fig.* 1) sera déterminée par la distance s du point M à un certain point fixe O. Ce point O est l'origine des coordonnées s, mesurées suivant la courbe OM.

Les longueurs OM seront naturellement affectées du signe + ou du signe —, selon qu'elles devront être portées à droite ou à gauche de l'origine O.

Pour que la loi du mouvement soit définie, il faut que l'on donne à chaque instant t la valeur de cette coordonnée s. A ce point de vue, la quantité s est une fonction de la variable in-

(*) Il est évident que ces deux choses sont absolument indépendantes l'une de l'autre, des trajectoires identiques pouvant être parcourues suivant des lois bien différentes les unes des autres, et réciproquement.

Il est à peine utile de faire observer que cette indépendance subsiste seulement lorsqu'on considère le mouvement en lui-même sans se préoccuper de ses causes; autrement il est évident que les causes qui produisent un certain mouvement influent à la fois sur la nature de la trajectoire, et sur les espaces parcourus dans des temps donnés.

dépendante t, ce qui s'exprime généralement par une équation de la forme

$$s = f(t).$$

Lorsque la relation de s à t est donnée analytiquement, on sait résoudre par les procédés ordinaires du calcul le double problème qui fait l'objet de la Cinématique :

1° *Quelle est, à un instant donné, la position du point mobile dans l'espace ?*

2° Réciproquement, *le lieu du mobile étant donné, quelle heure est-il ?*

Quelquefois on connaît s en fonction de t par une table dont les éléments ont été déterminés par l'observation: Souvent alors, comme dans le problème de la chute des graves ou dans celui du mouvement elliptique des planètes, on peut substituer à la table une formule qui en est la traduction fidèle ; on rentre ainsi dans le cas précédent. Au contraire, il sera généralement commode, pour l'usage des praticiens, de transformer une formule en une table. Alors le problème de la détermination du lieu du corps, ainsi que le problème inverse, se résout par les méthodes ordinaires d'interpolation, ou par des méthodes graphiques qui sont extrêmement utiles et auxquelles nous arrivons dans un instant.

Mouvement uniforme. — La loi de mouvement la plus simple qu'on puisse imaginer est celle du *mouvement uniforme*, dans lequel les espaces parcourus dans des temps égaux sont égaux, quelque petits que soient ces temps. Ceci revient à dire que, dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps.

Soient (*fig.* 2) M_0 la position du mobile à l'instant pris pour l'origine des temps, M sa position à l'époque t, O l'origine des coordonnées s.

L'espace parcouru pendant le temps t est

$$M_0M = OM - OM_0 = s - s_0;$$

cette quantité devant être proportionnelle au temps t, on a

$$\frac{s - s_0}{t} = a,$$

a étant une constante positive ou négative, suivant que s est plus grand ou plus petit que s_0, t étant positif; c'est-à-dire suivant que le mouvement s'effectue dans le sens que nous avons choisi comme positif, ou dans le sens opposé.

On déduit de là

$$s = s_0 + at, \tag{1}$$

équation du mouvement uniforme. On voit que, dans ce mouvement, l'espace s est une fonction linéaire du temps t.

Vitesse dans le mouvement uniforme. — La constante a est l'espace parcouru dans l'unité de temps. Elle varie d'un mouvement uniforme à un autre, selon que le mouvement est plus ou moins *rapide;* c'est même cette quantité qu'on prend habituellement pour mesure du degré plus ou moins grand de rapidité ou de lenteur, quand on dit, par exemple, qu'un train parcourt tant de lieues à l'heure, ou un projectile tant de mètres par seconde : nous la nommerons la *vitesse* du mobile. Ainsi,

On appelle vitesse, dans le mouvement uniforme, l'espace parcouru par le mobile dans l'unité de temps.

La vitesse est, si l'on veut, le rapport constant de l'espace parcouru pendant un certain temps t, et d'un mouvement uniforme, au temps t employé à parcourir cet espace.

Inutile de dire qu'on ne peut pas ainsi comparer un espace à un temps, mais bien les rapports de ces deux quantités à leurs unités respectives. Il résulte de là qu'il n'y a pas d'unité de vitesse : la vitesse, définie comme nous venons de le faire, est un nombre abstrait, dont la grandeur varie à la fois avec l'unité de longueur et l'unité de temps, le rapport de deux vitesses étant toutefois indépendant de ces deux unités.

Habituellement le temps est considéré comme un nombre abstrait, c'est-à-dire que l'homogénéité des formules par rapport au temps ne se trouve pas immédiatement en évidence. Dans ce système la vitesse est une longueur, un nombre de mètres; et il faut sous-entendre : *parcourus dans une seconde.*

Mesure de la vitesse des navires. — Dans la navigation maritime, les vitesses sont exprimées en *nœuds.*

Un nœud répond à un mille marin, soit à un tiers de lieue marine, ou à 1852 mètres par heure, c'est-à-dire à $0^m,514$ par

seconde. On aura donc la vitesse d'un navire en multipliant $0^m,514$ par le nombre de nœuds.

Pour mesurer la vitesse d'un navire, il faut avoir un repère fixe, ou sensiblement fixe. On obtient ce repère en lançant à la mer un petit corps flottant nommé *bateau de loch*, retenu par un cordage nommé *ligne de loch*. L'observation prouve que les ébranlements qui se propagent à la surface d'un liquide n'impriment aux corps flottants qu'un mouvement d'oscillation à peu près vertical; et l'on peut admettre que le loch reste immuable dans le sens horizontal, dès qu'il se trouve à une distance du navire égale à la longueur du bâtiment.

Cet instant est indiqué sur la ligne de loch par un morceau d'étamine appelé *bouache*. On retourne alors un sablier, et on laisse filer de la ligne pendant toute la durée de l'écoulement du sable dans le sablier, durée qui est ordinairement d'une demi-minute.

Le chemin parcouru pendant cette demi-minute est donné par des nœuds qui se trouvent sur la ligne de loch, à des distances réglées de manière qu'un nœud dans une demi-minute réponde à un mille par heure. Telle est l'origine de l'habitude d'estimer les vitesses en nœuds.

Si l'on calcule la distance de deux nœuds par la proportion que nous avons indiquée, on trouve $15^m,4$, ou environ 47 pieds. Mais il faut remarquer que le flotteur n'est pas entièrement libre, et que la ligne de loch, toujours légèrement tendue, lui communique nécessairement un petit mouvement dans le sens du navire. Pour corriger cette cause d'erreur, l'expérience a prouvé qu'il fallait prendre la distance de deux nœuds égale à 45 pieds, ou 9 brasses.

J'ai insisté un peu sur cette opération bien simple, qui nous a fourni un premier exemple de la résolution d'une question pratique. J'ajouterai encore que le bateau de loch a une forme triangulaire; qu'il est lesté de manière à se tenir verticalement, position qui diminue les mouvements latéraux; et qu'enfin, pour l'empêcher de s'incliner par l'action de la ligne de loch, on emploie une cheville qui est rattachée à un point convenablement choisi sur cette ligne, et qui pénètre dans un trou A (*fig.* 3).

Pour retirer le loch, on commence par lui imprimer une

secousse; par l'effet de cette secousse, la cheville se dépasse, le triangle flotte à plat, et on le ramène facilement à bord.

Équations du mouvement uniforme. — Nous aurons défini la vitesse d'une manière complète si nous lui attribuons le sens dans lequel s'effectue le mouvement. Alors elle est dirigée vers les s positifs, ou en sens contraire, suivant que a est positif ou négatif.

Convenons de regarder la vitesse comme positive lorsqu'elle est dirigée dans le premier sens, et comme négative lorsqu'elle est dirigée dans le sens opposé; le coefficient a représentera maintenant la vitesse du mobile en grandeur et en signe; et si nous la désignons d'une manière générale par v, nous aurons pour exprimer les lois du mouvement uniforme les deux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} s = s_0 + at, \\ v = a. \end{cases}$$

Nous aurons achevé la discussion des diverses quantités qui figurent dans ces équations, si nous remarquons que le temps doit aussi être considéré comme pouvant être pris positivement ou négativement.

En effet, nous avons choisi arbitrairement un certain instant que nous avons appelé *initial*, à partir duquel nous avons commencé à compter les temps, comme on compte les dates historiques à partir de la naissance de Jésus-Christ. Or, il n'y a aucune impossibilité à ce que le mobile ait été en mouvement avant cet instant initial; et les équations (2) pourront représenter ces positions antérieures, à la condition d'admettre pour t des valeurs négatives.

Mouvement varié. — Quand le mouvement n'est pas uniforme, on dit qu'il est *varié*. La distance s du mobile à l'origine des espaces n'est plus une fonction linéaire du temps t; ces deux variables sont liées l'une à l'autre par une équation quelconque, que nous représentons par

$$s = f(t).$$

Mouvements périodiques. — Il faut distinguer parmi les mouvements variés ceux qui sont *périodiques*, ou périodiquement uniformes; c'est-à-dire dans lesquels les espaces parcourus dans des temps égaux convenablement choisis sont égaux,

comme dans le mouvement uniforme. Mais cette égalité, dans les mouvements périodiques, ne subsiste pas quelque petits que soient les temps égaux considérés, mais seulement quand ces temps sont des multiples d'un certain intervalle constant appelé *période*.

La plupart des mouvements qui nous apparaissent comme uniformes dans la nature ne sont que périodiquement uniformes ; tels sont la marche des animaux, le mouvement apparent du soleil autour de la terre, celui des aiguilles d'une horloge, d'une roue hydraulique, du volant d'une machine à vapeur, etc.

Mouvements variés quelconques. Courbe des espaces. — Quelle que soit la fonction $f(t)$, algébrique, transcendante, ou même non susceptible d'une expression analytique, on conçoit qu'on construise graphiquement l'équation $s = f(t)$, en coordonnées rectangulaires ou obliques.

Prenons (*fig.* 4) deux droites rectangulaires KS, KT, pour axes des espaces et des temps. Puis, ayant choisi arbitrairement une longueur convenable pour représenter une seconde de temps, portons sur l'axe KT des abscisses Kp_1, Kp_2, ..., proportionnelles aux temps t_1, t_2, ..., comptés à partir d'un certain instant initial. Enfin, par les points ainsi déterminés, élevons des ordonnées proportionnelles aux valeurs de s correspondantes. Nous aurons ainsi construit une courbe, dite *courbe des espaces*, dont l'équation sera $s = f(t)$, et qui nous servira à résoudre graphiquement le double problème de la détermination de s au moyen de t, ou de t au moyen de s. Cette méthode d'interpolation graphique offrira une exactitude suffisante dans un grand nombre de cas.

Les applications des courbes à la représentation des fonctions d'une variable, et celles des surfaces à la représentation d'une fonction de deux variables indépendantes, ont été exposées dans le cours de Géométrie. Même quand on a l'expression analytique d'une loi, les courbes ont l'avantage de peindre cette loi aux yeux de la manière la plus nette; leur usage commence à se répandre dans la pratique.

Mais c'est principalement quand on se propose de déterminer la loi d'un mouvement par l'observation qu'il est pour ainsi dire indispensable de consigner dans un tableau gra-

phique les résultats bruts de l'expérience. Les notions les plus élémentaires de la continuité des lignes courbes ne permettent pas à une erreur un peu grave de passer inaperçue; les particularités remarquables de la loi qu'on étudie se trouvent mises bien nettement en évidence par les diverses affections géométriques de la courbe; les erreurs qui proviennent du défaut de précision de la méthode d'observation, du moins les erreurs non systématiques, se corrigent tout naturellement par le tracé même de la figure.

Enfin, la comparaison de cette figure avec les principales courbes connues, paraboliques, hyperboliques, logarithmiques, trigonométriques, etc., facilitera, s'il y a lieu, la recherche de l'expression analytique de la loi.

Application au mouvement uniforme. — La courbe des espaces est une ligne droite (*fig.* 5). L'ordonnée à l'origine de cette droite est la distance s_0, positive ou négative, qui sépare le mobile, à l'instant initial, de l'origine des espaces sur la trajectoire.

Le coefficient angulaire de la droite des espaces fait connaître la vitesse en grandeur et en signe. Pour avoir la vitesse en mètres par seconde, il faut porter, à partir d'un point quelconque m et parallèlement à l'axe des temps, la longueur $m\mu$ qui représente une seconde à l'échelle adoptée. La perpendiculaire $\mu m'$ donne la vitesse, à l'échelle des espaces.

Tous les problèmes auxquels donne lieu le mouvement uniforme se trouvent résolus par la théorie de la ligne droite, à laquelle on peut se contenter de renvoyer pour tous les détails. Exemple :

PROBLÈME. — *Connaissant les positions d'un mobile à deux époques données, et sachant d'ailleurs que son mouvement sur une ligne connue est uniforme, trouver l'équation de ce mouvement.*

Prenons à volonté l'origine des distances et celle des temps, et soient :

s_1 et s_2, les distances à l'origine O des deux positions connues;

t_1 et t_2, les temps écoulés depuis l'instant initial jusqu'à ceux qui correspondent à ces deux positions.

Au moyen de ces données, on trouve

$$s_0 = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1}, \quad a = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

d'où

$$s = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1} + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} t,$$

ou

$$s - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}(t - t_1).$$

Vitesse dans le mouvement varié. — Dans le mouvement varié, la courbe des espaces est une courbe quelconque (*fig.* 6). Considérons deux points, m, m', de cette courbe; la différence qm' des ordonnées correspondantes aux temps t' et t représente l'espace parcouru pendant le temps $t' - t$; et, si cet espace avait été parcouru d'un mouvement uniforme, on aurait eu, pour figurer la loi des espaces pendant le temps $t' - t$, la droite mm' au lieu de la courbe qui joint ces deux points. La vitesse de ce mouvement uniforme aurait été donnée par le rapport $\frac{qm'}{mq}$, égal au coefficient angulaire de la corde mm': ce rapport est ce qu'on peut appeler la *vitesse moyenne* du mouvement varié, correspondante au point M de la trajectoire et à l'intervalle de temps pp'; cette quantité est une fonction à la fois de l'époque t et de l'intervalle considéré $t' - t$. Mais si l'on conçoit que cet intervalle et la longueur pp' diminuent indéfiniment, la corde mm' tendra vers une position limite, qui est la tangente à la courbe des espaces au point m. En même temps la vitesse moyenne, le coefficient angulaire de la corde, tendra vers une limite, $\frac{ds}{dt}$, qui ne dépendra plus que du temps t, ou de la position du point M sur la trajectoire.

Cette limite, $\frac{ds}{dt}$ ou $f'(t)$, est ce que nous appellerons la *vitesse* du mouvement varié à l'époque t.

L'élément ds étant positif ou négatif suivant que le mouvement est dirigé dans le sens des s positifs ou dans le sens opposé, l'expression $\frac{ds}{dt}$ fait connaître en même temps la grandeur, et, par son signe, le sens de la vitesse. C'est la vitesse

du mouvement uniforme qu'on peut toujours considérer, pendant un temps infiniment petit, comme identique au mouvement étudié.

Ainsi se trouve généralisée notre définition de la vitesse dans le mouvement uniforme. Analytiquement, la vitesse est la dérivée de l'espace par rapport au temps; géométriquement, c'est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe des espaces : on la construit en prenant parallèlement à l'axe des temps une longueur $m\mu$ égale à une seconde, puis menant la perpendiculaire $\mu\nu$, limitée à la tangente au point m.

C'est de cette manière qu'on détermine à chaque instant la vitesse d'un mobile dont le mouvement a été observé directement et réduit en tables. Il faut alors passer par l'intermédiaire de la courbe des espaces, et opérer comme précédemment.

Quelquefois on se dispense de construire et la table et la courbe, en obligeant le mobile à tracer lui-même cette dernière *automatiquement*.

Nous reviendrons sur les divers procédés fort ingénieux au moyen desquels on oblige un mobile qui, par sa grande vitesse, semble se dérober à nos observations, à écrire lui-même les lois de son mouvement dans le langage dont je viens de vous donner la clef. Je me contenterai pour le moment de citer, comme exemple de cette méthode expérimentale, la détermination des lois de la chute des graves au moyen de l'appareil que le général Morin a fait construire, d'après les indications du général Poncelet.

Le corps qui tombe est armé d'un crayon, et marque sa trace sur une feuille de papier qui se déplace horizontalement, par l'effet d'un mouvement d'horlogerie, de manière à présenter à chaque instant, en regard de la verticale de chute, des verticales dont les distances sont proportionnelles au temps. Habituellement, pour plus de commodité, la feuille de papier est enroulée sur un cylindre; en la développant sur un plan, on obtient la courbe des espaces.

Courbe des vitesses. — Il résulte de ce qui précède que, dans le mouvement varié, la vitesse est une fonction du temps t, fonction dont on sait trouver la valeur à chaque instant quand on connaît la loi du mouvement. Il est naturel de représenter

aussi cette fonction v par une courbe; et ceci nous procurera des avantages du même ordre que ceux qui résultent de la considération de la courbe des espaces.

Pour construire la courbe des vitesses, connaissant la courbe des espaces mm_1m_2 (*fig.* 7), nous déterminerons, comme nous l'avons indiqué, la vitesse $\mu\nu$ correspondante au point m de la courbe mm_1, ou au point M de la trajectoire; nous porterons ensuite la longueur $\mu\nu$ sur l'ordonnée du point p, en faisant bien attention au signe; et nous aurons ainsi autant de points que nous le voudrons de notre courbe des vitesses.

Réciproquement, connaissant cette courbe des vitesses, on peut en déduire la courbe des espaces : soit analytiquement, en intégrant l'équation

$$ds = v\,dt, \tag{3}$$

soit graphiquement, par une quadrature.

Mais, pour que le problème soit déterminé, il faut qu'outre la courbe des vitesses on donne un premier point de la courbe des espaces cherchée, afin qu'on puisse trouver la valeur de la constante arbitraire introduite par l'intégration de l'équation (3), équation dont on peut mettre l'intégrale sous la forme

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt.$$

Soit m_0 ce premier point de la courbe (*fig.* 8) : pendant le temps dt, l'accroissement ds de l'ordonnée est égal à $v\,dt$, c'est-à dire au petit rectangle n_0p_1, dont la base est égale à dt, et la hauteur à la vitesse v. Ayant pris q_1m_1 égal à ce rectangle, nous prendrons de même $q_2m_2 = n_1p_2$; enfin un accroissement fini quelconque qm sera représenté par l'aire correspondante n_0npp_0, qui est la limite de la somme de ces rectangles (*).

Quand on ne saura pas calculer exactement l'intégrale définie $\int_{t_0}^{t} v\,dt$, ce qui arrivera, par exemple, toutes les fois que

(*) Les temps, c'est-à-dire l'une des dimensions des aires dont nous parlons, devant être considérés comme des nombres abstraits, on voit qu'en définitive chacune de ces aires représente un nombre de mètres, c'est-à-dire une longueur.

la courbe des vitesses sera donnée par un tracé graphique, on calculera les espaces parcourus en appliquant à l'aire $n_0 p$ les formules connues de quadrature approximative.

On a construit des machines qui tracent elles-mêmes la courbe des vitesses.

Il existe aussi des appareils qui servent à quarrer mécaniquement une courbe quelconque supposée tracée, ce sont les *planimètres;* enfin, dans d'autres dispositions, la courbe se quarre en même temps qu'elle se construit ou qu'elle est censée se construire automatiquement. Nous retrouverons ces appareils dans une autre partie du cours.

On prend quelquefois pour ordonnées des fonctions de l'espace ou de la vitesse, soit qu'on y soit forcé par la nature des instruments de mesure et de tracé, soit qu'on ait uniquement en vue de simplifier les opérations graphiques à exécuter sur ces courbes. Nous nous bornons à faire ici mention des courbes dont les ordonnées sont proportionnelles à la variable qu'il s'agit de représenter.

Mouvement uniformément varié. — Le mouvement varié le plus simple est celui dans lequel les vitesses acquises dans des temps égaux sont égales, quelque petits que soient ces temps : c'est le *mouvement uniformément varié.*

Soit v_0 la vitesse à l'instant initial, v la vitesse au bout du temps t, la vitesse acquise est $v - v_0$; et l'on a par définition

$$\frac{v - v_0}{t} = j,$$

j étant une constante. On tire de là

$$v = v_0 + jt,$$

expression de la loi des vitesses dans le mouvement uniformément varié.

La courbe des vitesses est une ligne droite, dont v_0 est l'ordonnée à l'origine, et j le coefficient angulaire (*fig.* 9).

De l'accélération. — Cette quantité j, qui joue par rapport à la vitesse le même rôle que celle-ci par rapport aux espaces, se nomme l'*accélération.* Quand on introduit ainsi dans la science une expression tirée du langage vulgaire, il faut avoir soin de préciser le sens qu'on y attache. Il est possible que

notre accélération soit un retard, v étant plus petit que v_0; alors j est négatif. D'autres fois, au contraire, le retard est indiqué par une accélération positive, lorsque la vitesse v est négative. Inutile d'insister sur ces particularités, qui n'offrent aucune difficulté.

L'accélération constante j est ce qui distingue l'un de l'autre les différents mouvements uniformément variés; c'est la vitesse acquise pendant l'unité de temps. On la construit en prenant $n\nu$ égale à une seconde, et menant la perpendiculaire $\nu n'$.

Lois de la chute des graves. — L'expérience prouve que le mouvement d'un corps qui tombe librement dans le vide est uniformément accéléré. L'accélération de ce mouvement est la même pour tous les corps; elle varie avec la position géographique du lieu, et en même temps avec l'altitude; enfin à la latitude de Paris et au niveau de la mer, elle est représentée par le nombre 9,8088, qu'on remplace habituellement par la lettre g.

D'après ce que nous avons dit à propos de la vitesse, le temps étant un nombre abstrait, l'accélération est un certain nombre de mètres, nombre qui varie quand on change l'unité de temps.

Par exemple, si l'on prenait pour unité de temps la minute, la valeur de g serait 3600 fois plus grande. En effet, d'une part, la vitesse acquise au bout d'une minute est 60 fois la vitesse acquise au bout d'une seconde, puisque les vitesses acquises croissent proportionnellement au temps; d'autre part, le nombre de mètres qui exprime une vitesse donnée est 60 fois plus considérable en prenant pour unité la minute, puisque la vitesse est l'espace parcouru *d'un mouvement uniforme* pendant l'unité de temps, et que cette unité est devenue 60 fois plus grande. Donc, en définitive, le nombre qui mesure l'accélération g est devenu 3600 fois plus considérable.

Équations du mouvement uniformément varié. — Pour avoir la loi des espaces, il suffit d'égaler $s - s_0$ à l'aire du trapèze n_0p (*fig.* 10), dont la hauteur est égale à t, et dont les bases sont respectivement : v_0, et v ou $v_0 + jt$; on a ainsi

$$s - s_0 = t \times \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + jt),$$

d'où

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2;$$

c'est ce qu'aurait donné l'intégration de l'équation

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + jt.$$

Construisons les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2, \\ v = v_0 + jt. \end{cases}$$

La première représente une parabole dont l'axe est parallèle à celui des s, et qui peut occuper les quatre positions indiquées par la *fig.* 11, suivant les signes des quantités v_0 et j:

1° $v_0 > 0$, $j > 0$, mouvement uniformément accéléré proprement dit.

2° $v_0 < 0$, $j > 0$, mouvement d'abord retardé, puis accéléré, dans le sens ordinaire du mot; c'est-à-dire que la vitesse diminue d'abord en valeur absolue, s'annule, puis que le mouvement recommence dans le sens opposé, avec une vitesse indéfiniment croissante.

3° $v < 0$, $j < 0$, mouvement accéléré dirigé du côté des s négatifs.

4° $v_0 > 0$, $j < 0$; le mouvement, d'abord dirigé vers les s positifs, voit sa vitesse diminuer jusqu'à zéro, pour reprendre ensuite vers les s négatifs.

Propriétés du mouvement uniformément varié. — On peut, au moyen des équations (4) diversement combinées, démontrer un certain nombre de propriétés du mouvement uniformément varié. Par exemple, éliminons j entre ces équations, il vient

$$\frac{s - s_0}{t} = \frac{v_0 + v}{2};$$

1° *Dans le mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne pendant un certain temps t est la moyenne arithmétique des vitesses prises aux deux instants extrêmes de ce temps.*

Dans l'équation précédente, remplaçons v par $v_0 + jt$, il vient

$$\frac{s - s_0}{t} = v_0 + j\frac{t}{2} :$$

2° *Dans le mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne du mobile, pendant un certain temps t, est égale à la vitesse v, prise à l'instant milieu de ce temps.*

Enfin l'élimination de t entre les équations (4) produit

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = j(s - s_0) :$$

3° *Dans le mouvement uniformément varié, la moitié de l'accroissement du carré de la vitesse est le produit de l'accélération constante par l'espace parcouru.*

On simplifie les équations (4) en comptant les temps à partir de l'instant où la vitesse v_0 est nulle, et les espaces à partir de la position que le mobile occupe à cet instant; il vient alors

$$(5) \qquad \begin{cases} s = \frac{1}{2} jt^2, \\ v = jt. \end{cases}$$

La première de ces équations montre que :

4° *Dans le mouvement uniformément varié, l'accélération j est le double de l'espace parcouru pendant la première seconde du mouvement.*

Problèmes sur l'ascension et la chute des corps.

Les équations (4) et (5) servent à résoudre tous les problèmes qu'on peut se proposer sur le mouvement vertical des corps pesants dans le vide, en faisant $j = -g$ ou $j = g$, selon qu'on dirigera la partie positive de la verticale en haut ou en bas.

PROBLÈME I. — *Calculer la hauteur à laquelle s'élèvera un corps animé d'une vitesse donnée v_0, dirigée de bas en haut.*

Les équations du mouvement sont

$$(6) \qquad \begin{cases} s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2, \\ v = v_0 - gt. \end{cases}$$

On trouve la durée de l'ascension en faisant $v = 0$, ce qui donne

$$T = \frac{v_0}{g};$$

en portant ensuite cette valeur dans l'équation des espaces, on a la hauteur à laquelle s'élève le mobile :

$$H = \frac{v_0^2}{2g};$$

c'est la *hauteur due à la vitesse* v_0.

Le temps de la descente est égal au temps de l'ascension :

$$T' = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}};$$

et le mobile repasse au point de départ avec une vitesse égale à v_0, c'est-à-dire à

$$\sqrt{2gH};$$

c'est la *vitesse due à la hauteur* H.

PROBLÈME II. — *Un corps descend d'une hauteur* H *dans un temps t plus petit que* $\sqrt{\frac{2H}{g}}$: *déterminer la hauteur de laquelle il est tombé.*

Soit s_0 la distance du point de départ inconnu à l'origine de la hauteur H : on a

$$H = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

et

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2g};$$

en éliminant v_0, on trouve

$$s_0 = \frac{1}{2} g \left(\frac{H}{gt} - \frac{1}{2} t \right)^2.$$

PROBLÈME III. — *Deux corps partent d'un même point sans vitesses initiales, à des époques séparées par un intervalle* θ : *déterminer l'instant où la distance de ces deux corps sera a, et les chemins qu'ils auront alors parcourus.*

Soit t le temps écoulé depuis le départ du premier corps

jusqu'à l'instant cherché, et z la hauteur de chute correspondante : on a

$$z = \frac{1}{2} g t^2$$

et

$$z - a = \frac{1}{2} g (t - \theta)^2.$$

PROBLÈME IV. — *Calculer la profondeur d'un puits d'après le temps qui s'écoule depuis le départ d'un corps qu'on laisse tomber sans vitesse, jusqu'à l'instant où le bruit de la chute arrive à l'orifice du puits.*

Etc., etc.

Mouvement varié quelconque. — Quand le mouvement n'est pas uniformément varié, la vitesse acquise pendant un certain temps, $t' - t$, n'est pas la même à une époque quelconque du mouvement. On considère alors l'accélération moyenne pendant le temps $t' - t$; et, en supposant ce temps infiniment petit, on appelle accélération du mouvement à une époque t la quantité $\frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire la limite de l'accélération moyenne.

On a ainsi en général

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

et l'on peut construire une courbe des accélérations analogue aux courbes des espaces et des vitesses (*).

Problèmes sur les lois de mouvement.

Pour terminer ce qu'il y a à dire sur les lois du mouvement considéré indépendamment de la trajectoire, donnons la so-

(*) Nous avons simplement appelé *accélération* la quantité j; et cette dénomination n'a aucun inconvénient pour le moment. Plus tard, quand nous étudierons le mouvement d'un peu plus près, en y faisant entrer la considération de la trajectoire, nous introduirons d'autres quantités auxquelles nous serons conduits à donner aussi le nom générique d'*accélération*, accompagné d'une épithète caractéristique : nous verrons alors que, toutes les fois que le mouvement sera curviligne, la quantité j s'appellera l'*accélération tangentielle* du mobile. Laissons pour le moment de côté ces distinctions, qui ne nous sont point encore nécessaires.

lution des six problèmes élémentaires qui sont relatifs aux espaces, aux vitesses et aux accélérations, problèmes qui se ramènent tous à des quadratures, c'est-à-dire à l'intégration de différentielles de la forme $f(x)\,dx$.

I. On donne l'espace en fonction du temps,

$$s = f(t).$$

On déduit de là les expressions de la vitesse et de l'accélération :

$$v = f'(t), \quad j = f''(t).$$

II. Donnée $v = \mathrm{f}(t)$. On a

$$j = \mathrm{f}'(t), \quad s = s_0 + \int_0^t \mathrm{f}(t)\,dt.$$

III. Donnée $j = \varphi(t)$. On a

$$v = v_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt, \quad s = s_0 + \int_0^t v\,dt.$$

IV. Donnée $v = \psi(s)$. On a

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\psi(s)}, \quad j = \psi'(s)\frac{ds}{dt} = \psi(s)\,\psi'(s).$$

V. Donnée $j = \pi(s)$.

L'équation

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \pi(s)$$

n'est point immédiatement soluble par une quadrature : mais, multipliée par $2\dfrac{ds}{dt}dt$, elle devient intégrable et donne

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} \pi(s)\,ds,$$

ce qui nous ramène au problème précédent, au cas où l'on a v en fonction de s.

VI. Donnée $j = \chi(v)$. On a

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\chi(v)}, \quad s = s_0 + \int_0^t v\,dt.$$

§ II. — Étude du mouvement sur la trajectoire.

Après avoir dit du mouvement d'un point tout ce qu'on peut en dire sans s'occuper de la trajectoire de ce point, il faut, pour compléter notre étude, examiner ce que peut ajouter à ce qui précède la considération purement géométrique de la trajectoire.

A ce nouveau point de vue, le mouvement le plus simple est le mouvement rectiligne; la théorie développée dans le paragraphe précédent renferme tout ce qui est relatif à ce mouvement.

Quant au mouvement curviligne, nous allons montrer comment on en ramène l'étude à celle du mouvement rectiligne, au moyen de la considération des *mouvements simultanés.*

Théorie des mouvements simultanés.

Soit MM' la trajectoire d'un point, rapportée à trois axes quelconques (*fig.* 13). Considérons, en même temps qu'un point M de cette trajectoire, la projection P de ce point sur l'axe des x, faite parallèlement au plan zAy.

Pendant que le point M se déplace sur sa trajectoire, le point P se déplace sur l'axe Ax; on dit que ces deux mouvements sont *simultanés.* Ils sont d'ailleurs tellement liés entre eux, que l'un se déduit immédiatement de l'autre, si la trajectoire est connue. Si elle ne l'est pas, il faudra, pour que le mouvement du point M soit bien défini, connaître les mouvements des projections de ce point sur trois axes concourants quelconques.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \varphi_1(t), \\ y = \varphi_2(t), \\ z = \varphi_3(t), \end{cases}$$

les équations de ces mouvements rectilignes. L'élimination de t entre ces trois relations donnera les équations de la trajec-

toire sous la forme ordinaire; à moins toutefois qu'on n'aime mieux conserver, pour représenter la trajectoire, les trois équations (1) qui définissent cette courbe par l'intermédiaire d'une variable auxiliaire t, ce qui sera tout aussi commode.

Les relations (1) s'appellent les *équations du mouvement du point* M.

Nous avons ainsi ramené l'étude d'un mouvement curviligne quelconque à celle de trois mouvements rectilignes simultanés; mais il importe encore de faire voir comment on peut déduire les divers éléments du premier de ceux des deuxièmes, supposés connus.

Auparavant, remarquons que, dans notre manière de considérer la vitesse, cette quantité est une longueur, ds, affectée d'un dénominateur numérique dt.

D'après cela, la direction de la longueur finie, $\frac{ds}{dt}$, est celle de l'élément ds, prolongé dans le sens du mouvement; et, si l'on veut avoir la définition complète de la vitesse d'un mobile, au double point de vue de la grandeur de cette droite et de sa position dans l'espace, il faudra porter une longueur égale à $\frac{ds}{dt}$ sur la tangente à la trajectoire de ce mobile (*fig.* 12), à partir du point de contact et dans le sens du mouvement. La droite MN, ainsi obtenue, représentera à la fois la grandeur, la direction et le sens de la vitesse du mobile.

Nous pouvons maintenant chercher les relations de position et de grandeur qui existent entre la vitesse du point M et les vitesses des trois projections de ce point.

Vitesses dans les mouvements simultanés. — Considérons sur la trajectoire un point M′ infiniment voisin du point M (*fig.* 14), de sorte qu'on puisse indifféremment regarder ce point M′ comme situé sur la courbe elle-même, ou sur la tangente au point M.

Les accroissements infiniment petits des coordonnées, dx, dy, dz, forment les trois côtés d'un parallélipipède dont ds est la diagonale. Construisons un parallélipipède semblable sur les mêmes arêtes prolongées, et donnons-lui des côtés qui soient à leurs homologues dans le premier parallélipipède comme l'unité est à dt.

Les côtés de ce nouveau prisme seront respectivement égaux à

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

et il est évident que la diagonale prendra la valeur correspondante, $\frac{ds}{dt}$, en conservant d'ailleurs sa direction, qui est celle de la tangente à la trajectoire.

On déduit de là les résultats suivants :

THÉORÈME I. — *La vitesse d'un mobile est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède fait sur les vitesses simultanées de ses trois projections.*

THÉORÈME II. — *La vitesse de la projection d'un point sur un axe quelconque est égale à la projection, faite sur le même axe et parallèlement au même plan, de la vitesse du point donné.*

Enfin, si l'on considère le mouvement de la projection du point M sur un plan quelconque, xAy, on voit encore, à l'inspection de la *fig.* 14, que :

THÉORÈME III. — *La vitesse de la projection orthogonale ou oblique d'un point sur un plan quelconque est, en grandeur et en direction, la projection de la vitesse du mobile sur ce plan.*

Cas d'une trajectoire plane. — Quand la trajectoire est une ligne plane, il est naturel de la rapporter à des axes situés dans son plan (*fig.* 15); on n'a plus alors à considérer qu'un triangle infiniment petit MM'N, dont les côtés sont respectivement proportionnels à la vitesse du mobile et aux vitesses de ses deux projections.

Ce triangle est connu dans la science sous le nom de *triangle infinitésimal de Barrow*, nom qu'on devrait remplacer par celui de *triangle de Fermat*.

Fermat est en effet le premier qui ait étudié les propriétés de ce triangle célèbre, propriétés qu'on doit reconnaître comme le point de départ de la *méthode des fluxions*, et de la découverte du calcul infinitésimal.

Les théorèmes auxquels donne lieu la projection du mouvement plan ne diffèrent pas de ceux que nous avons démontrés plus haut.

Digression sur les résultantes ou sommes géométriques.

On énonce ordinairement les théorèmes sur les mouvements simultanés d'une manière qui nécessite quelques définitions préalables.

Définition. — Étant donnée une série de droites ayant chacune une longueur, une direction et un sens bien déterminés, si, en partant d'un point quelconque, on porte toutes ces droites bout à bout, la ligne qui, partant du même point, ferme le polygone ainsi formé, s'appelle la résultante des lignes données.

Ainsi OF (*fig.* 16) est la *résultante* des droites OA, AB, ..., droites qui, relativement à la ligne OF, reçoivent la dénomination de *composantes*.

Propriétés des résultantes géométriques. — On voit en premier lieu qu'une résultante ne change pas quand on intervertit l'ordre de deux composantes consécutives, et par suite celui de deux ou plusieurs composantes quelconques.

En deuxième lieu, on voit que la résultante diffère seulement par le sens qui lui est attribué, du côté qui fermerait le polygone des composantes.

Enfin, il est évident que la projection d'une résultante sur un axe quelconque est la somme algébrique des projections des composantes sur le même axe.

Lorsqu'il y a seulement deux composantes (*fig.* 17), la résultante est la diagonale du parallélogramme fait sur ces deux droites, supposées portées dans un sens convenable à partir d'une origine quelconque O. Quand ces mêmes composantes sont au nombre de trois (*fig.* 18), la résultante est la diagonale du parallélipipède des composantes.

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui comprend à à la fois le cas du mouvement dans un plan et celui d'un mouvement quelconque :

THÉORÈME IV. — *La vitesse d'un mobile est la résultante des vitesses simultanées de ses projections.*

Relations analytiques entre les composantes et la résultante. —1° *Cas du triangle ou du parallélogramme.* —Soient (*fig.* 19) A et B deux droites, R leur résultante; on a, par la trigonométrie rectiligne :

$$\frac{R}{\sin\overline{A,B}} = \frac{A}{\sin\overline{B,R}} = \frac{B}{\sin\overline{A,R}};$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\overline{A,B},$$

$$A^2 = B^2 + R^2 - 2BR\cos\overline{B,R},$$

$$B^2 = A^2 + R^2 - 2AR\cos\overline{A,R}.$$

La dissymétrie des dernières formules tient à ce que la résultante ne se compte pas dans le même sens que ses composantes.

Quand l'angle des deux composantes est droit, les formules deviennent

$$A = R\cos\overline{A,R},$$

$$B = R\cos\overline{B,R};$$

$$R^2 = A^2 + B^2.$$

2° *Cas du parallélipipède.* — Bornons-nous au cas le plus habituel, celui où les trois composantes sont rectangulaires.

Soient A, B, C, les composantes, R la résultante, α, β, γ (*) les angles formés par cette ligne avec les trois premières. On a

$$A = R\cos\alpha,$$

$$B = R\cos\beta,$$

$$C = R\cos\gamma;$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

3° *Cas d'un polygone, ou d'un nombre quelconque de com-*

(*) Les angles α, β, γ sont liés entre eux par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

il est pourtant nécessaire de connaître ces trois angles, pour que la direction de la droite à laquelle ils appartiennent soit bien définie; et même, lorsque ces angles sont donnés chacun par une ligne trigonométrique, il est indispensable que cette ligne soit un cosinus, c'est-à-dire une ligne qui change de signe quand on passe d'un arc à son supplément, et qui ne change pas, quel que soit le sens dans lequel on mesure l'angle compris entre deux directions déterminées.

posantes. — Soit D l'une de ces composantes; on a, en projetant sur trois axes rectangulaires quelconques :

$$R\cos\overline{R, x} = \sum D\cos\overline{D, x} = X,$$

$$R\cos\overline{R, y} = \sum D\cos\overline{D, y} = Y,$$

$$R\cos\overline{R, z} = \sum D\cos\overline{D, z} = Z,$$

équations d'où l'on conclut :

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

$$\cos\overline{R, x} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\overline{R, y} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\overline{R, z} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Toutes les fois qu'on considère des grandeurs géométriques, c'est-à-dire des longueurs à chacune desquelles est affectée une certaine direction, un certain sens, les résultantes prennent la place des sommes proprement dites; on pourrait les appeler *sommes géométriques*, pour rappeler l'idée de sommes dans lesquelles on a égard à la direction, de même que dans les sommes algébriques on a égard au signe des quantités qu'il s'agit de sommer.

Une longueur n'a pas de signe, elle doit être portée sur sa direction dans un certain sens; ses projections ont un signe, c'est celui du cosinus de l'angle formé par la ligne qu'on projette avec l'axe de la projection. Une fois que plusieurs longueurs sont ramenées par la projection à une direction unique, la résultante se transforme en une somme algébrique.

Il suit de là que les résultantes jouissent de toutes les propriétés des sommes : ainsi on peut les construire ou les calculer sans avoir égard à l'ordre de leurs éléments constituants; on peut aussi trouver d'abord la résultante d'un certain nombre de ces éléments, puis une deuxième résultante partielle, une troisième, etc., et chercher enfin la résultante de toutes ces résultantes.

J'ai dit qu'une longueur n'a pas de signe; cependant, quand la longueur qu'il faut porter dans un certain sens est une fonction de quantités algébriques susceptibles de prendre plusieurs valeurs, il est possible que certaines de ces valeurs rendent la fonction dont nous nous occupons négative. Mais ceci n'altère en rien la généralité des formules, et ne peut donner lieu à aucune difficulté.

Théorie générale des mouvements simultanés.

La considération des mouvements simultanés d'un point et de sa projection sur un axe quelconque, nous a donné le moyen de ramener l'étude du mouvement sur une trajectoire courbe à l'étude du mouvement rectiligne.

Mais là ne se borne point l'utilité de cette idée bien simple, qui consiste à chercher des relations entre les éléments de divers mouvements assujettis à s'accomplir simultanément.

Il est évident que, si l'on se donne une loi géométrique quelconque, en vertu de laquelle la position d'un certain point mobile soit liée à celle d'un ou plusieurs autres points, cette loi établit nécessairement une relation entre les vitesses simultanées des divers points que l'on considère. On trouvera cette relation, analytiquement par des différentiations, géométriquement par des procédés particuliers, basés sur des règles que nous allons exposer, en généralisant la théorie qui précède.

Les théorèmes de Cinématique qui sont relatifs aux vitesses simultanées dérivent des énoncés géométriques ordinaires, comme l'équation qui donne le coefficient angulaire de la tangente à une courbe dérive de l'équation finie de cette courbe. Inversement : les rapports des vitesses de tous les points d'une figure mobile sont nécessairement indépendants du temps, en vertu de la simultanéité des mouvements; donc ces rapports sont des quantités purement géométriques, et l'on voit qu'on repasse immédiatement de la Cinématique à la Géométrie; ou plutôt, une relation quelconque entre des vitesses simultanées peut s'énoncer indifféremment avec le langage de la Cinématique ou celui de la Géométrie pure : nous avons déjà dit que des considérations du genre de celles qui nous occupent ac-

tuellement, fécondées par le génie de Newton, ont été l'origine de la magnifique découverte de l'Analyse *infinitésimale*.

Occupons-nous d'abord des formules qui se présentent quand on rapporte la trajectoire d'un point à un système de coordonnées polaires, en nous bornant d'ailleurs au cas où le mouvement s'effectue dans un plan.

Soit PM le rayon vecteur correspondant à une époque quelconque, t (*fig.* 20); menons la tangente et la normale à la courbe (M), et soit i l'angle de la normale avec le rayon vecteur.

On a, par la Géométrie élémentaire :

$$\operatorname{tang} i = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}, \quad \sin i = \frac{dr}{ds}, \quad \cos i = \frac{r\,d\theta}{ds};$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \mathrm{PN}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{+r^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \mathrm{MN}.$$

Voici maintenant quelles sont les différentes vitesses simultanées dont il est intéressant de s'occuper (*fig.* 21).

Vitesse de circulation. — Considérons le mouvement du rayon vecteur assujetti à contenir toujours le point décrivant M. Dans ce mouvement, tous les points de la droite PM décrivent simultanément des arcs de cercle concentriques autour du pôle P; et, en particulier, le point qui coïncidait avec le mobile M, dans la position PM du rayon vecteur, décrira pendant le temps dt un arc de cercle MM_1, dont le rayon est égal à PM ou à r. Nous donnerons à la vitesse du point dont le mouvement est ainsi défini le nom de *vitesse de circulation*.

Vitesse de glissement. — Considérons un point qui soit entraîné avec le rayon vecteur, et qui glisse en même temps sur la droite PM, de manière à coïncider constamment avec le point de cette droite qui décrit la trajectoire. Pendant le temps que le rayon vecteur aura mis à venir de PM en PM', ce nouveau mobile fictif aura décrit l'espace $\mathrm{M}_1\mathrm{M}'$; la vitesse correspondante s'appelle *vitesse de glissement*, ou *vitesse le long du rayon vecteur*.

Vitesse angulaire. — Prenons sur le rayon vecteur une longueur constante Pm égale à l'unité. Le déplacement de ce point m, assujetti à rester ainsi à l'unité de distance du

centre P, mesure l'*angle* décrit par le rayon vecteur. La vitesse du point m est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire;* on la désigne habituellement par ω (*).

Vitesse aréolaire. — Enfin, considérant l'aire décrite par le rayon vecteur, limité à la courbe que nous étudions, j'adopterai le nom de *vitesse aréolaire* pour désigner le quotient de l'aire PMM′ par le temps dt, sans rapporter d'ailleurs cette vitesse à un point déterminé du rayon vecteur mobile.

Relations entre les vitesses précédemment définies. — On a d'abord, en désignant par w la vitesse de circulation, par v_a la vitesse aréolaire, par v_g la vitesse de glissement :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad v_g = \frac{dr}{dt},$$

$$w = r\frac{d\theta}{dt} = \omega r,$$

$$v_a = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\omega r^2.$$

D'un autre côté, en considérant le triangle infinitésimal $MM'M_1$, dont les côtés sont proportionnels respectivement, à la vitesse sur la trajectoire, à la vitesse de circulation et à la vitesse de glissement; ou bien le triangle fini semblable au précédent, construit en prenant pour côtés ces vitesses elles-mêmes, on a le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *La vitesse d'un mobile sur sa trajectoire est la résultante de la vitesse de circulation et de la vitesse de glissement.*

(*) Il ne faut pas oublier que, pour le calcul de ω, le temps doit être exprimé en secondes, et que l'arc mm_1 est rapporté à son rayon, supposé égal à l'unité de longueur.

Dans les applications de la Cinématique aux machines, on est dans l'usage de définir une vitesse angulaire constante par le nombre des révolutions effectuées par le rayon vecteur dans une minute. Soit une roue faisant N tours par minute; un point de cette roue, situé à l'unité de distance du centre, parcourra par minute un arc égal à $2\pi N$, et par seconde un arc égal à $\frac{2\pi N}{60}$, le mouvement étant supposé uniforme. On a donc, pour un rayon quelconque de la roue,

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}.$$

Dans le cas actuel, le triangle infinitésimal est toujours rectangle. On a donc

$$w = v\cos i, \quad v_g = v\sin i,$$
$$v^2 = w^2 + v_g^2.$$

Ainsi que nous l'avons dit quand nous avons posé d'une manière générale les bases de la théorie des mouvements simultanés, tous les théorèmes de Géométrie infinitésimale qui se rapportent aux coordonnées polaires donnent lieu à des théorèmes corrélatifs de Cinématique, c'est-à-dire à des relations entre les vitesses que nous venons de définir.

Par exemple, en divisant par dt les équations

$$dr = \mathrm{PN}\, d\theta,$$
$$ds = \mathrm{MN}\, d\theta,$$

qui donnent les valeurs de la sous-normale et de la normale, on obtient les théorèmes suivants :

THÉORÈME VI. — *Quand on rapporte le mouvement d'un point dans un plan à un système de coordonnées polaires quelconque, le rapport de la vitesse de glissement à la vitesse angulaire est donné par la sous-normale à la trajectoire.*

THÉORÈME VII. — *Le rapport de la vitesse d'un point mobile à la vitesse angulaire autour d'un pôle quelconque est égal à la normale correspondante.*

Application au mouvement des planètes. — Dans le mouvement des planètes autour du soleil, on sait, d'après l'une des lois de Kepler, que la vitesse aréolaire v_a est une constante.

On a donc, en se reportant à l'expression de cette vitesse :

$$\frac{1}{2}\omega r^2 = \mathrm{C};$$

d'où

$$\omega = \frac{2\mathrm{C}}{r^2},$$
$$w = \omega r = \frac{2\mathrm{C}}{r},$$

et enfin

$$v = \frac{w}{\cos i} = \frac{2\mathrm{C}}{r\cos i} = \frac{2\mathrm{C}}{p},$$

en désignant par p la perpendiculaire, $r\cos i$, abaissée du pôle sur la tangente MH (*fig.* 22).

De là les énoncés suivants :

Dans le mouvement d'une planète autour du soleil :

1° *La vitesse angulaire est en raison inverse du carré de la distance de la planète au soleil.*

2° *La vitesse de circulation est en raison inverse de cette même distance.*

3° *La vitesse de l'astre dans son orbite est en raison inverse de la perpendiculaire abaissée du centre du soleil sur la tangente à la trajectoire.*

Généralisation des résultats précédents.

Dans tous nos raisonnements relatifs aux coordonnées polaires, il faut bien remarquer que le pôle P est simplement le point de rencontre d'un certain rayon vecteur PM avec sa position infiniment voisine (*fig.* 23). Rien n'oblige à supposer qu'un troisième rayon vecteur infiniment voisin soit assujetti à venir passer au point de rencontre des deux premiers, encore moins que ce point de rencontre ou pôle soit fixe d'une manière absolue.

Tous les résultats que nous venons de trouver pour les systèmes de coordonnées polaires ordinaires s'appliquent donc à des rayons vecteurs mobiles suivant une loi quelconque, en substituant au pôle fixe, pour chacun de ces rayons vecteurs, le point où ce rayon est coupé par sa position infiniment voisine, c'est-à-dire le point où il est tangent à son enveloppe.

Cette remarque bien simple a une grande importance au point de vue des applications à la Géométrie.

§ III. — Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes aux lignes courbes.

Sur la fin du XVIIe siècle, les géomètres français et étrangers se préoccupèrent beaucoup du problème des tangentes aux lignes courbes.

D'une étude historique faite par M. Duhamel, il ressort que Descartes donna la première méthode analytique rigoureuse pour la solution de ce problème. Descartes fut suivi dans

cette voie par Fermat, Barrow, Huygens, Newton; et c'est de ces recherches que sont sorties les méthodes analytiques actuelles, basées sur le calcul inventé simultanément par Newton et par Leibnitz.

Vers la même époque, Roberval (*) avait fait connaître une méthode géométrique pour le tracé des tangentes, méthode fort remarquable que nous allons exposer avec détail. Des procédés directs, plus ou moins analogues à ceux de Roberval, ont été mis en usage par plusieurs géomètres ses contemporains, entre autres par le marquis de l'Hôpital, dans son *Analyse des infiniment petits;* puis ce genre de spéculations s'est trouvé presque complétement abandonné, sous l'influence du vif éclat que jetait la nouvelle invention du calcul infinitésimal. On y est revenu de nos jours : et la méthode de Roberval, convenablement entendue, peut s'employer avantageusement dans un grand nombre de questions auxquelles le calcul algébrique s'appliquerait peu élégamment.

Principe de Roberval. — Pour arriver à tracer la tangente à une courbe définie géométriquement, Roberval considère cette courbe comme la trajectoire d'un point mobile; puis il pose l'axiome suivant :

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point.

Si donc nous pouvons trouver, par la définition donnée, soit les vitesses simultanées des projections d'un point de la courbe sur deux axes coordonnés rectangulaires ou obliques, soit la vitesse de circulation et la vitesse de glissement dans un système polaire quelconque, nous aurons, par une construction connue, la grandeur de la vitesse propre du point mobile, et la direction de cette vitesse, qui est celle de la tangente cherchée.

J'ai déjà fait observer que les définitions de la Géométrie ne peuvent donner les vitesses simultanées elles-mêmes; mais elles donnent les rapports de ces vitesses : et c'est tout ce qu'il faut pour déterminer une direction.

(*) *Traité des mouvements composés :* Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique, par Messieurs de l'Académie des Sciences, p. 80.

Le principe de la méthode de Roberval est donc extrêmement simple; nous allons en montrer l'utilité par de nombreuses applications.

Tangente à la conchoïde. — La définition de la conchoïde ordinaire, ou conchoïde de Nicomède, peut être généralisée de la manière suivante :

D'un point fixe O (*fig.* 24), *on mène un rayon vecteur qui vient rencontrer une courbe quelconque en* M; *à partir de ce point d'intersection on porte sur la direction du rayon vecteur une longueur constante* MM'. La courbe que nous considérons est le lieu des points M'.

Pour mener la tangente à cette courbe, élevons au point M une perpendiculaire sur le rayon vecteur; et regardons une longueur arbitraire Mm, comptée sur cette perpendiculaire, comme représentant la vitesse de circulation correspondante au point M. Par le point m, ainsi déterminé, concevons une perpendiculaire mm_1 sur Mm; la longueur de cette perpendiculaire, limitée à la tangente connue MT, représentera la vitesse du point M le long de son rayon vecteur.

Faisons la même construction pour le point M' : la vitesse de circulation M'm' est dirigée suivant la perpendiculaire à OM'; d'ailleurs cette vitesse est à la vitesse de circulation Mm dans le rapport de OM' à OM; donc le point m' est sur la ligne Om prolongée. D'autre part, la vitesse de glissement est dirigée suivant la perpendiculaire à m'M', et elle est égale à mm_1, puisque la distance MM' est constante; donc enfin on aura la tangente cherchée en prenant $m'm'_1 = mm_1$, et joignant M'm'_1.

On peut remarquer que les normales aux deux courbes se coupent en un point N de la perpendiculaire élevée en O sur le rayon vecteur. En effet, nous avons vu que la sous-normale est égale au rapport de la vitesse de glissement à la vitesse angulaire; cette ligne a donc la même valeur pour la courbe (M) et pour la courbe (M').

D'après la remarque qui termine le § II, la construction précédente s'appliquerait encore si les droites telles que OM, au lieu de passer toutes par un point fixe, étaient menées tangentiellement à une courbe quelconque.

La méthode de Roberval permet de trouver la tangente à la

spirale d'Archimède, et à un grand nombre d'autres courbes; mais, si elle peut rendre de très-grands services, elle est par contre assez délicate à appliquer : l'inventeur lui-même s'y est fréquemment trompé. L'erreur de Roberval consistait à confondre les composantes de la vitesse du mobile suivant deux directions obliques, avec les projections orthogonales de cette même vitesse. La faute était d'autant plus difficile à apercevoir qu'on arrivait d'ailleurs à une construction exacte, par une compensation d'erreurs. Voici, par exemple, le raisonnement relatif au tracé de la tangente à l'hyperbole (*fig.* 25).

Puisque la différence entre les rayons vecteurs menés d'un point de la courbe aux deux foyers est constante, la vitesse est évidemment la même le long de l'un ou de l'autre des rayons vecteurs MF, MF'. Partant de là, Roberval obtenait la tangente en portant sur les rayons vecteurs des longueurs égales représentant cette vitesse commune, et composant ensuite ces deux droites par la règle du parallélogramme, lequel se trouvait dans l'espèce être un losange : la diagonale de ce losange était précisément la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs. Le résultat était donc juste, mais le raisonnement était faux, car les vitesses de glissement MN, MN', ne sont pas les composantes de la vitesse du point M sur les directions obliques MF, MF'.

Voici comment il eût fallu présenter les choses. Soit MT (*fig.* 26) la vitesse du point qui décrit l'hyperbole; si nous prenons le foyer F pour pôle, la vitesse MT se présente comme la résultante d'une certaine vitesse de circulation, MM_1, et de la vitesse de glissement correspondante, M_1T. Relativement au pôle F', nous aurons à considérer des composantes analogues, MM'_1, M'_1T; et il résulte de l'égalité des deux vitesses de glissement que le point T est sur la bissectrice de l'angle M.

Tangente à une conique définie par son foyer et sa directrice. — Soit (*fig.* 27) M un point de la courbe. Projetons le mouvement de ce point sur la directrice et sur une perpendiculaire; la vitesse MM' est la résultante de deux longueurs, MQ, QM', proportionnelles aux vitesses des projections du point M. Cette même vitesse, si l'on rapporte le mouvement au foyer F considéré comme pôle, est la résultante de la vitesse de circulation MQ' et de la vitesse de glissement Q'M'.

Mais on a évidemment, d'après la définition de la courbe,

$$\frac{M'Q'}{M'Q} = \frac{MF}{MP};$$

c

si donc on élève FL perpendiculaire sur FM, le quadrilatère PMFL est semblable à QMQ'M', et le point M' se trouve sur la diagonale ML : cette diagonale est donc la tangente à la conique (M).

Une construction identique fait connaître la tangente à une courbe définie par le rapport des distances du point décrivant à deux courbes quelconques, question qui se rattache à une célèbre théorie de Géométrie. Supposons que des rayons lumineux, s'échappant normalement d'une courbe donnée (A) (*fig.* 28), se réfractent sur une courbe (M). D'après les lois connues, le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est constant. De plus, si l'on prend sur le prolongement virtuel du rayon réfracté une longueur MR qui soit à MI dans le rapport des sinus, le lieu du point R coupe à angle droit tous les rayons réfractés : nous appellerons cette courbe (B) l'*anticaustique* (*) de (M) par rapport aux rayons incidents.

Réciproquement, le lieu du point M est une courbe telle, que le rapport des distances d'un de ses points aux deux courbes (A) et (B), considérées comme données, est constant (**). En partant de cette définition, et appliquant ce qui précède, on trouve aisément que, pour avoir un point de la tangente à la courbe (M), il faut élever aux points I et R des droites perpendiculaires respectivement sur MI et MR, et prolonger ces droites jusqu'à leur point de rencontre, N. La ligne MN est la tangente cherchée.

La circonférence décrite sur MN comme diamètre passe par les points I et R; d'où il suit que les sinus des angles i et i'

(*) L'expression d'*anticaustique* est due à Jacques Bernoulli, qui s'en est servi seulement dans le cas de la réflexion. M. Quételet a étudié les anticaustiques sous le nom assez impropre de *caustiques secondaires*.

(**) Lorsque les courbes (A) et (B) se réduisent chacune à un cercle, le lieu est un *ovale de Descartes;* c'est une circonférence quand les deux cercles sont évanouissants.

sont dans le même rapport que les longueurs MI et MR : on déduirait de la une démonstration *à posteriori* du théorème fondamental de la théorie des caustiques.

Développement de la méthode de Roberval.

Ces exemples suffisent pour montrer comment la méthode ingénieuse, imaginée par Roberval, conduit à la détermination géométrique des tangentes aux lieux courbes. Mais, si l'on appliquait directement le principe de cette méthode à tous les cas, on aurait souvent un grand nombre de vitesses simultanées à considérer, et on pourrait se trouver conduit à des constructions, sinon impraticables, du moins extrêmement compliquées.

Pour éviter cet inconvénient, il faut chercher à dégager du principe de Roberval un petit nombre d'éléments simples, éléments qui joueront dans cette théorie le rôle que remplissent dans le calcul différentiel les formules donnant la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une fonction de fonction, etc. C'est ce qu'a fait M. Mannheim dans des travaux encore à peu près inédits (*), dont nous allons extraire quelques formules fondamentales, et les élégantes constructions qui en découlent.

PREMIÈRE FORMULE : *Expression de la variation de longueur d'une droite.* — Considérons (*fig.* 29) un rayon vecteur issu du point O, et coupé aux points M et M′ par deux courbes quelconques.

Soient N et N′ les points où les normales à ces deux courbes viennent rencontrer la perpendiculaire élevée en O sur le rayon vecteur. Nous avons trouvé

$$d.\mathrm{OM} = \mathrm{ON}\, d\theta,$$
$$d.\mathrm{OM'} = \mathrm{ON'}\, d\theta;$$

donc

$$d.\mathrm{MM'} = \mathrm{NN'}\, d\theta. \qquad (1)$$

(*) *Voir* toutefois *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 393, et t. XVIII, p. 371 ; Note de Géométrie infinitésimale (*Annales de Tortolini*, t. II) ; enfin une Note insérée à la fin du premier volume des *Applications d'Analyse et de Géométrie* du général Poncelet.

Cette formule donne la variation de la longueur MM′, interceptée sur une droite mobile par deux courbes quelconques. La loi du mouvement de la droite indéfinie OMM′ est arbitraire ; le point O est celui où cette droite est tangente à son enveloppe (*).

Application. — Une droite MM′ (*fig.* 30) *se meut suivant une loi qu'on définit en donnant l'enveloppe des positions successives de cette droite ; elle rencontre deux courbes quelconques aux points* M, M′. *On partage la distance* MM′ *au point* M″ *en deux parties dont le rapport* λ *soit constant : trouver la normale au lieu du point* M″.

Traçons la perpendiculaire ON, les normales MN, M′N′, aux courbes données ; et soit M″N″ la normale cherchée. On a

$$MM'' = \lambda M'' M' ;$$

d'où l'on conclut

$$d.MM'' = \lambda d.M''M'.$$

Or

$$d.MM'' = NN'' d\theta,$$
$$d.M''M' = N''N' d\theta ;$$

donc

$$NN'' = \lambda N''N'.$$

On obtient la normale en joignant M″ au point N″, qui divise NN′ dans le rapport donné.

Problème inverse de celui des tangentes. — Remarquons que l'inverse du problème qui consiste à mener la tangente à une courbe est celui dans lequel on demande, étant donnée la loi du mouvement d'une droite, de déterminer le point où cette droite est tangente à son enveloppe. Par exemple :

Réciproque du problème précédent. — Une droite rencontre trois courbes données, de manière que le rapport des segments interceptés soit constant. On demande le point où la droite est tangente à son enveloppe.

(*) Dans le cas où la longueur MM′ est une constante, on a

$$d.MM' = 0, \quad \text{par conséquent} \quad NN' = 0.$$

C'est un résultat que nous avons déjà eu occasion d'énoncer à propos de la conchoïde.

Dans ce cas, les normales aux trois courbes sont les données de la question; et le problème se trouve ramené par ce qui précède à la recherche d'une perpendiculaire à la droite considérée, perpendiculaire qui soit divisée par les trois normales dans le rapport donné.

Voici deux cas particuliers de ce problème.

Centre de courbure de l'ellipse. — On sait que les parties de la normale à l'ellipse, comprises entre la courbe et les axes, sont dans le rapport constant $\frac{b^2}{a^2}$. Il suit de là que la solution que nous venons de trouver nous fera connaître le centre de courbure de l'ellipse, en considérant ce point comme celui où la normale est tangente à son enveloppe, c'est-à-dire à la développée de l'ellipse.

Soit (*fig.* 31) MM'M'' la normale donnée. Nos trois courbes sont ici l'ellipse elle-même, et ses deux axes CA, CB. Traçons les normales M'N', M''N''; il s'agit de construire une perpendiculaire à MM' telle que l'on ait

$$\frac{ON'}{ON''} = \frac{MM'}{MM''} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Soit T le point où la tangente à l'ellipse rencontre l'axe focal, je dis que la ligne M''T passe par le point N'.

En effet, prolongeons MT jusqu'au point K, où cette ligne rencontre M''N'' : on a évidemment

$$\frac{ON'}{ON''} = \frac{MT}{MK} = \frac{MM'}{MM''}.$$

De là la construction suivante :

Élever en M' une perpendiculaire à M'M; par le point I, où cette perpendiculaire vient couper le rayon CM, mener IO parallèlement à CB; cette ligne rencontre MM'' au centre de courbure.

Centre de courbure de l'épicycloïde. — L'épicycloïde est la courbe engendrée par un point M (*fig.* 32), lié à un cercle (C_1), lorsque ce cercle roule sur un cercle fixe (C).

On sait que la normale à cette courbe est la ligne qui joint le point décrivant, M, au point de contact M' des deux cercles.

Joignons MC_1, et menons par C une parallèle à cette ligne, jusqu'à la rencontre de la normale, en M″. On a

$$\frac{CM''}{C_1M} = \frac{R}{R_1},$$

en appelant R, R_1, les rayons respectifs du cercle fixe et du cercle mobile. Or, C_1M est constant; donc CM″ est également constant, et le lieu du point M″ est un cercle concentrique au cercle (C).

De plus,

$$\frac{MM'}{M'M''} = \frac{R_1}{R};$$

donc la normale MM′ est divisée par la courbe elle-même et par les deux cercles décrits autour du point C en deux segments dont le rapport est constant; et l'on aura le centre de courbure O de l'épicycloïde en construisant une perpendiculaire ON′N″ à MM′, telle que l'on ait

$$\frac{ON'}{N'N''} = \frac{R_1}{R}.$$

Pour cela, élevons en M′ une perpendiculaire sur MM″, terminée à MC_1, joignons AC; le point de rencontre de cette ligne avec MM′ n'est autre chose que le point O (*).

En effet, prolongeons AM′ jusqu'en B; on a bien

$$\frac{ON'}{N'N''} = \frac{AM'}{M'B} = \frac{R_1}{R}.$$

Ces exemples montrent que le problème des centres de courbure se résout par les mêmes principes que le problème des tangentes.

De même que nous avons ramené au premier ordre les questions qui se rapportent au deuxième ordre différentiel, nous y ramènerions évidemment celles du troisième ordre, et ainsi de suite.

(*) Cette construction porte le nom de *construction de Savary*.

Nouvelle application de la formule (1). — Résolvons encore un problème long et pénible à traiter par la méthode directe de Roberval, mais pour lequel la formule (1) fournit une solution aussi simple qu'élégante.

Considérons un certain nombre de droites qui se coupent toutes en un même point M (*fig.* 33). Chacune de ces droites est tangente à une courbe fixe, et limitée à deux autres courbes données : on demande la normale au lieu du point d'intersection de ces droites, lorsqu'on fait varier celles-ci de manière qu'on ait entre les longueurs interceptées une relation donnée quelconque.

Soit MA l'une des droites. Représentons les longueurs telles que AA′ par r, et soit

$$f(r, r_1, \ldots) = 0$$

l'équation donnée; cette équation différentiée produit

$$\frac{df}{dr}\,dr + \frac{df}{dr_1}\,dr_1 + \ldots = 0,$$

ou

$$\sum \frac{df}{dr}\,dr = 0.$$

Mais en menant les normales aux trois courbes (A), (E), (A′), nous avons trouvé

$$dr = \mathrm{NN}'\,d\theta,$$

$d\theta$ étant l'angle de deux positions infiniment voisines de AM. Donc

$$\sum \frac{df}{dr}\,\mathrm{NN}'\,d\theta = 0.$$

Au lieu de l'angle $d\theta$, différent pour chacune des droites, introduisons le facteur commun ds, qui représente le chemin élémentaire parcouru par le point M, et qui est lié à $d\theta$ par l'équation

$$ds = \mathrm{MP}\,d\theta;$$

il vient

$$\sum \frac{df}{dr}\,\frac{\mathrm{NN}'}{\mathrm{MP}} = 0.$$

Prenons sur MA une longueur MF égale à $\frac{df}{dr}$, élevons en F

une perpendiculaire sur MA, et joignons AN, A'N'; on a

$$\frac{NN'}{MP} = \frac{GH}{ML};$$

et, puisque MF a été pris égal à $\frac{df}{dr}$,

$$\sum MF \frac{GH}{ML} = 0.$$

Mais le rapport $\frac{MF}{ML}$ est le cosinus de l'angle EMP, que nous avons toujours désigné par i; on obtient donc en définitive :

$$(a) \qquad \sum GH \cos i = 0.$$

Or GH cos i représente la projection de GH sur la tangente cherchée, et la somme $\sum$ GH cos i est la projection sur cette même tangente de la ligne qui fermerait le polygone formé par toutes les droites telles que GH, mises bout à bout à partir du point M. Donc l'équation (a) nous apprend que la résultante de ces droites est perpendiculaire à la tangente, c'est-à-dire qu'elle est précisément la normale au lieu (M).

Comme cas particulier, supposons que la courbe (E) soit la développée de (A') (*fig.* 34), et que les courbes telles que (A) se confondent avec le lieu décrit par le point M.

L'équation $f(r, r_1, \ldots) = 0$ établit alors une relation entre les distances d'un point du lieu à des courbes données, distances comptées sur les normales à ces courbes. L'équation (a) du cas général devient, comme il est facile de le voir,

$$\sum FL \cos i = 0,$$

ou

$$\sum MF \sin i = 0.$$

D'après cela, on peut remplacer la construction générale indiquée plus haut par la suivante.

On portera sur les normales MA', MA'$_1$, ..., des longueurs

MF, $MF_1, \ldots$, proportionnelles aux dérivées $\frac{df}{dr}, \frac{df}{dr_1}, \ldots$, et on composera toutes ces droites : la résultante est la normale cherchée.

Cette solution, qu'il est très-simple d'obtenir directement en employant la formule

$$dr = ds \sin i,$$

se trouve dans l'*Analyse des infiniment petits* (*).

Application à l'hyperbole. — Dans ce cas, les courbes (A') sont au nombre de deux, et se réduisent chacune à un point (*fig.* 35). On a

$$f(r, r_1) = r - r_1 - 2a = 0,$$

d'où

$$\frac{df}{dr} = 1, \quad \frac{df}{dr_1} = -1.$$

Deuxième formule : *Expression du rapport de deux arcs infiniment petits.* — Considérons toujours un déplacement infiniment petit de la droite OM (*fig.* 29), et désignons par *ds*, *ds'*, les arcs décrits par les points M et M' sur deux courbes données quelconques.

On a

$$ds = MN\, d\theta,$$
$$ds' = M'N'\, d\theta,$$

d'où

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{MN}{M'N'}. \tag{2}$$

Application. — Soit un triangle MM'M'' (*fig.* 36), *variable de forme et de position suivant une loi quelconque; on donne l'enveloppe de chacun de ses côtés et les courbes décrites par les sommets* M, M' : *on demande la normale au lieu du troisième sommet* M''.

Soient *ds*, *ds'*, *ds''*, les arcs décrits par les points M, M', M''; MB, M'B' les normales aux courbes (M) et (M'); enfin M''B'' la

(*) Section II, Proposition X. Le marquis de l'Hôpital cite Tchirnhaus et Fatio, comme ayant résolu avant lui des cas particuliers de cette question.

normale demandée. On a, en menant les normales aux courbes (O), (O'), (O''),

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{MB}{M'A'}; \quad \frac{ds'}{ds''} = \frac{M'B'}{M''A''}; \quad \frac{ds''}{ds} = \frac{M''B''}{MA}.$$

En multipliant ces relations membre à membre, il vient

$$1 = \frac{MB.M'B'.M''B''}{MA.M'A'.M''A''} \ (*),$$

équation d'où l'on tire le rapport

$$\frac{M''A''}{M''B''}.$$

On est ramené à un problème de Géométrie élémentaire, lequel consiste à mener par un point M'' une droite qui soit coupée par deux autres droites dans un rapport déterminé.

Formule de Newton. — Newton a donné du rapport $\frac{ds}{ds'}$ une expression qu'on ramènerait aisément à la forme (2).

Menons les tangentes MA, M'A (*fig.* 37), et considérons la position infiniment voisine de la droite mobile comme une transversale coupant les trois côtés du triangle AMM'. En écrivant que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres, il vient

$$OM'.AM'.ds = OM.AM.ds',$$

d'où

$$(2\ bis) \qquad \frac{ds}{ds'} = \frac{OM.AM}{OM'.AM'}.$$

Cette formule résout immédiatement le problème suivant :

Une droite mobile détache d'une courbe donnée un arc constant : trouver le point où cette droite touche son enveloppe.

Pour exprimer que l'arc intercepté est constant, il suffit d'écrire que les chemins infiniment petits *ds*, *ds'*, parcourus respectivement par les points M et M', sont égaux.

(*) Cette relation est vraie pour un polygone variable d'un nombre quelconque de côtés. Elle se trouve dans la *Statique* de Mœbius pour le cas seulement où les côtés du polygone sont de grandeur constante.

Or la formule (2 *bis*) donne dans ce cas

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{AM'}{AM};$$

on obtient le point O en menant la bissectrice AB de l'angle des tangentes (*fig.* 38), et prenant $OM' = BM$.

TROISIÈME FORMULE : *Expression de la variation de l'angle de deux droites.* — On donne les enveloppes des deux droites, et la courbe décrite par leur point de rencontre (*fig.* 39).

En désignant par $d\theta$ et $d\theta'$ les déplacements angulaires des rayons vecteurs OM, O'M, et appliquant les formules connues, on a

$$d\theta = \frac{ds}{MN}, \quad d\theta' = \frac{ds}{MN'};$$

d'où

$$d\Phi = d\theta' - d\theta = ds\left(\frac{1}{MN'} - \frac{1}{MN}\right). \tag{3}$$

Application. — Considérons (*fig.* 40) la normale MN à l'ellipse, laquelle partage en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs, FMF'. De l'équation

$$FMN = NMF',$$

on conclut

$$d.FMN = d.NMF';$$

d'où, d'après la formule (3), en supprimant ds et représentant par O le point où MN touche son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de l'ellipse,

$$\frac{1}{MO} - \frac{1}{MN} = \frac{1}{MN'} - \frac{1}{MO},$$

$$\frac{2}{MO} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{MN'}.$$

O est donc l'harmonique conjugué de M par rapport à N et à N'.

QUATRIÈME FORMULE : *Expression de la variation d'une aire curviligne.* — Enfin la formule de la vitesse aréolaire,

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta, \tag{4}$$

s'emploiera de la même manière que les précédentes, dans les questions où entreront des aires.

Par exemple, si l'on suppose qu'une droite MM′ (*fig.* 41) se meuve de telle sorte que l'aire du segment MM′ soit constante, on trouve immédiatement que le point de contact O de la droite MM′ avec son enveloppe est le milieu de la corde interceptée.

De plus, nous obtiendrons le centre de courbure de l'enveloppe (O), en considérant la droite MM′ comme assujettie à être coupée en deux parties égales par une courbe très-voisine de l'enveloppe. D'après les principes établis, la normale à la courbe auxiliaire vient rencontrer la normale ON au milieu C de NN′, et si l'on suppose que notre courbe fictive se confonde avec l'enveloppe, ce milieu C n'est autre chose que le centre de courbure de cette enveloppe.

Application à l'hyperbole (*fig.* 42). — La droite mobile MM′ coupe deux droites fixes de manière à former avec celles-ci un triangle d'aire constante. L'enveloppe est une hyperbole ayant les droites fixes pour asymptotes; le point de contact est au milieu de MM′, et la construction précédente fait connaître le centre de courbure correspondant, C.

En résumé, les quatre formules primordiales que nous venons d'établir sont les éléments d'une méthode générale qui permet de résoudre simplement un grand nombre de problèmes de Géométrie infinitésimale.

Ces formules, et d'autres analogues (*), facilitent singulièrement les applications de la méthode de Roberval, et donnent à cette belle méthode une portée dont on ne paraît pas s'être jusqu'ici suffisamment rendu compte.

(*) J'ai dû me borner à donner ici ce court extrait des recherches de M. Mannheim, lequel suffit pour montrer de quelle utilité sont en Géométrie les considérations du domaine de la Cinématique.

Il est facile de comprendre que les formules que nous avons posées, et qui se rapportent à de simples lignes planes, ne sont pour M. Mannheim que le point de départ de recherches relatives aux expressions géométriques d'infiniment petits de divers ordres, se rattachant à des figures planes, sphériques, tracées sur des surfaces arbitraires, ou encore à des déplacements quelconques dans l'espace.

Nous laissons à cet habile géomètre le soin de faire lui-même en temps et lieu l'exposition complète de ses travaux intéressants de Géométrie infinitésimale, avec tout le développement que comporte un pareil sujet.

§ IV. — De l'accélération dans les mouvements simultanés.

Nous avons réduit l'étude d'un mouvement curviligne quelconque à celle de trois mouvements rectilignes simultanés; et nous avons donné sous une forme élégante les relations de grandeur et de direction qui existent entre la vitesse propre du mobile, $\frac{ds}{dt}$, et les vitesses de ses projections sur trois axes coordonnés : $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Cherchons de même les lois qui régissent les accélérations de ces divers mouvements, à savoir : $\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Étudions d'abord le cas d'une trajectoire rectiligne.

Mouvement rectiligne.

Soient (*fig.* 43) MD la trajectoire, Ax, Ay, Az, trois axes que nous supposerons, pour fixer les idées, rectangulaires. De l'équation

$$v_x = v\cos\alpha, \tag{1}$$

α étant constant, on déduit

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha,$$

c'est-à-dire, en désignant par j_x et par j l'accélération de la projection et l'accélération du mobile lui-même,

$$j_x = j\cos\alpha, \tag{2}$$

équation de même forme que l'équation (1).

Ainsi, *dans le cas du mouvement rectiligne*, tous les résultats qui sont relatifs aux projections des vitesses s'appliquent aux accélérations; et nous pouvons énoncer, relativement à la projection orthogonale ou oblique du mouvement rectiligne, le théorème général suivant :

Théorème I. — *Dans le mouvement rectiligne, la résultante des vitesses des trois projections du point mobile est dirigée suivant la trajectoire de ce mobile, et égale à sa vitesse* v;

la résultante des accélérations des projections est aussi dirigée suivant la trajectoire rectiligne, elle a pour valeur $\frac{dv}{dt}$.

En supposant toujours le mouvement rectiligne, on trouverait des relations projectives du même genre entre les dérivées du troisième, du quatrième ordre, etc., si l'on voulait s'en occuper.

Mouvement curviligne.

Les théorèmes relatifs aux vitesses s'appliquent à une trajectoire curviligne aussi bien qu'à une trajectoire rectiligne; en effet, tant qu'on s'occupe seulement de deux points infiniment voisins, il est permis de remplacer une courbe quelconque par sa tangente.

Au contraire, la courbure de la trajectoire intervient nécessairement dans les questions qui se rapportent aux accélérations, questions dans lesquelles on doit considérer sur la trajectoire, non plus deux, mais trois points infiniment voisins, deux éléments consécutifs.

En effet, dans le cas où la trajectoire MM′ est une ligne courbe (*fig.* 44), l'angle α n'est pas constant, et la différentiation de l'équation (1) produit

$$j_x = j\cos\alpha + v\frac{d.\cos\alpha}{dt}. \qquad (3)$$

L'équation (2) cesse donc d'avoir lieu, et l'accélération de la projection n'est pas la projection de l'accélération du mobile; ou, si l'on veut, la résultante des quantités j_x, j_y, j_z, dans le mouvement curviligne, n'est pas dirigée suivant la tangente à la trajectoire; elle n'a pas pour valeur $\frac{dv}{dt}$.

On est ainsi averti de l'existence d'un nouvel élément, qui dépend, on ne saurait en douter, de la courbure de la trajectoire du mobile : c'est en cherchant, par une étude approfondie, à apprécier l'influence de cette courbure, que nous arriverons à donner la relation géométrique qui existe entre les éléments du second ordre différentiel, dans les divers mouvements simultanés qui nous occupent.

Mais auparavant faisons une application de ce qui est déjà acquis, afin de bien éclaircir toutes ces notions primordiales.

Mouvement de la projection d'un point qui se meut sur un cercle d'un mouvement uniforme.

Soient Ax, Ay (*fig.* 45) deux axes auxquels nous rapportons le mouvement. Prenons le point O pour origine des espaces, et convenons de compter les temps à partir de l'instant où le mobile M est en ce point.

Les équations du mouvement circulaire uniforme de ce mobile sont

$$s = at,$$
$$v = a = \omega R,$$

en désignant la vitesse angulaire par ω.

Considérons le mouvement du point P, projection de M sur l'axe des y. L'équation qui donne l'espace parcouru en fonction du temps est

$$y = OP = R(1 - \cos\omega t); \tag{4}$$

d'où, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à t,

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \omega R \sin\omega t. \tag{5}$$

Mais la quantité v_y peut aussi s'obtenir, en vertu de la théorie précédente, en considérant la vitesse du point P comme la projection de la vitesse ωR, comptée sur la tangente au cercle dans le sens de la flèche : on retrouve ainsi précisément la valeur (5), ce qui vérifie le théorème de la projection des vitesses.

Quant à l'accélération du point P, nous l'aurons en différentiant l'équation (5) :

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega^2 R\cos\omega t = \omega^2(R - y) = \omega^2 \times CP. \tag{6}$$

Cette accélération est proportionnelle à la distance qui sépare le point P du point fixe C.

Or, dans le cas actuel, l'accélération du point M étant nulle, il est bien évident que l'accélération de la projection n'est pas la projection de l'accélération.

Construisons les courbes des espaces, des vitesses, des

accélérations, pour le mouvement du point P, d'après les équations (4), (5) et (6) (*fig.* 46). On voit par ces courbes que le point P est animé d'un mouvement de va-et-vient, dont l'amplitude est donnée par le diamètre du cercle. La durée T, d'une oscillation complète, est égale au temps d'une révolution du point M, soit $\frac{2\pi}{\omega}$. En introduisant cette quantité T dans les formules, à la place de ω, il vient

$$(7)\qquad \begin{cases} y = R\left(1 - \cos 2\pi \dfrac{t}{T}\right), \\ v_y = \dfrac{2\pi R}{T} \sin 2\pi \dfrac{t}{T}, \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} \cos 2\pi \dfrac{t}{T}. \end{cases}$$

On a souvent besoin, dans les machines, de communiquer à certaines pièces un mouvement oscillatoire, rectiligne ou à peu près. Les données de la question sont alors l'amplitude de l'excursion et la durée d'une oscillation complète, c'est-à-dire les quantités 2R et T des formules (7); quant à la loi du mouvement entre les positions extrêmes, elle est assez généralement à peu près arbitraire.

Toutes les fois qu'il en sera ainsi, on devra toujours se rapprocher le plus possible de la loi précédente.

En effet, les trois courbes qui représentent cette loi sont parfaitement continues, régulières et symétriques : la vitesse et l'accélération diminuent graduellement jusqu'à l'instant de leur changement de sens; et les écarts de ces deux quantités suivent des lois identiques, de part et d'autre de leurs valeurs moyennes.

Considérons une manivelle (*fig.* 47) tournant autour d'un centre fixe, et terminée par un bouton M. Pour projeter le point M sur une direction fixe, le moyen *géométriquement* le plus simple consiste à engager le bouton de la manivelle dans une rainure, fixée à l'extrémité d'une tige guidée : si le mouvement de la manivelle est uniforme, un point quelconque de la tige est animé du mouvement dont nous venons de donner les lois.

Nous verrons (IIe Section, § XIII) que le petit appareil ap-

pelé *excentrique triangulaire* fournit également une solution du problème géométrique qui nous occupe, au moins dans certaines périodes de son mouvement.

Mais, ces dispositions offrant certains inconvénients au point de vue pratique, on préfère généralement employer une barre rectiligne, ou bielle, qui s'articule d'une part avec le bouton de la manivelle, d'autre part avec la tige guidée qui doit recevoir le mouvement de va-et-vient. Ce mouvement ne sera pas tout à fait identique à celui de la projection du point M, en raison de l'obliquité variable de la bielle; mais l'influence de cette obliquité est d'autant moins sensible que la bielle est plus longue par rapport à la manivelle : en supposant la bielle infinie, on retomberait exactement sur le cas précédent.

Pratiquement, quand la bielle dépasse cinq fois la longueur de la manivelle, le mouvement de l'extrémité de cette bielle diffère assez peu du mouvement oscillatoire type que nous venons d'étudier.

Nous reviendrons sur toutes ces questions dans la partie du cours consacrée spécialement à l'étude géométrique des machines.

Théorie générale de l'accélération dans le mouvement curviligne.

Considérons une trajectoire curviligne quelconque (*fig.* 48), rapportée à trois axes coordonnés rectangulaires ou obliques; et soit

$$x = \varphi(t) \tag{8}$$

l'équation du mouvement de la projection du mobile sur l'axe des x.

On peut toujours développer la fonction $\varphi(t)$ par la formule de Maclaurin, et écrire

$$x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \dots; \tag{9}$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x = B + 2Ct + 3Dt^2 + \dots, \\ \dfrac{dv_x}{dt} = 2C + 6Dt + \dots \end{cases} \tag{10}$$

En faisant $t = 0$ dans ces équations, on trouve

$$(11) \qquad A = x^0, \quad B = v_x^0, \quad C = \frac{1}{2} j_x^0, \dots$$

D'où, en désignant par θ un temps infiniment petit, et négligeant les termes du 3e ordre,

$$(12) \qquad x = x^0 + v_x^0 \theta + \frac{1}{2} j_x^0 \theta^2 \ (*).$$

Cela posé, quel que soit le système de projections employé, nous savons que la vitesse v_x^0 est la projection de la vitesse v^0; mais nous ne connaissons aucune relation entre les accélérations, telles que j_x, des projections du mobile sur un axe quelconque; nous ne savons pas non plus comment ces diverses quantités sont liées avec l'accélération proprement dite, j.

Simplification des équations du mouvement. — Pour arriver à combler cette lacune, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est de transporter les axes coordonnés au point M_0, dans le voisinage duquel nous nous proposons d'étudier les diverses affections du mouvement. On a ainsi

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad z^0 = 0.$$

De plus, je prends pour plan des xy le plan osculateur de la trajectoire; alors, quelle que soit la direction de l'axe des z, l'une des équations du mouvement sera nécessairement, avec l'approximation dont nous nous contentons,

$$z = 0,$$

puisque le plan osculateur contient par définition trois points infiniment voisins de la trajectoire du mobile, les seuls dont nous nous occupions actuellement.

Enfin, dirigeons l'axe des x suivant la tangente à la trajec-

(*) On voit que négliger les termes du troisième degré en θ revient à supposer le mouvement uniformément varié. Il est évident que, pour chercher des relations entre des accélérations simultanées, il n'est pas nécessaire de s'inquiéter des variations que ces quantités doivent subir par la suite. A ce point de vue, on peut indifféremment conserver ou supprimer l'indice 0, dont les accélérations sont affectées dans les formules (11), (12), et autres analogues.

toire, au point M_0; il résulte de là que, quel que soit l'axe des y dans le plan osculateur, la projection de la vitesse v^0 sur cet axe sera nulle, et la projection de la même vitesse sur l'axe des x sera égale à v^0.

On aura donc en définitive, en négligeant d'écrire l'équation $z = 0$, les équations du mouvement sous la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} x = v^0\theta + \frac{1}{2}j'\theta^2, \\ y = \frac{1}{2}j''\theta^2, \end{cases}$$

j' et j'' étant de certains coefficients, qui dépendent du système d'axes adopté.

Cela posé, à partir du point M_0 (*fig.* 49), je prends sur la tangente une longueur M_0T égale à $v^0\theta$; je joins le point T, ainsi déterminé, au point M; et je prends un nouvel axe des y parallèle à TM.

L'abscisse du point M, dans ce système, se trouve ainsi, par construction, égale à M_0T ou à $v^0\theta$; quant à l'expression de y, elle conserve la forme (13), à la condition d'attribuer au coefficient que j'avais représenté d'une manière générale par j'' la valeur particulière qui convient aux nouveaux axes coordonnés. Soit J cette valeur; nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Quelle que soit la trajectoire d'un point mobile, on peut toujours trouver dans le plan osculateur de cette courbe deux axes, généralement obliques, tels que les équations du mouvement, rapporté à ces deux axes, aient la forme simple*

$$(14)\qquad \begin{cases} x = v^0\theta, & v_x = v^0, \\ y = \frac{1}{2}J\theta^2, & v_y = J\theta. \end{cases}$$

Accélération totale. — La marche même que nous avons suivie pour établir ce théorème démontre que le système d'axes dont il est ici question est unique; et il est naturel de penser que la quantité J doit jouer le principal rôle dans la théorie des accélérations. Cette quantité J, que nous venons de définir, est ce qu'on appelle l'*accélération totale*, et la

direction de l'axe, $M_0 y'$, qui correspond aux équations simplifiées (14), est la direction de l'accélération totale.

La considération de l'accélération totale est due au général Poncelet; elle a une très-grande importance en Cinématique.

Cette importance résulte du théorème suivant, qui est fondamental dans la théorie des accélérations simultanées.

THÉORÈME III. — *L'accélération de la projection d'un point mobile, sur un axe quelconque, est la projection de l'accélération totale sur le même axe.*

Reprenons l'équation générale

$$x = x^0 + v_x^0 \theta + \frac{1}{2} j_x \theta^2,$$

qui donne la loi du mouvement de la projection d'un point mobile sur une droite quelconque, quand on néglige les puissances de θ supérieures à la deuxième.

On sait qu'il n'y a qu'une seule manière de développer une fonction suivant les puissances croissantes de la variable dont elle dépend; dès lors, si, par un moyen quelconque, nous trouvons pour x une expression de la forme

$$A + B\theta + C\theta^2 + \ldots,$$

le coefficient C sera nécessairement égal à la moitié de l'accélération, j_x, du mouvement rectiligne du point P.

Ceci posé, prenons trois axes quelconques Ax, Ay, Az (*fig.* 51), et projetons l'arc infiniment petit M_0M sur l'axe des x : la projection de cet arc est égale à celle du chemin brisé M_0TM. Or la projection de M_0T est $v_x^0 \theta$; la projection de TM est de même le produit du facteur numérique $\frac{\theta^2}{2}$ p r la projection de J, projection qu'il est naturel de représenter par J_x; donc

$$x = x^0 + v_x^0 \theta + \frac{1}{2} J_x \theta^2.$$

On conclut de là que j_x est la même chose que J_x, c'est-à-dire que l'accélération de la projection sur un axe quelconque est la projection de l'accélération totale sur le même axe.

Projection du mouvement sur un plan. — Si nous projetons sur un plan (*fig.* 52), parallèlement à une direction quel-

conque, l'arc de courbe M_0M et la ligne brisée M_0TM, nous démontrerons par un raisonnement analogue que :

THÉORÈME IV. — *L'accélération totale de la projection d'un mobile sur un plan est la projection de l'accélération totale sur ce plan.*

Construction de l'accélération totale. — De la définition que nous avons donnée de l'accélération totale résulte un premier moyen de construire cette quantité en grandeur et en direction. Il suit en effet de cette définition que :

THÉORÈME V. — *Si on considère l'arc parcouru pendant le temps infiniment court* θ, *et qu'on porte sur la tangente à cet arc une longueur* $M_0T = v^0\theta$, *la ligne* TM *donne la direction de l'accélération totale; et, en divisant la longueur de cette ligne par le carré du temps, on obtient la moitié de* J.

Ce résultat peut encore s'énoncer ainsi :

La corde du chemin parcouru pendant le temps θ *est la résultante des quantités* $v^0\theta$ *et* $\frac{1}{2}J\theta^2$.

Les équations

$$v_x = v^0,$$
$$v_y = J\theta,$$

fournissent une autre construction de l'accélération totale (*fig.* 50), quand on connaît les vitesses v^0 et v en grandeur et en direction; en effet :

THÉORÈME VI. — *La vitesse, au bout d'un temps infiniment petit* θ, *est la résultante de la vitesse initiale* v^0 *et de la vitesse* $J\theta$.

En d'autres termes :

Si l'on décompose la vitesse v *en deux, dont l'une soit la vitesse initiale* v^0, *l'autre sera en grandeur et en direction égale à* $J\theta$ (*).

(*) Dans le mouvement rectiligne, les deux quantités v_0 et $J\theta$ ont une direction commune, et c'est leur *somme algébrique* qui donne la vitesse finale v. Dans le cas général, la somme est remplacée par une résultante, comme cela arrive toutes les fois qu'on a à ajouter des longueurs dont les directions ne sont pas les mêmes.

Quand on connaît les lois du mouvement des projections du mobile sur trois axes, on a, d'après le théorème III, les projections correspondantes de l'accélération totale; on peut donc construire cette quantité.

Ceci démontre le théorème suivant, qui n'est autre chose que le théorème III sous une autre forme :

THÉORÈME VII. — *Les accélérations des projections d'un point mobile, sur trois axes coordonnés quelconques, ont une résultante qui est située dans le plan osculateur de la trajectoire, et qui représente en grandeur et en direction l'accélération totale* J.

La grandeur et la direction de cette résultante sont indépendantes du système d'axes considéré.

Enfin, quand on connaît la trajectoire, et la loi du mouvement du mobile sur cette trajectoire, on peut construire l'accélération totale en n'employant que des quantités finies, et sans passer par l'intermédiaire des projections du mouvement sur trois axes.

Pour cela, calculons la quantité $\frac{dv}{dt}$, que nous appelions simplement l'accélération, quand nous étudiions le mouvement indépendamment de la trajectoire.

Reprenons pour axes la tangente à la trajectoire, au point M_0, et la direction de l'accélération totale (*fig.* 50) : on a dans ce système, et pour tous les points compris entre M_0 et M,

$$v_x = v^0, \quad v_y = J\theta;$$

d'où

$$v^2 = v^{0^2} + J^2\theta^2 + 2v^0 J\theta \cos\alpha.$$

Différentions cette équation, il vient

$$v\frac{dv}{dt} = J^2\theta + v_0 J\cos\alpha; \tag{15}$$

d'où, comme θ est infiniment petit, et que par suite v diffère infiniment peu de v^0,

$$\frac{dv}{dt} = J\cos\alpha.$$

Il suit de là que $\frac{dv}{dt}$ est la projection de l'accélération totale sur la tangente à la trajectoire.

Cette quantité $\frac{dv}{dt}$ s'appellera désormais *accélération tangentielle* (*); et l'on a le théorème :

THÉORÈME VIII. — *L'accélération tangentielle est la projection orthogonale de l'accélération totale sur la tangente.*

Ayant ainsi la projection de l'accélération totale sur la tangente, nous aurons achevé de définir cette quantité, si nous en donnons la projection sur la normale principale.

Or l'équation du mouvement, projeté orthogonalement sur la normale principale, est de la forme

$$y = \frac{1}{2} \mathrm{J} \sin\alpha . \theta^2.$$

Mais, en considérant l'arc M_0M comme appartenant au cercle osculateur de la trajectoire, et désignant le rayon de ce cercle par ρ, on a (*fig.* 53)

$$ds^2 = 2\rho y;$$

d'où, en remplaçant y par sa valeur,

$$ds^2 = \mathrm{J}\rho \sin\alpha . \theta^2.$$

Enfin, comme le quotient de ds par θ ou dt n'est autre chose que la vitesse v, on trouve pour la projection cherchée :

$$\mathrm{J} \sin\alpha = \frac{v^2}{\rho}. \tag{16}$$

THÉORÈME IX. — *La projection de l'accélération totale sur la normale principale est égale à* $\frac{v^2}{\rho}$ *: elle est centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire.*

L'*accélération centripète* est proportionnelle à la courbure $\frac{1}{\rho}$, quand on considère divers mobiles parcourant des

(*) Dorénavant le mot *accélération*, quand il nous arrivera, pour abréger, de l'employer sans épithète, devra toujours être entendu dans le sens d'*accélération totale*.

trajectoires différentes avec des vitesses égales. Si l'on veut introduire, à la place de la vitesse propre v, la vitesse angulaire ω autour du centre de courbure, il faudra faire

$$v = \omega\rho,$$

d'où

$$\frac{v^2}{\rho} = \omega^2\rho,$$

nouvelle expression de l'accélération centripète.

L'accélération totale étant comprise dans le plan osculateur de la trajectoire, l'accélération tangentielle et l'accélération centripète suffisent à la détermination de cette quantité. Ces deux composantes dépendent des données immédiates de Géométrie et de Cinématique qui définissent le mouvement dont on s'occupe; elles montrent distinctement l'influence, sur l'accélération du mouvement projeté, de la courbure de la trajectoire d'une part, du changement de la vitesse propre, de l'autre :

Dans le mouvement curviligne uniforme, l'accélération tangentielle est nulle, donc l'accélération totale est centripète (*);

Dans le mouvement rectiligne, l'accélération normale à la trajectoire est nulle, et il n'y a pas d'autre accélération que l'accélération tangentielle;

Enfin, dans le cas général, les deux accélérations partielles se composent, pour donner naissance à l'accélération totale :

THÉORÈME X. — *Si on mène en un point de la trajectoire d'un point mobile la tangente et la normale principale, et*

(*) On voit que nous appliquons ici à un mouvement uniforme le mot *accélération*, modifié d'ailleurs par une épithète convenable. Il faut bien remarquer que, lorsqu'il s'agit de grandeurs géométriques, deux lignes dont les longueurs sont les mêmes, mais dont les directions sont différentes, ne doivent pas être considérées comme géométriquement égales.

L'extension que nous donnons ici au mot *accélération* me semble donc parfaitement légitime, et je ne saurais admettre avec M. Duhamel (*Cours de Mécanique*, 3e édition, p. 19) que *ce soit par trop détourner les mots de leur sens naturel.*

J'ajouterai que je ne crois pas que jamais personne ait *désigné* la quantité J *sous le nom d'accélération du mouvement sur la trajectoire.* La dénomination d'*accélération totale,* tirée des leçons du général Poncelet, ne peut donner lieu à aucune ambiguïté.

qu'on porte respectivement sur ces lignes des longueurs égales à $\frac{dv}{dt}$ *et à* $\frac{v^2}{\rho}$, *la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites représente en grandeur et en direction l'accélération totale du mobile.*

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour compléter l'étude du mouvement oscillatoire défini par les équations (4), (5) et (6) (p. 63).

Dans le mouvement circulaire uniforme du point M, l'accélération totale est centripète; elle a pour valeur $\omega^2 R$. La projection de cette ligne sur le diamètre OC, ou sur l'axe Ay, est

$$J_y = \omega^2 R \cos \omega t.$$

C'est précisément l'expression que nous avons trouvée directement pour l'accélération du point P.

Faisons encore une application de la théorie tout à fait capitale que nous venons d'exposer.

Accélération totale dans le mouvement des planètes autour du soleil.

1° Je dis en premier lieu que l'accélération totale est dirigée constamment vers le foyer ou pôle F, autour duquel les aires décrites sont proportionnelles aux temps (*fig.* 54).

En effet, considérons la planète dans une position quelconque M_0, et soient M, M_1, deux positions infiniment voisines de la première, répondant à deux intervalles de temps consécutifs égaux.

Comme les aires parcourues sont proportionnelles aux temps, on a

$$MM_1F = FMM_0.$$

Cela posé, pour avoir la direction de l'accélération totale, il faut prendre sur la direction de l'élément M_0M une longueur M_0T, égale à l'espace parcouru en vertu de la vitesse v^0 pendant le temps correspondant au déplacement réel M_0M_1, et joindre le point T au point M_1.

Les deux éléments consécutifs du temps ayant été pris égaux, on a

$$MT = M_0M,$$

d'où l'on conclut

$$MTF = FMM_0 = MM_1F.$$

Mais, les deux triangles MTF et MM_1F ayant la base MF commune, leurs sommets T, M_1, sont sur une parallèle à cette base; donc TM_1 est parallèle à MF, et la direction de l'accélération totale, au point M_0, est celle du rayon vecteur MF, ou M_0F.

2° Nous avons trouvé précédemment, en supposant la vitesse aréolaire constante et égale à C, que la vitesse correspondante, v, du mobile sur sa trajectoire, avait pour expression $\frac{2C}{r\cos i}$; donc

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{4C^2}{\rho r^2 \cos^2 i}.$$

D'après la théorie précédente, cette quantité est aussi égale à $J\cos i$: on a ainsi pour l'accélération totale :

$$J = \frac{4C^2}{r^2 \times \rho \cos^3 i}. \tag{17}$$

Newton a démontré d'autre part que le produit $\rho\cos^3 i$ est constant dans l'ellipse; donc l'accélération totale varie en raison inverse du carré de la distance de la planète au soleil.

Remarquons que notre premier résultat est indépendant de la nature de la courbe décrite; ainsi :

Toutes les fois que les aires décrites par un mobile autour d'un point fixe F *sont proportionnelles aux temps, l'accélération totale est dirigée vers le point* F.

Quant à la grandeur de cette accélération totale, elle dépend de la nature de la trajectoire, et de la position du pôle F dans le plan de cette courbe, par la quantité $\rho\cos^3 i$. Ainsi :

Dans l'ellipse rapportée à son centre, on trouve

$$\rho\cos^3 i = \frac{K}{r^3}, \quad J = K'r;$$

Dans la spirale logarithmique, on a

$$\rho\cos^3 i = Kr, \quad J = \frac{K_1}{r^3}.$$

CHAPITRE II.

MOUVEMENT D'UN POINT RELATIVEMENT A UN SYSTÈME MOBILE.

La notion du mouvement relatif nous est aussi familière que celle du mouvement absolu. Nous avons dit que, pour étudier le mouvement d'un point dans l'espace, on compare les positions successives de ce point à certains points fixes, qu'on nomme *points de repère*. Le géomètre emploie habituellement pour système de comparaison trois axes rectangulaires; on peut d'ailleurs faire usage de tout autre système de coordonnées que l'on voudra.

Mais si, au lieu de comparer les positions successives du mobile à des points fixes, on les rapporte à des points de repère qui soient eux-mêmes en mouvement, il est clair que le mouvement qu'on observera ainsi ne sera pas le mouvement véritable ; on l'appelle *mouvement relatif*.

C'est ainsi qu'un voyageur en bateau voit se déplacer tous les objets parfaitement fixes qui sont sur les rives. Par contre, un objet qui se mouvrait sur le pont du bateau, en sens inverse de la marche de celui-ci et avec une vitesse égale, serait réellement au repos. Dans tous les cas il est évident que le mouvement réel, ou *absolu*, dépend à la fois du mouvement apparent, et du déplacement du bateau ou *mouvement d'entraînement*. On dit que le mouvement absolu est *composé* des deux derniers; et le problème qui consiste à déterminer le mouvement absolu, quand on connaît le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement, est connu sous le nom de problème de la *composition des mouvements*.

§ V. — Définition du mouvement relatif d'un point.

Il s'agit de préciser ces notions. Imaginons que nous mesurions à chaque instant les coordonnées d'un point mobile par rapport à trois axes, rectangulaires ou obliques. Si ces axes sont

fixes, les variations des coordonnées nous feront connaître le mouvement absolu du point.

Dans le cas contraire, considérons quelque part trois axes fixes pareils aux premiers, et un point fictif assujetti à avoir à chaque instant, par rapport à ces axes fixes, des coordonnées égales à celles du point en question par rapport aux axes mobiles. Le mouvement absolu de ce point est ce qu'on appelle le mouvement relatif du point donné. Ainsi :

DÉFINITION. — *Le mouvement d'un point relativement à des axes mobiles est le mouvement absolu d'un point fictif qui aurait à chaque instant, par rapport à des axes fixes, les mêmes coordonnées que le premier par rapport aux axes mobiles.*

La trajectoire de ce point fictif est la *trajectoire relative* du point donné, sa vitesse est la *vitesse relative*, son accélération totale est l'*accélération totale relative*.

Importance de la théorie des mouvements relatifs. — C'est ici le lieu de remarquer qu'au commencement du cours nous avons fait une pétition de principe, qui n'avait pas alors d'inconvénients, mais sur laquelle il faut revenir à présent.

Nous avons dit qu'on reconnaissait l'état de repos ou de mouvement d'un point, en mesurant les coordonnées de ce point par rapport à trois axes fixes. Or, il est clair qu'en supposant que nous possédions ainsi trois axes reconnus pour fixes, nous avons admis précisément ce qui était en question. Ceci n'infirme d'ailleurs en rien les résultats auxquels nous sommes arrivés, du moins au point de vue rationnel ; en effet, si jusqu'ici nous n'avons aucun moyen de nous procurer des axes fixes, nous concevons certainement l'existence d'un pareil système d'axes : et cela suffit pour légitimer toutes les spéculations qui précèdent.

Mais il importe actuellement d'examiner le cas où les axes auxquels on rapporte le mouvement d'un corps sont mobiles, puisqu'on n'est jamais assuré d'avoir à sa disposition des points de repère fixes d'une manière absolue.

Les anciens, croyant à l'immobilité de notre globe, rapportaient les mouvements qui s'effectuent à la surface de la terre, et même dans le ciel, à des axes tels que la verticale du lieu où ils observaient, l'horizontale méridienne, et celle

qui est perpendiculaire à celle-ci. On sait aujourd'hui que la terre tourne; et il est à remarquer que des phénomènes purement mécaniques auraient pu, à défaut des découvertes astronomiques, conduire les savants à la connaissance de cette vérité. En effet, la rotation de la terre produit, comme nous le verrons plus tard, des perturbations sensibles dans les mouvements des pendules, le tir des projectiles, la chute des corps pesants, etc. Pour ne citer qu'un seul exemple, l'observation attentive des oscillations du pendule, en montrant que les phénomènes observés sont incompatibles avec l'hypothèse de la fixité de la terre, aurait démontré récemment le mouvement de rotation de notre globe, si cette vérité n'avait été déjà bien et dûment acquise à la science. C'est dans le ciel qu'on cherche aujourd'hui des points de repère fixes. Encore est-il des phénomènes, exigeant une observation plus délicate, qui semblent démontrer que les étoiles dites fixes elles-mêmes sont en mouvement par rapport à notre système solaire. Il suit de là que, quoi que nous fassions, nous n'observerons jamais que des mouvements relatifs : c'est ce qui donne un grand intérêt à la théorie que nous allons aborder.

Admettons donc qu'on rapporte le point mobile qu'on étudie à un système de comparaison animé lui-même d'un certain mouvement. Pour définir le mouvement de ce système, il faut que nous anticipions un peu sur le chapitre suivant, consacré au mouvement des systèmes de points et en particulier des corps solides; mais il n'y a à cela aucun inconvénient : il y en aurait au contraire beaucoup à vouloir s'astreindre à un ordre trop méthodique, si l'on devait y perdre sous le rapport de la clarté.

Considérons un système de points mobiles dont la réunion constitue un corps solide, c'est-à-dire non déformable. Pour appliquer le calcul aux mouvements de ce système, nous choisirons trois axes, fixes par rapport à lui, Ox_1, Oy_1, Oz_1 : les coordonnées de tous les points du corps par rapport à ces axes seront des constantes, le corps étant supposé invariable de forme; et il suffira évidemment de connaître le mouvement de ces trois axes pour que celui du système tout entier soit déterminé. En effet, on pourra toujours assigner à un instant

donné la position d'un point du système d'après la connaissance de la situation actuelle des axes, et des coordonnées x_1, y_1, z_1, prises par rapport à ces axes, coordonnées qui n'ont pas changé de valeur. Quand nous dirons que nous considérons un point comme lié invariablement au solide, cela voudra dire qu'à partir de l'instant où nous établissons cette liaison, les coordonnées x_1, y_1, z_1, de ce point resteront constantes.

D'autres fois, on trouvera plus commode de définir simplement les mouvements de trois points du système (non situés en ligne droite) : ceci fait également connaître le mouvement du solide tout entier, puisque les distances mutuelles de deux points d'un solide sont invariables, quel que soit le déplacement commun de l'ensemble.

Cela posé, si l'on cherche à se représenter un corps solide qui se transporte dans l'espace d'une manière quelconque, on se fait fort difficilement une idée d'un pareil mouvement. On a, au contraire, une idée très-nette de deux mouvements simples que nous allons définir, et qui sont les seuls dont nous nous occuperons pour le moment.

Mouvement de translation.

Si trois points, A, B, C, d'un corps solide en mouvement (*fig.* 55) ont à un instant donné quelconque des vitesses égales et parallèles, le mouvement porte le nom de *mouvement de translation.*

Les côtés du triangle ABC se meuvent parallèlement à eux-mêmes : car, dans un espace de temps infiniment petit, les sommets de ce triangle parcourent tous trois des chemins parallèles, et égaux au produit de la vitesse commune par l'élément du temps. Une droite quelconque du système reste également parallèle à elle-même dans toutes les positions du solide : on dit souvent que le corps tout entier se meut *parallèlement à lui-même.* Enfin les trajectoires de tous les points sont superposables, elles peuvent être d'ailleurs rectilignes ou curvilignes.

La vitesse commune de tous les points, à un instant donné, s'appelle la vitesse du solide à cet instant. La direction et la grandeur de cette vitesse varient en général avec le temps d'une manière quelconque.

Mouvement de rotation.

Si deux points d'un solide en mouvement restent constamment immobiles dans l'espace, tous les points de la ligne qui joint ces deux points restent aussi fixes. Les autres points du corps décrivent des cercles perpendiculaires à cette droite. On dit que le solide *tourne* autour de la droite fixe, à laquelle on donne le nom d'*axe de rotation*.

Il serait possible que cet axe n'appartînt pas au solide proprement dit; c'est ce qui arrive dans le cas d'un anneau tournant autour de son axe de figure. Cette circonstance ne modifie en rien ce que nous venons de dire, d'après la définition que nous avons donnée de ce qu'on doit entendre par *un solide*, au point de vue géométrique.

Dans le mouvement de rotation, les perpendiculaires abaissées des divers points du solide sur l'axe décrivent simultanément des angles égaux; la valeur commune de tous ces angles, correspondante à un temps quelconque, est ce qu'on appelle le *déplacement angulaire* du solide pendant ce temps. Un mouvement de rotation est défini par la loi qui donne la valeur de ce déplacement angulaire en fonction du temps. La *vitesse angulaire* est le quotient d'un déplacement angulaire infiniment petit par le temps dt.

Soient ω cette vitesse angulaire, et v la vitesse d'un point quelconque situé à une distance r de l'axe de rotation; on a

$$v = \omega r.$$

Un mouvement de rotation est uniforme ou varié, selon que la vitesse angulaire est constante ou variable : dans ce dernier cas, la quantité $\frac{d\omega}{dt}$ s'appelle l'*accélération angulaire*.

Il faut bien se garder de confondre une translation suivant une trajectoire circulaire avec une rotation. On dit communément que la lune tourne autour de la terre; mais pour que cette assertion soit fondée, il faut démontrer que le mouvement de la lune est bien un mouvement de rotation et non pas une translation circulaire.

Représentons par C (*fig.* 56) une position du globe lunaire,

et par AB la trace, sur le plan de l'orbite, du cercle de contour apparent.

Dans l'hypothèse d'un mouvement de translation, le diamètre AB doit rester parallèle à lui-même; et il est évident qu'on verra successivement de la terre, supposée en T, toutes les parties de la lune dans la période entière de sa révolution. Si, au contraire, le mouvement est une rotation, le diamètre AB restera toujours perpendiculaire à la ligne des centres, et par suite on ne verra jamais qu'un seul des hémisphères de la lune. L'observation ayant démontré que c'est précisément là ce qui arrive (du moins si l'on fait abstraction des petites inégalités du mouvement de notre satellite), il s'ensuit qu'on a le droit de dire que la lune a un mouvement de rotation autour de la terre supposée fixe.

Le soleil, dans son mouvement apparent, décrit, lui aussi, à peu près un cercle autour de la terre; mais comme cet astre se montre successivement à nous sous toutes ses faces, on voit que son mouvement n'est pas une rotation. Ce n'est d'ailleurs pas davantage une translation : c'est un mouvement plus compliqué sur lequel nous reviendrons.

Il est évident qu'il n'y a lieu de faire ces distinctions que dans le cas où il s'agit d'un corps de dimensions finies : le mouvement d'un point n'est pas plus une translation qu'une rotation; c'est un mouvement simple.

Données numériques relatives à la rotation diurne de la terre. — La terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de la ligne des pôles. La durée d'une révolution complète est ce que les astronomes appellent le *jour sidéral*, lequel se compose de 86164 secondes de temps moyen.

On a donc pour la vitesse angulaire de la terre :

$$n = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073.$$

La vitesse d'un point situé à l'équateur est nR ou 0,000073.R, c'est-à-dire environ 465 mètres : c'est à peu près la vitesse d'un boulet de canon.

Enfin le carré de la vitesse angulaire de la terre est une quantité fort petite dont la valeur est

$$n^2 = 0{,}00000053.$$

Représentation géométrique des rotations.

Pour qu'une rotation soit définie d'une manière complète, il faut qu'on connaisse l'axe autour duquel elle s'effectue, la vitesse angulaire ω, et enfin le sens du mouvement. On représente la vitesse angulaire par une longueur, en la rapportant à une unité arbitraire, et on porte cette longueur sur la direction de l'axe; de sorte qu'une simple ligne terminée OP (*fig.* 57) représente à la fois l'axe et la grandeur de la rotation. Cette même ligne *en indiquera encore le sens, par cette convention qu'en se plaçant à l'extrémité* P *considérée comme le nord, pour regarde devant soi le point* O *considéré comme le midi, la rotation se fera de gauche à droite, comme se fait, à nos yeux, le mouvement du soleil* (*).

Ce sens est celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre, celui d'une vis que l'on enfonce. C'est le sens rétrograde des astronomes, le sens direct étant celui des mouvements réels.

Axe de la rotation terrestre. — Il suit de là que la ligne qui représente la rotation diurne est dirigée du centre de la terre vers le pôle sud : si l'on veut prendre pour axe la partie nord de la ligne des pôles, il faut attribuer à la vitesse angulaire la valeur négative

$$\omega = -n.$$

Il résulte encore de la convention précédente que, si l'on considère trois axes rectangulaires disposés à la manière ordinaire (*fig.* 58), une rotation Oz correspond à un mouvement dirigé de Ox vers Oy; et ainsi de suite, conformément aux flèches.

Composition et décomposition des mouvements.

Le problème de la composition des mouvements est celui dans lequel on demande de trouver le mouvement composé, quand on connaît le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif. Le problème inverse consiste, étant donné le mouvement réel d'un point, à trouver son mouvement par

(*) Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

rapport à un système dont le mouvement est également donné; ou bien encore, connaissant le mouvement réel et le mouvement apparent, à trouver le mouvement dont est animé le système de comparaison.

Nous prendrons toujours pour ce système de comparaison trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz (*fig.* 59). Nous mesurerons à chaque instant les coordonnées du point mobile par rapport à ces trois axes : en reportant ces coordonnées sur trois axes fixes, nous obtiendrons la trajectoire relative. Le mouvement relatif est celui qu'on observe quand on participe, sans en avoir conscience, au mouvement des axes de comparaison, et, dans ce cas, on qualifie souvent le mouvement relatif de mouvement *apparent;* mais on conçoit qu'il est également possible de mesurer les coordonnées d'un point par rapport à des axes mobiles desquels on est soi-même tout à fait indépendant, et dont on connaît parfaitement le mouvement.

Reportons-nous maintenant à l'origine du mouvement (c'est-à-dire à un instant quelconque, pris pour origine des temps), et supposons qu'à partir de cet instant les axes mobiles entraînent avec eux la trajectoire relative; le point M, dans son mouvement absolu, restera constamment sur celle-ci : et l'on saura trouver à chaque instant la position de ce mobile dans l'espace, puisqu'on connaît par le mouvement des axes la position de la trajectoire relative, au temps t, et par la loi du mouvement sur cette trajectoire, le lieu apparent du mobile à la même époque.

Soient (*fig.* 60) AB, A′B′, A″B″,..., les positions de la trajectoire relative, aux temps t, t', t'',...; et supposons qu'à ces diverses époques le mobile se trouve aux points M, N, P,..., de la courbe mobile AB.

A la fin du temps t, le mobile est en M; à la fin du temps t' il est au point N de la courbe AB; mais cette courbe se trouve alors dans la position A′B′, et le point N a été transporté en N′ : donc, à la fin du temps t', le mobile est en N′. On verra de même qu'à la fin du temps t'' il se trouve en P″, et ainsi de suite. Le point mobile décrit donc dans l'espace la trajectoire MN′P″...., et il occupe sur cette trajectoire les positions M, N′, P″,..., aux valeurs t, t', t'',..., du temps.

On a ainsi la trajectoire absolue, ainsi que la loi du mouvement sur cette trajectoire, c'est-à-dire que l'on connaît d'une manière complète le mouvement absolu, par le moyen des deux mouvements composants.

Analytiquement, le problème de la composition et de la décomposition des mouvements est une pure question de transformation de coordonnées.

Soient ξ', η', ζ', les coordonnées de l'origine des axes mobiles; désignons par a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' les cosinus des angles formés par ces axes mobiles avec les axes fixes; c'est-à-dire posons

$$\begin{cases} a = \cos\widehat{x,\xi}, & a' = \cos\widehat{y,\xi}, & a'' = \cos\widehat{z,\xi}, \\ b = \cos\widehat{x,\eta}, & b' = \cos\widehat{y,\eta}, & b'' = \cos\widehat{z,\eta}, \\ c = \cos\widehat{x,\zeta}, & c' = \cos\widehat{y,\zeta}, & c'' = \cos\widehat{z,\zeta}; \end{cases}$$

enfin soient x, y, z, les coordonnées relatives du point dont nous étudions le mouvement. Les formules générales de transformation donnent les valeurs suivantes pour les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes :

$$\begin{cases} \xi = \xi' + ax + a'y + a''z, \\ \eta = \eta' + bx + b'y + b''z, \\ \zeta = \zeta' + cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

En différentiant ces équations une première, puis une seconde fois, on trouverait les relations qui existent, d'abord entre les vitesses, puis entre les accélérations des divers mouvements considérés.

Ce sont ces relations que nous allons établir géométriquement dans les deux paragraphes suivants.

Composition d'un nombre quelconque de mouvements. — Il est aisé de comprendre qu'on peut avoir à composer non pas seulement deux, mais un nombre quelconque de mouvements.

Un point se meut sur un bateau, le bateau se meut à la surface de la terre, la terre tourne autour de la ligne des pôles; enfin cet axe du monde lui-même se transporte aux divers points de l'orbite elliptique que décrit notre globe autour du soleil. Le mouvement absolu du point doit être considéré comme composé de tous ces divers mouvements; et l'on peut

effectuer cette composition de proche en proche, au moyen des principes que nous venons de poser, absolument comme s'il n'y avait que deux mouvements.

Le mouvement du point sur le bateau est un mouvement relatif: en considérant le mouvement du bateau par rapport à la terre comme un mouvement d'entraînement, et composant ces deux mouvements, on trouvera le mouvement du point mobile par rapport à la terre.

Le mouvement qu'on obtient par cette composition est encore un mouvement relatif, puisque la terre n'est pas en repos; et la rotation diurne autour de la ligne des pôles est un nouveau mouvement d'entraînement, par rapport au mouvement que nous venons de déterminer : la composition de ces deux derniers mouvements donnera le mouvement du point mobile par rapport à des axes de direction constante, passant par le centre de la terre, et ainsi de suite.

§ VI. — Composition des vitesses.

Bornons-nous d'abord au cas de deux mouvements composants. La vitesse absolue d'un point, à chaque instant t, peut se déduire par une construction très-simple de la vitesse relative du même point, et de la vitesse dite d'*entraînement :* c'est-à-dire de la vitesse d'un point qui coïnciderait avec le point mobile M à l'époque t, et qui resterait ensuite invariablement lié aux axes mobiles.

Soient M (*fig.* 61) la position du mobile à l'époque t, AB sa trajectoire relative. Au bout du temps t' cette trajectoire, par l'effet du mouvement des axes, s'est trouvée transportée en A′B′, les divers points, M, N, P,..., venant en M′, N′, P′,....

Si le point M n'avait pas de mouvement relatif, il serait en M′ au bout du temps t'; mais on sait qu'il se déplace sur sa trajectoire relative, et qu'au lieu de se trouver en M′ il occupe la position N′ à l'époque t'. Il suit de là que

M′N′ est le déplacement relatif du point mobile,

MN′ est son déplacement absolu,

MM′ est le déplacement du point du système de comparaison qui coïncidait avec M, à l'époque t.

A la simple inspection de la figure, et quel que soit l'intervalle $t' - t$, on reconnaît que :

THÉORÈME I. — *La corde du chemin réellement parcouru dans un temps quelconque est la résultante* (*) *de la corde du déplacement relatif, et de celle du chemin suivi par le point lié aux axes, qui coïncidait avec le point mobile à l'instant initial.*

Parallélogramme des vitesses.—Imaginons maintenant que l'intervalle $t' - t$ tende indéfiniment vers zéro : les cordes tendront de plus en plus à se confondre avec leurs arcs, et à la limite elles auront pour valeurs respectivement

$$v\,dt, \quad v_r\,dt, \quad v_e\,dt,$$

si l'on se reporte à la définition de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. En même temps la figure MNN'M' a pour limite un parallélogramme, et nous venons de voir que les côtés infiniment petits et la diagonale de ce parallélogramme sont proportionnels aux vitesses v_r, v_e, v. Si donc sur la vitesse relative et la vitesse d'entraînement on construit un parallélogramme semblable à celui-ci (*fig.* 62), la diagonale de ce parallélogramme représentera en grandeur et en direction la vitesse absolue du mobile.

Donc :

THÉORÈME II. — *La vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.*

Cette proposition est connue sous le nom de *parallélogramme des vitesses.*

On peut observer que, si les vitesses v_e, v_r, changeaient de rôle, c'est-à-dire si la première était une vitesse relative et la deuxième une vitesse d'entraînement, la construction qui donne la vitesse absolue conduirait à un résultat parfaitement identique au précédent. Dans ce sens, on confond souvent les deux vitesses v_e, v_r, sous le nom de *composantes* de la vitesse absolue : c'est là une chose parfaitement indifférente,

(*) On sait ce que nous entendons par une droite *résultante* de deux autres.

au point de vue géométrique. Au point de vue de la réalité des choses, il faut bien remarquer que l'une des composantes est la vitesse du mobile, observée d'une certaine manière, et que l'autre est une vitesse d'entraînement qui n'a aucun rapport nécessaire avec le mouvement de ce mobile.

Si l'on se proposait de trouver la vitesse relative, les données étant la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement, on aurait à construire un côté d'un parallélogramme, connaissant la diagonale et le deuxième côté. On peut aussi considérer le côté inconnu MV_r (*fig.* 63) comme la diagonale du parallélogramme $MVV_rV'_e$, ce qui conduit au théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La vitesse relative est la résultante de la vitesse absolue, et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.*

Problème général de la composition des vitesses.

La règle que nous venons de démontrer pour un mouvement, composé de deux mouvements donnés seulement, s'étend sans difficulté au cas où les mouvements composants sont en nombre quelconque.

Dans ce cas, la vitesse MB (*fig.* 64), fournie par la composition de v_e et de v_r, doit être considérée comme une deuxième vitesse relative v'_r ; en la composant avec la deuxième vitesse d'entraînement, on aura une nouvelle résultante MC, et l'on continuerait ainsi tant qu'on aurait de nouvelles vitesses à composer. La vitesse absolue est la ligne qui ferme le polygone de toutes les vitesses composantes, c'est leur *résultante*, dans le sens géométrique du mot. On a donc le théorème général :

THÉORÈME IV. — *Quel que soit le nombre des mouvements à composer, la vitesse absolue est la résultante de toutes les vitesses correspondantes.*

Ce théorème est indépendant de l'ordre dans lequel on considère les vitesses composantes. Il permet de déterminer la direction et la grandeur de la vitesse absolue : soit géométriquement, en construisant le polygone des vitesses, soit ana-

lytiquement, en projetant ce polygone sur trois axes rectangulaires quelconques. On a ainsi les équations :

$$V\cos\overline{V,x}=\sum v\cos\overline{v,x}=X,$$

$$V\cos\overline{V,y}=\sum v\cos\overline{v,y}=Y,$$

$$V\cos\overline{V,z}=\sum v\cos\overline{v,z}=Z;$$

$$V^2=X^2+Y^2+Z^2.$$

Remarques sur la composition des vitesses.

I. Dans la théorie qui précède, nous n'avons pas eu à nous préoccuper de définir les mouvements d'entraînement d'une manière complète : il nous a suffi de considérer la vitesse d'un seul point dans chaque système mobile, de celui qui coïncide avec le point M, à une époque déterminée.

Cependant, si l'un des mouvements d'entraînement n'est pas une translation, la direction des axes auxquels on doit rapporter la vitesse relative correspondante est essentiellement variable, tandis que la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement sont rapportées à des directions fixes. Mais comme, pendant un temps très-court, la direction des axes mobiles ne peut changer qu'infiniment peu, les angles formés par les différentes vitesses avec ces axes, considérés au commencement ou à la fin du temps *dt*, diffèrent seulement de quantités infiniment petites : quantités qu'on est en droit de négliger, devant les angles finis formés par les côtés du polygone des vitesses.

Les théorèmes relatifs à la composition des vitesses ne dépendent donc en aucune façon du mouvement de tout le système de comparaison, mais uniquement de la vitesse d'un seul point de ce système.

II. *Sur la théorie des mouvements simultanés.* — Nous avons ramené le mouvement curviligne au mouvement rectiligne, en substituant au premier certains mouvements simultanés, dont nous avons indiqué les relations avec le mouvement principal qu'il s'agissait d'étudier.

La considération des mouvements relatifs nous aurait con-

duits à des résultats du même genre; en effet, quel que soit le mouvement d'un point M (*fig.* 65), on peut toujours ramener ce mouvement à s'effectuer sur une ligne droite, en supposant cette droite animée elle-même d'un mouvement convenable (*). Mais on ne devra jamais dire qu'un point est animé de plusieurs mouvements simultanés.

Plusieurs points ont des mouvements simultanés, si leurs positions sont liées l'une à l'autre par une loi géométrique; un point n'a qu'un seul mouvement : on peut d'ailleurs rapporter ce mouvement, par la méthode des coordonnées, soit à un système fixe, soit à des axes mobiles; le point de vue de l'observateur aura changé, mais ce sera toujours le même mouvement. Quant au mouvement des axes de comparaison (mouvement d'entraînement), il est absolument indépendant de celui du point lui-même, et ne saurait dans aucun cas, et sous aucun prétexte que ce soit, être considéré comme appartenant à ce point.

Ceci une fois éclairci, il est évident qu'on pourra faire les conventions de langage que l'on voudra, pourvu qu'on se comprenne bien.

§ VII. — Composition des accélérations.

Nous avons clairement défini le mouvement d'un point relativement à un système d'axes mobiles, en disant que c'est le mouvement absolu d'un point fictif dont les coordonnées, par rapport à trois axes fixes, seraient les mêmes à chaque instant que celles du point donné par rapport aux axes mobiles.

Quant au *mouvement d'entraînement* proprement dit, nous ne pouvons pas pour le moment nous le figurer d'une manière suffisamment nette, puisque nous n'avons pas encore

---

(*) Il faudra évidemment que, de la définition du mouvement d'entraînement, il résulte nettement que le point M soit assujetti à se trouver à chaque instant sur la droite mobile.

Les mouvements d'entraînement les plus simples qu'on puisse imaginer (sur un plan) sont un mouvement de translation dans une direction bien définie, ou un mouvement de rotation autour d'un point fixe. Nous nous sommes bornés à considérer ces deux mouvements-là, mais il est évident qu'il en existe une infinité d'autres.

étudié toutes les différentes sortes de mouvement dont un solide invariable peut être animé.

Quoi qu'il en soit, il est bien clair qu'en général, et sauf le cas où le mouvement d'entraînement est une translation, les divers points du système solide de comparaison n'auront ni la même vitesse, ni la même accélération totale. Et il ne faudra jamais perdre de vue quand nous dirons, en étudiant le mouvement relatif d'un point, la *vitesse* ou l'*accélération d'entraînement*, que nous entendons par ces mots la vitesse ou l'accélération du point du système de comparaison qui coïncide avec le point mobile, à l'instant considéré.

Notre théorème I, relatif à la composition des cordes, résulte immédiatement de la définition du mouvement relatif : il est vrai pour un mouvement fini quelconque, et quel que soit le mouvement des axes de comparaison. En appliquant ce théorème à un déplacement infiniment petit, nous en avons déduit la règle évidente de la composition des vitesses, règle dont Aristote paraît avoir eu déjà la connaissance.

Le même théorème I, si nous considérons deux éléments consécutifs sur chaque trajectoire (*fig.* 66), va nous permettre de résoudre le problème de la composition des accélérations.

Ce problème, de la composition des accélérations, diffère du problème de la composition des vitesses par la nécessité où l'on se trouve d'avoir égard, s'il y a lieu, au changement de direction des axes. En effet, l'accélération totale se construit en décomposant la vitesse V′ existant au bout du temps *dt* en deux autres, dont l'une soit la vitesse V au commencement de l'intervalle *dt* : l'autre est l'accélération totale J, multipliée par *dt*. Pour appliquer cette construction au cas d'un mouvement relatif, il faut remarquer que les angles qui déterminent la vitesse initiale v_r sont rapportés à la position initiale des axes mobiles, tandis que la vitesse v'_r doit être rapportée à la position finale; dès lors une variation infiniment petite dans la direction des axes influe sur l'angle infiniment petit que font entre elles les vitesses v_r et v'_r, et par conséquent sur la direction et sur la grandeur de la ligne $J_r dt$ qui joint leurs extrémités; donc, l'accélération totale relative est fonction de cette variation, et le problème de la composition des accélé-

rations sera tout de suite assez compliqué, dès que les axes n'auront pas un simple mouvement de translation.

Nous examinerons d'abord le cas où les axes sont animés d'un mouvement de translation, puis celui d'une rotation uniforme autour d'une droite fixe. Nous nous bornerons d'ailleurs, pour le moment, à ces deux cas particuliers.

1er Cas. — *Étude de la composition des accélérations, lorsque le système solide est animé d'un mouvement de translation.*

Rappelons les trois théorèmes suivants :

I. Dans tout mouvement, la corde du chemin parcouru dans un temps infiniment petit, θ, est la résultante de la quantité $v\theta$, portée sur la tangente, et de la quantité $\frac{1}{2}J\theta^2$, portée dans la direction de l'accélération totale.

II. La corde d'un déplacement absolu quelconque est la résultante de la corde du mouvement relatif et de la corde du mouvement d'entraînement.

III. La vitesse absolue d'un point est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

Cela posé, considérons toujours notre triangle curviligne $MM'M_1$, et soient (*fig.* 67) :

$$MT = v\theta, \quad TM_1 = \tfrac{1}{2}J\theta^2,$$
$$MT' = v_e\theta, \quad T'M' = \tfrac{1}{2}J_e\theta^2,$$
$$M'T_1 = v_r\theta, \quad T_1M_1 = \tfrac{1}{2}J_r\theta^2.$$

D'après le théorème du parallélogramme des vitesses, $T'T$ est égal à $M'T_1$; de plus, ces deux lignes sont parallèles, puisque la trajectoire relative s'est déplacée parallèlement à elle-même, le mouvement d'entraînement étant une translation.

Il suit de là que TT_1 est aussi égal et parallèle à $T'M'$. Donc la ligne qui représente en grandeur et en direction $\frac{1}{2}J\theta^2$, est la résultante des lignes qui représentent de même $\frac{1}{2}J_e\theta^2$ et $\frac{1}{2}J_r\theta^2$:

Théorème V. — *Lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, l'accélération totale du mouvement d'un point est la résultante de l'accélération totale relative et de l'accélération d'entraînement.*

Ou bien :

THÉORÈME VI.—*Lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, l'accélération totale relative est la résultante de l'accélération totale absolue, et de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire.*

Construisons (*fig.* 68) le triangle MAA_1 formé, à une époque déterminée, par les vitesses v_e, v_r et v. Au bout du temps θ, ce triangle est devenu $MA'A'_1$, et la ligne $A_1A'_1$ représente l'accélération J, du mouvement absolu, multipliée par le facteur numérique θ.

Quel que soit le nombre des mouvements composants, pourvu que tous les mouvements d'entraînement soient des translations, on obtient toujours (*fig.* 69) l'accélération du mouvement composé en joignant les sommets homologues du polygone des vitesses; et la figure montre que cette accélération est bien la résultante géométrique de toutes les accélérations composantes.

Ces résultats ne diffèrent en aucune façon de ceux qui sont relatifs à la composition des vitesses.

2e CAS. — *Étude de la composition des accélérations lorsque le système solide est animé d'un mouvement de rotation.*

Si nous supposons maintenant que les axes auxquels on rapporte le mouvement relatif soient animés d'un mouvement quelconque, la tangente à la trajectoire relative, au point M (*fig.* 70), ne conserve pas une direction constante; de sorte que, quand le point M se trouve transporté en M', le point T_1, extrémité de la longueur $v_r\theta$, ne coïncide pas avec le quatrième sommet du parallélogramme construit sur T'T et T'M'. Soit V'_r ce quatrième sommet, on a

$$TM_1 = \tfrac{1}{2} J\theta^2,$$
$$T_1M_1 = \tfrac{1}{2} J_r\theta^2,$$
$$T_1V'_r = T'M' = \tfrac{1}{2} J_e\theta^2;$$

mais ces trois lignes ne forment pas les trois côtés d'un triangle, et l'on ne peut plus dire que la première soit la résultante des deux autres.

En effet, il existe une lacune entre les points V'_r et T_1, en

raison du déplacement angulaire de la tangente MV_r. De plus, on ne peut pas dire que cette lacune soit négligeable; car la distance T_1V_r' est le troisième côté d'un triangle isocèle dont les côtés égaux sont infiniment petits du premier ordre, et comprennent un angle qui est lui-même infiniment petit du premier ordre. Il suit de là que le troisième côté de ce triangle est infiniment petit du second ordre, et comparable aux autres grandeurs considérées (*).

Il faut donc ajouter une quatrième ligne aux trois lignes que nous considérions tout à l'heure, pour avoir un polygone fermé; et, dans le cas général, on doit considérer l'accélération relative comme la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et d'une troisième accélération *complémentaire*, dont la direction est celle de la droite T_1V_r', et dont la grandeur s'obtiendra en divisant la longueur T_1V_r' par $\frac{1}{2}\theta^2$.

Détermination de l'accélération complémentaire. — Cette longueur T_1V_r' est le produit de $M'T_1$ par l'angle infiniment petit $T_1M'V_r'$; or $M'T_1$ est égal à $v_r\theta$, et l'angle M' n'est autre chose que l'angle formé par deux positions infiniment voisines de la tangente à la trajectoire relative, au point M.

Pour calculer cet angle, qui dépend uniquement du mouvement des axes mobiles, nous supposerons que ce mouvement soit une rotation uniforme, ω, représentée par la droite OP (*fig.* 71). C'est ici seulement qu'il y a lieu d'introduire cette restriction, tout ce qui précède s'appliquant à un mouvement d'entraînement quelconque.

Par le point O, menons deux droites, parallèles respectivement aux droites MV_r (ou $M'V_r'$), et $M'T_1$. Ces deux lignes sont également inclinées sur l'axe OP : on peut les considérer comme deux génératrices d'un cône de révolution dont l'axe serait OP; et l'angle formé par les deux plans méridiens correspondants est précisément égal au *déplacement angulaire*, $\omega\theta$, de tout le système pendant le temps θ.

(*) Cette lacune existait également dans le triangle des vitesses, mais il n'y avait pas à en tenir compte, car les grandeurs dont on s'occupait alors étaient des infiniment petits du premier ordre.

Il suit de là que l'angle des génératrices elles-mêmes est le produit de $\omega\vartheta$ par le sinus du demi-angle au sommet du cône, c'est-à-dire par le sinus de l'angle formé par la direction de la vitesse relative v_r, avec la direction de la droite qui représente la rotation ω.

On a donc en définitive

$$\begin{aligned} T_1V'_r &= v_r\theta \times \omega\vartheta \sin\overline{\omega,\ v_r} \\ &= \omega v_r \sin\overline{\omega,\ v_r} \times \theta^2, \end{aligned}$$

relation de laquelle on conclut la longueur de la droite qui ferme le polygone des accélérations :

$$\frac{2.T_1V'_r}{\theta^2} = 2\omega v_r \sin\overline{\omega,\ v_r}.$$

Accélération centrifuge. — Remarquons enfin que dans le cas auquel nous nous bornons actuellement, celui d'un système de comparaison animé d'un mouvement de rotation uniforme, l'accélération d'entraînement, pour un point situé à une distance r de l'axe, est *centripète* et égale à $\omega^2 r$; donc cette accélération, prise en sens contraire, est *centrifuge*, et elle a la même valeur $\omega^2 r$.

De là le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Quand le mouvement d'entraînement est une rotation uniforme autour d'un axe fixe, l'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération centrifuge, et d'une troisième accélération qu'on appelle accélération centrifuge composée.*

Cette dernière est égale au double produit de la vitesse relative par la vitesse angulaire des axes mobiles, et par le sinus de l'angle formé par la vitesse relative avec l'axe de rotation du système.

Ce théorème est connu sous le nom de *Théorème de Coriolis.*

Coriolis est en effet le premier qui ait introduit dans la théorie des mouvements relatifs la notion de l'*accélération centrifuge composée* (*). Cette manière d'interpréter les for-

(*) *Journal de l'École Polytechnique,* XXIVe cahier, p. 142; année 1835.

mules est fort élégante; elle permet d'étudier géométriquement un mouvement relatif, sans passer par l'intermédiaire du mouvement absolu, et d'une transformation de coordonnées (*).

Il résulte de l'expression écrite plus haut que l'accélération centrifuge composée s'annule dans trois cas :

1° Lorsque $\omega = 0$;

2° Lorsque $v_r = 0$;

3° Enfin, lorsque

$$\sin \overline{\omega_r v_r} = 0,$$

c'est-à-dire quand la tangente à la trajectoire relative est parallèle à l'axe de la rotation d'entraînement.

Les *fig.* 70 et 71 montrent que la droite $T_1V'_r$ est perpendiculaire à la fois à la vitesse relative, et à l'axe de la rotation d'entraînement. Quand on projette le mouvement sur un plan perpendiculaire à OP, l'accélération centrifuge composée est perpendiculaire et proportionnelle à la projection de la vitesse relative; elle est dirigée de T_1 vers V'_r, c'est-à-dire en sens contraire de la rotation de l'extrémité V_r de la vitesse relative.

Si nous supposons un observateur placé dans la direction OP (*fig.* 71), et regardant dans le sens de la vitesse relative, l'accélération centrifuge composée sera dirigée vers la gauche de cet observateur. En empruntant à l'Électrodynamique une forme de langage très-usitée dans l'enseignement, nous dirons que

L'accélération centrifuge composée est dirigée à gauche de la vitesse relative.

(*) Coriolis emploie dans son Mémoire la méthode analytique directe, ainsi que l'avaient fait ses devanciers, à savoir : Newton, dans le cas où les axes mobiles ont un simple mouvement de translation; Clairaut, pour le cas d'un mouvement plan quelconque; Ampère, etc.

MM. Belanger et Poncelet n'ont pas tardé à démontrer géométriquement le théorème de Coriolis; depuis, divers auteurs ont donné de ce même théorème un grand nombre de démonstrations élémentaires, toutes plus ou moins identiques quant au fond.

L'analyse de Coriolis n'est pourtant pas entièrement dénuée d'intérêt; nous la donnons à la fin de cette Section, en restituant aux axes un mouvement quelconque.

Application aux mouvements terrestres.

Occupons-nous d'abord de notre hémisphère boréal, et projetons cet hémisphère sur le plan de l'équateur (*fig.* 72). La rotation de la terre, pour un observateur placé au pôle nord N, ayant lieu dans le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une horloge, l'axe de cette rotation est dirigé vers le pôle sud. Il suit de là que l'accélération centrifuge composée, pour un mouvement quelconque, est dirigée *à droite* de la projection de la vitesse relative du point mobile.

Cela posé, considérons un certain nombre de cas particuliers.

1° *Mouvement vertical ascendant.* — La vitesse relative se projette suivant une direction telle que f; l'accélération centrifuge composée est dirigée dans le sens de la flèche a, c'est-à-dire du côté de l'occident par rapport au méridien dans lequel s'effectue le mouvement.

2° *Mouvement de haut en bas.* — Le sens de la flèche f étant renversé (f'), l'accélération centrifuge composée change également de sens, et se tourne du côté de l'orient (*).

3° *Mouvement horizontal.* — Si nous considérons nos flèches comme représentant actuellement les projections d'une vitesse relative horizontale, telle que la vitesse d'une bille sur le tapis d'un billard, celle d'un glaçon flottant sur une rivière, d'un train parcourant une ligne de fer; nous trouverons toujours aisément la direction de l'accélération centrifuge composée, en prenant la *droite* d'un observateur qui suivrait la direction de la vitesse relative. Avec cette règle simple, on sera toujours assuré de ne pas commettre d'erreur.

Supposons par exemple que la vitesse relative d'un mobile M (*fig.* 74) soit horizontale et contenue dans le plan méridien NS; supposons de plus qu'il n'y ait pas d'accélération absolue.

Si la terre était immobile, le point M ne sortirait pas de

(*) Nous devons pour le moment nous borner à ces indications. Nous reviendrons sur ce sujet dans la partie du cours qui est consacrée à la Dynamique; nous serons alors en mesure d'analyser complétement l'influence de la rotation du globe sur le mouvement vertical des corps pesants dans le vide, sur les oscillations du pendule simple, etc.

l'horizontale méridienne, suivant laquelle est dirigée sa vitesse initiale; et il se trouverait sur cette droite, au bout du temps θ, à une distance $v_r\theta$ de son point de départ.

Eu égard à la rotation du globe, il faut, pour avoir le déplacement relatif de notre point, composer avec le chemin $v_r\theta$ deux autres chemins élémentaires, parcourus respectivement dans les directions des deux composantes de l'accélération totale relative.

Par l'effet de l'accélération centrifuge, le corps se détachera du plan horizontal, dans le sens du prolongement du rayon du parallèle terrestre. Cette conséquence géométrique évidente de la rotation de la terre n'avait pas échappé à Galilée.

Par l'effet de l'accélération centrifuge composée, ce même corps déviera de la méridienne : à l'occident si son mouvement est dirigé vers le sud, à l'orient dans le cas contraire. Il est à remarquer que, dans cette dernière hypothèse, le mobile est en avant, dans le sens du mouvement diurne, des points de la méridienne avec lesquels il aurait dû coïncider successivement, si la terre avait été en repos.

Dans l'hémisphère austral (*fig.* 73), l'accélération centrifuge composée est dirigée *à gauche* de la vitesse relative; il est aisé de voir quelles sont les modifications introduites par cette circonstance dans les résultats précédents, et nous nous dispenserons d'insister davantage sur ce sujet.

Théorie générale du mouvement relatif d'un point.

Il y a lieu d'ajourner le complément de la théorie des mouvements relatifs, jusqu'à ce que nous ayons défini les divers mouvements dont un système solide est susceptible d'être animé, sans que son invariabilité de forme soit compromise.

Nous verrons d'ailleurs que le paragraphe actuel renferme implicitement la solution du problème de la composition des accélérations dans le cas le plus général : celui où le mouvement d'entraînement n'est ni une translation, ni une rotation.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN CORPS OU SYSTÈME SOLIDE.

Après avoir élucidé les principales questions qui se rapportent au mouvement d'un point mathématique, il faut passer à l'étude du mouvement d'un corps de dimensions finies.

Un *corps*, au point de vue géométrique, c'est la collection d'une infinité de points, remplissant une portion limitée de l'étendue; un *corps solide* est un système de points, formant une figure invariable. Pour se représenter un pareil système, il suffit de considérer trois axes mobiles, Ox_1, Oy_1, Oz_1, et l'ensemble des points dont les coordonnées, relatives à ces axes, restent constantes. Il est bien évident que les mouvements simples de tous ces points ne sont pas indépendants les uns des autres : c'est la recherche des relations qui existent entre ces mouvements qui constitue l'étude des mouvements d'un solide.

Ainsi que nous l'avons remarqué, on n'a qu'une idée extrêmement obscure de ce qu'est en général le mouvement d'un corps de figure quelconque; et les seuls mouvements qu'on voie immédiatement sont le mouvement de *translation* et le mouvement de *rotation*. Ce n'est que par une succession de travaux bien remarquables, dont nous allons ici présenter l'analyse, que les géomètres sont arrivés par degrés à réduire le mouvement le plus général dont un corps solide puisse être animé, aux deux mouvements simples que nous avons déjà eu occasion de définir.

Décomposition du mouvement d'un solide.

Pour simplifier la question, nous commencerons par la diviser en deux autres : attachons-nous à regarder un point quelconque O du solide, par lequel nous ferons passer trois axes assujettis à rester constamment parallèles à eux-mêmes. Il est clair que le solide, dans son mouvement relatif à ces axes,

ne peut que tourner sur l'origine mobile O, comme autour d'un centre fixe, de sorte que le mouvement se trouve décomposé en deux, dont l'un est une pure translation. Si nous connaissions *à priori* un point fixe dans le système, c'est par ce point que nous ferions passer nos axes de comparaison, et le premier des deux mouvements composants disparaîtrait.

Mais le second de ces mouvements : c'est-à-dire celui d'un corps mobile autour d'un point fixe, sur lequel il a la liberté de pirouetter dans tous les sens, ne présente lui-même qu'une idée très-obscure; et c'est cette idée que nous allons tout d'abord nous proposer d'éclaircir.

§ VIII. — Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Vers le milieu du siècle dernier, d'Alembert et Euler, à peu près dans le même temps et par des méthodes différentes, ont les premiers traité la question du mouvement d'un corps solide dans l'espace, question qui se ramène immédiatement, comme nous l'avons vu, à celle qui fait l'objet de ce paragraphe. Ils se sont occupés, chacun à deux reprises séparées par plus de vingt-cinq ans, de ce problème qui donne lieu, comme le dit Euler, à deux ordres de recherches, les unes géométriques (*cinématiques*) et les autres mécaniques. Ces deux points de vue sont ici, et peut-être pour la première fois, nettement séparés par Euler.

La priorité de la découverte de la proposition fondamentale de cette théorie appartient à d'Alembert (*). Il fut d'ailleurs bientôt suivi dans cette voie par Euler (**), qui s'empara de ce sujet avec sa ténacité habituelle, et s'en préoccupa toute sa vie (***).

Euler ne réussit pourtant pas à éclaircir tous les points délicats qui se rencontrent dans la théorie de la rotation des corps

---

(*) *Traité de la précession des équinoxes* (1749).

(**) Découverte d'un nouveau principe de Mécanique (*Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1750, imprimés en 1752).

(***) « Le sujet que je me propose de traiter ici est de la dernière importance dans la Mécanique, et j'ai déjà fait plusieurs efforts pour le mettre dans tout son jour. Mais, quoique le calcul ait assez bien réussi, et que j'aie découvert des formules analytiques qui déterminent tous les changements dont le

autour d'un point fixe ; il ne put triompher à sa pleine satisfaction de l'obscurité qui régnait sur cette question, et qui, dit-il quelque part (*), tire son origine de la difficulté qu'on éprouve à se bien représenter le mouvement dont un corps tourne sur un point fixe.

Il était réservé à Poinsot de dissiper cette obscurité d'une manière complète, et de donner du problème de la gyration d'un corps solide autour d'un point fixe une solution qui est un véritable chef-d'œuvre de clarté et d'élégance géométrique, *véritable solution du problème*, dit-il (**), *en ce qu'elle fait image, et qu'on y voit le mouvement du corps avec autant de clarté que le mouvement d'un point.*

Théorème fondamental de d'Alembert.

Le seul mouvement de rotation dont nous ayons une idée nette est celui d'un corps qui tourne sur un axe immobile; c'est donc à cette idée qu'il faut tâcher de réduire celle du mouvement d'un corps qui pirouette d'une manière quelconque autour d'un point ou centre fixe O.

Considérons (*fig.* 75) la sphère décrite du point O comme centre avec l'unité pour rayon, et la *perspective* du corps mobile sur cette sphère. Il est évident que le mouvement de cette figure sphérique est déterminé par le mouvement de notre solide, et que réciproquement, à un instant quelconque, la position de la perspective sur la sphère suffit pour faire connaître le lieu du corps lui-même dans l'espace.

Cela posé, nous allons établir la proposition suivante, qui se rapporte au mouvement, considéré pendant un temps infiniment court.

Lorsqu'un des points d'un solide en mouvement est fixe, les autres points du corps ne sauraient, à un instant donné, être

---

mouvement d'un corps autour d'un point fixe est susceptible, leur application était pourtant sujette à des difficultés qui m'ont paru presque tout à fait insurmontables. » (*Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1758, imprimés en 1765). *Voir* aussi : *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765), et un grand nombre de Mémoires du même auteur.

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1760, p. 179.

(**) *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

tous à la fois en mouvement ; et il y a toujours une infinité de points, situés sur une même ligne droite, *qui ont à l'instant considéré une vitesse nulle, c'est-à-dire qui conservent des positions fixes pendant un temps très-court.*

Ainsi que je l'ai dit, ce beau théorème est dû à d'Alembert; j'emprunte la démonstration géométrique suivante à Euler (*).

Soient AB (*fig.* 76) un arc de grand cercle réunissant deux points de la perspective, et A'B' la nouvelle position de cet arc de grand cercle, au bout du temps θ.

Prolongeons les arcs AB et A'B' jusqu'à leur rencontre au point C, et prenons

$$A'C' = AC :$$

nous aurons en C' la nouvelle position du point C, considéré comme lié à l'arc AB.

Pour trouver de même la position finale d'un point quelconque M de notre perspective, il faut rattacher ce point aux points déjà connus A, B, C, par un système de coordonnées quelconque. On pourra, par exemple, joindre MC par un arc de grand cercle; puis, faisant au point C' un angle M'C'A' égal à MCA, et prenant C'M' = CM, on aura un point M' qui occupera par rapport à l'arc A'B' la même situation que le point M par rapport à l'arc AB.

Prolongeons MC et M'C' jusqu'à leur point de rencontre, I. Tous les points du cercle IMC sont venus se placer quelque part sur le cercle IM'C'; et, si l'on avait CI = C'I, le point I serait resté fixe dans le mouvement. Cherchons s'il ne serait pas possible, en choisissant convenablement l'arc CM, dont nous avons jusqu'ici supposé la direction arbitraire, de rendre le triangle CIC' isocèle.

Il faut pour cela satisfaire à l'égalité

$$(1) \qquad ICC' = IC'C.$$

Mais on a

$$(2) \quad \begin{cases} ICC' = ICB - BCB' \\ IC'C = 180^\circ - IC'B' = 180^\circ - ICB, \end{cases}$$

(*) *Découverte d'un nouveau principe, etc.*

puisqu'on a fait

$$IC'B' = ICB.$$

En substituant les valeurs (2) dans l'équation (1), il vient

$$ICB - BCB' = 180^\circ - ICB.$$

D'où

$$ICB = 90^\circ + \frac{BCB'}{2}. \tag{3}$$

En donnant à l'angle ICB cette valeur, c'est-à-dire en prenant l'arc CM perpendiculaire à l'arc Cγ, bissecteur de l'angle BCB', nous satisferons à l'équation de condition (1); et nous serons assurés qu'il existe quelque part sur l'arc CM un point I, qui n'a pas participé au déplacement de la figure.

Pour trouver la grandeur de l'arc CI, menons Iω perpendiculaire sur le milieu de la base de notre triangle isocèle. Dans le triangle rectangle ICω, on connaît le côté Cω qui est la moitié de CC', et l'angle C qui est égal à $90^\circ - \frac{1}{2}BCB'$; on a donc

$$\operatorname{tang} CI = \frac{\operatorname{tang} C\omega}{\cos IC\omega} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}CC'}{\sin \frac{1}{2}BCB'}. \tag{4}$$

Mouvement infiniment petit.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, le déplacement de nos points de repère, A et B, pouvait être quelconque. Si nous supposons ce déplacement infiniment petit, on voit aisément les modifications qu'il faut faire subir aux constructions et aux calculs précédents. Le point C, intersection de deux positions infiniment voisines de la ligne AB, est le point de contact de cette ligne avec son enveloppe, l'arc CI devient perpendiculaire à l'arc AB; enfin la formule (4) se transforme en

$$\operatorname{tang} CI = \frac{CC'}{BCB'}. \tag{5}$$

Axe instantané de rotation. — Notre système ayant, à l'instant considéré, deux points fixes : le centre O de la sphère et le point I, il résulte des principes que nous avons posés que tous les points de la droite OI sont également immobiles; le mouvement du solide est une rotation autour de

cette droite tant qu'elle reste fixe, c'est-à-dire pendant un temps infiniment court (*).

Pendant l'élément de temps suivant, le mouvement du corps est encore une rotation simple, mais autour d'un autre axe, de sorte que le mouvement du corps peut être considéré comme une suite de ces mouvements simples, dont chacun ne présente à l'esprit qu'une idée nette.

Ainsi se trouve établi le théorème suivant :

THÉORÈME DE D'ALEMBERT. — *Le mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un point fixe n'est autre chose qu'une rotation de ce corps sur un axe qui passe toujours par le point fixe, mais dont la direction change d'un instant à l'autre : axe que, pour cette raison, l'on appelle* AXE INSTANTANÉ DE ROTATION (**).

Caractère de l'axe instantané. — Il faut bien remarquer que cet axe instantané change de position et dans le corps et dans l'espace tout à la fois. En effet, comme il est immobile dans le corps et dans l'espace pendant le temps *dt*, et qu'au bout de ce temps on le trouve dans une autre position, il est clair qu'il ne peut plus être au même lieu, ni dans l'espace absolu, ni dans l'intérieur du corps (***).

Lors donc que nous voyons un corps tourner sur un axe qui *semble* invariable de position dans le corps, mais qui change de position dans l'espace, nous devons affirmer que cet axe n'est point l'axe instantané autour duquel se fait réellement la rotation, car l'axe instantané ne pourrait rester immobile dans le corps sans rester également immobile dans l'espace.

De cette remarque bien simple on déduit immédiatement

(*) Ceci veut dire que les *vitesses* de tous les points du corps sont les mêmes que si ce corps tournait effectivement autour de l'axe que nous venons de déterminer.

Il faut bien se garder d'étendre ce résultat aux accélérations; car notre axe ne reste pas fixe pendant deux éléments successifs du temps.

(**) Expression introduite par d'Alembert, *Traité de la précession des équinoxes*, p. 83.

(***) On peut même ajouter que l'angle qu'il décrit dans l'espace, et qui fait son mouvement absolu, est égal à celui qu'il décrit dans l'intérieur du corps, et qui fait son mouvement relatif.

des résultats importants, dont nous allons présenter deux exemples.

PREMIER EXEMPLE : *Mouvement diurne de la terre.* — On a longtemps considéré la terre comme animée d'un mouvement de rotation autour d'une droite fixe, qu'on nomme *ligne des pôles* ou *axe du monde*. Depuis la découverte de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la terre, on sait que cet axe prétendu n'est pas fixe dans l'espace; et l'on se représente le mouvement diurne de la terre en supposant que, pendant qu'elle tourne uniformément autour de son axe, cet axe même ait un certain mouvement par lequel il décrit à peu près, autour de la perpendiculaire au plan de l'écliptique, un cône dont le demi-angle au sommet est de $23°27'30''$.

Cette manière d'envisager le mouvement diurne de la terre, dit Euler, paraît d'abord la plus naturelle et la plus convenable pour la pratique, et on aura de la peine à s'imaginer qu'elle soit assujettie à de fort grandes difficultés : non pas à l'égard des petites irrégularités de ce mouvement, lesquelles peut-être ne sont pas encore toutes connues, mais à l'égard de la manière même de concevoir ce mouvement (*).

Et d'abord, en effet, qu'est-ce que l'axe de la terre?

L'observation prouve qu'il y a toujours dans le ciel deux points diamétralement opposés qui semblent, du moins pour quelque temps, être en repos, et autour desquels le ciel avec les étoiles nous paraît accomplir ses révolutions journalières. C'est la droite qui joint ces deux points (droite qu'on peut toujours supposer menée par le centre de la terre) qu'on nomme l'*axe du monde*. Cela posé, on admet, tout à fait gratuitement, que cette ligne passe toujours par les mêmes points de la terre.

Cette hypothèse ne saurait être vraie, d'après la théorie précédente, qu'autant que la ligne des pôles répondrait toujours aux mêmes points du ciel; or, comme cela n'arrive pas, on est forcé d'admettre que la rotation diurne ne se fait pas autour d'un axe fixe dans l'intérieur de la terre, mais bien autour d'un axe instantané, mobile à la fois dans le globe et

(*) Remarques générales sur le mouvement diurne des planètes (*Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1758, imprimés en 1765, p. 194).

dans l'espace. Autrement : le pôle effectif de la rotation terrestre n'est point fixe, il décrit à la surface du globe une courbe dont nous allons tout à l'heure déterminer la nature, et calculer les dimensions.

Nous verrons alors que les variations des pôles terrestres sont contenues dans des limites fort resserrées, de sorte qu'on peut regarder ces pôles comme fixes sans qu'il résulte de cette supposition aucune erreur bien grave. Quoi qu'il en soit, je le répète, la mobilité absolue et la mobilité relative des pôles sont deux choses qui ne sauraient exister l'une sans l'autre; de sorte que, l'un quelconque de ces phénomènes étant une fois bien établi par l'observation, l'autre s'en conclut comme une conséquence nécessaire.

Deuxième exemple : *Rotation des projectiles.* — On sait que, par des raisons que nous n'avons pas à développer ici, on s'attache aujourd'hui à donner aux projectiles une forme oblongue, et à leur communiquer dans l'âme de la pièce un mouvement de rotation autour de leur axe de figure.

Ces projectiles décrivent à leur sortie de l'arme une trajectoire plus ou moins courbée; d'où il suit qu'ils se présentent obliquement à la résistance de l'air, du moins tant que l'axe de figure conserve sa direction initiale, qui est celle de la tangente à la trajectoire au point de départ.

Si, pour diminuer la résistance, on veut chercher à rendre cet axe de figure constamment tangent à la trajectoire, il est bien essentiel d'être prévenu que l'axe géométrique, en changeant ainsi de direction dans l'espace, cessera par le fait même d'être axe de rotation. En effet, l'axe de rotation, par définition, est à chaque instant la ligne dont la direction reste fixe à la fois dans le corps et dans l'espace.

Mouvement fini.

La démonstration par laquelle Euler prouve l'existence d'une ligne invariable, dans le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, s'applique sans modification au cas où l'on considère un déplacement fini du corps, au lieu d'un déplacement infiniment petit.

On comprend même difficilement qu'Euler n'ait pas aperçu

tout de suite cette conséquence immédiate de ses recherches (*), et qu'il ait attendu vingt-cinq ans pour donner cette généralisation du théorème de d'Alembert (**).

Mais si l'on peut concevoir que le corps (supposé toujours fixé par un point) passe d'une position à une autre position quelconque par l'effet d'une simple rotation autour d'un axe fixe, nous savons que les choses ne se passent pas ainsi dans la réalité, et que le mouvement réel consiste en une suite de rotations autour d'axes sans cesse variables. C'est là une idée qui présente encore une sorte d'obscurité : c'est-à-dire qu'on ne voit pas très-bien ce qui arrive au corps, et qu'on a quelque peine à le suivre dans le cours de cette espèce de rotation changeante. Nous allons, avec M. Poinsot, tâcher d'éclaircir encore cette idée, et de présenter à l'esprit quelque image plus nette et plus sensible.

Or, on vient de démontrer qu'un mouvement quelconque d'un corps autour d'un point fixe est une rotation de ce corps sur un certain axe, qui change de position d'un instant à l'autre. Comme cet axe *instantané* passe toujours par le point fixe, il ne peut décrire dans l'espace qu'une certaine surface conique dont le sommet est en ce point; et de même, il est évident qu'il ne peut décrire dans l'intérieur du corps qu'une autre surface conique de même sommet.

Soient O ce commun sommet, et OI l'axe instantané dans

(*) « Quamobrem maximi momenti erit investigare, utrum si translatio fuerit finita, etiam detur talis axis. » [*Formulæ generales pro translatione quâcumque corporum rigidorum*, *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg* pour 1771, t. XX, p. 199; 1776.]

Le mot *translatio* est pris ici dans le sens de *déplacement*, et non dans celui de notre mot *translation*.

(**) Encore faut-il remarquer que, même à cette époque, Euler est obligé de renoncer, après plusieurs efforts, à démontrer analytiquement la propriété dont il s'agit.

Ce fut Lexell qui, dans le même volume de l'Académie de Saint-Pétersbourg, leva la difficulté (*Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum*, p. 239-270).

D'Alembert, de son côté, ne tarda pas à démontrer, par des voies différentes et fort simples, les deux théorèmes d'Euler sur le déplacement fini (t. VII des *Opuscules mathématiques*, p. 372; 1780).

Citons encore un Mémoire de M. O. Rodrigues (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. V), où la question est traitée par l'analyse.

sa position actuelle (*fig.* 77). Concevons du centre O, et d'un rayon OI égal à l'unité, une sphère décrite qui coupe les deux surfaces coniques suivant deux courbes, lesquelles seront comme les bases de ces surfaces. De ces deux courbes, la première (σ) est fixe dans l'espace absolu; la seconde (s) est fixe dans le corps, et, par conséquent, mobile avec lui dans l'espace.

Divisons le temps t en intervalles égaux infiniment petits dt; et marquons sur la courbe fixe (σ) les positions correspondantes, α, β, γ, δ,..., du pôle I de l'axe de rotation.

Prenons sur l'autre courbe (s), qui sert de base au cône mobile, des arcs, Ia, ab, bc,..., respectivement égaux aux premiers; il est clair qu'au premier instant le corps, qui tourne sur OI, amène le point a du corps sur le point α de l'espace; que, dans l'instant suivant, le corps qui tourne sur $O\alpha$ amène le point b du corps sur le point β de l'espace, et ainsi de suite d'un instant à l'autre. Il suit de là que les deux courbes, et par conséquent les deux surfaces coniques, sont tangentes : car une rotation infiniment petite autour de OI ne fait décrire au point a qu'un espace infiniment petit du second ordre. Comme de plus les arcs Ia et $I\alpha$ sont égaux, ainsi que les arcs ab et $\alpha\beta$, bc et $\beta\gamma$, etc., on voit que le mouvement du corps pourrait être produit par celui du cône mobile roulant, *sans glisser,* sur le cône fixe dont il s'agit.

Nous avons donc ce nouveau théorème :

Théorème de Poinsot. — *De quelque manière qu'un corps se meuve en tournant autour d'un point fixe, ce mouvement ne peut être autre chose que celui d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui roule actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône fixe de même sommet.*

Je veux dire que le cône mobile, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec lui, s'il vient à rouler sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu, fera prendre à ce corps le mouvement précis dont on le suppose animé; la ligne de contact des deux cônes est, à chaque instant, l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant, ou ce qu'on appelle l'axe *instantané :* d'où l'on voit comment cet axe est à la fois

mobile dans le corps et dans l'espace absolu, décrivant dans l'espace la surface du cône fixe, et dans l'intérieur du corps la surface du cône mobile dont on vient de parler (*).

Tel est, dit Poinsot, le plus haut point de clarté où l'on puisse porter l'idée si complexe et si obscure du mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un centre fixe. Il n'y a point de mouvement de cette nature qu'on ne puisse exactement produire en faisant rouler un certain cône sur un autre cône fixe de même sommet; de sorte que, si l'on imagine tous les cônes possibles, et qu'on les fasse ainsi rouler l'un sur l'autre, on a l'image fidèle de tous les mouvements dont un corps soit susceptible, autour d'un point sur lequel il a la liberté de pirouetter en tous sens.

Formules diverses relatives à la rotation autour d'un point.

Si les deux courbes (s) et (σ), qui servent de bases aux deux surfaces coniques dont il a été question, sont données, ainsi que la vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané OI,

(*) Il n'est peut-être pas inutile d'insister sur l'idée nette qu'il faut attacher aux mots quand on dit « le *mouvement* de l'axe instantané », ou qu'on emploie quelque autre terme qui suppose la *mobilité* de cet axe, soit dans le corps, soit dans l'espace. Ce n'est ici qu'une manière de s'exprimer. L'axe instantané ne se *meut* point : car il est immobile de sa nature pendant un instant, et au bout de cet instant, c'est une autre ligne qui devient à son tour l'axe de rotation. Mais en se figurant l'ensemble de toutes ces lignes, menées d'avance, les unes dans le corps, les autres dans l'espace, et leur donnant le commun nom d'*axe instantané*, on peut dire naturellement la surface *décrite* par cet axe, au lieu de dire la surface formée par la suite de toutes les lignes, dont chacune doit devenir à son tour l'axe de rotation. Et de même, au lieu de l'angle $d\varphi$, compris entre deux génératrices consécutives de cette surface, on peut dire l'angle *décrit* pendant le temps dt par l'axe instantané, et nommer ainsi le rapport $\frac{d\varphi}{dt}$ la *vitesse angulaire* avec laquelle cet axe trace à la fois les deux surfaces coniques dont il s'agit. C'est dans le même sens qu'on nomme le rapport $\frac{ds}{dt}$, ou le rapport $\frac{d\sigma}{dt}$ qui lui est égal, la *vitesse* avec laquelle le pôle instantané I se meut le long de l'une ou de l'autre des deux courbes (s) et (σ), tracées l'une dans le corps et l'autre dans l'espace, quoique le point du corps qui fait en ce moment l'office du pôle instantané n'ait de sa nature aucune vitesse. En effet, ce point du corps, tant qu'il fait le pôle, est immobile; et, sitôt qu'il se meut, il n'est plus le pôle de la rotation.

il est évident que le mouvement du corps sera entièrement déterminé.

Si, la vitesse angulaire ω étant toujours connue, une seule des deux courbes (s) et (σ) est donnée, avec la vitesse du pôle qui la décrit, l'autre courbe sera nécessairement déterminée.

Supposons, par exemple, que la courbe fixe (σ) soit donnée, avec la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$ du pôle instantané I, le long de cette courbe. Comme le corps tourne sur OI avec une vitesse angulaire ω, qui est aussi donnée, il est clair que le point du corps qui, au bout du temps dt, doit venir tomber sur la courbe donnée (σ) pour y être à son tour le pôle instantané, est un point déjà déterminé dans le corps; et il en est de même des autres points du corps que les rotations successives doivent amener l'un après l'autre sur la courbe fixe (σ), pour servir de pôles à leur tour. D'où l'on voit que l'autre courbe (s), qui marque la route du pôle dans l'intérieur du corps, est entièrement déterminée.

Et réciproquement, si, au lieu de la courbe fixe (σ), on se donne la courbe mobile (s), avec la vitesse $\frac{ds}{dt}$, et la vitesse de rotation ω, on verra de même que la courbe fixe (σ) se trouvera entièrement déterminée dans l'espace.

En général, dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point fixe, il se présente naturellement plusieurs éléments à considérer, tels que : la vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané OI; la vitesse angulaire θ avec laquelle cet axe trace les deux surfaces coniques S et Σ qu'il décrit en même temps, l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu; les rayons de courbure r et ρ de ces deux surfaces; les mouvements angulaires p et π du pôle, l'un autour de l'axe OP du cône osculateur de la surface mobile S, et l'autre autour de l'axe OH du cône osculateur de la surface fixe Σ, etc. Et si, de ces différentes choses, trois quelconques sont connues, on peut dire que les autres le sont aussi, et que le mouvement est entièrement déterminé.

Cherchons les relations qui existent entre ces quantités.

Par l'effet de la rotation instantanée autour de OI, le cône mobile tourne, pour venir appliquer l'élément ds de sa base

sur l'élément égal $d\sigma$, d'un angle formé par la somme de son angle de contingence de, et de l'angle de contingence du cône fixe $d\varepsilon$ (ou par la différence de ces deux angles, si les deux courbes (s) et (σ) ont leurs convexités tournées dans le même sens) (*fig.* 78). La vitesse angulaire ω, autour de l'axe instantané OI, est donc exprimée par la somme ou par la différence de ces deux angles, divisée par l'élément dt du temps; de sorte qu'on a

$$\omega = \frac{de + d\varepsilon}{dt},$$

en ayant soin d'affecter les angles de et $d\varepsilon$ d'un signe convenable.

Or, l'angle de contingence de a pour mesure $\frac{ds}{r}$, si l'on nomme r le rayon de courbure de la surface conique (c'est-à-dire le rayon de courbure de la section normale à la génératrice du cône) au point I que l'on considère; donc

$$de = \frac{ds}{r}.$$

On a de même

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{\rho},$$

en nommant ρ le rayon de courbure de l'autre surface au même point I; d'où résulte, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente,

$$\omega = \frac{ds}{r\,dt} + \frac{d\sigma}{\rho\,dt}.$$

Mais $\frac{ds}{dt}$ $\left(\text{ou } \frac{d\sigma}{dt} \text{ qui lui est toujours égal}\right)$ n'est autre chose que la vitesse angulaire avec laquelle l'axe instantané OI décrit à la fois les deux surfaces coniques; en faisant donc

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \theta,$$

on a

$$\omega = \theta\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right);$$

ce qui donne une relation très-simple entre la vitesse de ro-

tation ω, le mouvement angulaire θ de l'axe instantané, et les rayons de courbure r et ρ des deux surfaces coniques qu'il décrit.

Si l'on suppose menés ces deux rayons de courbure $IP = r$, $III = \rho$ (*fig.* 79), et qu'on joigne OP et OII, on aura les axes des deux cônes droits et circulaires, osculateurs des deux surfaces, S et Σ. Les perpendiculaires abaissées du pôle I sur ces deux axes OP et OII sont les rayons, a et α, des cercles qui servent de bases à ces cônes osculateurs.

Or, on a, par la figure,

$$r^2 = \frac{a^2}{1 - a^2}, \qquad \rho^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

En introduisant dans l'équation précédente, au lieu des rayons de courbure r et ρ des deux cônes, les rayons a et α des deux cercles qui leur servent de bases, il vient

$$\omega = \frac{\theta}{a}\sqrt{1 - a^2} + \frac{\theta}{\alpha}\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Mais θ étant la vitesse angulaire de l'axe instantané sur la surface du cône, il est clair que $\frac{\theta}{a}$ est la vitesse angulaire de la projection de cet axe OI sur la base; et, par conséquent, c'est le mouvement angulaire du pôle I autour de l'axe OP de ce cône; de même, $\frac{\theta}{\alpha}$ est son mouvement angulaire autour de l'axe OII de l'autre cône. Si donc on désigne ces deux mouvements angulaires par p et π, ou qu'on fasse

$$\frac{\theta}{a} = p, \qquad \frac{\theta}{\alpha} = \pi,$$

on a d'une part l'égalité

$$ap = \alpha\pi,$$

et ensuite, d'après l'équation précédente,

$$\begin{aligned}\omega &= p\sqrt{1 - a^2} + \pi\sqrt{1 - \alpha^2} \\ &= p\cos x + \pi\cos\xi,\end{aligned}$$

en faisant

$$IOP = x, \quad \Pi OI = \xi.$$

Comme on a

$$a = \sin x, \quad \alpha = \sin \xi,$$

les deux relations précédentes équivalent à cette suite de rapports égaux :

$$p : \pi : \omega :: \sin \xi : \sin x : \sin(x + \xi),$$

ce qui montre que p et π sont les deux côtés d'un parallélogramme dont ω est la diagonale; c'est-à-dire que ω est la résultante des deux longueurs p et π, portées respectivement sur les axes OP et OH.

Si trois des quantités dont il vient d'être question sont constantes, toutes les autres le sont aussi; et le mouvement du corps est celui d'un cône droit à base circulaire, qui roule uniformément sur un cône fixe également droit et circulaire.

Application à la rotation diurne.

Soit OI (*fig.* 80) l'axe instantané, OH l'axe de l'écliptique. Prenons sur ce dernier axe une longueur $O\pi$, représentant la vitesse angulaire π du mouvement rétrograde (positif) des équinoxes, quantité qui est environ de $0'',136795$ par jour. Portons de même sur l'axe OI, et dans un sens convenable, une longueur $O\omega$ représentant la rotation diurne. La construction du parallélogramme $O\pi\omega p$ nous fait connaître l'axe OP du cône fixe par rapport à la terre; et les points d'intersection de cette ligne avec la surface du globe sont ceux qu'il convient de désigner sous le nom de *pôles terrestres*.

Cela posé, on a, en prenant le jour sidéral pour unité de temps,

$$p = -360^\circ, \quad \pi = 0'',136795, \quad \xi = 23^\circ 27' 30'';$$

d'où l'on conclut

$$\sin x = \frac{0'',136795 \sin 23^\circ 27' 30''}{360 \times 60 \times 60}.$$

L'angle x, mesuré à la surface de la terre, répondrait à peine à un arc de 27 centimètres : ce qui donne à peu près $1^m,684$ de longueur à la petite circonférence que le pôle instantané de la rotation de la terre décrit chaque jour à sa surface. Quant

à la rotation réelle et instantanée ω, on voit aussi qu'elle diffère très-peu de la rotation apparente p, sur l'axe de figure ON.

§ IX. — Mouvement d'un solide parallèlement a un plan fixe.

Je passe à un cas particulier de la question précédente. L'importance de ce cas particulier réclame une étude spéciale; mais les détails que nous venons de donner nous permettront d'abréger considérablement ce qu'il nous reste à dire.

Je veux parler du mouvement d'un solide invariable, parallèlement à un plan fixe. Dans ce mouvement, les distances de chacun des points du solide au plan fixe restant constantes, il suffit de connaître à chaque instant la position de la projection de ce corps sur le plan fixe. Cette projection conserve d'ailleurs une figure invariable; et le problème qui consiste à déterminer le mouvement de cette figure dans son plan est un cas particulier de la question précédente, où il s'agissait du mouvement d'une figure sphérique sur sa sphère.

Nous n'avons, en effet, qu'à supposer le rayon de la sphère infini; et tous les théorèmes qui ne dépendent pas de la grandeur de ce rayon s'appliqueront, convenablement modifiés, au problème actuel.

On a ainsi les résultats suivants :

Théorème I. — *Quand une figure plane se déplace dans son plan sans changer de forme, il y a toujours à chaque instant un point de cette figure dont la vitesse est nulle, et autour duquel la figure tout entière tourne pendant un espace de temps très-court.*

Ce point s'appelle *centre instantané de rotation*. Quand il est à l'infini, la rotation se change en une translation.

Ce beau théorème, cas particulier de celui de d'Alembert, a été découvert, quelque temps avant ce dernier, par Jean Bernoulli (*). La démonstration donnée par Bernoulli a toute

(*) *De centro spontaneo rotationis*. Opera, t. IV, p. 265; 1742.

La solution donnée par Descartes du problème de la tangente à la cycloïde (*Lettres de Descartes*, t. II de l'édition de 1724, p. 39) repose sur un cas particulier du théorème de Bernoulli; et c'est dans cette solution *merveilleuse de*

la rigueur et toute la généralité désirable; mais elle a l'inconvénient d'être fondée sur des considérations de Dynamique, tandis que l'existence d'un point qui reste fixe dans le déplacement d'une figure plane sur son plan, ou d'une figure sphérique sur sa sphère, est une propriété purement géométrique.

Il est facile en effet de démontrer directement le théorème suivant, sans faire intervenir aucune considération de mouvement.

THÉORÈME II. — *Quand deux polygones égaux (ou en général deux figures égales quelconques) sont placés d'une manière quelconque dans un plan* (*), *il existe toujours un point du plan qui est également distant de deux sommets homologues quelconques des polygones; ce point est semblablement placé par rapport aux deux polygones.*

Soient (*fig.* 81) ABCDE, A'B'C'D'E', deux polygones égaux. Tous les points de la perpendiculaire, élevée au milieu de la *corde* AA', sont également distants des points A et A'. Le point O, où cette perpendiculaire est coupée par la perpendiculaire élevée sur le milieu de BB', est également distant à la fois des points, A et A' d'une part, B et B' de l'autre. Je dis qu'on a de même

$$OC = OC', \quad OD = OD', \ldots.$$

En effet, les deux triangles ABO, A'B'O sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Il suit de là que le point O, considéré comme appartenant à la première figure, est lui-même son homologue dans la seconde; par

---

simplicité, dit M. Chasles, que se trouve la première trace des propriétés d'une figure en mouvement.

Nous verrons plus tard que le mouvement épicycloïdal, étudié par Descartes, comprend comme cas particuliers tous les mouvements possibles d'une figure plane invariable dans son plan; mais Descartes et Bernoulli ignoraient l'existence de cette propriété.

(*) Pour que le théorème soit vrai, il faut que les deux polygones représentent deux positions d'une même figure dans son plan; c'est-à-dire qu'on doit pouvoir effectuer la superposition, sans être obligé de retourner l'une des figures.

suite, il est également distant des points C et C′, D et D′, et de tous les autres couples homologues.

Nous appellerons indifféremment *point central* ou *centre de rotation* ce point autour duquel on peut faire tourner une des figures pour l'amener à coïncider avec l'autre.

L'énoncé du théorème II, qui s'applique à un déplacement fini ou infiniment petit, est emprunté à M. Chasles (*), qui a restitué au théorème de Bernoulli son véritable caractère, et qui a fondé sur ce théorème une méthode géométrique des tangentes, laquelle n'est autre chose que celle de Descartes généralisée.

La méthode de M. Chasles est basée sur cette observation que, si le déplacement qui nous occupe est infiniment petit, le point O se trouve à la fois sur les normales à toutes les trajectoires des divers points A, B, C,..., de la figure. Il suit de là que ces normales se croisent toutes nécessairement en un point unique, et l'on a le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Quand une figure plane invariable est animée d'un mouvement quelconque dans son plan, les normales aux trajectoires des différents points de cette figure se coupent toutes en un même point* (**).

De là résulte une méthode fort simple pour déterminer les normales ou les tangentes des courbes décrites dans le mouvement d'une figure de forme invariable.

Considérons par exemple une droite de longueur constante AB (*fig.* 82), dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes Ox, Oy, ou sur deux courbes quelconques (P) et (Q); et supposons qu'on demande la tangente au lieu décrit par le sommet d'un triangle invariable, construit sur la base AB.

Le point A décrit Oy: donc le centre instantané est sur la perpendiculaire élevée au point A sur Oy. De même, la trajectoire de B étant la ligne Ox, le centre de rotation se trouve

(*) *Bulletin des Sciences mathématiques de Férussac*, t. XIV, p. 322; 1830; et *Correspondance mathématique de M. Quetelet*, t. VII, p. 353.

(**) Ce point remplit, pour un déplacement infiniment petit de la figure, le rôle du *point central* dont il vient d'être question : c'est un *centre instantané de rotation*.

sur la perpendiculaire élevée en B sur Ox: donc le centre instantané est au point de rencontre C de ces perpendiculaires. Or, la normale à la trajectoire du point M doit passer par le point ainsi déterminé; donc cette normale est CM.

« Cette méthode, dit M. Chasles, diffère de celle de Roberval, qui repose aussi sur des considérations de mouvement: elle est en outre susceptible d'un bien plus grand nombre d'applications. Elle se prête même à la détermination des rayons de courbure des courbes (*).

» Mais on conçoit que cette méthode si facile sera aussi, comme celle de Roberval, bornée dans ses applications, puisqu'elle suppose qu'on connaîtra les conditions géométriques du mouvement d'*une figure de forme invariable* à laquelle appartient le point décrivant. »

THÉORÈME IV. — *Les normales aux différentes courbes qu'on peut considérer comme entraînées dans le mouvement de la figure mobile, élevées aux points de contact de ces courbes avec leurs enveloppes respectives, vont passer au centre instantané de rotation.*

Ce théorème, qui se déduit du théorème d'Euler sur les mouvements sphériques, est facile à démontrer directement.

Considérons une courbe (K) (*fig.* 83), entraînée dans le mouvement d'une figure invariable, (F).

Un point quelconque, M, décrit une trajectoire dont la normale est MC, C étant le centre instantané de rotation de F. Quant au point A, où la courbe proposée touche son enve-

---

(*) *Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable* (*Comptes rendus*, t. LI et LII). *Voir* aussi *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, 1837, p. 548; et *Journal de Mathématiques*, t. X, p. 148 et 204.

Remarquons à cette occasion que la méthode de M. Mannheim, que nous avons exposée (p. 51-60), apprend à construire la normale à la trajectoire d'un point, considéré comme faisant partie d'un système susceptible de changer de forme en même temps que de position d'une manière quelconque. Cette méthode est donc plus générale que celle de M. Chasles.

Nous verrons, quand nous aurons terminé l'étude des propriétés du centre instantané, que ces propriétés sont de simples cas particuliers de celles qui ont été démontrées précédemment, et qui sont relatives à des figures déformables.

loppe, il doit, en se transportant sur la position voisine de (K), rester en même temps sur la position première, puisque l'enveloppe est le lieu des intersections de deux positions successives de l'enveloppée. La direction du mouvement du point A doit donc être celle de la tangente AT de la courbe (K); donc cette tangente est perpendiculaire à la ligne AC.

THÉORÈME V. — *Les vitesses des différents points de la figure sont entre elles comme les distances de ces points au centre instantané de rotation.*

Cette propriété résulte de ce que le mouvement peut être regardé, pendant un temps très-court, comme une rotation autour du centre instantané. Le quotient de la vitesse d'un point quelconque par sa distance au centre est la vitesse angulaire du mouvement instantané de rotation (*).

Les théorèmes III et V expriment d'ailleurs tout ce qu'un centre instantané a de commun avec un centre effectif de rotation : ce sont les propriétés qui se rapportent à un élément infiniment petit du temps. La distinction s'établit dès qu'on considère deux éléments consécutifs.

Soit MM_1 (*fig.* 85) la trajectoire d'un point d'une figure mobile : la normale au point M passe par le centre instantané de rotation C, mais la normale au point M_1 est dirigée vers un nouveau centre C_1, dont la distance au point C est du même ordre que l'arc MM_1 lui-même; donc le centre de courbure de cet arc est un point distinct de C et de C_1.

Les propriétés que nous venons d'exposer donnent lieu à un grand nombre d'applications : en voici un exemple.

(*) Dans le cas général d'une figure qui se déforme (*fig.* 84), le rapport des vitesses de deux points M, M' de cette figure, s'exprime par le rapport

$$\frac{MN}{M'N'},$$

en considérant les points N, N', où les normales aux lieux, (M) et (M'), sont coupées par la normale à l'enveloppe de la droite MM'.

On voit ainsi le centre instantané se dédoubler, pour ainsi dire, quand la longueur MM' est variable; et la distance des deux points résultant de ce dédoublement est proportionnelle à la variation de MM'. On sait, en effet, que cette variation de longueur est proportionnelle à la distance NN'.

Des systèmes de corps rigides articulés.

Considérons un système de corps rigides, réunis par des *articulations*.

Le polygone dont les points d'articulation sont les sommets est variable de forme, mais chacun de ses côtés constitue, pris isolément, une figure invariable; et la théorie précédente fait connaître les relations géométriques qui existent entre les vitesses des divers points du système, quand le mouvement de celui-ci est suffisamment déterminé.

Par exemple : deux droites de longueur constante (*fig.* 86) tournent respectivement autour des centres C et C'. Pour transmettre le mouvement de l'une de ces droites à l'autre, c'est-à-dire pour faire en sorte que le mouvement de l'une soit déterminé par celui de l'autre, on articule les extrémités M, M' des deux rayons ou manivelles à un lien invariable : on demande le rapport des vitesses des points M et M'.

Dans ce cas le centre instantané de rotation du lien MM' est au point O, intersection des deux rayons prolongés; donc

$$\frac{v}{v'} = \frac{\text{OM}}{\text{OM}'}.$$

En remplaçant les longueurs OM, OM' par les sinus des angles qui leur sont opposés dans le triangle MOM', on a :

1° *Les vitesses des deux extrémités du lien sont en raison inverse des sinus des angles de ce lien avec les rayons.*

La même propriété subsiste évidemment quand les trajectoires des points M et M' sont des courbes qnelconques : CM, C'M' étant les normales à ces courbes, et la longueur MM' restant toujours invariable; donc, en général :

2° *Les vitesses des deux extrémités du lien sont en raison inverse des cosinus des angles du lien avec les trajectoires de ses extrémités.*

Pour trouver le rapport des vitesses angulaires des deux manivelles, on écrira l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\omega . \text{CM}}{\omega' . \text{C}'\text{M}'} = \frac{\text{MO}}{\text{M}'\text{O}},$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{C'M' \times MO}{CM \times M'O} = \frac{CT}{C'T},$$

en appliquant le théorème des transversales au triangle OCC'. Donc :

3° *Les vitesses angulaires des deux rayons vecteurs sont en raison inverse des segments déterminés par le lien sur la ligne des centres* (*).

Enfin les triangles CPT, C'P'T étant semblables, on peut encore énoncer le théorème suivant :

4° *Les vitesses angulaires sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées des deux centres sur le lien.*

Des propriétés géométriques identiques se retrouvent dans un autre mode de transmission, fort usité dans l'industrie.

Transmission du mouvement par courroies. — Au lieu de relier par une barre rigide deux corps assujettis à tourner autour des centres C et C', on peut employer un lien flexible, tel qu'une corde, une courroie, qu'on enroule sur deux surfaces convexes fixées à chacun des deux corps respectivement (*fig.* 87).

Seulement, avec ce système, un corps ne peut entraîner l'autre que dans un sens, la courroie ne fonctionnant qu'à la condition d'être tendue. Cette restriction étant posée, cherchons le rapport des vitesses angulaires des deux corps tournants.

Relativement au corps (C), la droite MM' tourne autour de son point de contact M avec la courbe sur laquelle elle s'enroule, absolument comme s'il y avait une articulation en M. Les choses se passent de la même manière au point M'; et comme on admet que la courroie reste tendue, on rentre, pour un mouvement infiniment petit, dans le cas d'une barre rigide articulée à deux bras de longueur invariable. Il suit de là que tous les théorèmes précédents s'appliquent sans modification. Ainsi :

Les vitesses angulaires des deux arbres sont en raison in-

(*) Dans le cas où les trajectoires, (M) et (M'), sont quelconques, les points C et C' sont les centres de courbure de ces trajectoires.

verse des deux segments déterminés sur la ligne des centres par le prolongement de la partie rectiligne de la courroie.

Mouvement épicycloïdal plan.

Ainsi que je l'ai dit, le point de départ des recherches relatives aux propriétés du mouvement d'une figure plane, est le théorème suivant, dû à Descartes :

THÉORÈME VI. — *Lorsqu'une courbe mobile roule sans glisser sur une courbe fixe, le centre instantané de rotation de toute figure invariablement liée à la courbe mobile est à chaque instant le point de contact actuel des deux courbes.*

Soit (m) (*fig.* 88) une courbe qui roule sur une courbe (f). Si M et M_1 sont deux points de contact successifs des deux courbes, et que M' soit le point de la courbe mobile qui se trouvait d'abord en M, on a

$$MM_1 = M'M_1.$$

Il résulte de là que MM' est un infiniment petit du deuxième ordre; donc le point M est animé, à l'instant considéré, d'une vitesse nulle, ce qui est le caractère d'un centre instantané de rotation.

Dès lors, en raisonnant comme dans le paragraphe précédent, et considérant dans un mouvement quelconque d'une figure plane invariable le lieu décrit par le centre instantané dans l'espace absolu, et le lieu correspondant décrit par le même point sur le plan de la figure mobile (*fig.* 89), nous arriverons, par une image analogue à celle qu'a donnée Poinsot pour les mouvements sphériques, à nous représenter clairement le mouvement fini le plus général d'une figure plane dans son plan :

THÉORÈME VII. — *Quel que soit le mouvement d'une figure invariable dans son plan, on peut toujours le ramener à un mouvement épicycloïdal.*

En d'autres termes, on pourrait produire le même mouvement en supposant que les points qu'on étudie soient entraînés par une certaine courbe mobile, roulant sans glisser sur une courbe fixe convenablement choisie.

La courbe mobile est la *courbe roulante* ou la *roulette*, d'après une dénomination anciennement usitée. La courbe fixe s'appelle la *base de la roulette*.

Propriétés des épicycloïdes. — Le cas de mouvement épicycloïdal le plus intéressant à étudier est celui dans lequel la courbe mobile et la courbe fixe sont deux circonférences de cercle. En effet : non-seulement les courbes ainsi engendrées ont un grand nombre d'applications industrielles; mais de plus il est évident que, pour toutes les questions qui se rapportent au deuxième ordre infinitésimal, on a le droit, dans un mouvement épicycloïdal quelconque, de remplacer la roulette et sa base par leurs cercles osculateurs respectifs.

On distingue les *épicycloïdes extérieures* et les *épicycloïdes intérieures* ou *hypocycloïdes*. Elles sont *allongées* ou *raccourcies*, selon que le point décrivant est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle mobile. On appelle plus particulièrement *épicycloïdes* (*) celles qui sont décrites par un point de la circonférence roulante.

On a représenté (*fig.* 91) quelques épicycloïdes et hypocycloïdes. On voit que, dans celles qui sont allongées, les points de rebroussement sont remplacés par des boucles; ces mêmes points sont représentés par de simples sinus dans les épicycloïdes raccourcies.

(*) Ces dernières possèdent une propriété géométrique remarquable : celle de pouvoir être engendrées de deux manières différentes par le roulement d'un cercle mobile sur un même cercle fixe.

Considérons par exemple une épicycloïde extérieure (*fig.* 90) : soient C le centre du cercle fixe, C_1 le centre du cercle mobile, R et R_1 les rayons de ces cercles, enfin M une position du point décrivant.

La normale MA rencontre le cercle fixe en un deuxième point A'. Si l'on décrit une circonférence passant par le point M et tangente en A' à la circonférence fixe, et qu'on fasse rouler la circonférence ainsi déterminée sur la base primitive (C), le point M, considéré comme fixé à la nouvelle roulette, décrira une épicycloïde identique à la proposée. (*Voir* DUHAMEL, *Éléments de calcul infinitésimal*, 2e édit., t. I, p. 188.)

Le rayon de la nouvelle roulette est donné par la relation

$$R'_1 = R + R_1,$$

qui devient, dans le cas d'une épicycloïde intérieure :

$$R'_1 = R - R_1.$$

Ligne droite et ellipse considérées comme hypocycloïdes. — L'hypocycloïde la plus curieuse est celle qui est engendrée par un point d'une circonférence, roulant dans l'intérieur d'une circonférence de rayon double. On sait que chacun des points de la circonférence mobile décrit un diamètre du cercle fixe (CARDAN) : il suit de là qu'une corde quelconque, AB, de la roulette peut être considérée comme une droite dont les extrémités parcourent des droites fixes.

Si l'on se donne la droite AB (*fig.* 92), ainsi que les directrices du mouvement de cette droite, Ox, Oy, on déterminera comme nous l'avons vu le centre instantané C : OC est le diamètre du cercle mobile et le rayon du cercle fixe, qu'il faut choisir pour ramener à un mouvement épicycloïdal le mouvement d'une droite dont les extrémités parcourent des droites fixes.

Un point M de la droite AB décrit une ellipse dont on connaît immédiatement la normale MC, et dont on obtient le centre de courbure au moyen de la construction de Savary.

Les directions des axes de cette ellipse se construisent en joignant le point M au centre I du cercle mobile : en effet, le point M est sur la droite de longueur constante ab, mobile sur les droites rectangulaires OX, OY. Ma et Mb sont les longueurs des deux demi-axes; OM et MC sont les longueurs de deux demi-diamètres conjugués, le dernier étant dirigé suivant ON, perpendiculaire à la normale MC (*).

Si l'on faisait rouler la grande circonférence sur la petite, les diamètres de la première pivoteraient chacun autour d'un point fixe de la seconde. Ce théorème est le corrélatif du théorème de Cardan.

Rayon de courbure d'une courbe épicycloïdale plane. — Soit M le point décrivant (*fig.* 93). Prenons sur la courbe fixe et sur la courbe mobile, à partir du point de contact A, deux arcs infiniment petits égaux, AB, AB_1; et soit M' la position qu'aura prise M, lorsque B_1 sera venu en B. La normale en M' se construit en joignant le point M' au point B ou B_1 :

(*) M. Mannheim a déduit de cette figure un procédé pour construire les axes d'une ellipse, quand on connaît un système de diamètres conjugués (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 187).

cette ligne vient couper la normale MA au centre de courbure cherché, X.

Faisons

$$MM' = ds, \quad AB = AB_1 = d\sigma,$$
$$AC = R, \quad AC_1 = R_1, \quad MA = r, \quad MX = \rho.$$

La rotation de la figure mobile autour du centre instantané A, pour le déplacement AB du point de contact, est égale à la somme des angles de contingence respectifs des deux cercles : elle a pour expression

$$d\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right);$$

ce qui donne pour la valeur de l'arc MM'

$$ds = r\,d\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

D'un autre côté, si l'on désigne par i l'angle que fait AM avec la ligne des centres, on a, dans les triangles infiniment petits XMM', XAB_1,

$$ds : d\sigma \cos i :: \rho : \rho - r;$$

d'où enfin, en égalant les deux valeurs de ds :

$$\frac{\rho \cos i}{\rho - r} = r\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right),$$

ou

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r}\right) \cos i = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}. \tag{1}$$

On déduit de ces équations la construction de Savary, que nous connaissons (*) (*voir* p. 54).

(*) *Développée de l'épicycloïde ordinaire.* — Pour exprimer que le point décrivant est sur la circonférence (C_1), il faudra faire dans la relation (1)

$$\cos i = \frac{r}{2R_1},$$

d'où

$$\frac{\rho}{\rho - r} = \frac{2(R + R_1)}{R}, \quad \frac{\rho - r}{r} = \frac{R}{R + 2R_1}.$$

Décrivons un cercle qui passe par le point X (*fig.* 94), et qui soit tangent

Centre de courbure de l'enveloppe d'une figure mobile. — Considérons maintenant, au lieu d'un point unique, une courbe (e) entraînée dans le mouvement de la roulette (m) sur la base (f) (*fig.* 96). Nous savons que le point M, où la courbe (e) touche son enveloppe, est sur la normale qui passe au centre instantané A.

Pour trouver le rayon de courbure de l'enveloppe (E), je remarque qu'une série de courbes parallèles (e), (e_1), (e_2), enveloppent évidemment des courbes parallèles, la distance normale des enveloppes étant constante et égale à la distance des enveloppées correspondantes.

Il résulte de là que les centres de courbure de toutes les enveloppes sont en un même point X, lequel est aussi le centre de courbure de la trajectoire du point Y, centre de courbure commun à toutes les enveloppées. On trouvera donc le point X en appliquant la construction de Savary au point Y. De là le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Quand une figure entraînée dans le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe reste constamment tangente à une certaine enveloppe, les lignes qui joignent les centres de courbure respectifs des deux courbes mobiles d'une part, et des deux courbes fixes de l'autre, se coupent en un point de la perpendiculaire élevée au centre instantané de rotation, sur la normale commune à la courbe donnée et à son enveloppe.*

La question précédente, qui nous sera utile dans la théorie

---

en A aux deux précédents; soit R'_1 le rayon de ce cercle : on a

$$\frac{R'_1}{R_1} = \frac{\rho - r}{r} = \frac{R}{R + 2R_1}.$$

Si l'on désigne de même par R' la longueur CA' ou $R - 2R'_1$, on trouve

$$\frac{R'}{R} = \frac{R}{R + 2R_1},$$

d'où

$$\frac{R'_1}{R'} = \frac{R_1}{R}.$$

On trouvera aisément que le lieu géométrique du point X est une épicycloïde semblable à l'épicycloïde (M), mais non semblablement placée. Le rapport de similitude est égal au rapport du rayon du cercle fixe, à ce même rayon augmenté du diamètre du cercle mobile.

des engrenages, a été résolue pour la première fois par Euler (*).

Faisons

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{a}; \tag{2}$$

la formule (1) devient

$$\rho = \frac{r^2}{r - a\cos i}. \tag{3}$$

On voit que ρ dépend seulement des quantités r et $a\cos i$: si l'on prend (*fig.* 95)

$$AI = a\cos i,$$

le rayon de courbure MX est une troisième proportionnelle aux lignes MI et MA.

La formule (3) ne change pas quand on fait varier les rayons R et R_1, sans altérer a : on peut donc prendre

$$R = \infty, \quad R_1 = a,$$

c'est-à-dire remplacer le mouvement *épicycloïdal* par un mouvement *cycloïdal*, tant qu'il s'agit seulement de déterminer les centres de courbure des trajectoires des points d'une figure invariable, ou des enveloppes des courbes liées à cette figure.

Le cercle de rayon a a reçu de M. Transon le nom de *cercle de roulement* (**).

Centre instantané du deuxième ordre.

Quand on connaît le centre A_1 (*fig.* 95) du cercle de roulement, on trouve le point X en prolongeant la ligne MA_1 jusqu'à son intersection avec la perpendiculaire AP, et menant par le point P une parallèle à AA_1. C'est la construction de Savary, appliquée au cas où le point C est à l'infini.

Il suit de là qu'il suffit de connaître le point A_1, pour être en état de résoudre toutes les questions *géométriques* qui se rapportent au deuxième ordre différentiel, de même que le point A nous donne la solution des questions relatives au premier ordre.

(*) *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg pour* 1766, t. XI, p. 209.

(**) Transon, Méthode géométrique pour les rayons de courbure (*Journal de Mathématiques*, t. X, p. 154; 1845).

Il convient donc de donner au point A_1 le nom de *centre instantané du deuxième ordre* (*). Il existe des points doués de propriétés analogues pour le troisième, le quatrième ordre, etc.; c'est-à-dire qu'il suffit pour chaque ordre de connaître un point unique, pour résoudre toutes les questions de l'ordre correspondant, auxquelles donne lieu le déplacement infiniment petit d'une figure plane dans son plan (**).

Circonférence des inflexions. — Bornons-nous aux éléments du second ordre, et soient A et A_1 les deux centres instantanés (*fig.* 97).

Décrivons une circonférence dont le diamètre soit le rayon AA_1 du cercle de roulement : le centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque de la circonférence AA_1, dans le mouvement qui nous occupe, est à l'infini (***); donc

THÉORÈME IX. — *La circonférence décrite sur la ligne qui joint les deux centres instantanés comme diamètre est le lieu géométrique des points qui décrivent des éléments de lignes droites à l'instant considéré.*

Toutes ces droites passent au centre instantané du deuxième ordre.

Circonférence des centres. — La construction que nous venons de donner fait trouver le point décrivant M, quand on connaît le centre de courbure correspondant. Ce point M passe à l'infini quand le centre X' est situé sur la circonférence symétrique de la précédente; donc

THÉORÈME X. — *La circonférence symétrique de la circonférence des inflexions est le lieu des centres de courbure des*

(*) Je ne puis adopter le nom de *centre des accélérations* proposé par M. Bresse dans un Mémoire inséré au XXXVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 89. Le centre instantané des accélérations (dont je ne m'occupe pas ici) ne coïncide généralement pas avec le point A_1. On trouvera tous les détails relatifs à la théorie qui fait l'objet de ce paragraphe dans le *Traité de Cinématique pure* de M. Resal, p. 176.

(**) *Traité de Cinématique pure*, p. 311.

La théorie des centres instantanés des divers ordres a été faite par la méthode la plus simple et la plus directe par M. Nicolaïdès (*Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan*, 1863).

(***) MANNHEIM, Construction des centres de courbure, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIIe cahier, p. 179).

trajectoires décrites par les points du plan situés à l'infini, ou, si l'on veut, des enveloppes de toutes les droites, mobiles avec la figure considérée.

Les deux cercles que nous venons de définir servent à construire les centres de courbure des trajectoires des divers points d'une figure invariable.

Il est rare, en effet, qu'on puisse trouver ces centres par la construction de Savary, à moins que la roulette et sa base ne soient des données immédiates de la question. Dans le cas contraire, il faudrait commencer par construire les courbures de ces deux lignes ; or ces quantités sont des éléments du troisième ordre (*), plus difficiles à déterminer que les rayons de courbure des trajectoires des points de la figure mobile.

Considérons un point M et le centre de courbure correspondant X : le point I (*fig.* 95), déterminé par la relation

$$\overline{MA}^2 = MI \times MX,$$

est un point de la circonférence des inflexions, laquelle passe aussi par le centre instantané A. Si donc on connaît les centres de courbure des trajectoires de deux points, on pourra construire cette circonférence, et, par suite, on saura trouver le centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque, formant un triangle invariable avec les deux premiers.

Considérons seulement le cas où les deux points directeurs décrivent des lignes droites.

Problème. — *La base d'un triangle invariable se meut entre deux droites fixes* (*fig.* 98). *On demande le centre de courbure de la trajectoire du sommet de ce triangle, c'est-à-dire d'un point quelconque lié à la base mobile.*

Solution. — Les points E et F, décrivant des lignes droites, sont situés sur le cercle d'inflexion, lequel passe aussi, d'après une remarque que nous avons faite, au point d'intersection A_1 des droites (E), (F).

(*) Il est à remarquer que les termes du troisième ordre disparaissent dans la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$, puisqu'on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{a}.$$

Le centre instantané de rotation est en A, diamétralement opposé au point A_1; et l'on obtient le centre de courbure de (M) en élevant AP perpendiculaire à MA, et menant PX parallèle à AA_1.

Le symétrique du cercle d'inflexion, par rapport à sa tangente en A, contient les centres de courbure des enveloppes des trois côtés du triangle MEF. Ce cas particulier du théorème X avait été remarqué par Bobillier.

Mouvement le plus général d'un solide parallèlement à un plan fixe.

Si nous considérons une figure plane mobile dans son plan comme la projection d'un solide invariable, assujetti à se mouvoir parallèlement au plan de cette figure, nous nous représenterons immédiatement le mouvement infiniment petit de ce solide comme une rotation autour d'un axe instantané, perpendiculaire au plan directeur (*).

Quant au mouvement fini de ce même solide, nous l'obtiendrons en considérant les deux surfaces cylindriques formées par la série des axes instantanés, l'une dans le corps, l'autre dans l'espace, et en supposant que le corps soit entraîné dans le mouvement épicycloïdal du premier cylindre sur le second.

§ X. — Mouvement de deux solides assujettis a rester en contact.

Transmission de mouvement par contact. — Deux corps terminés par des surfaces cylindriques, et tournant respectivement autour des axes O et O′, sont assujettis à rester constamment en contact. Il suit de là qu'un de ces corps ne peut se mouvoir sans entraîner l'autre, sans lui *transmettre*, comme

(*) Signalons pour mémoire un cas d'exception assez curieux. Considérons un plan (P), et une figure quelconque tracée dans un plan (Q), perpendiculaire à (P). Si l'on fait tourner cette figure autour d'une droite contenue dans son plan, les vitesses de tous ses points seront perpendiculaires à ce plan (Q), et par conséquent parallèles à (P); et pourtant la projection de la figure sur (P) ne conservera pas sa forme rectiligne pendant un temps infiniment petit, les points de l'infini parcourant dans ce temps des espaces finis.

on dit, son mouvement, suivant une loi géométrique évidemment déterminée: on demande le rapport des vitesses angulaires de ces deux corps.

Puisque nous supposons les deux surfaces cylindriques, si nous admettons de plus qu'elles ne se déplacent pas dans le sens de leurs génératrices, il nous suffira de considérer le mouvement des sections droites de ces surfaces.

Soient (*fig.* 99) C le point de contact, M et M′ les centres de courbure des deux courbes. Pour un mouvement infiniment petit, je substitue aux courbes leurs cercles osculateurs: la longueur MM′, qui est la somme des rayons de ces cercles, ne variera pas, non plus que les longueurs des lignes OM, O′M′. Les mouvements angulaires de ces deux lignes, c'est-à-dire de deux rayons quelconques de chaque solide, sont donc les mêmes que si les points M et M′ étaient articulés à un lien rigide MM′, lien dont la direction est celle de la normale commune aux deux courbes en contact.

On peut donc dire, en appliquant le théorème relatif à la transmission de mouvement par tiges articulées (p. 118):

Dans la transmission par contact, le rapport des vitesses angulaires des deux corps tournants est l'inverse de celui des segments déterminés sur la ligne des centres de rotation par la normale commune.

Le rapport des vitesses angulaires n'est pas le seul élément géométrique qu'il soit important d'étudier, dans la théorie qui nous occupe. Pour aller plus loin, nous réduirons l'une de nos deux courbes au repos; c'est-à-dire que nous prendrons deux axes, fixes par rapport à celle-ci, auxquels nous rapporterons le mouvement.

Théorie du roulement et du glissement des lignes planes.

Soient donc deux figures planes quelconques, l'une fixe, l'autre mobile, assujetties à rester en contact. La courbe fixe est l'enveloppe de la courbe mobile, puisque l'enveloppe d'une figure mobile n'est autre chose que la ligne à laquelle celle-ci reste constamment tangente. Mais la condition, pour une figure mobile, de rester constamment tangente à une en-

veloppe donnée, ne suffit pas pour déterminer la série des positions de cette figure : en ayant égard à la loi qui règle les déplacements simultanés du point de contact sur les deux courbes, on distingue les trois genres de mouvement que voici :

1° Si les arcs infiniment petits, parcourus par le point de contact sur les deux courbes, ont même longueur, on dit qu'il y a *roulement ;*

2° Si cet arc est nul pour l'une des deux courbes, le mouvement est un *glissement simple ;*

3° Enfin, dans tous les autres cas, on a affaire à un mouvement mixte, qui tient à la fois du roulement et du glissement.

Soient (*fig.* 100) (*e*) la courbe mobile, (E) la courbe fixe, m le point actuel de contact, m_1, m_2 les points qui doivent arriver en coïncidence, par l'effet d'un mouvement infiniment petit.

Ce mouvement infiniment petit, dans le cas le plus général, peut être considéré comme composé d'un roulement et d'un glissement. On peut en effet, pour amener la courbe (*e*) de sa première à sa seconde position, faire d'abord rouler cette courbe sur son enveloppe jusqu'à ce que le point m_1 soit arrivé en un point μ, tel que $m\mu = mm_1$, et la faire ensuite glisser jusqu'en m_2.

La longueur μm_2 mesure l'*étendue du glissement élémentaire*, étendue qui est aussi égale à $m_1 m_2$, ou à mm', puisque les distances des points m_1 et m' à la courbe (E) sont infiniment petites du second ordre. Donc

THÉORÈME I. — *L'étendue du glissement élémentaire est égale à la distance qui sépare, au bout du temps dt, les deux points qui se trouvaient réunis au commencement de ce temps dt.*

Ce théorème s'applique sans modification, quand on restitue à la courbe supposée fixe le mouvement dont elle est animée en réalité, puisque la grandeur de l'arc de glissement dépend uniquement du mouvement relatif des deux courbes.

En divisant l'arc mm' par dt, on a la *vitesse de glissement*. La direction de cette vitesse est celle de la ligne μm_2, ou mm' : c'est-à-dire, à la limite, celle de la tangente commune mT.

Construction du centre instantané de rotation. — Le mouvement élémentaire, que nous venons de décomposer en un roulement et un glissement (c'est-à-dire en une rotation autour du point m, et une translation dans la direction $m\mathrm{T}$), revient aussi, comme on sait, à une simple rotation autour d'un centre instantané A (*fig.* 101), situé quelque part sur la normale commune NN' (*). Le point A est facile à déterminer quand on connaît les centres de courbure de la courbe (e) et de son enveloppe, ainsi que le rapport des arcs mm_1, mm_2. C'est la limite vers laquelle tend le point γ, intersection des deux normales G_1m_1, $\mathrm{G}m_2$ (**). L'angle de rotation $d\varphi$ est la somme des angles de contingence des deux courbes :

$$d\varphi = d\tau + d\tau_1.$$

Calcul de l'arc de glissement. — La figure montre que l'arc m_1m_2 a pour expression

$$r(d\tau + d\tau_1) = rd\varphi,$$

(*) Considérons une came, dont le profil soit la courbe quelconque (e). Il résulte du beau théorème relatif au mouvement épicycloïdal, que nous pourrons toujours faire prendre à cette came le mouvement précis dont nous avons besoin qu'elle soit animée, en attachant la courbe (e) à une figure (m) convenablement choisie, et assujettie à *rouler sans glisser* sur une courbe fixe (f).

Ceci est important au point de vue des applications. En effet, le glissement donne lieu dans les machines à une résistance dite *frottement*, aussi nuisible sous le rapport de l'économie du travail que sous celui de la précision du jeu de la machine; le roulement, au contraire, n'occasionne qu'une résistance négligeable par rapport à la première : ce que nous venons de voir nous apprend à produire un mouvement plan quelconque, sans faire intervenir le glissement.

D'autres fois, au contraire, il y aura un intérêt majeur à passer par-dessus les inconvénients du frottement, et à substituer au roulement un mouvement mixte : la théorie actuelle nous guidera également dans le tracé des courbes qui, par leur action mutuelle, produiront d'une autre manière le mouvement qu'on se propose d'obtenir.

(**) Il est à remarquer que les données dont nous nous sommes servi ne déterminent pas la tangente au lieu décrit par le point A. Cette tangente est un élément du deuxième ordre, qui se construit quand on connaît les rayons de courbure des trajectoires de deux points de la figure mobile : points non en ligne droite avec le point A.

En effet, chaque rayon de courbure fait connaître la projection du centre du deuxième ordre sur la normale correspondante (p. 126); deux projections déterminent ce centre A_1, et la ligne AA_1 est la normale demandée.

r étant la distance du centre instantané au point m (*). L'un des deux angles $d\tau_1$, $d\tau$, est nul, si le mouvement est un glissement simple, mais ces deux angles ne sauraient s'évanouir tous les deux à la fois ; donc le glissement ne peut être nul que quand on a $r = 0$:

THÉORÈME II. — *Pour que le glissement soit nul dans le mouvement de deux courbes assujetties à rester en contact, il faut et il suffit que le point de contact des deux courbes coïncide avec le centre instantané de la rotation relative.*

Le roulement est au contraire nul, et le mouvement est un glissement simple, dans deux cas distincts : selon que le point de contact est invariable sur la courbe mobile ou sur la courbe fixe. On peut remarquer les propriétés suivantes :

THÉORÈME III. — *Quand une courbe glisse sur une courbe fixe qu'elle touche toujours par le même point, la normale en ce point roule sur la développée de la courbe fixe.*

THÉORÈME IV. — *Quand une courbe se meut en touchant constamment une courbe fixe au même point, la développée de la courbe mobile roule sur la normale fixe du point de contact.*

Mouvement relatif de deux surfaces quelconques en contact par un point.

Le mouvement d'une surface quelconque par rapport à une autre surface à laquelle elle reste constamment tangente (c'est-à-dire par rapport à trois axes invariablement liés à celle-ci) peut s'effectuer de bien des manières différentes.

En nous bornant pour le moment à considérer les cas où le contact a lieu en un point seulement, c'est-à-dire où les surfaces n'ont de commun qu'un élément du second ordre, nous aurons à distinguer trois genres de mouvements simples :

1° On dit, à proprement parler, qu'une surface *glisse* sur

(*) L'expression $rd\varphi$ est remarquable, en ce qu'elle ne contient pas explicitement les courbures des deux figures en contact, mais seulement l'angle qui mesure la rotation instantanée relative.

une surface fixe, quand son mouvement est une translation parallèle au plan tangent commun : c'est le mouvement d'un traîneau sur un plan incliné. Poinsot avait proposé, pour désigner cette sorte de mouvement, le mot de *rasion*, qui n'a pas été adopté.

2° Une surface *pivote* sur une autre surface, quand elle tourne autour d'un axe perpendiculaire à l'élément commun ; c'est le mouvement d'un pivot dans sa crapaudine. Comme on doit toujours considérer dans le contact de deux surfaces, non pas un simple point commun, mais bien un élément superficiel commun, on voit que, dans le genre de mouvement que nous étudions, il y a en définitive *glissement* de l'élément mobile sur l'élément fixe; et, bien que les points dont il s'agit soient à une distance infiniment petite du centre de rotation, l'arc de glissement pourra avoir une valeur quelconque, selon la grandeur du déplacement angulaire relatif.

3° Enfin la surface mobile *roule* sur la surface fixe, quand son mouvement instantané est une rotation autour d'un axe situé dans le plan de contact, c'est-à-dire autour d'un des côtés de l'élément commun (*). De la sorte, l'élément suivant vient, en tournant autour de ce côté, s'appliquer exactement sur un élément égal, et ainsi de suite. La série des éléments, qui se sont trouvés successivement en contact, forme sur la surface fixe et sur la surface mobile deux zones qui par l'effet du roulement, se développent l'une sur l'autre, et sont susceptibles de se recouvrir *sans déchirure ni duplicature*.

C'est ce qui se passe quand une sphère ou une zone cylindrique roule en ligne droite sur un plan ; une jante conique, au contraire, ne peut avoir sur un plan un mouvement rectiligne, ou une jante cylindrique un mouvement circulaire, sans que le roulement soit compliqué de pivotement (**).

(*) On confond assez souvent le roulement avec certains mouvements compliqués de pivotement (et par conséquent de glissement, si l'on tient à conserver aux mots leur signification précise). C'est ainsi que M. Delaunay, dans l'énoncé d'un célèbre théorème de Poinsot (*Mécanique rationnelle*, p. 491; 1856), se sert, à tort suivant moi, du mot de *roulement* pour désigner un mouvement qui se réduit, dans un cas, au pivotement simple d'une sphère sur un de ses plans tangents.

(**) On utilise cette propriété dans la construction des meules à broyer.

En résumé, les trois cas que nous avons définis répondent :

1° A une translation (laquelle ne peut évidemment avoir lieu que parallèlement à une ligne tracée dans le plan tangent);

2° A une rotation perpendiculaire au plan tangent commun;

3° A une rotation contenue dans ce plan.

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'un mouvement quelconque est susceptible de se résoudre en ces trois éléments simples.

§ XI. — Mouvement le plus général d'un corps solide.

Nous avons démontré avec Euler que, relativement à des axes de direction invariable, assujettis à se croiser constamment en un point déterminé d'un solide en mouvement, le mouvement de ce solide, à un instant quelconque, est une rotation autour d'une droite dite *axe instantané*, fixe pendant un temps infiniment court.

Le mouvement le plus général d'un corps solide, pendant un temps infiniment petit, peut donc être considéré comme composé de cette rotation et du mouvement des trois axes, lequel est une translation dont la vitesse est égale à celle du point pris pour origine. Comme ce point a été choisi arbitrairement, on voit qu'il y a une infinité de manières de décomposer un mouvement donné en une translation et une rotation.

Théorème de Giulio Mozzi.

Parmi ces divers systèmes de décomposition, il en existe toujours un, plus simple que tous les autres, dans lequel la translation s'effectue parallèlement à l'axe de la rotation (*). Le

(*) Il résulte d'une Note de M. Chasles que ce beau théorème se trouve mentionné pour la première fois dans un ouvrage d'un géomètre florentin parfaitement inconnu, Giulio Mozzi, ouvrage intitulé : *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi;* Naples, 1763.

« L'auteur, dit M. Chasles, après avoir démontré que tout corps en mouvement possède à chaque instant un mouvement de rotation autour d'un axe qui passe par le centre de gravité, et un mouvement rectiligne commun à toutes ses parties, ce qui était connu de d'Alembert et d'Euler, ajoute que ces deux mouvements se réduisent à deux autres, dont l'un, rectiligne, est com-

mouvement qui résulte d'une pareille combinaison est analogue à celui d'une vis qui se meut en pénétrant à l'intérieur d'un écrou fixe.

Pour démontrer ce théorème, et donner en même temps un moyen de construire l'axe de la vis dont il s'agit, considérons dans notre solide trois points quelconques non en ligne droite, formant un système invariable.

Soient A, B, C les trois points choisis : menons par un point arbitraire O (*fig.* 102) des droites Oa, Ob, Oc, respectivement égales et parallèles aux vitesses des points A, B, C; abaissons du point O une perpendiculaire sur le plan du triangle abc, et joignons le pied P de cette perpendiculaire aux trois sommets de ce triangle. On peut regarder la vitesse Oa comme la résultante de deux vitesses représentées en grandeur et en direction par les droites OP, Pa; on peut de même remplacer Ob par OP et Pb, Oc par OP et Pc.

---

mun à toutes les parties du corps et parallèle à l'axe de rotation qui passe par le centre de gravité, et l'autre est une rotation autour d'un axe parallèle à celui-là : axe dont il détermine la position et qu'il appelle *axe spontané* de rotation.

» M. Cauchy a aussi considéré le mouvement infiniment petit d'une figure de forme invariable sur le plan et dans l'espace, dans un Mémoire intitulé : *Sur les mouvements que peut prendre un système invariable, libre, ou assujetti à certaines conditions* (*Exercices de Mathématiques*, t. II, année 1827, p. 70-90). C'est du principe des vitesses virtuelles qu'il conclut le centre instantané de rotation d'une figure plane qui glisse sur son plan, puis, après d'assez longs calculs, le théorème sur l'axe instantané de rotation d'un corps qui éprouve un déplacement infiniment petit dans l'espace; théorème qu'il énonce en ces termes :

» *Quelle que soit la nature du mouvement d'un corps solide, les relations existantes entre les différents points seront toujours celles qui auraient lieu si le corps était retenu de manière à pouvoir seulement tourner autour d'un axe fixe, et glisser le long de cet axe.*

» M. Cauchy s'arrête à ce résultat final, sans chercher aucune des propriétés qui peuvent se rapporter à cette belle question.... »

Parmi les propriétés du mouvement héliçoïdal, nous citerons seulement les suivantes, qui sont susceptibles de nombreuses applications géométriques.

Les plans normaux aux trajectoires des divers points d'un plan mobile passent tous par un même point du plan.

Ce point, ou foyer, a sa trajectoire normale au plan.

La caractéristique du plan (c'est-à-dire l'intersection de ce plan avec sa position infiniment voisine) *est le lieu des points dont les trajectoires sont contenues dans le plan lui-même; elle est parallèle à la projection de l'axe de*

Cela posé, concevons des axes animés d'un mouvement de translation dont la vitesse soit égale et parallèle à OP. Relativement à ce système d'axes, les vitesses Pa, Pb, Pc, des trois points A, B, C sont parallèles au plan *abc*; donc le mouvement relatif du triangle ABC, et par suite celui du solide lui-même, est une rotation autour d'un axe instantané : axe qu'on détermine par les règles relatives au mouvement d'un corps parallèlement à un plan. Cet axe est parallèle à OP, c'est-à-dire à la direction de la translation.

Tous les points de la ligne que nous venons d'apprendre à construire n'ont d'autre mouvement qu'une simple translation le long de l'axe lui-même; c'est-à-dire que cette droite, après un mouvement infiniment petit du solide, se retrouve dans la même position géométrique. Elle n'est pourtant pas restée immobile, mais elle n'a fait que glisser sur elle-même : nous lui donnerons le nom d'*axe instantané de rotation glissant*. On l'appelle également *axe central* (*).

---

l'hélicoïde sur le plan, et perpendiculaire à la ligne qui joint le foyer à la trace de l'axe sur ce même plan.

Soient h le pas de l'hélicoïde (ce pas est négatif pour un héliçoïde *dextrorsum*, d'après nos conventions sur la manière de fixer le signe d'une rotation), θ l'angle de la normale au plan avec l'axe, a et b les distances respectives du foyer et de la caractéristique à la projection de cet axe sur le plan; on a

$$a = -\frac{h}{2\pi}\tang\theta, \quad b = \frac{h}{2\pi}\cot\theta.$$

Le produit de ces deux distances est indépendant de l'inclinaison du plan.

Le foyer d'un plan parallèle à l'axe est à l'infini. Il suit de là que les vitesses de tous les points d'un pareil plan sont parallèles à un autre plan, lequel est perpendiculaire au premier.

Réciproquement : si les vitesses des divers points d'un plan P sont parallèles à un même plan perpendiculaire à P, l'axe central est parallèle au plan P, et même à la caractéristique de ce plan.

Voici une conséquence curieuse de ces théorèmes. Considérons dans un solide en mouvement une figure quelconque, tracée dans un plan parallèle à l'axe instantané glissant : les vitesses de tous les points de cette figure seront parallèles à un même plan, sans que le mouvement de la figure soit réductible à une rotation perpendiculaire à ce plan. (Consulter diverses communications de M. Chasles à l'Académie des Sciences, t. XVI, LI, LII des *Comptes rendus*.

(*) Il existe une droite douée de propriétés analogues, pour un déplacement fini quelconque d'un solide invariable; et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on considère un même corps solide dans deux positions*

La démonstration élémentaire par laquelle nous venons d'établir l'existence de l'axe central, ainsi que la construction de cet axe qui s'en déduit, est due au général Poncelet.

La construction suivante, que j'emprunte à M. Chasles, est un peu moins simple, mais elle offre une analogie complète avec la construction du centre instantané de rotation d'une figure mobile dans un plan : en ce sens qu'elle exige seulement qu'on connaisse les *directions* de trois vitesses AA′, BB′, CC′.

Soit λ l'intersection commune des plans normaux aux trajectoires des points A et B; la droite sur laquelle se mesure la plus courte distance des droites, λ et AB, rencontre l'axe central et lui est perpendiculaire.

Les deux points A et C donnent lieu de même à une autre droite qui rencontre l'axe instantané et lui est perpendiculaire. Ces deux droites déterminent l'axe cherché, qui n'est autre que la droite sur laquelle se mesure leur plus courte distance.

Scolie. — Si les points *a*, *b*, *c*, sont en ligne droite, notre première construction est en défaut, car le plan *abc* n'est pas déterminé.

Il faudra donc, pour appliquer cette construction, prendre trois points A, B, C, dont les vitesses ne soient pas parallèles à un même plan (*).

Remarques sur le mouvement infiniment petit d'un corps solide.

I. — Trois droites données quelconques O*a*, O*b*, O*c* ne peuvent généralement pas être considérées comme les vitesses de trois points pris arbitrairement, et constituant un système invariable.

---

différentes quelconques, il y a toujours dans ce solide une droite dont la position n'a pas changé, de sorte qu'on peut concevoir que le solide passe d'un lieu à l'autre par un mouvement héliçoïdal autour de cette droite comme axe. (Chasles.)

Cette droite s'appelle l'*axe central* des deux positions du solide, quelle que soit la grandeur du déplacement considéré.

(*) Quand il n'est pas possible de satisfaire à cette condition, c'est-à-dire *quand les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un même plan*, on sait que le mouvement se réduit à une rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

Il existe certaines relations entre les grandeurs et les directions de ces vitesses, et les longueurs des côtés du triangle ABC, mais je ne puis insister davantage sur ce sujet.

II. — Quels que soient les points du solide que l'on choisisse pour les employer à la détermination de l'axe instantané, la direction de cette ligne, ainsi que la grandeur de la vitesse de glissement, ne sauraient être altérées. Donc, *si par un point quelconque* O *on mène des lignes égales et parallèles aux vitesses des divers points d'un solide en mouvement, les extrémités de ces droites sont toutes situées dans un même plan, normal à l'axe instantané glissant.*

III. — Menons du point O à ce plan une oblique quelconque OP_1, au lieu de la perpendiculaire OP, nous pourrons de même décomposer la vitesse d'un point quelconque en deux autres, dont l'une soit représentée par OP_1; les deuxièmes composantes seront toutes parallèles au plan *abc*.

Si donc nous considérons trois axes animés d'un mouvement de translation dont la vitesse soit égale et parallèle à OP_1, le mouvement relatif à ces axes sera encore une rotation perpendiculaire au plan *abc*; mais la translation ne sera plus parallèle à l'axe de cette rotation.

On voit que, dans les diverses manières de décomposer le mouvement d'un système invariable en une translation et une rotation, la direction de la translation est arbitraire, tandis que celle de la rotation est déterminée.

Mouvement fini d'un solide invariable.

Ce mouvement fini, si on le rapporte à trois axes de direction invariable, passant toujours par le même point du corps, est celui d'un cône mobile, roulant sans glisser sur un autre cône de même sommet, lequel est relativement fixe.

En se figurant ce dernier cône animé du mouvement de translation des axes, pendant que le cône lié au corps roule sur lui, on aura l'image du mouvement.

Mais il me semble que cette image n'est peut-être pas suffisamment nette; de plus, un même mouvement est susceptible d'une infinité de représentations de ce genre, selon qu'on prendra tel ou tel point du solide pour origine des axes mo-

biles. Au contraire, l'axe de rotation glissant est unique; et il est naturel de s'appuyer sur cette propriété pour chercher à se faire une idée simple du mouvement.

Pour cela, considérons, avec le général Poncelet (*), l'ensemble de toutes les positions successives de l'axe central, pour un mouvement fini quelconque. Ces droites forment une surface réglée dans le corps, et une autre dans l'espace. L'axe central actuel se trouve à la fois sur la surface mobile et sur la surface fixe; d'ailleurs toutes les génératrices de la première viennent l'une après l'autre s'appliquer sur celles de la seconde, pour jouer à leur tour le rôle d'axe instantané. Or, au moment où la rotation autour d'une génératrice commune amène les deux génératrices suivantes à coïncider, les surfaces dont nous parlons ont deux génératrices communes, et par conséquent elles sont tangentes dans toute l'étendue de l'élément gauche correspondant.

Il suit de là que le mouvement du corps est celui d'une surface réglée, liée à ce corps, sur une autre surface réglée fixe à laquelle elle est tangente suivant toute une génératrice, et sur laquelle elle roule en glissant le long de cette génératrice.

Le rapport du glissement à la rotation, c'est-à-dire le pas de la vis qui nous donne l'idée du mouvement élémentaire du corps, change en même temps que l'axe de cette vis.

Quelquefois ce pas est nul : et tout se réduit, à cet instant, à une simple rotation sur un axe immobile. Mais, en général, il n'y a dans le corps aucun point dont la vitesse soit nulle, bien qu'il y ait toujours une droite qui conserve, en tant que ligne géométrique, une position invariable pendant un temps très-court.

Digression sur le raccordement des surfaces réglées.

Pour que deux surfaces gauches puissent se *raccorder* exactement tout le long d'une génératrice commune, il faut et il suffit que le paramètre de distribution des plans tangents, correspondant à cette génératrice, soit le même pour les deux surfaces : on sait que ce paramètre, que je désignerai par la lettre β,

(*) *Voir* les *Additions* aux *Éléments de Mécanique* de M. Resal, p. 187.

est le rapport de la plus courte distance de deux génératrices consécutives à l'angle infiniment petit formé par ces génératrices.

Le plan tangent en un point situé à une distance x du point central, est déterminé par son inclinaison θ sur le *plan central*. Or on a la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x}{\beta};$$

de sorte que, quand on a fait coïncider les points centraux de deux génératrices appartenant à des surfaces différentes, ainsi que les plans tangents correspondants, ou *plans centraux*, tous les autres plans tangents des deux surfaces coïncident également, si les paramètres sont égaux.

Considérons deux surfaces, ainsi raccordées suivant la génératrice G (*fig.* 103). Les deux génératrices suivantes, G_1, g_1, se confondent, à un infiniment petit du second ordre près; et, si les paramètres de ces deux génératrices sont encore égaux, on amènera les deux surfaces à se raccorder suivant ces nouvelles génératrices, au moyen :

1° D'un glissement C_1c_1, égal à la distance qui sépare les deux nouveaux points centraux;

2° D'une rotation représentée par l'angle des plans centraux correspondants.

Le mouvement sera susceptible de se continuer indéfiniment ainsi : les paramètres étant supposés égaux pour toutes les génératrices qui viennent s'appliquer successivement l'une sur l'autre.

Le glissement est nul quand les lignes de striction des deux surfaces coupent les génératrices correspondantes sous des angles égaux. Il suffit alors d'une rotation autour de la génératrice commune pour transporter le raccordement sur la génératrice suivante : ce qui revient à dire que *les deux surfaces sont susceptibles d'être appliquées, ou développées l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplicature,* absolument comme les cylindres ou les cônes sont développables sur le plan.

Supposons en effet que, pendant que la surface mobile tourne autour de g_1, pour amener g_2 sur G_2, l'élément (G, g_1) reste appliqué sur celui qu'il recouvre actuellement, et ainsi

de suite. Par cette opération qui peut se faire sans déchirer la surface, simplement au moyen de plis effectués le long de ses génératrices, on l'appliquera exactement sur l'autre surface gauche, tout comme on développe sur un de leurs plans tangents les surfaces communément appelées *développables*.

Application à l'hyperboloïde de révolution. — Dans cette surface, le cercle de gorge est la ligne de striction. Pour trouver le paramètre β, lequel est évidemment constant, considérons deux génératrices infiniment voisines quelconques (*fig.* 104). Appelons i l'angle de ces génératrices avec l'axe, ou, ce qui est la même chose, l'angle de la ligne de striction avec la plus courte distance AP des génératrices : on a, pour la longueur de cette plus courte distance,

$$AP = AB \cos i = R\,d\alpha \cos i,$$

en appelant R le rayon du cercle de gorge.

D'un autre côté, si l'on considère le cône directeur de la surface, on voit que l'angle de deux génératrices voisines est égal à $d\alpha \sin i$; donc enfin,

$$\beta = \frac{R\,d\alpha \cos i}{d\alpha \sin i} = R \cot i.$$

Pour que deux hyperboloïdes de révolution puissent se raccorder, il faut que le produit R cot i soit le même pour les deux surfaces; ce produit n'est autre chose, comme on sait, que le demi-axe non transverse de l'hyperbole méridienne.

La *fig.* 105 représente deux hyperboloïdes tangents tout le long d'une génératrice commune GG' (*) : nous verrons dans la deuxième section comment on utilise actuellement dans les machines les propriétés de deux solides de ce genre.

(*) Cette épure a été empruntée, avec l'autorisation de l'auteur, au *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie (2e partie), ouvrage auquel je renverrai pour toutes les questions relatives aux surfaces gauches.

CHAPITRE IV.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS SIMPLES D'UN CORPS SOLIDE.

Nous avons étudié dans le chapitre précédent les divers mouvements simples dont un corps solide est susceptible d'être animé : mouvements qui, pendant un temps infiniment petit, se réduisent nécessairement, ou à une translation, ou à une rotation, ou au mouvement d'une vis dans un écrou, lequel est une combinaison des deux premiers. Nous avons vu comment les données géométriques, qui définissent individuellement ces divers mouvements, varient, en général, dans la suite des temps, et comment on arrive à se faire une idée du mouvement fini qui résulte de la succession de ces mouvements élémentaires. Cherchons actuellement à *composer* plusieurs mouvements de ce genre.

Définissons d'abord ce que nous entendons par la *composition* de deux mouvements.

Supposons que nous possédions les lois du mouvement d'un solide, rapporté à trois axes quelconques, et que ces axes fassent partie d'un autre système solide, dont le mouvement nous soit également connu.

Ces données nous permettent de construire la vitesse relative d'un point quelconque de notre solide ainsi que la vitesse d'entraînement correspondante (c'est-à-dire la vitesse du point, considéré comme faisant partie du système emportant les axes mobiles) : la vitesse absolue du même point est la diagonale du parallélogramme fait sur les deux vitesses dont il est ici question. Mais au lieu de construire ainsi séparément la vitesse de chaque point, il est plus simple de chercher à définir à la manière ordinaire le mouvement absolu du solide, mouvement en vertu duquel chacun des points qui nous occupent aurait précisément la vitesse que nous venons

de trouver. L'objet de ce chapitre est de donner les règles au moyen desquelles on effectue directement la composition de deux mouvements quelconques.

Si on cherchait le mouvement relatif, connaissant le mouvement réel et le mouvement d'entraînement, le problème serait absolument identique. En effet, la vitesse relative d'un point s'obtient en composant sa vitesse absolue avec la vitesse d'entraînement prise en sens contraire. On trouvera donc le mouvement apparent du solide en composant le mouvement absolu avec un mouvement égal et de sens contraire au mouvement d'entraînement.

Autre manière d'envisager le problème de la composition des mouvements. — Si l'on se reporte aux premiers éléments de la théorie du mouvement relatif d'un point, on reconnaîtra que le problème précédent ne diffère pas de celui qui consiste à chercher le mouvement unique, capable de remplacer deux déplacements successifs infiniment petits d'un même corps solide : de là une deuxième manière de définir la composition de deux mouvements.

Souvent dans ce système on considère les deux mouvements composants comme simultanés, ce qui ne veut rien dire, à proprement parler. Cette locution s'explique en ce sens, que des mouvements infiniment petits successifs peuvent sans inconvénient, *au point de vue de l'application du calcul,* être considérés comme s'effectuant simultanément.

On peut en effet, dans la détermination du déplacement infiniment petit d'un corps solide, supposer que le corps au lieu de partir de la position donnée, parte d'une position infiniment voisine de celle-ci : les variations des coordonnées de chacun des points du corps, ainsi calculées, ne différeront pas de celles qu'on cherchait. Si donc on doit faire éprouver successivement à un corps un nombre quelconque de déplacements infiniment petits, on pourra supposer chacun d'eux effectué à partir de la position primitive du corps, comme si ces déplacements étaient en réalité simultanés; et la somme totale des variations des coordonnées de chaque point, calculée dans cette hypothèse, sera égale à celle qui résulterait des mouvements opérés les uns à la suite des autres, et dans un ordre quelconque.

§ XII. — Composition et décomposition des translations.

Si les deux mouvements qu'on demande de composer sont deux mouvements de translation, la vitesse relative OA (*fig.* 106) est constante à un instant donné en grandeur et en direction, quel que soit le point considéré; et il en est de même de la vitesse d'entraînement OB.

Donc la vitesse résultante OC est également constante, en grandeur et en direction, pour tous les points du système solide qui nous occupe; c'est-à-dire que *le mouvement composé de deux translations est lui-même un mouvement de translation, dont la vitesse est la résultante des vitesses des deux mouvements composants.*

Ce théorème est vrai, quel que soit le nombre des translations à composer. On pourra donc, tout comme dans le cas où il s'agissait des vitesses d'un point unique, remplacer autant de translations qu'on le voudra par une seule. Inversement, on peut décomposer une translation donnée en trois autres, parallèles respectivement à trois axes rectangulaires ou obliques.

Les formules qui résolvent analytiquement les problèmes relatifs à la composition et à la décomposition des translations sont celles que nous avons données (p. 37), et qu'il est inutile de transcrire ici.

§ XIII. — Composition et décomposition des rotations.

Supposons maintenant que le mouvement relatif d'un solide se réduise à une rotation OQ (*), et que l'axe OQ, relati-

(*) Remarquons à cet égard que pour définir une rotation relative, il ne suffit pas de donner la ligne autour de laquelle s'effectue cette rotation, ainsi que la vitesse angulaire et le sens du mouvement : *il est indispensable d'indiquer* le système des trois axes mobiles, par rapport auxquels le corps est animé de la rotation dont on veut parler. Supposons en effet qu'un de ces axes soit l'axe OQ de la rotation relative : si les deux axes, qui sont perpendiculaires à celui-ci, tournent eux-mêmes aussi vite que le corps et dans le même sens, il est clair que la rotation apparente sera nulle; et, en général, selon qu'on fera tourner ces axes autour de OQ plus ou moins rapidement que le corps mobile, la rotation apparente se trouvera positive ou négative.

Cette rotation est donc absolument indéterminée, tant que le système de comparaison n'est pas suffisamment défini.

vement immobile, fasse partie d'un système qui tourne lui-même autour d'un axe O′P (*fig.* 107), fixe d'une manière absolue.

Proposons-nous de composer ces deux mouvements, en commençant par le cas où l'axe de la rotation relative et celui de la rotation d'entraînement sont contenus dans un même plan.

Composition de deux rotations dont les axes se rencontrent.

Soit (*fig.* 108) un corps solide animé de deux rotations simultanées, autour des axes OP et OQ, qui se rencontrent en O. Les deux composantes de la vitesse du point d'intersection des deux axes sont nulles : par suite le mouvement composé est une rotation autour d'un axe qui passe par ce point O. Pour déterminer la direction de cet axe, il faut trouver un deuxième point dont la vitesse soit nulle.

Or, je dis d'abord que ce point doit être cherché dans le plan POQ.

En effet, les deux composantes de la vitesse d'un point situé hors de ce plan ne sont pas dirigées suivant une même droite : elles ne peuvent donc se détruire ; et l'axe de la rotation composée ne saurait être en dehors du plan des deux rotations données.

Cela posé, soient m un point pris dans l'intérieur de l'angle des deux axes, x et y les distances du point m aux lignes OP et OQ : les deux composantes de la vitesse de ce point sont perpendiculaires au plan POQ ; elles sont de sens contraire, comme on le voit aisément en se reportant à nos conventions relatives aux sens des rotations ; enfin elles ont pour valeurs absolues respectivement px et qy, p et q étant les vitesses angulaires données. Il suit de là que le point m restera fixe, si l'on a la relation

$$px = qy.$$

Cette équation détermine la direction de l'axe cherché, laquelle est celle de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes OP et OQ, qui représentent à une échelle convenue les vitesses angulaires des deux rotations composantes.

Je dis de plus que la vitesse angulaire de la rotation composée est représentée à l'échelle de la figure par la diagonale OR elle-même; de sorte que cette ligne OR nous fait connaître à la fois la grandeur, la direction et le sens de la rotation qu'il s'agissait de déterminer.

Pour établir ce dernier point, nous remarquerons que le quotient de la vitesse d'un point quelconque du solide par sa distance à la ligne OR est nécessairement constant, puisqu'il a été démontré que le mouvement est une rotation autour de OR : c'est ce quotient qui est la vitesse angulaire cherchée. Désignons par r cette vitesse angulaire, et considérons un point Q situé sur l'axe OQ. L'une des composantes de la vitesse de ce point est nulle, l'autre a pour valeur

$$p \times \mathrm{QH} :$$

d'après ce que nous venons de dire, l'expression de r est

$$r = \frac{p \times \mathrm{QH}}{\mathrm{QH'}}.$$

Or, les deux triangles OPR, OQR sont égaux ; les produits $\mathrm{OP} \times \mathrm{QH}$ et $\mathrm{OR} \times \mathrm{QH'}$, qui représentent les doubles de leurs aires, sont donc égaux : c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\mathrm{QH}}{\mathrm{QH'}} = \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OP}} = \frac{r}{p}.$$

Donc r est égal à OR, puisque OP a été pris égal à p.

Parallélogramme des rotations. — En réunissant les deux résultats qui précèdent, on dira simplement que *deux rotations simultanées, autour de deux axes concourants, se réduisent à une rotation unique, représentée par leur résultante géométrique.* Cette règle est identique à celle qui se rapporte à la composition de deux vitesses d'un point mobile.

On conclut de là que des rotations en nombre quelconque, s'effectuant autour d'axes qui passent tous par un même point, se réduisent à une seule représentée par la ligne qui ferme le polygone des rotations composantes (*). On en conclut encore

(*) Cette représentation lumineuse de la composition des rotations est due à Lagrange.

qu'une rotation quelconque, dont l'axe est donné, peut toujours être remplacée par trois rotations autour de trois axes rectangulaires ou obliques, qui se croisent en un point de l'axe donné.

Composition des rotations autour d'axes parallèles.

Considérons d'abord deux rotations de même sens, et soient AP, BQ (*fig.* 109) les axes de ces rotations : les deux composantes correspondantes de la vitesse d'un point sont dans un plan perpendiculaire à ces axes; donc tous les points du corps ont des vitesses parallèles à ce plan, et par conséquent le mouvement se réduit à une rotation autour d'un axe parallèle aux axes donnés.

Il est d'ailleurs évident que les points animés d'une vitesse nulle sont situés dans le plan des deux lignes AP, BQ : qu'ils se trouvent entre ces deux lignes, si, comme nous l'avons supposé, les deux rotations sont de même sens : enfin que les distances x et y de ces points aux deux axes doivent satisfaire à la relation

$$px = qy.$$

On conclut de là que les distances de l'axe de la rotation composée aux axes des rotations composantes sont inversement proportionnelles aux vitesses angulaires p, q.

Remarquons enfin que la vitesse d'un point de la ligne BQ s'exprime indifféremment par $p(x+y)$ et par ry, si on désigne par r la vitesse angulaire autour de l'axe CR que nous venons de déterminer; donc

$$p(x+y) = ry.$$

En remplaçant dans le premier membre de cette équation px par qy, on obtient

$$r = p + q :$$

Deux rotations p et q, parallèles et de même sens, se composent en une seule égale à leur somme p + q. L'axe de cette rotation est parallèle aux axes donnés, et divise leur distance dans la raison inverse des quantités p et q.

Si les deux rotations p et q étaient de sens contraires (*fig.* 110), on trouverait aisément :

1° Que le mouvement résultant est une rotation autour d'un

axe parallèle aux axes des rotations p et q, et situé dans le plan de ceux-ci ;

2° Que cet axe est en dehors de la portion du plan comprise entre les axes AP, BQ, et du côté de l'axe qui correspond à la plus grande vitesse angulaire p ;

3° Qu'en nommant toujours x et y les distances d'un point de cet axe aux lignes AP et BQ, on a la relation

$$px = qy ;$$

4° Enfin, que la rotation résultante a lieu dans le sens de p, et que la vitesse angulaire de cette rotation est égale à la différence $p - q$.

Composition d'un nombre quelconque de rotations parallèles. — Lorsqu'un solide est animé d'un nombre quelconque de rotations dont les axes sont tous parallèles, on trouve le mouvement de ce solide en composant successivement, et dans un ordre quelconque, les rotations données.

On prendra par exemple deux rotations de même sens, et on en déterminera la résultante ; on composera cette résultante avec une troisième rotation de même sens ; puis, quand on aura épuisé toutes ces rotations, on traitera de la même manière celles dont les axes ont la direction inverse. On arrivera ainsi à remplacer toutes les rotations données par deux rotations seulement : ces deux rotations seront de sens opposé, et leur composition donnera la résultante définitive.

Soient p et q les deux résultantes partielles, D la distance des axes de ces deux rotations ; on a, pour déterminer l'axe de leur résultante, la relation

$$px = qy = q(\mathrm{D} + x) ;$$

d'où

$$x = \mathrm{D}\frac{q}{p-q}, \quad y = \mathrm{D}\frac{p}{p-q}.$$

Cas singulier. — Si q et p sont très-peu différents l'un de l'autre, la vitesse angulaire, $p - q$, de la rotation résultante se trouve très-petite ; et en même temps l'axe de cette rotation s'éloigne de plus en plus des deux axes donnés.

Vient-on à supposer p et q rigoureusement égaux, on

trouve, en appliquant les règles précédentes, que ces deux rotations équivalent à une rotation nulle, s'effectuant autour d'un axe situé à l'infini. Ceci ne nous apprend absolument rien : sinon que, dans ce cas remarquable, il n'y a plus de points fixes dans le corps ; par suite, le mouvement de celui-ci doit changer de nature, et il est facile de démontrer qu'il se réduit à une pure translation.

Soit M (*fig.* 111) la projection d'un point du corps sur un plan perpendiculaire aux deux axes ; joignons MA', MB'. La vitesse du point M est la résultante des vitesses M*a*, N*b*, respectivement perpendiculaires aux rayons MA', MB', et proportionnelles aux longueurs de ces rayons.

Construisons cette résultante M*c*. Les triangles, M*bc* et MA'B', sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels ; on conclut de là : d'une part que la droite M*c* est perpendiculaire à AB, et d'autre part que la longueur de cette droite est exprimée par le produit pD, D étant toujours la distance AB. Ces deux résultats sont indépendants de la position du point M.

Ceci prouve que, lorsqu'un solide est animé simultanément de deux rotations égales, contraires, mais non directement opposées, la vitesse est constante en grandeur et en direction pour tous les points de ce corps ; et par conséquent le mouvement résultant des deux rotations que nous venons de définir est un pur mouvement de translation.

Des couples de rotations.

L'ensemble de deux rotations parallèles égales et de sens contraire, mais non directement opposées, forme ce qu'on appelle un *couple de rotations*, et jouit des propriétés suivantes :

1° Un couple de rotations équivaut à une translation perpendiculaire à son plan, translation dont la vitesse s'obtient en multipliant la vitesse angulaire commune des deux rotations qui constituent le couple, par la distance des axes autour desquels ces deux rotations s'effectuent.

Le produit ainsi obtenu, pD, est le *moment* du couple.

2° Un couple de rotations peut être transporté d'une manière

quelconque dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra. En effet tous les couples ainsi obtenus sont équivalents à une même translation : ils sont par conséquent équivalents entre eux.

3° On peut par la même raison disposer à volonté de la grandeur de la rotation p, ou de celle du *bras de levier* D (*), pourvu qu'on n'altère pas le *moment du couple*.

4° Inversement, une translation quelconque étant donnée, on a le droit de lui substituer un couple situé dans un plan perpendiculaire à la direction de la vitesse de la translation, plan passant d'ailleurs par tel point de l'espace que l'on voudra. De plus, on peut choisir arbitrairement dans ce plan la direction commune des deux rotations du couple, ainsi que l'un des deux éléments, p, D, en déterminant l'autre par la relation

$$pD = v.$$

Usage des couples de rotations. — L'idée d'un mouvement de translation est éminemment simple, et il ne peut être question de lui substituer l'image beaucoup moins nette fournie par deux rotations égales et contraires. L'introduction des couples dans la Cinématique doit être considérée comme un pur artifice de raisonnement, propre à simplifier la résolution de certains problèmes.

Transport d'une rotation parallèlement à elle-même. — On peut par exemple, grâce aux propriétés des couples, remplacer une rotation quelconque OP (*fig.* 112) par une rotation égale, dont l'axe passe par tel point de l'espace que l'on voudra, O', plus une translation perpendiculaire au plan OPO'.

Il suffit pour cela de prendre cette translation équivalente au couple (O'P'',OP), ce qui est toujours possible : on voit que la réunion de cette translation avec la rotation O'P' produit précisément la rotation OP.

Application. — Nous nous sommes représenté le mouvement le plus général d'un corps solide en attachant à un point quelconque, O, de ce corps, trois axes animés d'un mouvement de translation dont la vitesse est égale à la vitesse

(*) La longueur D s'appelle le *bras de levier* du couple : nous verrons plus tard l'origine de cette dénomination, empruntée au langage de la Statique.

variable OA de ce point : le mouvement du solide, relativement à ces axes, est une rotation OP, dont l'axe passe par le point O.

Soit O′ un autre point quelconque du solide; ajoutons aux deux mouvements OA, OP, deux rotations contraires dont les axes soient tous les deux dirigés suivant la parallèle à l'axe OP, menée par le point O′, et dont les vitesses angulaires soient égales en valeur absolue à OP. Il est clair que nous n'avons rien changé au mouvement du solide; seulement ce mouvement se présente maintenant comme composé de quatre mouvements simples, savoir : les trois rotations OP, O′P′, O′P″, et la translation OA, ou O′A′ (*).

Mais OP et O′P″ forment un couple de rotations; ce couple équivaut à une translation O′B qu'on peut composer avec O′A′; et il ne nous reste plus, outre la translation résultante O′V, que la rotation O′P′, laquelle n'est autre chose que la rotation OP, *transportée* au point O′.

Le mouvement du solide peut être indifféremment considéré comme composé : soit de la translation OA et de la rotation OP, soit de la translation O′V et de la rotation O′P′.

Les diverses décompositions dont un même mouvement est ainsi susceptible donnent lieu aux remarques suivantes :

1° Quel que soit le point choisi pour origine des axes mobiles, on trouve toujours une même ligne pour représenter en grandeur et en direction l'axe de la rotation du corps. Cette ligne est évidemment parallèle à l'axe central.

2° La translation varie d'un point à un autre : cependant on trouve toujours la même valeur pour tous les points d'une même ligne telle que OP, parallèle à l'axe central.

3° La ligne qui, en un point donné, représente la translation, n'étant autre chose que la vitesse du point lui-même, on voit que la construction qui précède nous fait connaître d'une manière simple la vitesse d'un point quelconque d'un système solide, quand on se donne la translation et la rotation de ce système.

4° Enfin, pour déterminer l'axe central, il faut décomposer

(*) Il est évident que la ligne qui représente une translation peut être indifféremment menée par un point quelconque de l'espace.

la translation OA, parallèlement et perpendiculairement à l'axe de la rotation OP (*fig.* 113).

La composante OM revient à un couple de rotations situé dans un plan perpendiculaire à POM ou à POA. Arrangeons-nous de manière que l'une des rotations du couple détruise la rotation OP : le point O_1, où l'autre rotation devra être appliquée, est un des points de l'axe central. On trouvera la longueur OO_1 par l'équation

$$OM = OP \times OO_1.$$

Composition des mouvements quelconques.

Pour composer un nombre quelconque de mouvements élémentaires, lesquels se réduisent chacun en particulier à la combinaison d'une translation et d'une rotation, on prendra une origine arbitraire O, et on *transportera* en ce point toutes les rotations. Ces rotations se composeront toutes en une rotation unique, à laquelle il faudra joindre, pour avoir le mouvement réel, la résultante qu'on obtient en composant toutes les translations données, plus celles qui proviennent du transport des rotations au point O.

Concevons par le point O trois axes quelconques : ce qui précède donne le moyen de décomposer le mouvement d'un solide en trois translations, parallèles aux trois axes, et trois rotations s'effectuant autour de ces mêmes axes.

Enfin tout mouvement élémentaire peut encore être décomposé, et d'une infinité de manières, en deux rotations autour de deux droites non situées dans un même plan. L'une de ces droites peut être prise à volonté (*); l'autre est la *conjuguée* de celle-ci, et réciproquement.

(*) Il suit de là qu'une droite peut être amenée d'une position à une autre par l'effet d'une simple rotation autour de sa conjuguée. Il est à remarquer que cette conjuguée est unique, quel que soit le système solide dans lequel on insère la première droite.

Lorsqu'on considère une droite mobile, sans se préoccuper de fixer les trajectoires des divers points de cette droite, il y a une infinité de manières de la faire passer d'une position à la position voisine, au moyen d'une simple rotation. Le lieu des conjuguées qui répondent à ces divers mouvements, c'est-à-dire le lieu des axes des hyperboloïdes de révolution qui se raccordent

§ XIV. — Mouvement relatif de deux solides qui se déplacent chacun d'une manière quelconque.

Problème général. — *Deux corps sont animés de mouvements connus quelconques : trouver le mouvement relatif de l'un d'eux par rapport à l'autre, c'est-à-dire par rapport à trois axes rectangulaires invariablement liés à celui-ci.*

La solution de ce problème, dont on rencontre de nombreuses applications dans l'étude des machines, résulte immédiatement de la théorie de la composition des mouvements.

En effet, il est évident qu'on ne change pas le mouvement relatif cherché, en imprimant à l'ensemble des deux corps un

---

avec la surface gauche décrite par la droite, n'est autre chose que le paraboloïde normal à cette surface le long de notre droite.

De la définition que nous avons donnée des droites conjuguées, considérées comme axes de rotation, découle immédiatement la propriété suivante, qui définit ces mêmes droites au point de vue de la Géométrie pure :

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'une droite mobile ont pour intersection commune la droite conjuguée.

Menons la perpendiculaire commune à l'axe central et à la droite donnée D ; le pied de cette perpendiculaire P sur la droite D est le point central de l'élément gauche décrit par cette droite dans son mouvement infiniment petit : nous l'appellerons le point central de la droite.

Cela posé, considérons le paraboloïde normal à la surface de vis à filets carrés décrite par la perpendiculaire P, on a le théorème suivant :

La conjuguée d'une droite est parallèle à la génératrice du paraboloïde normal qui passe par le point central de cette droite.

Cette propriété étant réciproque, la conjuguée se trouve aussi déterminée de position, puisqu'il suffit pour en avoir le point central de chercher sur la ligne P le point où la génératrice du paraboloïde est parallèle à la droite donnée.

Plaçons-nous sur l'axe central, supposé vertical, de manière à voir la rotation instantanée s'effectuer dans notre sens positif, et regardons toutes les droites dont le point central est sur la ligne P. Les portions de ces droites situées *au-dessus* du paraboloïde sont les axes des rotations conjuguées équivalentes au mouvement héliçoïdal qui nous occupe. Il n'est donc pas possible, au point de vue cinématique, pour toutes les droites qui descendent au-dessous du paraboloïde, d'assigner une direction conjuguée. Quant aux génératrices du paraboloïde et de tous les autres paraboloïdes de même nature, il n'existe aucune manière de les amener d'une position à la position voisine, au moyen d'une simple rotation.

Je ne développerai pas davantage les propriétés des droites conjuguées, lesquelles s'étendent au cas où l'on considère un déplacement fini d'une droite dans l'espace. (Consulter les nombreux Mémoires de M. Chasles, déjà cités.)

mouvement commun quelconque. Prenons ce mouvement commun égal et contraire au mouvement de l'un des deux solides : celui-ci se trouvera réduit au repos, et le mouvement absolu de l'autre sera précisément le mouvement relatif demandé. Ce mouvement s'obtient, comme on voit, en composant par les règles établies dans le paragraphe précédent, le mouvement propre du solide avec un mouvement égal et contraire à celui des trois axes de comparaison.

Appliquons cette solution générale aux cas particuliers les plus intéressants.

PROBLÈME I. — *Deux corps tournent en sens inverse autour de deux axes fixes et parallèles* C, C', *avec les vitesses angulaires respectives* (ω), $(-\omega')$: *trouver le mouvement relatif du solide* (C) *par rapport au solide* (C').

Solution. — Composer la rotation ω, dont l'axe est projeté en C (*fig.* 114), avec une rotation ω' égale et contraire à la rotation C'. Les deux rotations à composer sont de même sens, puisque les rotations données ont été supposées de sens contraire : la résultante est égale à la somme, $\omega + \omega'$; et l'axe de cette rotation résultante, axe instantané de la rotation relative, s'obtient en divisant la distance CC', dans le rapport inverse des quantités ω et ω'.

Le mouvement de (C') par rapport à (C) est une rotation égale et contraire à celle que nous venons de trouver : elle s'effectue autour du même axe A.

Corollaire. — Si le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ est constant, l'axe déterminé en vertu de la règle précédente occupe une position fixe dans l'espace (*).

PROBLÈME II. — *Deux corps assujettis à tourner autour de deux axes fixes et parallèles* C, C', *sont en contact par deux cames de forme quelconque* (*cylindrique*) : *trouver le rapport des vitesses angulaires de ces deux corps autour de leurs axes respectifs.*

Solution. — D'après ce que nous venons de voir, le mou-

(*) Il n'en mérite pas moins le nom d'axe instantané, car il n'est axe de rotation que dans le mouvement relatif; et il n'est pas relativement fixe.

vement du corps (C') par rapport au corps (C) est une rotation autour d'un centre instantané A (*fig.* 115), situé sur la ligne CC'.

D'autre part, nous savons que la normale commune à deux courbes qui sont assujetties à rester constamment en contact passe au centre instantané de la rotation relative; donc ce centre n'est autre que le point où la normale MN vient rencontrer la ligne des centres.

Une fois le point A déterminé, nous savons, par le problème précédent, que le rapport des vitesses angulaires est l'inverse de celui des segments CA, C'A.

De là ce théorème déjà établi précédemment, d'une manière indirecte :

Les vitesses angulaires de deux courbes planes qui s'appuient l'une sur l'autre, sont en raison inverse des segments déterminés par la normale commune sur la ligne qui joint les centres autour desquels tournent ces deux courbes.

Corollaire. — Pour que le rapport des vitesses angulaires soit constant, il faut et il suffit que la normale commune aux deux cames vienne couper la ligne des centres en un point fixe.

PROBLÈME III. — *Les choses étant comme dans le problème précédent, trouver l'étendue du glissement relatif.*

Soit M le point de contact (*fig.* 116) : au bout d'un temps infiniment petit dt, le contact se fait en un autre point M_1, et les points primitivement réunis en M se trouvent transportés en n et n'. La distance nn' est d'après notre définition l'arc de glissement : arc dont la direction limite est celle de la perpendiculaire à la normale commune.

Considérons le triangle infiniment petit Mnn', dont les côtés ont pour valeurs

$$Mn = ds = \omega\, dt \times CM,$$
$$Mn' = ds' = \omega' dt \times C'M,$$
$$nn' = dS = v_g dt :$$

les rapports de ces côtés sont égaux aux rapports des sinus des angles opposés. Mais, les trois côtés du triangle Mnn' étant perpendiculaires respectivement aux droites MA, MC, MC', on

peut remplacer les angles de ce triangle par les angles égaux formés autour du point M, et poser la proportion

$$dS : ds : ds' :: \sin \widehat{MC, MC'} : \sin \widehat{MC', MA} : \sin \widehat{MC, MA}.$$

On conclut de là le rapport de la vitesse de glissement à l'une ou à l'autre des vitesses angulaires.

Corollaire. — Pour que le glissement élémentaire soit nul, il faut qu'on ait

$$\sin \widehat{MC, MC'} = 0,$$

c'est-à-dire que le point de contact des deux courbes soit sur la ligne des centres.

PROBLÈME IV. — *Déterminer les deux courbes, de manière que la transmission du mouvement s'effectue sans glissement, et que le rapport des vitesses angulaires soit constant.*

Solution. — Pour que le glissement soit nul, il faut que le point de contact des profils cherchés soit sur la ligne des centres de rotation. Si de plus on veut que le rapport des vitesses soit constant, ce point doit être un point fixe M, de la ligne CC'.

Il suit de là que les longueurs CM, C'M sont constantes, et que par conséquent les courbes décrites par le point M, relativement aux centres respectifs C et C', sont deux circonférences de cercle (*fig.* 117). Les rayons de ces circonférences sont déterminés par leur somme, égale à la longueur CC', et par leur rapport, qui est l'inverse du rapport de vitesses donné.

Scolie. — Si l'on supprime la restriction, *sans glissement*, le point de contact des deux courbes peut être n'importe où : le rapport des vitesses ne cessera pas d'être constant, et conservera la même valeur que précédemment, pourvu que la normale commune vienne passer au point de contact M des circonférences dont nous venons de parler; de sorte que, géométriquement, le problème admet une infinité de solutions : nous savons qu'on peut se donner arbitrairement l'une des deux courbes, et que l'autre est l'enveloppe des positions relatives de celle-ci.

Nous verrons plus tard, parmi ces solutions en nombre infini, quelles sont celles que la pratique a adoptées.

PROBLÈME V. — *Étant donnée la courbe* (C') (*fig.* 118), *déterminer la courbe* (C) *de manière que le glissement soit nul : trouver dans cette hypothèse le rapport variable des vitesses simultanées des deux cames.*

Solution. — Posons :

$$CC' = a, \quad CM = r, \quad C'M = r',$$

et soient θ et θ' les angles des rayons vecteurs r et r' avec deux axes CP, C'P', fixés respectivement aux centres C et C'.

La courbe (r, θ) devant être tangente au point M à la courbe (r', θ'), on a les relations suivantes :

$$r + r' = a, \tag{1}$$

$$r\frac{d\theta}{dr} = r'\frac{d\theta'}{dr'}. \tag{2}$$

Comme on tire de l'équation (1)

$$dr = -dr', \tag{3}$$

on voit que l'équation (2) se réduit à

$$r d\theta = -r' d\theta' \quad (*) : \tag{4}$$

c'est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Une fois qu'on connaît r en fonction de r', on a pour le rapport des vitesses

$$m = \frac{r}{r'}. \tag{5}$$

PROBLÈME VI. — *Réciproquement, le rapport variable des vitesses étant donné : trouver les deux courbes* (C) *et* (C'), *le glissement devant toujours être nul.*

La solution analytique de ce problème inverse est fournie

(*) On vérifie que le mouvement est bien un roulement simple; en effet :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{dr'^2 + r'^2 d\theta'^2} = ds'.$$

Il résulte de cette équation que les arcs parcourus simultanément par le point de contact sur les deux courbes sont égaux.

par les équations qui résolvent le problème précédent; à savoir (1), (4) et (5).

Généralement, le mouvement d'un des arbres est uniforme, et on se donne la loi du mouvement qu'on veut imprimer à l'autre : on connaît alors m en fonction du temps, ou de l'angle θ qui varie proportionnellement au temps.

Scolie. — Quand on a trouvé deux courbes convenables, on peut, sans cesser de satisfaire à la question, déformer ces deux courbes de la manière suivante.

On réduira tous les angles θ et θ' dans un rapport constant quelconque, rapport qui doit être le même pour les deux courbes conjuguées; puis, sur chacun des rayons correspondant aux angles réduits, on portera des longueurs égales à celles des rayons vecteurs primitifs : les courbes ainsi obtenues répondront à toutes les conditions du problème.

PROBLÈME VII. — *Un corps tourne autour d'un axe* C′ (*fig.* 119) : *trouver son mouvement par rapport à un autre corps animé d'un mouvement de translation dans le sens de la flèche* (f).

Solution. — On passe des problèmes précédents à celui-ci en supposant que le centre C s'éloigne à l'infini, sur la perpendiculaire à la direction de la translation.

Pour résoudre le même problème directement, il faut composer la rotation (C′) avec une translation contraire à la translation donnée. Remplaçons cette translation par un couple de rotations et prenons l'une des rotations du couple égale et contraire à la rotation (C′), ce qui est toujours possible : le mouvement composé se trouvera simplement représenté par l'autre rotation du couple, laquelle est égale et parallèle à la rotation (C′), et dirigée dans le même sens.

La position A de l'axe de cette rotation est déterminée par l'équation

$$\omega' \times C'A = v,$$

v étant la vitesse de la translation donnée (*).

(*) Le point A n'est autre chose que le point du corps tournant, dont la vitesse est précisément égale à la vitesse v, et dirigée dans le même sens. Par suite la vitesse relative de ce point est nulle.

On obtient donc le mouvement relatif en transportant la rotation (C') parallèlement à elle-même, en un certain point de la perpendiculaire abaissée du centre C' sur la direction de la vitesse de la translation.

PROBLÈME VIII. — *Deux corps tournent uniformément autour de deux axes non situés dans le même plan : trouver le mouvement relatif.*

Solution. — Soient (*fig.* 120) Pp, Qq les axes des deux rotations données. Menons la plus courte distance PQ de ces deux droites, et soit h la longueur de cette plus courte distance.

Pour avoir le mouvement relatif du deuxième corps, il faut composer sa rotation Qq avec une rotation Pp_1, égale et contraire à la rotation de l'autre solide.

Introduisons deux rotations contraires Qp_2, Qp_3, égales à p en valeur absolue : nous n'aurons rien changé au mouvement relatif cherché. Or les rotations q et p_2 se composent en une seule r; et l'on a en outre le couple (p_1, p_3), lequel équivaut à une translation QA perpendiculaire au plan PQp_2.

Le mouvement relatif se compose de la rotation Qr et de la translation QA, dont la vitesse est représentée par le produit ph.

PROBLÈME IX. — *Les choses étant comme dans le problème précédent, déterminer l'axe de rotation glissant du mouvement relatif.*

Solution. — Décomposer la translation QA (*fig.* 121) en deux, dont l'une QB soit dirigée suivant l'axe de la rotation résultante, l'autre QC étant perpendiculaire à cet axe : on a

$$\mathrm{QB} = ph \sin \overline{p, r},$$

$$\mathrm{QC} = ph \cos \overline{p, r}.$$

Remplaçons QC par un couple dont l'une des rotations soit égale et contraire à r : l'autre s'effectuera autour d'un axe contenu dans le plan PQr. Soit OR ce nouvel axe, et z le bras de levier du couple, c'est-à-dire la distance QO, on aura

$$rz = ph \cos \overline{p, r}.$$

La ligne ainsi déterminée n'est autre chose que l'axe de rotation glissant.

On déduit de l'équation précédente

$$z = \frac{ph\cos\overline{p,r}}{r}, \quad h - z = \frac{qh\cos\overline{q,r}}{r},$$

en ayant égard à la relation évidente

$$r = p\cos\overline{p,r} + q\cos\overline{q,r}.$$

Donc

$$\frac{z}{h-z} = \frac{p\cos\overline{p,r}}{q\cos\overline{q,r}} = \frac{\cot\overline{p,r}}{\cot\overline{q,r}},$$

car

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin\overline{q,r}}{\sin\overline{p,r}}.$$

Pour construire z, inscrivons dans la projection horizontale de l'angle des axes donnés, et perpendiculairement à l'axe de la rotation résultante, une longueur $P_1Q_1 = PQ = h$; cette ligne est divisée au point I dans le rapport demandé. En effet, on a

$$QI = Q_1I\cot\overline{q,r} = IP_1\cot\overline{p,r},$$

d'où

$$\frac{Q_1I}{IP_1} = \frac{z}{h-z}.$$

Scolie. — Quand les axes sont rectangulaires, les angles désignés par $\overline{p,r}$ et $\overline{q,r}$ sont complémentaires; donc

$$\frac{p}{q} = \cot\overline{p,r} = \frac{1}{\cot\overline{q,r}}, \quad \frac{z}{h-z} = \frac{p^2}{q^2}.$$

THÉORÈME. — *L'axe de rotation glissant divise la plus courte distance des deux axes, supposés rectangulaires, dans le rapport inverse du carré des vitesses p et q.*

Autrement : les vitesses angulaires des deux arbres sont entre elles inversement comme les *racines carrées* des distances des axes à l'axe instantané (*).

(*) Et non comme ces distances elles-mêmes, ainsi que l'ont écrit plusieurs auteurs.

PROBLÈME X. — *Déterminer les deux surfaces réglées que décrit l'axe instantané dans l'intérieur de chacun des deux corps.*

Considérons seulement le cas où le rapport $\frac{p}{q}$ est constant : l'axe instantané est fixe dans l'espace, mais il ne l'est pas dans les deux corps ; et ses positions successives tracent respectivement deux hyperboloïdes de révolution qui, dans le mouvement, se touchent constamment tout le long de la génératrice commune.

Scolie. — Il est facile de vérifier *à posteriori* que ces deux surfaces satisfont à la condition nécessaire et suffisante pour le raccordement des hyperboloïdes de révolution.

En effet, les rayons R et R_1 des cercles de gorge de ces hyperboloïdes sont respectivement égaux à z et $h - z$; les inclinaisons i et i_1 de la génératrice sur chaque axe sont les angles que nous avons désignés par $\overline{q, r}$ et $\overline{p, r}$. Donc l'équation

$$z \cot \overline{q, r} = (h - z) \cot \overline{p, r}$$

revient à la relation que nous connaissons :

$$R \cot i = R_1 \cot i_1.$$

§ XV. — THÉORIE ANALYTIQUE DE LA ROTATION AUTOUR D'UN POINT.

Après avoir établi géométriquement les théorèmes relatifs à l'existence et aux propriétés de l'axe instantané de rotation dans le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, ainsi que ceux qui se rapportent à la composition des rotations, il ne sera pas inutile de montrer comment l'analyse s'applique à ce genre de questions. Il importe en même temps de calculer, une fois pour toutes, les formules de Géométrie analytique dont nous aurons plus tard à faire un usage continuel, dans l'importante théorie de la rotation des corps.

Nous nous bornerons d'ailleurs au cas où il y a un point fixe dans le système, et nous démontrerons analytiquement :

1° Que dans le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, il y a toujours dans ce corps une infinité de points situés

sur une même ligne droite, points animés à un instant donné d'une vitesse nulle;

2° Que les vitesses de tous les autres points du solide sont les mêmes que si le corps tournait effectivement autour de cette droite dont la vitesse est nulle, droite qui porte le nom d'axe instantané ou spontané de rotation;

3° Enfin que ces vitesses sont encore les mêmes que si le corps tournait simultanément autour de trois axes rectangulaires quelconques (menés par le point fixe), avec des vitesses angulaires représentées par les projections sur ces trois axes de la vitesse angulaire autour de l'axe instantané.

Il suffit, pour établir ces propositions, de différentier les formules ordinaires de la transformation des coordonnées, en appliquant ces formules au passage d'un système d'axes liés au corps à un système fixe dans l'espace. Nous supposerons ces deux systèmes rectangulaires.

Prenons pour origine le point fixe; soient OX_1, OY_1, OZ_1, (*fig.* 122) trois axes rectangulaires immobiles par rapport au corps, et OX, OY, OZ, trois autres axes fixes dans l'espace.

Un point du solide est déterminé à un instant quelconque par ses coordonnées x_1, y_1, z_1, prises par rapport aux axes mobiles, et par les positions de ces axes au même instant : positions qu'on définit en donnant les neuf cosinus des angles formés par les axes mobiles avec les axes fixes.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} a &= \cos \widehat{X_1, X}, \quad a' = \widehat{Y_1, X}, \quad a'' = \cos \widehat{Z_1, X}, \\ b &= \cos \widehat{X_1, Y}, \quad b' = \widehat{Y_1, Y}, \quad b'' = \cos \widehat{Z_1, Y}, \\ c &= \cos \widehat{X_1, Z}, \quad c' = \widehat{Y_1, Z}, \quad c'' = \cos \widehat{Z_1, Z} \ (*), \end{aligned}$$

on a les expressions suivantes pour les coordonnées du point (x_1, y_1, z_1), considérées par rapport aux axes OX, OY, OZ :

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + a'y_1 + a''z_1, \\ y &= bx_1 + b'y_1 + b''z_1, \\ z &= cx_1 + c'y_1 + c''z_1. \end{aligned}$$

(*) Ces neuf cosinus sont les mêmes à chaque instant pour tous les points du corps; mais ils varient pendant le mouvement. Ce sont donc des fonctions du temps, et du temps seulement.

Ces cosinus satisfont aux relations que l'on connaît.

Différentions ces équations, en considérant x_1, y_1, z_1 comme des constantes; nous obtiendrons les composantes de la vitesse du même point, projetée sur les trois axes fixes :

$$\frac{dx}{dt} = v_x = x_1 \frac{da}{dt} + y_1 \frac{da'}{dt} + z_1 \frac{da''}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y = x_1 \frac{db}{dt} + y_1 \frac{db'}{dt} + z_1 \frac{db''}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = v_z = x_1 \frac{dc}{dt} + y_1 \frac{dc'}{dt} + z_1 \frac{dc''}{dt}.$$

Cela posé, je dis en premier lieu que le mouvement du corps est une rotation autour d'un axe que nous allons déterminer.

Cherchons les projections v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1} de la vitesse de notre point sur les axes mobiles.

On obtient v_{x_1} en multipliant respectivement v_x, v_y, v_z par a, b, c, et ajoutant; l'expression à laquelle on arrive présente ceci de remarquable : qu'elle ne contient pas de terme en x_1. On a en effet

$$a \frac{da}{dt} + b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2),$$

quantité identiquement nulle, puisque la somme $a^2 + b^2 + c^2$ est égale à l'unité.

Il suit de là que l'expression de v_{x_1} se compose uniquement de termes multipliés par y_1 ou par z_1 : nous la mettrons sous la forme

$$qz_1 - ry_1,$$

les coefficients q et r satisfaisant aux relations

$$q = a \frac{da''}{dt} + b \frac{db''}{dt} + c \frac{dc''}{dt},$$
$$-r = a \frac{da'}{dt} + b \frac{db'}{dt} + c \frac{dc'}{dt}.$$

Si on calcule v_{y_1} par le même procédé, on trouve naturellement zéro pour le coefficient de y_1; de plus, il arrive que le coefficient de x_1

$$a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt},$$

est égal et de signe contraire à celui de y_1 dans l'expression de v_{x_1}.

C'est ce qu'on voit tout de suite en ayant égard à l'équation

$$\frac{d}{dt}(aa' + bb' + cc') = 0,$$

de laquelle on déduit

$$a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt} = -\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right) = r.$$

On a donc en définitive

$$v_{y_1} = rx_1 - pz_1,$$

en faisant

$$-p = a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt};$$

on trouverait de même

$$v_{z_1} = py_1 - qx_1,$$

les coefficients p et q étant les mêmes que ceux qui figurent dans les expressions de v_{x_1} et v_{y_1}.

Nous verrons tout à l'heure la signification des quantités p, q, r (*), qui jouent le principal rôle dans cette théorie, et qui jusqu'ici représentent simplement, pour abréger l'écriture, certaines fonctions des neuf cosinus et de leurs dérivées.

Axe instantané de rotation. — Considérons les expressions que nous venons de trouver, pour les vitesses projetées sur les axes mobiles

$$v_{x_1} = qz_1 - ry_1,$$
$$v_{y_1} = rx_1 - pz_1,$$
$$v_{z_1} = py_1 - qx_1;$$

(*) On peut dès à présent remarquer, avec M. Duhamel, que les produits pdt, qdt, rdt, représentent respectivement les angles formés par chacun des axes mobiles avec sa position infiniment voisine. Si l'on prend pour axes fixes les positions initiales des axes mobiles, on trouve, pour déterminer la position de ces axes au bout du temps dt, les cosinus suivants :

$$\alpha = 1, \quad \alpha' = -rdt, \quad \alpha'' = qdt,$$
$$\beta = rdt, \quad \beta' = 1, \quad \beta'' = -pdt,$$
$$\gamma = -qdt, \quad \gamma' = pdt, \quad \gamma'' = 1.$$

on annule à la fois ces trois quantités, en posant

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}.$$

Or, ces équations sont celles d'une ligne droite, dont tous les points ont à l'instant considéré une vitesse nulle : ainsi se trouve démontrée la première partie de ce que nous nous proposions d'établir.

La droite immobile passe par l'origine; elle fait avec les axes mobiles des angles dont les cosinus ont pour expressions :

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega},$$

en prenant

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Cela posé, faisons la somme $v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2$ des carrés des trois composantes de la vitesse d'un point du système, il vient, en vertu d'une formule algébrique bien connue :

$$v^2 = (p^2 + q^2 + r^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (px_1 + qy_1 + rz_1)^2.$$

Désignons par ρ la distance du point (x_1, y_1, z_1) à l'origine, par Ω l'angle de ce rayon vecteur avec la droite (p, q, r); c'est-à-dire faisons

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \rho^2,$$

$$\frac{px_1 + qy_1 + rz_1}{\rho\omega} = \cos\Omega,$$

il vient

$$v^2 = \omega^2 \rho^2 \sin^2 \Omega,$$

ou, en désignant par h la distance du point considéré à la droite immobile :

$$v = \omega h.$$

La vitesse v est donc proportionnelle à la distance h. De plus, cette même vitesse est perpendiculaire au plan de la droite (p, q, r) et du rayon vecteur : c'est ce qui résulte des équations

$$x_1 v_{x_1} + y_1 v_{y_1} + z_1 v_{z_1} = 0,$$

$$p\, v_{x_1} + q\, v_{y_1} + r\, v_{z_1} = 0;$$

donc les vitesses de tous les points du corps sont bien les mêmes que si ce corps tournait effectivement autour de la

droite dont la vitesse est nulle, cette rotation s'effectuant avec une vitesse angulaire égale à ω, c'est-à-dire à $\sqrt{p^2+q^2+r_1^2}$.

Les formules précédentes déterminent à la fois la direction de l'*axe instantané de rotation*, et la vitesse angulaire du mouvement correspondant.

Décomposition de la rotation instantanée. — Cela posé, il est facile de voir qu'on arriverait pour les vitesses composantes à des expressions parfaitement identiques à celles qui précèdent, si l'on supposait le corps animé de trois rotations *simultanées, p, q, r*, s'effectuant autour des lignes OX_1, OY_1, OZ_1 (c'est-à-dire si l'on prenait pour v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}, les sommes des valeurs qu'on obtiendrait séparément si chacune des trois rotations p, q, r existait seule).

En effet la rotation p (*fig.* 123) donne lieu à une vitesse HI, perpendiculaire à l'axe OX_1; cette vitesse a pour expression $p\sqrt{y_1^2+z_1^2}$, et ses projections sur les trois axes sont égales respectivement à

$$0, \quad -pz_1, \quad py_1.$$

De même, les rotations q et r fournissent

$$qz_1, \quad 0, \quad -qx_1,$$

$$-ry_1, \quad rx_1, \quad 0.$$

En faisant la somme de ce qui se rapporte à chacun des trois axes respectivement, on trouve pour les composantes v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}, des expressions qui ne diffèrent pas de celles qui ont été écrites plus haut.

Des quantités p, q, r. — Il suit de là que les fonctions que nous avons désignées par les lettres p, q, r, sont les composantes de la rotation instantanée suivant les axes mobiles OX_1, OY_1, OZ_1. Nous venons de voir comment ces fonctions se trouvent déterminées, quand on connaît les neuf cosinus en fonction du temps : on a

$$p = a'' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{dc'}{dt},$$

$$q = a \frac{da''}{dt} + b \frac{db''}{dt} + c \frac{dc''}{dt},$$

$$r = a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt}.$$

Mais on sait que les neuf cosinus, qui nous ont servi à passer d'un système d'axes coordonnés rectangulaires à un système du même genre, ne sont pas absolument arbitraires, et qu'ils s'expriment au moyen de trois quantités seulement.

Les variables qu'on emploie ordinairement, d'après Euler, pour déterminer les axes mobiles, sont :

1° L'angle Z_1OZ (*fig.* 124), que l'on désigne par θ;

2° L'angle ψ formé avec OX par la trace OA du plan X_1OY_1 sur YOX;

3° Enfin l'angle φ de cette même trace avec OX_1.

Les expressions des coefficients a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', sont alors les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\ a' &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\ a'' &= \sin\psi\sin\theta, \end{aligned}\right\} \text{OX}$$

$$\left.\begin{aligned} b &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\ b' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\ b'' &= -\cos\psi\sin\theta, \end{aligned}\right\} \text{OY}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \sin\varphi\sin\theta,\\ c' &= \cos\varphi\sin\theta,\\ c'' &= \cos\theta. \end{aligned}\right\} \text{OZ}$$

En remplaçant ces quantités et leurs dérivées par leurs valeurs dans les expressions de p, q, r, on trouve

$$p = \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt},$$

$$q = \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}.$$

Ces équations nous serviront dans le cours de deuxième année, quand nous étudierons les relations qui existent entre le mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, et les forces qui agissent sur les divers points de ce corps solide.

§ XVI. — Théorie analytique des mouvements relatifs.

Soient, comme précédemment (p. 83), ξ, η, ζ, les coordonnées d'un point mobile M, par rapport à trois axes fixes; ξ', η', ζ' les coordonnées, prises par rapport aux mêmes axes, d'une origine mobile O.

Soient enfin x, y, z, les coordonnées de notre mobile par rapport à trois axes passant par cette origine O. Nous avons fait

$$(1)\qquad \begin{cases} a = \cos\overline{x,\xi}, & a' = \cos\overline{y,\xi}, & a'' = \cos\overline{z,\xi}, \\ b = \cos\overline{x,\eta}, & b' = \cos\overline{y,\eta}, & b'' = \cos\overline{z,\eta}, \\ c = \cos\overline{x,\zeta}, & c' = \cos\overline{y,\zeta}, & c'' = \cos\overline{z,\zeta}; \end{cases}$$

et cela posé nous avons écrit les formules qui lient les coordonnées apparentes aux coordonnées absolues sous la forme suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = \xi' + ax + a'y + a''z, \\ \eta = \eta' + bx + b'y + b''z, \\ \zeta = \zeta' + cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

Désignons par V la *vitesse absolue* du point mobile, par V_r sa *vitesse relative*, par V_e la *vitesse d'entraînement*.

Cette dernière est la vitesse absolue d'un point qui aurait à l'instant considéré les mêmes coordonnées que le point M, mais qui resterait en repos relatif : on a donc, pour ce point idéal,

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0;$$

et par conséquent on trouvera les composantes de sa vitesse en différentiant par rapport au temps les équations (2), sans faire varier les coordonnées apparentes x, y, z :

$$(3)\qquad \begin{cases} V_{e(\xi)} = \dfrac{d\xi'}{dt} + x\dfrac{da}{dt} + y\dfrac{da'}{dt} + z\dfrac{da''}{dt}, \\ V_{e(\eta)} = \dfrac{d\eta'}{dt} + x\dfrac{db}{dt} + y\dfrac{db'}{dt} + z\dfrac{db''}{dt}, \\ V_{e(\zeta)} = \dfrac{d\zeta'}{dt} + x\dfrac{dc}{dt} + y\dfrac{dc'}{dt} + z\dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Les mêmes équations (2), si on les différentie en tenant compte du mouvement apparent du mobile, fournissent les projections de la vitesse absolue sur les axes fixes; on a, en ayant égard aux relations (3) :

$$(4)\qquad \begin{cases} V_\xi = V_{e(\xi)} + a\dfrac{dx}{dt} + a'\dfrac{dy}{dt} + a''\dfrac{dz}{dt}, \\ V_\eta = V_{e(\eta)} + b\dfrac{dx}{dt} + b'\dfrac{dy}{dt} + b''\dfrac{dz}{dt}, \\ V_\zeta = V_{e(\zeta)} + c\dfrac{dx}{dt} + c'\dfrac{dy}{dt} + c''\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Or les dérivées $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}$, sont les projections de la vitesse relative sur les axes mobiles; et l'on a, en se reportant à la signification des coefficients $a, b, c, a', \ldots$:

$$(5)\qquad \begin{cases} a\dfrac{dx}{dt} + a'\dfrac{dy}{dt} + a''\dfrac{dz}{dt} = V_{r(\xi)}, \\ b\dfrac{dx}{dt} + b'\dfrac{dy}{dt} + b''\dfrac{dz}{dt} = V_{r(\eta)}, \\ c\dfrac{dx}{dt} + c'\dfrac{dy}{dt} + c''\dfrac{dz}{dt} = V_{r(\zeta)}. \end{cases}$$

Ces relations permettent de mettre les équations (4) sous la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} V_\xi = V_{e(\xi)} + V_{r(\xi)}, \\ V_\eta = V_{e(\eta)} + V_{r(\eta)}, \\ V_\zeta = V_{e(\zeta)} + V_{r(\zeta)}. \end{cases}$$

Donc :

THÉORÈME I. — *La vitesse absolue est la résultante de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative;*

ou bien

La vitesse relative est la résultante de la vitesse absolue, et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.

Pour avoir les relations qui existent entre les accélérations, il faut différentier une seconde fois les équations (2). Les pre-

miers membres des équations qu'on obtient par cette opération sont les composantes de l'accélération absolue du point M, projetée sur les trois axes fixes; quant aux deuxièmes membres des mêmes équations, on peut en grouper tous les termes sous les trois divisions suivantes :

1° Ceux qui ne contiennent pas les dérivées des coordonnées apparentes : termes dont la somme fournit les composantes de *l'accélération d'entraînement;*

2° Ceux qui contiennent les dérivées secondes de ces mêmes coordonnées apparentes. On reconnaît comme précédemment que ceux-ci représentent les projections de *l'accélération relative* sur les axes fixes;

3° Enfin les termes qui restent en dehors des deux premières catégories, c'est-à-dire ceux qui sont fonction des composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, de la vitesse relative.

En ayant égard à ces remarques, et faisant usage de nos notations habituelles, nous écrirons les équations dont il s'agit sous la forme suivante :

$$(7)\quad \begin{cases} J_\xi = J_{e(\xi)} + J_{r(\xi)} + 2\left(\dfrac{da}{dt}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{da'}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{da''}{dt}\dfrac{dz}{dt}\right), \\ J_\eta = J_{e(\eta)} + J_{r(\eta)} + 2\left(\dfrac{db}{dt}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{db'}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{db''}{dt}\dfrac{dz}{dt}\right), \\ J_\zeta = J_{e(\zeta)} + J_{r(\zeta)} + 2\left(\dfrac{dc}{dt}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dc'}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dc''}{dt}\dfrac{dz}{dt}\right). \end{cases}$$

Il faut maintenant projeter toutes les lignes dont nous nous occupons sur les axes mobiles (*) : pour cela ajoutons les trois équations (7) multipliées respectivement, d'abord par a, b, c, puis par a', b', c', enfin par a'', b'', c''.

Remarquons, avant de faire le calcul, que les cosinus qui figurent dans les équations précédentes définissent le mouvement du système solide de comparaison (système que nous réduisons pour plus de clarté aux seules lignes Ox, Oy,

(*) Il ne faut pas oublier que les axes mobiles sont nos véritables axes coordonnés; les axes fixes sont de simples lignes auxiliaires, dont il ne restera plus de traces à la fin des opérations.

Oz), relativement à trois axes menés par l'origine mobile O, parallèlement à $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$.

Nous savons que ce mouvement, sur lequel nous n'avons fait aucune hypothèse, est une rotation instantanée autour d'un axe passant au point O (*); et nous avons trouvé dans le paragraphe précédent les expressions des projections de cette rotation sur les axes mobiles :

$$(8)\qquad \begin{cases} p = a'' \dfrac{da'}{dt} + b'' \dfrac{db'}{dt} + c'' \dfrac{dc'}{dt}, \\ q = a \dfrac{da''}{dt} + b \dfrac{db''}{dt} + c \dfrac{dc''}{dt}, \\ r = a' \dfrac{da}{dt} + b' \dfrac{db}{dt} + c' \dfrac{dc}{dt}. \end{cases}$$

Or il est très-remarquable que ces quantités, qui restent les mêmes quels que soient les axes fixes, soient précisément les seules fonctions des neuf cosinus qui subsistent dans les résultats auxquels nous voulons arriver.

En effet, si nous effectuons les opérations indiquées plus haut, et que nous résolvions les relations obtenues par rapport aux composantes de l'accélération relative, il vient :

$$(9)\qquad \begin{cases} J_{r(x)} = J_x - J_{e(x)} + 2\left(r\dfrac{dy}{dt} - q\dfrac{dz}{dt}\right), \\ J_{r(y)} = J_y - J_{e(y)} + 2\left(p\dfrac{dz}{dt} - r\dfrac{dx}{dt}\right), \\ J_{r(z)} = J_z - J_{e(z)} + 2\left(q\dfrac{dx}{dt} - p\dfrac{dy}{dt}\right). \end{cases}$$

THÉORÈME II. — *L'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et d'une accélération complémentaire qu'on appelle accélération centrifuge composée.*

Il résulte des formules (9) que les composantes de cette der-

(*) Cette rotation reste la même, en grandeur et en direction, quel que soit le point du système auquel on place l'origine O (p. 150).

nière accélération ont les valeurs suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} X = 2\left(r\dfrac{dy}{dt} - q\dfrac{dz}{dt}\right), \\ Y = 2\left(p\dfrac{dz}{dt} - r\dfrac{dx}{dt}\right), \\ Z = 2\left(q\dfrac{dx}{dt} - p\dfrac{dy}{dt}\right). \end{cases}$$

On conclut facilement de ces relations que l'accélération centrifuge composée est perpendiculaire à la vitesse relative et à l'axe instantané de la rotation d'entraînement, enfin qu'elle a pour expression :

$$2\omega V_r \sin\overline{\omega, V_r}.$$

Mouvements relatifs terrestres.

Occupons-nous spécialement des mouvements rapportés à des repères choisis sur le globe terrestre, et voyons ce que les formules précédentes deviennent dans ce cas particulier.

Prenons pour axe des z la verticale du lieu d'où l'on observe (*fig.* 125), pour axe des x la tangente au méridien de ce lieu, dirigée vers le nord, enfin pour axe des y la tangente au parallèle dans le sens du mouvement diurne : nous aurons pour les projections de la rotation terrestre sur ces trois axes

$$\begin{aligned} p &= -n\sin\lambda, \\ q &= 0, \\ r &= -n\cos\lambda, \end{aligned}$$

λ étant le complément de la latitude du lieu, et n la valeur absolue de la rotation diurne, soit 0,000073.

Les composantes de l'accélération centrifuge composée sont

$$(11)\qquad \begin{cases} X = -2n\cos\lambda\dfrac{dy}{dt}, \\ Y = n\left(\cos\lambda\dfrac{dx}{dt} - \sin\lambda\dfrac{dz}{dt}\right), \\ Z = n\sin\lambda\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Considérons un corps tombant librement dans le vide : l'expérience nous apprend que ce corps suit à peu près dans sa chute la verticale de son point de départ, de sorte qu'on peut, dans une première approximation, négliger les deux composantes horizontales de la vitesse du mobile, devant la composante verticale.

Quant à cette composante verticale, $\frac{dz}{dt}$, elle est négative, puisque notre axe des z est dirigé de bas en haut; donc l'accélération Y est positive, et par suite le corps considéré doit s'écarter de la verticale, du côté de l'orient.

Veut-on pousser l'approximation plus loin; on conclut du fait de la déviation orientale que la vitesse $\frac{dy}{dt}$ est positive; donc l'accélération X est négative, ce qui indique une nouvelle déviation dirigée vers le sud. Celle-ci est du deuxième ordre de petitesse, la déviation orientale étant considérée comme du premier.

DEUXIÈME SECTION.

THÉORIE DES MÉCANISMES OU ÉLÉMENTS DE MACHINES.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES, ET SUR LES TRANSMISSIONS OU TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT.

Toute machine est destinée à accomplir certaines opérations mécaniques, et suppose l'existence de deux choses, indépendamment de la machine elle-même. Ces deux choses sont : 1° une puissance motrice; 2° un ouvrage à faire. La machine est un intermédiaire qui donne au moteur la facilité d'exécuter l'ouvrage proposé.

Une machine se compose de trois parties principales :

I. Le *récepteur*, qui reçoit directement l'effort du moteur; cet appareil est variable selon la nature de la force disponible : ce sera, par exemple, une manivelle, si l'on emploie la force de l'homme, une roue, s'il s'agit d'utiliser un cours d'eau, un piston pour la tension de la vapeur, etc. La théorie des récepteurs dépend de la combinaison des lois de la dynamique avec les principes physiques qui sont relatifs aux divers agents capables de servir comme moteurs.

II. L'*outil* ou *opérateur*, qui se trouve en contact immédiat avec la matière à travailler. C'est une lime, un marteau, une pompe, un soufflet, etc. La connaissance pratique des outils est un des objets des études spéciales à chaque profes-

sion. La théorie de ces appareils est d'ailleurs fondée, comme celle des récepteurs, sur les principes généraux de la dynamique rationnelle.

III. Enfin, la *transmission de mouvement*, c'est-à-dire les pièces ou mécanismes interposés entre le récepteur et l'outil, pour que le mouvement du premier détermine sur le second le mouvement qui correspond à l'ouvrage à effectuer.

Notre deuxième Section est consacrée à l'étude géométrique des transmissions. Cette étude, exclusivement basée sur les considérations développées dans la Section précédente, fait partie de la Cinématique, telle que nous l'avons définie d'après l'illustre auteur de l'*Essai sur la Philosophie des Sciences* (*) : on pourrait l'intituler *Cinématique appliquée*, par opposition à la *Cinématique pure*. De toutes les branches de la Mécanique, il n'en existe pas dont la connaissance approfondie soit plus indispensable aux praticiens.

Elle ne suffit pourtant pas : et nous avons déjà eu occasion de dire qu'on se tromperait grandement si l'on croyait pouvoir inventer et exécuter des combinaisons d'organes, sans se préoccuper des efforts qui doivent s'exercer par l'intermédiaire de ces organes. Mais d'un autre côté les rapports des vitesses de tous les points d'une machine sont du domaine de la Géométrie : *ces rapports ne dépendent en aucune façon des causes appelées à faire naître ou à entretenir le mouvement de la machine*. Il est donc possible de soumettre les mécanismes de transmission à une première étude purement

(*) « La Cinématique, dit Ampère (p. 51), doit étudier les différents in-
» struments à l'aide desquels on peut changer un mouvement en un autre; en
» sorte qu'en comprenant, comme c'est l'usage, ces instruments sous le nom
» de *machines*, il faudra définir une *machine*, non pas comme on fait ordinai-
» rement, *un instrument à l'aide duquel on peut changer la direction et l'inten-*
» *sité d'une force donnée*, mais bien *un instrument à l'aide duquel on peut*
» *changer la direction et la vitesse d'un mouvement donné*. On rend ainsi cette
» définition indépendante de la considération des forces qui agissent sur la
» machine; considération qui ne peut servir qu'à distraire l'attention de celui
» qui cherche à en comprendre le mécanisme. Pour se faire une idée nette, par
» exemple, de l'engrenage à l'aide duquel l'aiguille des minutes d'une montre
» fait douze tours tandis que l'aiguille des heures n'en fait qu'un, est-ce
» qu'on a besoin de s'occuper de la force qui met la montre en mouve-
» ment? »

géométrique, dans laquelle il ne sera question, ni de la force motrice, ni de la résistance à vaincre; mais il est bien entendu que la mécanique des forces pourra toujours opposer son *veto* à la marche, surtout à la marche fructueuse, de tout engin créé sans sa participation.

L'introduction de la théorie des mécanismes dans l'enseignement de l'École Polytechnique date de la première organisation donnée par Monge à l'instruction de cette école.

« On entend, dit Monge (*), par *éléments des machines*, » les moyens par lesquels on change la direction des mouve- » ments, ceux par lesquels on peut faire naître les uns des » autres, le mouvement progressif en ligne directe, le mou- » vement de rotation, le mouvement alternatif de *va-et-vient*. » On sent que les machines les plus compliquées ne sont que » les résultats des combinaisons de quelques-uns de ces » moyens individuels, dont il faudra faire en sorte que l'énu- » mération soit complète. »

Cette énumération, commencée par Hachette, fut exécutée par Lanz et Bétancour (**) dont le travail, adopté par le conseil de l'École, est bien longtemps demeuré classique. Dans l'exposé que nous allons faire, nous prendrons de préférence pour guide le traité plus récent de M. Robert Willis (***), lequel est certainement l'ouvrage le plus parfait qui ait été publié sur les applications de la Cinématique aux machines. Le livre de M. Willis est également remarquable par la netteté avec laquelle le sujet est circonscrit et traité, par la justesse des idées, et par l'habileté avec laquelle la théorie et la pratique y sont combinées.

On peut aussi consulter avec beaucoup de fruit l'ouvrage de M. Laboulaye, et enfin, au point de vue spécial de notre programme, le *Traité de Cinématique* de M. Belanger. La partie de cet ouvrage, qui est relative aux organes de machines, est entièrement conforme aux nouveaux programmes rédigés en 1850 par le général Poncelet, et en usage depuis cette époque à l'École Polytechnique.

(*) Rapport lu à la Convention nationale, le 3 vendémiaire an III.

(**) *Essai sur la Composition des Machines*; 1808.

(***) *Principles of Mechanism*, 1841.

§ I. — Classification des machines élémentaires, d'après Robert Willis.

Lanz et Bétancour commencent par distinguer les mouvements qu'on emploie dans les arts en trois classes, suivant que ces mouvements sont ou rectilignes, ou circulaires, ou déterminés, d'après des courbes données. Chacun d'eux est d'ailleurs continu ou alternatif (de va-et-vient); et on peut, par conséquent, les combiner deux à deux de quinze manières différentes, ou de vingt et une, si l'on combine chacun de ces mouvements avec lui-même. Toute machine a pour but de changer ou de communiquer un ou plusieurs de ces vingt et un mouvements.

Ce système célèbre a été généralement adopté : il est commode de s'y conformer, quand on se propose seulement de dresser un catalogue, de faire une énumération complète, ainsi que le demandait Monge. Mais, au point de vue d'une étude méthodique, on peut faire à la classification de Lanz et Bétancour les reproches suivants :

I. Le caractère distinctif principal est pris dans la nature du mouvement des pièces en action, mouvement qui est rectiligne ou circulaire, continu ou alternatif : on n'a pas oublié qu'Ampère définit une machine, comme servant à modifier *un mouvement donné*.

Mais si l'on se reporte à la théorie géométrique des mouvements simultanés, on reconnaîtra bien vite que les relations établies par un mode de liaison quelconque entre les vitesses des diverses pièces qu'il met en rapport, ne dépendent en aucune façon de la nature du mouvement qui anime ces corps. Les engins qui servent à lier deux mouvements continus, fonctionnent identiquement de la même manière dans le cas de deux mouvements alternatifs (au moins tant qu'on reste dans le domaine de la Géométrie pure), de sorte qu'il serait assez peu philosophique de les faire figurer deux fois dans une classification.

Il convient donc de changer la définition d'Ampère; et, au lieu de considérer une machine comme ayant pour effet de modifier un mouvement donné, nous dirons :

Une machine, au point de vue cinématique, est un instrument destiné à établir, entre les mouvements simultanés de deux corps, une relation géométrique donnée.

C'est ainsi que la minuterie d'une horloge a pour effet d'obliger les deux aiguilles à tourner dans le même sens l'une que l'autre, avec des vitesses angulaires dans le rapport de douze à un. Et il est clair que cette loi n'est aucunement influencée par la nature du mouvement, lequel peut indifféremment être lent ou rapide, continu ou alternatif.

II. Il y a lieu également de faire assez bon marché de la distinction entre le mouvement circulaire et le mouvement rectiligne : les engins qui se rapportent à ces deux mouvements sont fondés sur les mêmes principes, et se déduisent trop facilement les uns des autres pour qu'il soit convenable et même possible de les étudier séparément (*). Toutes les différences se réduisent à quelques détails de construction dont l'importance, à notre point de vue, est très-minime.

III. Mais une distinction qu'il importe au contraire de bien établir, c'est celle des mouvements susceptibles d'une étendue indéfinie, et des mouvements, rectilignes ou circulaires, dont l'amplitude est géométriquement limitée (**).

La bielle d'un rouet, par exemple, met en relation deux points assujettis chacun à tourner autour d'un axe fixe; mais les mouvements de ces deux points jouissent de propriétés toutes différentes : en effet, les dimensions et les positions relatives des diverses pièces sont telles, que rien n'empêche la roue de faire son tour complet, tandis que l'excursion de la pédale est forcément limitée.

Il suit de là que, la roue étant animée d'un mouvement de rotation continu, le mouvement de l'autre extrémité de la bielle devra changer périodiquement de sens, chaque fois que la pédale atteindra le point le plus haut ou le point le plus

(*) A plus forte raison ne consacrerons-nous pas une classe spéciale aux mouvements qui s'effectuent suivant des courbes autres que la ligne droite et le cercle.

(**) Un mouvement rectiligne quelconque aura nécessairement dans la pratique une étendue limitée : nous rangeons dans notre première catégorie tous ceux de ces mouvements dans lesquels la limitation ne résulte pas d'une impossibilité géométrique.

bas de sa course. On ne pourra donc pas, dans ce mécanisme, assigner une relation constante entre les sens des mouvements des deux pièces en rapport, comme nous l'avons fait dans le cas des aiguilles d'une horloge.

IV. Ayant adopté pour premier élément de notre classification des organes de machines, la permanence ou la périodicité de la liaison entre les *directions* des vitesses, nous nous occuperons en second lieu des relations de *grandeur* de ces mêmes vitesses : c'est-à-dire que nous séparerons les mécanismes dans lesquels le rapport des vitesses est constant, des combinaisons à rapport variable. Nous obtiendrons ainsi les trois classes suivantes :

MOUVEMENTS pouvant continuer indéfiniment dans le même sens.		MOUVEMENTS dont l'étendue est limitée, et où le sens de la vitesse d'une des pièces au moins doive changer périodiquement.
CLASSE A.	CLASSE B.	CLASSE C.
Rapport des vitesses constant.	Rapport des vitesses variable.	Rapport des vitesses constant ou variable (*).

V. Enfin, pour subdiviser nos classes, nous aurons égard à la nature de l'agent qui établit la transmission du mouvement : cette considération nous conduit à constituer trois genres, qui se retrouvent dans chacune des trois classes :

PREMIER GENRE. *Communication du mouvement par contact immédiat;*

DEUXIÈME GENRE. *Communication par l'intermédiaire d'un lien rigide;*

TROISIÈME GENRE. *Communication par le moyen d'un lien flexible.*

Voici le résumé de notre classification, laquelle n'est autre chose que celle de Willis, un peu simplifiée :

(*) Il n'y a pas lieu de séparer en deux classes les mécanismes à mouvement d'étendue limitée : ceux de ces mécanismes où le rapport des vitesses est constant sont trop rares pour qu'on puisse en former une classe distincte.

TABLEAU SYNOPTIQUE

DES

ORGANES ÉLÉMENTAIRES DE TRANSFORMATION DE MOUVEMENT.

	SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT.		SENS DE LA TRANSMISSION PÉRIODIQUEMENT VARIABLE.
	CLASSE A. Rapport des vitesses *constant*.	CLASSE B. Rapport des vitesses *variables*.	CLASSE C. Rapport des vitesses *constant ou variable*.
Ier GENRE. *Pièces en contact immédiat.*	Cylindres et cônes de friction. Hyperboloïdes. Joint universel sphérique. Engrenages divers. Crémaillères. Cames et pilons. Vis et écrous. Vis sans fin.	Cames, excentriques et courbes diverses. Vis variables. Mouvements intermittents. Roués de Roemer et de Huygens.	Roues à double denture tronquée. Crémaillères doubles oscillantes. Échappements divers. Cames, excentriques, etc.
IIe GENRE. *Emploi d'un lien rigide.*	Accouplements de roues. Renvois de sonnettes. Tiges et varlets.	Systèmes articulés à mouvement continu. Joint de Cardan ou joint universel.	Cliquets, roues à rochet, déclics. Bielles et manivelles. Parallélogramme de Watt.
IIIe GENRE. *Emploi d'un lien flexible.*	Poulies et tambours pour cordes, chaînes et courroies. Treuils et cabestans. Poulies de renvoi, de tension. Moufles et palans.	Poulies et tambours à section non circulaire. Bobines pour câbles plats. Fusées des montres et chronomètres.	Poulies spéciales avec tendeur oscillant.

Avant de commencer la description des mécanismes indiqués dans ce tableau, disons quelques mots des pièces accessoires qui servent à assujettir les organes mobiles aux supports fixes, de manière à assurer la direction du mouvement de ces organes.

§ II. — Organes propres a assurer la direction du mouvement circulaire ou rectiligne de certaines pièces.

1° Guides du mouvement circulaire.

Les pièces qui doivent être animées d'un mouvement de rotation sont ordinairement montées sur un *arbre,* qui se termine à ses extrémités par des parties cylindriques tournant dans des appuis fixes.

Tourillons et paliers. — Dans le cas où l'axe de rotation est horizontal, les extrémités cylindriques de l'arbre se nomment *tourillons,* et les supports fixes des tourillons prennent le nom de *paliers.*

Les tourillons sont des cylindres exactement tournés, dont le diamètre est généralement plus petit que celui de l'arbre proprement dit. Quelquefois ces tourillons font corps avec l'arbre: ils peuvent aussi être rapportés; l'un d'eux porte un *épaulement* ou renflement destiné à empêcher les déplacements du corps tournant, dans le sens de la longueur de l'axe. L'épaulement se raccorde par un *congé* avec la surface du tourillon.

La partie principale d'un palier (*fig.* 126 et 127) est le *coussinet,* qui se trouve en contact immédiat avec le tourillon. Le coussinet est formé de deux *coquilles,* laissant entre elles un léger intervalle quand elles sont en place, afin que l'usure de la surface intérieure ne détruise pas le contact de celle-ci avec le tourillon. Un intervalle semblable est ménagé entre le corps du palier, et le *chapeau* qui s'applique sur la coquille supérieure. Des boulons établissent un serrage convenable.

La mise en place du palier doit être faite avec une grande précision, afin de ne pas fausser l'arbre, surtout quand celui-ci a une grande longueur. Dans le but de faciliter l'ajustage, on

fait porter le palier proprement dit sur une pièce intermédiaire appelée *semelle* ou *patin* (*fig.* 126), solidement reliée par de longs boulons à un fort massif de maçonnerie. Le palier est à son tour boulonné sur la semelle; mais les trous de ces derniers boulons sont ovales, ce qui permet de rectifier la position du palier, en cas de petits mouvements dans les maçonneries.

Nous n'avons encore rien dit de la question du graissage : il n'en est pourtant pas qui mérite à un plus haut degré l'attention du constructeur chargé d'installer les supports d'un arbre tournant. Dans les paliers ordinaires (*fig.* 126), le chapeau porte un godet qu'on maintient constamment plein de graisse. Cette graisse fond en partie par suite de l'échauffement du coussinet, traverse la coquille supérieure par un trou ménagé à cet effet, et se répand de là par des rainures héliçoïdes sur toute la surface intérieure de la coquille.

Ce système est assez imparfait : la graisse ne vient rafraîchir les surfaces que lorsqu'il s'est produit un léger grippement, ce qui est toujours fâcheux; et il est infiniment préférable d'entretenir les contacts constamment lubrifiés par un courant d'huile continu, qui s'oppose à tout échauffement.

Dans le palier graisseur Decoster (*fig.* 127), l'huile contenue dans un réservoir inférieur est puisée par un disque d'acier fixé au tourillon; elle retombe dans le réservoir après avoir rempli son office. Le tout est parfaitement fermé, de sorte que l'huile ne s'altère pas et n'a pas besoin d'être renouvelée, sinon à de très-longs intervalles.

Dans certains cas exceptionnels, les tourillons reposent sur des galets ou roulettes, dont nous verrons l'utilité dans la théorie du frottement (Quatrième Section). On peut citer dans ce genre la suspension de la grosse cloche de la cathédrale de Metz : les galets sont réduits à de simples secteurs, qui correspondent à l'amplitude des oscillations de la cloche.

Dans d'autres cas, au contraire, on simplifie les dispositions habituelles. C'est ainsi qu'on termine les arbres des tours, en guise de tourillons, par deux pointes en fer, lesquelles pénètrent dans des trous coniques pratiqués dans des plaques de fer fixes.

Les poulies sont percées d'un trou cylindrique nommé *œil*,

que traverse à frottement doux un essieu fixe (*). Les roues des voitures ordinaires présentent la même disposition (**). Si le trou cylindrique est un peu long relativement à l'épaisseur de la roue ou de la poulie, l'espèce de moyeu où il est pratiqué s'appelle *manchon* ou *canon*. L'arbre porte des épaulements qui empêchent le manchon de glisser parallèlement à l'axe.

Crapaudines et pivots. — Les arbres verticaux se terminent à leur partie inférieure par une sorte de tourillon appelé *pivot* (*fig.* 128), qui tourne dans une pièce fixe nommée *crapaudine*.

La crapaudine la plus simple se compose d'un collet en bronze, qui maintient le pivot dans le sens horizontal, et d'un *grain* d'acier qui supporte tout le système. Divers agencements permettent de soulever le grain au fur et à mesure de l'usure, afin de maintenir l'arbre au même niveau.

Outre la crapaudine, il y a généralement, à une certaine hauteur, un *collier* destiné à assurer la verticalité de l'arbre : le collier fait ainsi fonction de deuxième palier. L'arbre est, en ce point, parfaitement arrondi. Quand la pression qui s'exerce entre l'arbre et le collier est considérable, comme dans certaines espèces de grues, on interpose entre l'arbre et son appui fixe un système de galets, dont les axes sont fixés à une couronne mobile (*fig.* 129) : ces galets roulent à la fois sur la circonférence de l'arbre (A), et sur le collier fixe (B).

Rendons-nous compte du mouvement de ces galets, considéré, soit au point de vue absolu, soit relativement à l'arbre (A). Désignons par R et Ω le rayon et la vitesse angulaire de l'arbre, par r le rayon d'un galet : le mouvement absolu de ce galet est une rotation autour du centre instantané B, rotation dont je représenterai la vitesse angulaire par ω.

Pour déterminer ω, on s'appuie sur ce que le galet est

(*) Souvent l'essieu d'une poulie porte d'autres roues : il tourne alors d'un mouvement tout à fait indépendant de celui de la poulie. Nous verrons plus loin des exemples de pareils agencements.

(**) On dit dans ce cas que la roue ou la poulie est *folle* sur son arbre; une roue est *calée* sur son arbre, quand elle ne peut pas tourner indépendamment de celui-ci.

supposé rouler sur l'arbre mobile, en A, d'où il suit qu'en ce point les deux solides en contact sont animés de vitesses égales : on doit donc avoir

$$2r\omega = R\Omega, \qquad \omega = \frac{R\Omega}{2r}.$$

Ω étant donnée, cette équation fait connaître la vitesse instantanée ω.

La couronne qui porte les axes des galets n'est pas fixe (*) : elle a besoin d'être soutenue inférieurement d'une manière qui ne gêne pas le mouvement qu'elle est obligée de prendre autour de son centre. On dispose à cet effet une surface plane reliée au bâti de la machine, et, pour éviter le frottement de la face inférieure de la chape contre cette surface, on emploie un système d'autres galets à axes horizontaux, sur lesquels s'appuie tout cet appareil.

Plaques tournantes. — Les plaques tournantes des gares de chemins de fer sont supportées par un pivot central qui tourne dans une crapaudine fixe. Il n'y a pas de collier supérieur, vu le peu de longueur de l'arbre; mais dans la crainte de voir la fonte se briser sous la charge qu'elle est destinée à supporter, on soutient la plaque, près de sa circonférence extérieure, au moyen de galets dont les axes sont réunis par une couronne mobile, comme dans le cas précédent.

Si l'on faisait ces galets cylindriques, on n'atteindrait pas complétement le but qu'on se propose, à savoir : la suppression du glissement. En effet, les diverses sections droites des galets, qui sont toutes égales dans l'hypothèse d'une forme cylindrique, devraient en vertu du mouvement circulaire se développer sur des circonférences inégales de la plaque mo-

---

(*) En effet, il résulte de ce qui précède, que la vitesse du centre C d'une roulette est égale à ωr; cette quantité, divisée par le rayon de la couronne, donne la vitesse angulaire, Ω', de celle-ci :

$$\Omega' = \frac{r\omega}{R + r} = \frac{R\Omega}{2(R + r)}.$$

La vitesse angulaire de la couronne est à peu près la moitié de la vitesse de l'arbre, car le rayon de celui-ci est toujours assez grand relativement au rayon des galets.

bile et de l'appui fixe : il y aurait donc nécessairement glissement à la fois en haut et en bas. Pour éviter cet inconvénient, on emploie des galets coniques (*fig.* 130) ayant leur sommet sur l'axe de rotation : ces galets roulent, d'une part, sur un cône fixe dont le sommet est au même point de l'axe, et d'autre part sur la partie inférieure de la plaque, à laquelle on donne aussi la forme conique (*) avec le même sommet.

On trouve le rapport de la vitesse des galets à celle de la plaque, en exprimant que la vitesse du point B, considéré comme appartenant au galet, est égale à la vitesse du point correspondant de la plaque : on a

$$R\Omega = 2r\omega,$$

en conservant les notations du calcul précédent. Dans le cas actuel, la vitesse angulaire de la chape mobile est exactement

$$\Omega' = \frac{\Omega}{2} :$$

La couronne des galets fait un demi-tour pendant que la plaque fait un tour complet.

On met sous les grandes plaques pour machine et tender deux et jusqu'à trois couronnes, pareilles à celles dont nous venons d'indiquer le principe.

Au contraire, depuis quelque temps, en Angleterre et en Belgique, on supprime, précisément pour les grandes plaques, tout l'attirail des galets-supports. On ne peut alors conserver les plaques de fonte, qui n'offriraient pas assez de garanties, et l'on fait porter les rails sur des longerons en fer d'une grande rigidité. La plaque au repos est calée. Quand elle doit servir, on place la machine autant que possible en équilibre sur le pivot, on décale, et la plaque oscillant librement sous la charge oppose une résistance beaucoup moindre que celle des plaques à galets.

(*) Dans l'application de ce système au grand pont tournant de la Penfeld, à Brest, la face inférieure de la plaque mobile est plane. Cette disposition est un cas particulier de la précédente : rien n'empêche en effet de placer le sommet commun aux trois cônes, sommet dont la position est arbitraire, de manière à transformer le cône supérieur ou le cône inférieur en un plan.

Articulations mobiles à charnière. — Il arrive fréquemment que deux corps réunis par une articulation, ou charnière, sont tous les deux en mouvement : la liaison des deux pièces s'effectue, tout comme si l'une d'elles était fixe, au moyen d'un tourillon qui tourne entre deux coquilles soigneusement polies et graissées. Quant aux pièces boulonnées dont la fonction est de maintenir le coussinet, dans les appareils fixes, elles sont remplacées par diverses dispositions plus ou moins analogues à la suivante, qui se rapporte à la bielle d'une machine de Watt.

Le coussinet mobile est fixé à la tête de bielle par une *chape* (*fig.* 131 et 132), qui embrasse les deux coquilles et les tient appliquées sur l'embase terminale de la bielle; on produit le serrage au moyen de deux coins inverses nommés *clef* et *contre-clef à talon,* les talons de la contre-clef empêchant les branches de la chape de s'écarter (*).

Quand la bielle est en bois, la clef doit être renfermée entre deux contre-clavettes; on empêche ainsi qu'elle ne déchire le bois pendant le serrage.

2° Guides du mouvement rectiligne.

Il existe un grand nombre de systèmes ayant pour effet d'obliger un point d'une pièce mobile à suivre une trajectoire rectiligne. Nous nous bornerons à énumérer brièvement les dispositions les plus employées :

1° *OEilletons, douilles ou patins, glissant le long de tiges fixes* (*fig.* 133, 134 et 135).

La *fig.* 135 est le plan d'un puits guidé, servant à l'extraction de la houille.

On s'est longtemps contenté, pour amener au jour les produits d'une exploitation souterraine, du procédé primitif qui sert à tirer de l'eau d'un puits : c'est-à-dire qu'on plaçait simplement le charbon ou les minerais dans un seau suspendu à une corde. Ce procédé ne comportait pas de grandes vitesses; de plus, il était assez dangereux, appliqué au transport des

(*) On distingue deux variétés de têtes de bielles, l'une *à chape mobile* (*fig.* 131), l'autre *à chape fixe* (*fig.* 132) : la figure en fait suffisamment comprendre les différences.

hommes. Aujourd'hui les bennes, chariots ou wagons pleins de charbon sont reçus dans des cages guidées par des longrines en bois, régnant dans toute la longueur du puits. On peut imprimer à ces cages la vitesse que l'on veut sans avoir d'accidents à redouter. Les guides se font aussi en fil de fer.

La *fig.* 133 représente le châssis d'une scierie à lames verticales.

Citons enfin, comme application du même principe, le guidage du piston d'une machine à vapeur horizontale. La tige du piston est terminée par une pièce appelée *coquille*, sur laquelle vient s'articuler la bielle (*Pl. XV, fig.* 136). Deux *glissières* sont disposées de part et d'autre de la tige mobile, qui s'appuie sur elles par les deux larges patins de la coquille; un godet de graissage complète le système. La bielle est faite en forme de fourche quand les glissières sont dans le plan vertical de la tige, ainsi que le suppose la figure.

2° *Galets à gorges roulant entre deux guides arrondis* (*Pl. XIV, fig.* 138). Dans les machines verticales de Maudslay, on emploie une disposition analogue à la précédente; mais la coquille à patins est remplacée par un galet, dans le but d'éviter le glissement. Le galet roule alternativement sur l'un ou l'autre des deux guides, selon que la tige qu'il doit diriger tend à s'écarter à droite ou à gauche.

L'inconvénient de ce système, c'est qu'au moment où le changement de sens va se produire, il y a presque toujours glissement; la moindre irrégularité dans les galets aggrave cet effet, et on obtient rapidement des méplats qui ne tardent pas à s'opposer complétement au roulement. Cette disposition n'est donc point à recommander; et, puisqu'il est pour ainsi dire impossible d'éviter le glissement, mieux vaut adopter de larges patins bien graissés et fonctionnant régulièrement que les galets à mouvement indécis.

Au contraire, on emploie avantageusement, pour supporter les meubles, des galets cylindriques mobiles dans des rainures fixes (*fig.* 139).

3° *Tiges mobiles dans des douilles fixes.* — Exemples : Tige du piston d'une pompe à incendie (*fig.* 137); prisons des bocards (*Pl. XVII, fig.* 170), etc.

4° *Rainures et languettes* (*fig.* 140).

5° *Roues coniques roulant sur des rails à champignons* (*fig.* 141). Dans le matériel ordinaire de nos chemins de fer, les deux roues d'une même paire sont calées sur leur essieu commun, et sont par conséquent solidaires l'une de l'autre (*). Les jantes ont la forme d'un tronc de cône dont le sommet est en dehors de la voie; et les rails sont inclinés vers l'intérieur de celle-ci, de manière à présenter une surface de roulement tangente à la surface de la roue.

Voici maintenant comment ce matériel fonctionne.

Quand un wagon parcourt régulièrement une portion de voie en alignement droit, ce qui est le cas normal, les roues sont symétriquement placées par rapport à l'axe de la voie, et le roulement s'effectue de part et d'autre sur des circonférences égales. L'une des roues, par l'effet d'une circonstance quelconque, présente-t-elle une tendance à sortir des rails : dès qu'elle commence à se porter vers l'extérieur, sa circonférence de roulement devient plus grande que celle de la roue solidaire. Or, comme la vitesse angulaire des deux roues calées sur un essieu est la même, la roue extérieure prend de l'avance et ce mouvement la ramène du côté de l'intérieur de la voie.

Dans une courbe, au contraire, le wagon s'écartera légèrement de l'axe de la voie, et les deux circonférences roulantes seront inégales, de manière à racheter le plus grand développement du rail extérieur. On voit que l'angle du cône des jantes est intimement lié à la grandeur du rayon des courbes : la conicité est de $\frac{1}{20}$ sur nos chemins ordinaires à grandes courbes; elle est de $\frac{1}{8}$ sur les chemins américains qui admettent des courbes de petit rayon.

Le chemin de fer de Sceaux admet également de fortes courbes; mais comme le matériel articulé, en usage sur cette

(*) Les essieux des roues tournent dans des boîtes à graisse ou à huile, qui remplacent les paliers des arbres ordinaires. La liaison de ces sortes de paliers au corps du wagon n'est pas rigide; elle a lieu par l'intermédiaire des ressorts de suspension, qui sont fixés aux boîtes à graisse, et sur lesquels repose le châssis. Ce même châssis porte des plaques de tôle verticales, dites *plaques de garde*, dans lesquelles sont découpées des entailles dont la fonction est de maintenir les boîtes à graisse dans le sens horizontal, de manière à assurer la perpendicularité des essieux à la voie; elles laissent un petit jeu pour le passage des courbes.

ligne, comporte un système de guidage spécial, les roues sont indépendantes et cylindriques, ce qui présente un certain avantage au point de vue de l'usure des bandages.

J'ai omis à dessein de parler jusqu'ici du rebord intérieur ou *mentonnet* des roues, lequel ne joue, comme on l'a vu, aucun rôle dans le guidage normal, et n'intervient que dans les cas exceptionnels. Dans la position moyenne du wagon, et pour que la conicité puisse produire son effet, il existe un centimètre de jeu entre le mentonnet et le boudin du rail.

6° *Chariots des mull-jenny* (*Pl. XIV, fig.* 142). — Dans les métiers à filer dits *mull-jenny*, le chariot qui porte les fuseaux, et dont la longueur est de 6 à 9 mètres, doit avoir sur son chemin de fer un mouvement parfaitement rectiligne, ce qui nécessite un système de guidage susceptible d'une grande précision. « Après avoir épuisé les moyens les plus coû-» teux et les plus compliqués, » est-il dit dans l'*Essai sur la composition des machines*, « les Anglais ont enfin résolu le » problème d'une manière très-simple, et avec une exactitude » qui surpasse tout ce qu'on pouvait attendre. » Deux cordes tendues dans une direction parallèle à celle du mouvement sont enroulées autour de deux poulies fixées au chariot, de manière à décrire chacune un Z : la tension modérée des cordes croîtrait rapidement par la moindre obliquité, et la direction rectiligne du mouvement est parfaitement assurée.

7° *Parallélogramme articulé de Watt* (*fig.* 143). — L'illustre inventeur auquel l'industrie est redevable de la machine à vapeur sous sa forme actuelle a également résolu d'une manière éminemment pratique le problème du guidage en ligne droite de la tige du piston de sa machine.

Il est juste de dire que le parallélogramme articulé de Watt, dont nous verrons plus tard la théorie géométrique, ne donne pas à l'extrémité de la tige un mouvement rigoureusement rectiligne; mais il rachète cet inconvénient par de précieux avantages, et d'ailleurs la déviation est tout à fait insignifiante, quand on emploie des dispositions convenables.

CHAPITRE II.

ORGANES DE MACHINES.

CLASSE A. — SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT. — RAPPORT DES VITESSES CONSTANT.

La classe à laquelle est consacré ce chapitre comprend les organes de transmission qui sont de beaucoup les plus usuels (*), ceux dont il est facile, en général, de faire dériver presque tous les mécanismes employés dans les arts et dans l'industrie.

Ainsi que nous l'avons dit, nous considérerons plus spécialement les cas où l'on a affaire à deux corps assujettis à tourner chacun autour d'un axe fixe; et nous examinerons successivement les trois modes de liaison, qui ont servi de base à notre division en trois genres.

§ III. — Premier genre. — Transmission du mouvement par contact.

Pour mettre un peu d'ordre dans l'étude des engins qui se rapportent à ce paragraphe, il convient de distinguer trois cas : selon que les axes des deux solides en contact sont *parallèles, concourants,* ou enfin *non situés dans un même plan.*

(*) Nous verrons que les mouvements continus doivent toujours être, autant que possible, uniformes; les organes de la classe A sont donc ceux qu'il y a lieu de préférer, pour relier l'un à l'autre deux mouvements continus. L'uniformité du mouvement serait au contraire très-nuisible dans le cas des mouvements alternatifs, où les organes à recommander sont ceux dans lesquels la vitesse diminue régulièrement jusqu'au moment du changement de sens. On évite ainsi les à-coups et les chocs que causerait inévitablement ce changement, si les corps étaient à ce moment animés d'une vitesse un peu considérable.

1° Axes parallèles. — Engrenages cylindriques.

La Géométrie nous enseigne qu'il y a une infinité de manières d'établir un rapport de vitesses constant entre deux axes fixes et parallèles, au moyen de deux cames liées à ces axes, et maintenues d'ailleurs appuyées l'une sur l'autre.

Cylindres de friction. — Le problème devient déterminé, si l'on s'impose la condition que le mouvement relatif soit un roulement simple. Nous avons démontré que les surfaces qui répondent à la question ainsi particularisée sont des cylindres circulaires centrés sur les axes fixes (p. 155). Les rayons des bases de ces cylindres satisfont à la relation

$$\omega R = \omega_1 R_1,$$

laquelle établit l'égalité entre les vitesses des deux solides, mesurées à la circonférence de contact. On voit que :

Dans la transmission par cylindres de friction, les vitesses angulaires sont en raison inverse des rayons des cylindres.

Examinons la solution précédente au point de vue pratique. Cette solution présente ceci de particulier, que chacune des surfaces n'est pas nécessairement, géométriquement obligée de chasser l'autre devant elle pour se faire place : rien n'empêche d'une manière absolue le cylindre moteur de glisser sur le deuxième sans le mettre en mouvement.

Ce qui s'oppose à cet effet, c'est le frottement qui se développerait aux points de contact de la surface mobile avec celle qui resterait fixe. Quand ce frottement est plus considérable que la résistance appliquée à l'arbre correspondant, l'*adhérence* des deux corps détermine la transmission du mouvement : un accroissement de résistance la ferait instantanément cesser (*).

On emploie divers artifices pour s'opposer au glissement. Souvent la surface de l'un des cylindres est recouverte d'un cuir rugueux, dont l'élasticité maintient la pression malgré les

(*) On utilise cette propriété dans le cas où la résistance peut accidentellement devenir énorme, ce qui occasionnerait la rupture de quelque pièce si la transmission était obligatoire. L'inconvénient est beaucoup moindre quand les corps ont la faculté de glisser l'un sur l'autre.

inégalités inévitables dans la forme des surfaces de contact. D'autres fois, l'un des arbres n'est pas absolument fixe (*fig.* 144), et il est appuyé sur l'autre par un ressort ou par un poids (*).

Quoi qu'il en soit, l'emploi des cylindres de friction est limité à un petit nombre de cas tout à fait spéciaux. Il est impossible, avec ce système, de compter sur l'exactitude du rapport des vitesses, à cause des glissements qui peuvent se produire à chaque instant, sans que le mécanicien en soit averti. De plus, lorsque l'appareil doit supporter de grands efforts, il faudrait une pression considérable pour déterminer une adhérence suffisante; et les frottements qui se produiraient sur les tourillons des arbres compenseraient et au delà l'avantage que l'on tire de la suppression du frottement au point de contact.

Principe des engrenages. — On obvie à cet inconvénient en armant chacun des deux cylindres de saillies ou *dents*, qui pénètrent dans des creux ménagés à cet effet. Il est à remarquer qu'avec cette disposition le mouvement relatif ne peut plus être un roulement simple : en effet, les surfaces en contact sont maintenant celles qui sont formées par la suite des saillies et des creux, sous lesquels ont disparu les cylindres primitifs. Mais en altérant ainsi les lois géométriques de la transmission du mouvement, il importe du moins de maintenir rigoureusement constant le rapport des vitesses angulaires des deux arbres.

Pour cela, on s'impose d'abord la condition que les dents soient égales et également espacées sur les deux roues, de manière que deux arcs égaux contiennent le même nombre de dents. On cherche un arc qui soit contenu un nombre exact de fois dans chacune des circonférences en contact : cet arc est ce qu'on appelle le *pas;* le pas est ensuite divisé en

(*) Dans les tire-sacs des moulins à blé (*fig.* 145), le cylindre B est maintenu à une petite distance du cylindre A, lequel est mû par la machine et tourne d'une manière continue. Au moyen d'un effort convenable exercé en E, on appuie le cylindre B contre la poulie motrice : le mouvement se transmet jusqu'au moment où, le sac étant arrivé à la hauteur voulue, on lâche la corde qui établissait la pression.

deux parties, égales ou inégales, correspondant, l'une à la saillie de la dent, l'autre au creux qui doit donner passage à la dent opposée. Quant aux circonférences qui servent pour ainsi dire de base à la denture, il n'en reste pas de traces matérielles, une fois l'engrenage taillé ; elles jouent néanmoins le principal rôle dans la théorie des roues dentées : on les désigne sous le nom de *circonférences primitives.*

Pour que deux roues engrènent régulièrement, il est tout à fait indispensable que les deux dentures aient le même pas. Sous cette condition, et quelle que soit la forme des dents, la transmission sera périodiquement uniforme, puisque chaque fois que le point de contact aura parcouru sur chacune des circonférences primitives un espace égal au pas commun, les deux roues se retrouveront dans la même position relative.

Mais on ne se contente pas de cette régularité périodique; et l'on a soin de déterminer la forme de chaque paire de dents en conformité avec les règles établies dans la Cinématique pure, de manière que, pendant toute la durée de l'action individuelle de la paire, le rapport des vitesses reste égal à l'inverse du rapport des rayons des circonférences primitives. On emploie d'ailleurs presque toujours, pour limiter les dents des engrenages à axes parallèles, des surfaces cylindriques, dont les génératrices sont parallèles aux axes de rotation : de là la dénomination d'*engrenages cylindriques.*

La première chose à faire pour établir un engrenage entre deux axes parallèles C, C_1 (*fig.* 146), c'est de déterminer les circonférences primitives : les rayons de ces circonférences sont en raison inverse des vitesses qu'on veut obtenir.

Or le problème de géométrie consistant à partager la longueur CC_1 en deux segments qui soient dans un rapport donné, comporte deux solutions : l'une donne le point A situé entre les deux centres, l'autre le point A′ situé au dehors.

Si l'on adopte le point A comme point de contact des circonférences primitives, ces circonférences sont extérieures et leurs rotations sont de sens contraire ; si l'on choisit le point A′, l'une des circonférences est intérieure à l'autre et les rotations sont de même signe. C'est là ce qui distingue les *engrenages extérieurs* des *engrenages intérieurs :* on emploie les uns ou les autres, selon le sens du mouvement à produire.

(*a*). *Engrenages cylindriques extérieurs.*

Une fois les circonférences primitives déterminées, il faut s'occuper de chercher, pour les surfaces des dents, des profils qui satisfassent à la fois aux convenances pratiques et aux conditions géométriques du problème. Les solutions adoptées par les constructeurs se rapportent à cinq types, dont nous allons faire connaître les propriétés les plus essentielles.

Première solution pratique. — *Engrenage à fuseaux et lanterne.* — Soit AB (*fig.* 147) une portion d'épicycloïde décrite par un point de la circonférence (C_1), roulant sur la circonférence (C). Concevons en A un fuseau, ou cylindre de diamètre très-petit, perpendiculaire au plan des deux cercles primitifs, et fixé à une pièce qui tourne autour de C_1. Fixons de même la courbe AB au point C, et donnons-lui un mouvement de rotation autour de ce point comme centre : le fuseau, qui fait obstacle à ce mouvement, sera contraint de se déplacer pour laisser passer la dent AB. D'ailleurs, en vertu de sa liaison au centre C_1, le fuseau cédera en décrivant une circonférence; et il est facile de voir que la vitesse angulaire de son mouvement sera dans un rapport constant avec la vitesse de la roue (C).

En effet, faisons tourner cette roue d'un angle ACA′, l'épicycloïde AB se trouvera transportée en A′B′; et le fuseau qui doit, sans s'écarter du centre C_1, rester appuyé sur l'épicycloïde, occupera la position A_1. Or, d'après la définition des épicycloïdes, les arcs AA_1, AA′ sont égaux.

Donc le mouvement produit par l'action de la courbe sur le fuseau est exactement celui qu'on obtiendrait en considérant les cylindres primitifs comme deux cylindres de friction, les sections droites de ces cylindres se développant sans glissement l'une sur l'autre. On vérifie d'ailleurs que la normale commune aux surfaces de la dent et du fuseau ne cesse pas, pendant le mouvement, de passer par le point A, ce qui est, comme nous le savons, la condition de l'invariabilité du rapport des vitesses.

Quand l'arc parcouru sur chacune des circonférences primitives est égal à ce que nous avons appelé le *pas*, on arrête la courbe conductrice, et on place comme précédemment, sur

la ligne des centres, une nouvelle épicycloïde, ainsi qu'un deuxième fuseau : on pourvoit de la sorte à la continuation du mouvement pendant un temps qui correspond encore au parcours d'un pas, et ainsi de suite. Comme le pas de l'engrenage est une partie aliquote de l'une et de l'autre des circonférences primitives, on finira par revenir au point de départ, et l'épure sera terminée. La face postérieure de chaque dent peut être taillée suivant un profil quelconque : il est en général convenable d'employer une courbe symétrique de la première (*fig.* 148), afin que la roue (C) puisse conduire la roue (C_1) indifféremment dans les deux sens.

Le fuseau de diamètre nul que nous avons supposé pour notre explication n'est évidemment pas admissible dans la pratique : en réalité, ce fuseau est un cylindre de petit rayon, tel que A_1a (*fig.* 149). Quant à la courbe conductrice, elle est parallèle à l'épicycloïde qui correspondait au fuseau réduit à son axe, et se construit en portant sur les normales à cette courbe une longueur égale au rayon du fuseau : le lieu géométrique des points ainsi obtenus est l'enveloppe des positions du petit cercle (A_1a), dont le centre parcourt l'épicycloïde A'B (*).

On complète le tracé de la roue (C), en disposant entre deux dents consécutives une entaille suffisante pour loger le fuseau quand son centre atteint la circonférence primitive, et en ménageant entre les dents et les fuseaux un *jeu*, qui sera d'autant plus petit que le mécanisme devra être exécuté avec une plus grande précision (**).

C'est ordinairement la plus petite des deux roues qui porte les fuseaux : elle est connue sous le nom de *lanterne*, et se compose simplement de deux tourteaux montés sur un axe carré, dans lesquels viennent s'engager les fuseaux en fonte. Ceux-ci sont souvent rendus mobiles autour de leurs axes,

---

(*) La portion de cette enveloppe qui correspond au saillant B affecte la forme représentée (*fig.* 150). Pratiquement, la dent est limitée à l'arête *b*, qu'on a même soin d'arrondir légèrement : il suit de là que la courbe conductrice cesse d'être en contact avec le fuseau, un peu avant que le centre de celui-ci soit parvenu au point B.

(**) Le diamètre du fuseau est généralement égal à la largeur de la dent, et le jeu est le dixième du pas.

afin de régulariser l'usure; seulement alors ils acquièrent du jeu à la longue, ce qui occasionne des secousses. Les dents, ou *alluchons*, sont en bois dur, et s'assemblent à clavettes dans la jante de la grande roue. Les engrenages à lanterne, fort employés dans l'ancienne mécanique, sont à peu près abandonnés aujourd'hui.

Continuons à étudier les propriétés géométriques de ce système.

Quand on réduit, comme premier aperçu, la section droite du fuseau à un point, le contact avec l'épicycloïde conductrice (*fig.* 147) commence à l'instant du passage du fuseau sur la ligne des centres, et a lieu exclusivement après. Si la lanterne conduisait la roue, le contact, au contraire, aurait lieu exclusivement avant le passage sur la ligne des centres.

La trajectoire relative complète du fuseau, c'est-à-dire l'épicycloïde engendrée par le point A, comprend, à dire vrai, deux branches symétriques (*fig.* 151), raccordées par un rebroussement situé sur la circonférence (C). Géométriquement, la courbe BAB′ serait propre à conduire le fuseau de part et d'autre de la ligne des centres; mais il est évident que cette disposition n'est pas réalisable : le profil d'une dent ne saurait présenter un rebroussement, et la partie concave de ce profil doit être rejetée. L'engrenage n'aura donc jamais lieu que d'un côté de la ligne des centres : *après*, si la lanterne est conduite, *avant*, si elle conduit.

Or le raisonnement et l'expérience prouvent que les frottements qui se développent entre deux surfaces tournant autour de deux axes fixes sont beaucoup moins durs, lorsque la ligne des centres est franchie, qu'avant l'instant où le point de tangence atteint cette ligne : on se gardera donc bien de faire jamais conduire une roue par une lanterne, en raison de la propriété que nous venons de signaler. En d'autres termes, l'engrenage à fuseaux n'est pas *réciproque*.

Il y a quelques modifications à faire à l'analyse précédente, quand on rétablit le fuseau de dimensions finies; mais il est facile de voir que notre conclusion subsiste.

En effet, la courbe $B_1A_1B'_1$ (*fig.* 152), qu'on substitue à l'épicycloïde, se compose comme celle-ci de deux branches à rebroussement, dont une seule, A_1B_1, est utile.

Les points de rebroussement des deux courbes ne correspondent pas à une même position du fuseau, et au moment où le centre A de celui-ci est sur la ligne des centres, le contact a encore lieu sur la branche parasite, en a. Prenons à partir du point A, sur la développée de l'épicycloïde BAB′ (laquelle est aussi la développée de la courbe $B_1A_1B'_1$), un arc égal au rayon Aa du fuseau, nous obtiendrons le point A_1, où commence le contact effectif : la position correspondante du centre du fuseau est en a_1, et celle du point de tangence des circonférences primitives, en α, sur la normale de contact A_1a_1.

Cette construction montre que l'instant où la dent et le fuseau entrent en prise, instant déterminé par le passage du point α sur la ligne des centres, précède un peu l'arrivée du point de contact des surfaces sur cette même ligne. Quoi qu'il en soit, l'engrenage a toujours lieu principalement après la ligne des centres, et la seule disposition admissible est celle dans laquelle la roue commande la lanterne.

DEUXIÈME SOLUTION PRATIQUE. — *Engrenage à flancs rectilignes.* — Les engrenages à flancs sont ceux qu'on emploie le plus fréquemment aujourd'hui; ils jouissent de la propriété d'être réciproques, et leur tracé résulte des considérations suivantes.

Décrivons une circonférence sur le rayon AC_1 comme diamètre (*fig.* 153); faisons rouler cette circonférence sur le cercle (C), et prenons l'épicycloïde AB pour profil conducteur.

Dans ce système, la plus petite des deux roues prend le nom de *pignon;* elle a la forme d'un plateau circulaire, entaillé de manière à présenter une surface plane C_1A qui s'appuie sur l'épicycloïde AB. La dent conduite affecte ainsi un profil rectiligne, au lieu du profil circulaire caractéristique du tracé précédent; et nous allons montrer que le rayon ou *flanc* C_1A, combiné avec la *face* AB, fournit, comme la combinaison des fuseaux et des alluchons, une solution du problème des engrenages cylindriques.

Considérons, en effet, l'épicycloïde transportée en A′B′, et soit C_1A_1 la position correspondante du flanc, laquelle s'obtient en menant par le point C_1 une tangente à la courbe A′B′.

Le point de contact de cette tangente est en a, sur la circonférence génératrice de l'épicycloïde A'B', et l'on a

$$\text{arc } AA_1 = \text{arc } Aa = \text{arc } AA',$$

d'où il suit que les arcs décrits simultanément sur les deux circonférences primitives sont égaux. On peut donc adopter ces deux profils pour faire conduire la roue (C_1) par la roue (C), au delà de la ligne des centres (*).

Pour faire en sorte que chaque roue puisse être indifféremment conductrice ou conduite, ou, ce qui est la même chose, que le contact de deux dents ait lieu de part et d'autre de la ligne des centres, il n'y a qu'à prolonger la courbe AB à l'intérieur du cercle (C), suivant le profil rectiligne AC, et à décrire tangentiellement à la droite AC une épicycloïde déterminée par les mêmes principes que l'arc AB. De la sorte, chaque dent se compose d'une face curviligne et d'un flanc rectiligne : l'engrenage est réciproque, et la conduite commence avant la ligne des centres pour finir après.

On fait les dents symétriques, comme dans le tracé précédent, pour que le mouvement soit possible dans les deux sens (*fig.* 154); puis après avoir fixé (**) la saillie qu'on veut

---

(*) Il est d'ailleurs évident sur la figure que la normale commune aux surfaces en contact passe constamment par le point A.

(**) La saillie et le creux se déterminent par certaines règles empiriques sur lesquelles nous reviendrons plus tard (*voir* p. 222). Voici, d'après Willis, les proportions adoptées dans la meunerie (*fig.* 155) :

Saillie en dehors de la circonférence primitive.....	$de = \frac{3}{10}\,a,$
Profondeur du creux, en dedans de la même circonférence..	$eg = \frac{4}{10}\,a,$
Jeu à fond de creux.....	$\frac{1}{10}\,a,$
Largeur du plein de la dent.....	$\frac{5}{11}\,a,$
Largeur du vide de la dent.....	$\frac{6}{11}\,a,$
Jeu dans le sens de la circonférence primitive.....	$\frac{1}{11}\,a.$

Ces proportions sont des fonctions du pas a seulement; il ne faut pourtant pas croire que la courbure des circonférences primitives ne doive pas entrer en ligne de compte : en effet, plus cette courbure est considérable, plus les

donner à la dent en dehors de la circonférence primitive, ainsi que la profondeur du creux, on termine le plein et le vide par deux arcs de cercle concentriques, et on arrondit soigneusement toutes les arêtes saillantes ou rentrantes des deux profils.

Les engrenages à flancs droits ont un inconvénient grave : c'est que, pour tracer le patron de la dent d'une roue, il est nécessaire de connaître le diamètre de l'autre circonférence primitive, de sorte qu'une roue donnée ne peut engrener régulièrement qu'avec des roues d'un diamètre parfaitement déterminé ; les lanternes présentent la même particularité.

Or, d'une part, nous verrons qu'on a quelquefois besoin de faire engrener une même roue avec deux ou plusieurs pignons dont les dimensions diffèrent ; d'autre part, comme aujourd'hui presque toutes les roues dentées s'exécutent en fonte ou en laiton, il est très-important, pour ne pas multiplier les modèles, d'avoir un tracé tel, que toutes les roues du même pas puissent être à peu près indifféremment combinées deux à deux, pour constituer un engrenage régulier.

Il est facile, en mettant à profit l'indétermination laissée par la théorie dans la solution générale du problème des engrenages, de satisfaire à la nouvelle et importante condition que nous venons d'énoncer.

TROISIÈME SOLUTION PRATIQUE. — *Engrenage à flancs épicycloïdaux.* — Décrivons dans l'intérieur de (C_1) un cercle de diamètre quelconque AD (*fig.* 156), et prenons pour la face de la roue (C) l'épicycloïde A'B' engendrée par un point de cette circonférence auxiliaire, roulant extérieurement sur la circonférence primitive (C) : il est facile de voir que le flanc correspondant sera précisément l'hypocycloïde A_1B_1 (*) décrite

---

dents se refusent vite au contact. Cette considération conduit à augmenter un peu la saillie des petites roues : on peut d'ailleurs toujours déterminer géométriquement les limites des parties utiles des dents, ainsi que la forme théorique du creux, laquelle est l'enveloppe des positions relatives de la dent opposée.

(*) Dans le système des flancs droits, cette hypocycloïde était une ligne droite ; et cette particularité est la seule qui distingue géométriquement le tracé actuel du précédent.

En général, deux profils conjugués quelconques peuvent toujours être considérés comme engendrés par un même point d'une certaine courbe, roulant sur chacune des circonférences primitives respectivement.

par un point de la même circonférence, roulant dans l'intérieur de (C_1). En effet, on démontrerait comme tout à l'heure que les arcs AA', AA_1, égaux chacun à Aa, sont égaux entre eux, et que la normale de contact passe constamment au point A.

Le cercle générateur AD est tout à fait arbitraire, et sans relation avec l'un ou l'autre des rayons primitifs : il doit seulement être le même pour toute la série des roues destinées à engrener ensemble. De plus, il est nécessaire que le diamètre de ce cercle soit inférieur ou, au plus, égal au plus petit des rayons des cercles primitifs, afin que le flanc ne se trouve jamais convexe. Dans ce cas, en effet, les dents auraient à la racine une épaisseur moindre que sur la circonférence primitive, ce qui serait très-vicieux au point de vue de la solidité.

Les règles relatives à la saillie et au jeu sont les mêmes que dans le cas des engrenages à flancs droits.

Quatrième solution pratique. — *Engrenage à développantes de cercle.* — Dans les engrenages à développantes la normale commune, qui est toujours assujettie à passer constamment par le point de contact des circonférences primitives, satisfait de plus à la condition d'avoir une inclinaison fixe sur la ligne des centres. Voici le tracé de cette nouvelle espèce de denture.

Soit TT_1 une ligne menée par le point A sous une inclinaison convenable (*fig.* 157); des centres C et C_1 décrivons des circonférences tangentes à la droite TT_1 : les rayons de ces circonférences sont proportionnels à ceux des circonférences primitives. Cela posé, enroulons les portions TA, T_1A de la droite TT_1, chacune sur la circonférence correspondante : le point A décrira dans chacun de ces mouvements une développante de cercle; et je dis qu'en prenant pour profils des dents ces développantes AB, AB_1, nous aurons la solution cherchée.

En effet, faisons tourner les deux roues autour de C et C_1 respectivement : la courbe AB dans toutes ses positions, telles que $A'B'$, admettra toujours la ligne fixe TT_1 pour normale, et il en sera de même de l'autre courbe AB_1. Donc, si l'on conçoit que les deux profils passent à chaque instant par un même point de la ligne TT_1, ils seront tangents en ce point; et la normale commune satisfera à la double condition imposée.

Les arcs BB′, $B_1B'_1$ sont tous deux égaux à la longueur AA′, interceptée sur la normale commune par les deux positions considérées des développantes ; et comme les rayons des bases des développantes sont proportionnels à ceux des circonférences primitives, les arcs décrits simultanément par le point de contact sur les circonférences primitives sont aussi égaux, ce qui est une vérification de la proposition fondamentale de la théorie des engrenages.

L'engrenage à développantes est réciproque, et chaque dent est formée d'une seule courbe. De plus : 1° l'épaisseur de la dent croît de l'extrémité à la racine ; 2° une même roue peut engrener avec une autre roue de rayon quelconque ; 3° la distance des centres peut varier sans que la régularité de l'engrenage soit altérée. Cette dernière propriété permet de ne pas s'occuper du jeu dans la construction des roues, et c'est en ajustant l'appareil qu'on dispose par tâtonnements les arbres à la distance convenable pour que le mouvement s'exécute sans trop de liberté et sans trop de gêne (*).

A côté de ces avantages, on peut signaler l'inconvénient que voici : l'action des dents l'une sur l'autre, dirigée suivant la normale commune, est oblique par rapport à la ligne des centres, ce qui est mauvais au point de vue dynamique. Dans les autres engrenages, la normale commune est d'abord perpendiculaire à la ligne des centres : peu à peu elle devient oblique ; mais dès qu'elle a atteint une obliquité un peu notable, une autre paire de dents entre en prise, et l'inconvénient dont nous parlons est beaucoup amoindri.

Cinquième solution pratique. — *Tracé des dents par arcs de cercles.* — La portion utile des courbes qui forment le profil d'une dent est en général assez petite pour qu'il n'y ait aucun inconvénient à substituer à la courbe exacte, en vue de la commodité du tracé, un ou plusieurs arcs de cercle convena-

(*) La même propriété est utilisée dans certains mécanismes, tels que les cylindres broyeurs des minerais métalliques. Une même paire de cylindres doit servir à broyer le minerai, tantôt gros, tantôt fin. Il faut pour cela qu'on puisse disposer les cylindres à des distances variables l'un de l'autre. Ce changement de positions relatives sera sans influence sur la régularité de la transmission, si l'engrenage est à développantes.

blement déterminés : on peut même dire que, dans les ateliers, les dents ne sont jamais exécutées différemment (*). Mais il importe d'avoir de bonnes règles pratiques pour la détermination des centres et des rayons des arcs à employer.

Je veux bien qu'il soit assez ridicule d'exiger que les dents d'une roue (surtout d'une petite roue) aient exactement la forme d'une épicycloïde ou celle d'une développante; mais il n'en est pas moins vrai qu'on voit se révéler de graves inconvénients quand cette forme s'écarte par trop de celle qui convient à l'uniformité du mouvement. L'action des machines devient irrégulière : il se produit des chocs, des vibrations, dont l'effet sur la solidité des diverses pièces est extrêmement fâcheux, circonstances qui se manifestent d'une manière non équivoque par un bruit assourdissant, indice certain d'une construction défectueuse.

L'idée qui se présente tout naturellement, quand on cherche à tracer une ligne circulaire qui se rapproche le plus possible d'un arc de courbe, c'est de substituer à cet arc le cercle de courbure de l'un des points intermédiaires; on prendra deux cercles au lieu d'un seul, si l'on veut avoir une plus grande exactitude. Ce procédé est assez pénible; heureusement, dans le cas qui nous préoccupe, il n'est pas nécessaire de commencer par tracer les courbes exactes, et l'on peut obtenir directement les profils circulaires qui répondent au degré d'approximation dont on se contente.

Considérons en effet la normale commune dans une position quelconque (*Pl. X, fig.* 96), et soit (*e*) un arc de cercle représentant le profil de la dent (C_1) : le profil conjugué est l'enveloppe des positions relatives de la courbe (*e*). Déterminant le centre de courbure X de cette enveloppe, et décrivant du point X un arc de cercle tangent au premier, nous aurons le profil de la dent de la roue (C).

Les centres X et Y se trouvent sur les droites qui joignent les points C et C_1 à un point quelconque de la perpendiculaire à la normale commune, menée par le point de contact des cir-

(*) La meilleure pratique consiste à tracer le patron exact de la dent, et à chercher ensuite par tâtonnements le centre et le rayon de l'arc de cercle, qui s'écarte le moins de la courbe théorique.

conférences primitives; et l'on obtient des courbes qui satisfont approximativement au problème des engrenages en décrivant des points X et Y deux arcs tangents en un point quelconque de la ligne XY (*).

Ce principe général étant posé, voici quels sont les deux tracés qui ont été indiqués par M. Willis.

Tracé de la dent par un seul arc de cercle. — Par le point de contact des circonférences primitives (*fig.* 158), on mène une droite TAT_1, dont la direction est arbitraire. Ordinairement, cette droite fait un angle de 75 degrés avec la ligne des centres. Du centre C on abaisse une perpendiculaire CT sur cette droite (ce qui revient à envoyer à l'infini le point de la perpendiculaire à la normale qu'il faut joindre aux deux centres de rotation) : T est le centre et AT le rayon de la dent dont on arme la roue (C); le centre de l'enveloppe des positions de l'arc ainsi déterminé s'obtient en abaissant de C_1 sur la même droite la perpendiculaire C_1T_1 : cette enveloppe est le profil de la dent de la deuxième roue.

Ce tracé offre une certaine analogie avec celui de l'engrenage à développantes : il en a les avantages et les inconvénients; seulement, chaque profil étant composé d'un arc unique, le rapport des vitesses angulaires n'est pas rigoureusement constant, dès que le point de contact des dents s'écarte un peu de la ligne des centres.

Tracé de la dent par deux arcs de cercle. — On arrive à un degré d'exactitude qui satisfait amplement aux besoins de la pratique, en employant pour chaque dent deux arcs de cercle situés de part et d'autre de la circonférence primitive, de manière à représenter respectivement ce que nous avons appelé le flanc et la face du profil. On devra s'arranger de manière que le point d'action exact de l'une des courbes soit situé un peu en deçà de la ligne des centres, et l'autre au delà, à la même distance du point A; cette distance sera, si l'on veut, égale à la moitié du pas.

(*) Euler avait indiqué l'application aux engrenages des arcs de cercle qu'on obtient en se conformant aux indications précédentes; mais on a longtemps négligé de mettre à profit ces considérations théoriques, jusqu'à ce que M. Willis les ait présentées sous une forme immédiatement pratique.

Soit (C) la roue dont on demande de tracer la denture (*fig.* 159); les données sont toujours le pas et le nombre de dents de la roue : on en déduit la circonférence primitive CA, dont le développement est égal à la longueur du pas multipliée par le nombre des dents.

Connaissant ainsi la circonférence primitive de la roue (C), considérons, mais seulement pour l'explication des constructions (*), la deuxième circonférence primitive (C_1); et proposons-nous d'abord de déterminer l'arc de cercle qui forme le contour de la partie extérieure de la face d'une dent de la roue qui nous occupe. Pour cela, nous choisirons l'instant où cette dent se trouve en *m*, à un demi-pas au delà de la ligne des centres; et nous tirerons par le point A une ligne arbitraire NN', représentant la normale commune qui correspond à cette position. D'après M. Willis, cette ligne doit faire un angle de 75 degrés avec la ligne des centres.

Menons AK perpendiculaire à NN', joignons les centres C et C_1 à un point quelconque K, pris sur cette perpendiculaire, et soient P, P_1 les points de rencontre des lignes CK, C_1K avec la normale NN' : la face que nous cherchons s'obtient en décrivant un arc de cercle du point P comme centre, avec P*m* pour rayon. Le flanc correspondant serait un arc décrit du centre P_1, tangentiellement au précédent et dans l'intérieur de la circonférence (C_1).

On détermine les flancs de la roue (C) sur la même épure en considérant la dent qui se trouve en *n*, à un demi-pas en arrière de la ligne des centres. Il suffit pour cela de joindre les centres C et C_1 à un point *k* pris sur le prolongement de AK : *p* est le centre des flancs de la roue (C), p_1 le centre des faces de la roue (C_1). En résumé, le profil de la partie utile d'une dent se composera de deux arcs de cercle : l'un décrit du centre P avec le rayon P*m*, en dehors de la circonférence primitive, l'autre décrit du centre *p* avec le rayon *pn*, en dedans de la même circonférence primitive.

Une fois cette épure préliminaire effectuée, on procède au tracé de la manière suivante : du point C comme centre, avec

(*) Nous verrons que le tracé est, comme il convient, indépendant du rayon de (C_1).

CP, Cp pour rayons, on décrit deux circonférences qui sont les lieux géométriques des centres des faces et des flancs (*fig.* 160). Puis, ayant marqué les points des dents situés sur la circonférence primitive, en tenant compte du jeu, on prend une ouverture de compas égale à Pm, et on transporte successivement la pointe traçante de son instrument en a, b, c, d,..., en cherchant pour chacun de ces points la position correspondante de la pointe centrale, laquelle doit être sur la circonférence FF′. Quand on a ainsi décrit toutes les faces, on change l'ouverture de son compas, et on décrit les flancs de la même manière. Il importe de remarquer que la position des points P, p, qui déterminent la forme des dents de la roue (C), est tout à fait indépendante du rayon de la roue (C$_1$).

La limite supérieure de la longueur AK correspond à C$_1$K parallèle à NN′, un flanc ne pouvant jamais être convexe; cette limite est donc une fonction du rayon de la plus petite des roues.

Pour la commodité des constructeurs, M. Willis a calculé une table qui dispense de faire l'épure préliminaire, en fournissant immédiatement (*) les longueurs AP, Ap, en fonction du pas et du nombre de dents de la roue.

Voici un extrait de cette table, réduite en mesures françaises. Le pas est donné en centimètres, les autres nombres du tableau expriment des millimètres. Rien n'est d'ailleurs plus facile que de continuer la table ou de l'interpoler; seulement on ne devra pas s'en servir pour une roue destinée à engrener avec un pignon de moins de 12 dents : on sera alors obligé de recourir à la construction directe.

(*) Dans le calcul de cette table, l'angle NAC a été pris constamment égal à 75 degrés; quant à la longueur AK, elle est liée, ainsi que nous l'avons dit, au rayon du plus petit cercle primitif : soit R$_0$ ce rayon, on a

$$AK = R_0 \sin 75^\circ.$$

M. Willis a pris pour la plus petite des roues d'un pas donné celle de 12 dents; alors, en désignant par a le pas, on a

$$2\pi R_0 = 12a,$$

d'où

$$AK = \frac{6 \sin 75^\circ}{\pi} a.$$

NOMBRE de DENTS.	PAS EN CENTIMÈTRES.										
	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/4	2 1/2	3	4	5	6
	Centres des flancs.										
13	64	80	96	112	129	144	160	193	257	321	385
14	34	43	52	60	69	78	87	104	139	173	208
15	24	31	37	43	49	55	62	74	99	123	148
16	20	25	29	34	40	44	50	59	79	99	119
17	17	21	25	29	34	37	42	50	67	84	101
18	15	18	22	26	30	33	37	45	59	74	89
20	12	15	18	21	25	28	31	37	49	62	74
22	11	13	16	19	22	24	27	33	43	54	65
24	10	12	15	17	20	22	25	30	40	49	59
26	9	11	13	16	18	20	23	27	37	46	55
30	8	10	12	14	17	18	21	25	33	41	49
40	7	9	11	12	15	16	18	21	28	35	42
60	6	8	10	11	13	14	15	19	25	31	37
80	6	7	9	10	12	13	14	17	23	29	35
100	5	7	8	10	11	12	14	17	22	28	34
150	5	6	8	9	10	12	13	16	21	27	32
Crémaillère	5	6	7	8	10	11	12	15	20	25	30
	Centres des faces.										
12	2,5	3	3,5	4,5	5	5,5	6	7	10	12	15
13	"	3,5	4	5	5,5	6	7	8	11	14	17
20	3	4	4,5	5,5	6	7	8	9	12	15	18
30	3,5	4,5	5	6	7	8	9	10	14	18	21
40	4	"	5,5	6,5	8	8,5	9,5	11	15	19	23
60	"	5	6	7	8,5	9	10	12	16	20	25
80	4,5	5,5	6,5	7,5	9	9,5	11	13	17	21	26
100	"	"	"	"	"	10	"	13,5	18	22	27
150	"	"	7	8	9,5	10,5	11,5	14	19	23	28
Crémaillère	5	6	7,5	8,5	10	11	12	15	20	25	30

Odontographe. — Enfin la méthode de Willis est rendue tout à fait pratique par l'emploi d'un petit rapporteur de corne ou de carton (*fig.* 161), qu'on nomme *odontographe*.

Pour se servir de l'odontographe, on le place sur l'épure de manière que la ligne AB soit dirigée suivant le rayon qui vient aboutir sur la circonférence primitive, à un demi-pas en avant ou en arrière de l'origine d'une dent. Le côté NN', qui fait avec AB un angle de 75 degrés, porte deux échelles divisées, dont le zéro commun est en A, servant l'une pour les faces, l'autre pour les flancs; et la table précédente, qui peut être gravée sur le carton, fait connaître les positions des centres sur ces deux échelles. Il faut remarquer que, dans chaque position, l'échelle qu'on doit employer est celle qui par rapport au point A est opposée au point *m*. Ainsi, c'est la position I de l'odontographe qui donne le centre du flanc, et la position II qui fait connaître le centre de la face. Une fois tous les arcs de cercle décrits, on achève le tracé comme à l'ordinaire : c'est-à-dire en arrêtant les faces et les flancs à deux arcs de cercle concentriques à la roue, et échanfrinant toutes les arêtes.

(*b*). *Engrenages cylindriques intérieurs.*

Le tracé des engrenages intérieurs est fondé sur les mêmes principes que celui des engrenages extérieurs, et les cinq systèmes employés pour les premiers sont également applicables à ceux-ci.

Engrenages intérieurs à lanterne. — Quand la petite roue est menée par la grande, on peut lui donner la forme d'une lanterne (*fig.* 162) : le profil correspondant des dents de la grande roue est une courbe parallèle à l'hypocycloïde décrite par un point de la circonférence primitive du pignon, roulant dans la circonférence extérieure.

On peut au contraire armer la grande roue de fuseaux : le pignon est alors moteur et porte les dents (*fig.* 163).

Engrenages intérieurs à flancs. — Dans le cas des engrenages intérieurs, on voit immédiatement qu'il n'est pas possible de donner à la fois à la grande roue un flanc et une face, car la face se trouverait à l'intérieur de la circonférence pri-

mitive, et se raccorderait avec le flanc par un rebroussement. Les flancs droits sont même tout à fait inadmissibles (*) : et la grande roue, dont la forme générale est celle d'une couronne placée en porte à faux à l'extrémité de son arbre, présente intérieurement une denture à face hypocycloïdale, tandis que les flancs sont disposés au dedans de la circonférence primitive du pignon (*fig.* 164). Le mouvement ayant lieu dans le sens indiqué par les flèches, les flancs poussent les hypocycloïdes jusqu'à la ligne des centres. Au delà, le flanc reste en arrière de la face.

On peut faire que le contact des deux roues se continue au delà de la ligne des centres en prolongeant les profils précédents par deux épicycloïdes engendrées par un point d'une circonférence arbitraire, roulant *extérieurement* sur les deux circonférences primitives.

Engrenages intérieurs à développantes. — Le principe des engrenages à développantes (*fig.* 165) conduit à faire le profil des dents de la grande roue concave : on atténue cet inconvénient, ainsi que celui qui provient de l'obliquité de l'action mutuelle, en multipliant suffisamment les dents.

Le contact a lieu à une petite distance de part et d'autre de la ligne des centres.

Des roues parasites. — Il est toujours facile d'éviter les engrenages intérieurs. En effet, soient C, C_1 (*fig.* 166), les projections de deux axes entre lesquels on demande d'établir un rapport de vitesses donné, avec la condition que les deux rotations soient de même sens.

On obtient ce double résultat en fixant sur les arbres deux roues ordinaires dont les circonférences primitives ne se touchent pas, les rayons de ces circonférences étant d'ailleurs dans le rapport voulu. Puis on installe quelque part une roue (C') qui engrène avec chacune des roues (C), (C_1) : de cette manière les rotations des deux arbres donnés seront évidemment de même sens.

Je dis de plus que le rapport des vitesses angulaires sera l'inverse du rapport des rayons R et R_1, quel que soit le rayon de la roue auxiliaire. Soient en effet ω, ω', ω_1 les vitesses

(*) *Voir* BELANGER, *Traité de Cinématique*, p. 121.

respectives des trois roues, on a

$$\frac{\omega}{\omega'} = -\frac{R'}{R}, \quad \frac{\omega'}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R'};$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{R_1}{R}.$$

Le rapport des vitesses angulaires des arbres extrêmes ne dépend ainsi que du rapport des rayons des roues correspondantes, la roue intermédiaire ayant pour effet unique de changer le sens du mouvement transmis. En général, si l'on dispose les unes à la suite des autres une série de roues dentées, le rapport des vitesses angulaires de deux roues quelconques ne dépend que du rapport des rayons de ces roues. Nous donnerons aux roues intermédiaires le nom de *roues parasites*, parce que les dimensions de ces roues sont sans influence sur le mouvement transmis.

(*c*). *Engrenage d'une roue et d'une crémaillère.*

La théorie des engrenages cylindriques s'étend tout naturellement au cas où le rayon d'une des circonférences primitives est infini. La roue correspondante se trouve représentée par une sorte de barre droite cannelée, nommée *crémaillère*, qui doit être guidée de manière à pouvoir seulement prendre un mouvement de translation dans sa propre direction ; et il s'agit de déterminer les profils des dents des deux pièces, de manière que la vitesse du mouvement de translation de la crémaillère soit dans un rapport constant avec la vitesse angulaire du pignon.

La solution de ce problème, simple cas particulier de ceux que nous venons de traiter, ne nécessite pas de nouveau tracé : aussi nous contenterons-nous de passer rapidement en revue les diverses espèces de crémaillères à rapport de vitesses constant.

Crémaillère ou pignon à fuseaux. — Signalons seulement pour mémoire les crémaillères à fuseaux cylindriques, ou celles qui conduisent une lanterne : les unes et les autres se rencontrent très-rarement aujourd'hui, et leur denture ne présente rien qui mérite d'être signalé.

Crémaillère à flancs droits ou courbes. — Quand la commande entre le pignon et la crémaillère doit être réciproque, on a recours au principe des engrenages à flancs. Si l'on adopte pour le pignon des flancs rectilignes (*fig.* 167), la face de la dent de la crémaillère est un arc de cycloïde dont le cercle générateur a pour diamètre C_1A.

La face du pignon est une développante de cercle; et il est à remarquer que la crémaillère n'a pas à proprement parler de flanc. En effet la développante AD, dans la rotation de la roue autour de l'axe C_1, ne cesse pas de couper à angle droit la ligne TT'; et par conséquent elle agit constamment sur le point A du flanc AB, A'B', ...

Il résulte de là que la dent de la crémaillère s'use rapidement dans la région voisine de ce point d'action unique : ceci est un inconvénient qu'on évite en faisant décrire la face du pignon et le flanc de la crémaillère par un même cercle de rayon quelconque, ou mieux en employant les tables de Willis. Les crémaillères ainsi construites engrènent avec tous les pignons de même pas.

Crémaillère à flancs obliques dérivant des engrenages à développantes de cercle. — Soit NN' (*fig.* 168) la normale constante : le profil de la dent du pignon est la développante de la circonférence C_1T_1; quant à l'autre développante, elle est remplacée par une droite perpendiculaire à NN'. Si l'on veut que la transmission du mouvement soit possible dans les deux sens, chaque profil doit être symétrique : les dents de la crémaillère prennent ainsi la forme trapézoïdale (*fig.* 169). La distance de la crémaillère à la roue peut varier, sans que la régularité de la transmission soit altérée.

Cames soulevant un pilon.

Un pilon mécanique ou *bocard* (*fig.* 170) se compose d'un sabot de fonte, fixé à l'extrémité d'une flèche en bois.

Perpendiculairement à la flèche, et dans une entaille pratiquée à cet effet, on assemble un mentonnet sur lequel vient agir une came. Le pilon soulevé, et d'ailleurs convenablement guidé dans son mouvement, retombe par son poids quand la dent ou came l'a quitté : une autre came vient bientôt le saisir,

et le mouvement de rotation continu de l'arbre à cames se trouve *transformé* en un mouvement rectiligne alternatif du pilon.

Ce mécanisme doit être rapporté au chapitre actuel, car, géométriquement, le mouvement du pilon pourrait être continu. Le changement de sens résulte seulement de la destruction de la liaison des deux corps : et la flèche avec son mentonnet représente une crémaillère, dont la denture se réduit à un seul flanc droit. Le profil de la came est une développante de cercle, dont tous les points viennent successivement en contact avec un même point du mentonnet.

2° Axes concourants. — Engrenages coniques.

Occupons-nous maintenant des appareils qui servent à établir un rapport de vitesses constant, entre deux corps mobiles autour de deux axes concourants.

Cônes de friction. — Considérons deux cônes de même sommet (*fig.* 171), tangents tout le long de la génératrice OC. Si l'adhérence des surfaces est suffisante pour que l'un de ces cônes ne puisse pas tourner sur son axe sans entraîner l'autre, il est clair que le rapport des vitesses angulaires des deux mouvements de rotation sera constant : tel est le principe des transmissions de mouvement par cônes de friction, lesquelles présentent les mêmes avantages et les mêmes inconvénients que les cylindres de friction précédemment étudiés.

Soient ω et ω_1 les vitesses des deux arbres; on a

$$\omega_1 . CP = \omega_1 . CQ$$

ou :

$$\omega \sin \alpha = \omega_1 \sin \alpha_1 :$$

Dans la transmission par cônes de friction, le rapport des vitesses angulaires des deux cônes est inverse du rapport des sinus des demi-angles au sommet de ceux-ci (*).

Cette règle permet de déterminer les deux cônes, connaissant les axes et le rapport des vitesses.

Pour cela, par un point quelconque B de l'axe OQ, menons

(*) On remarquera que, si la droite OB représente la vitesse ω_1, ω sera représentée par la droite OA.

une parallèle à l'axe OP; prenons sur cette parallèle et dans un sens convenable une longueur BK qui soit à OB dans le rapport direct des vitesses angulaires des deux arbres : le point K est un point de la génératrice de contact des cônes de friction. On obtient donc ces deux surfaces en faisant tourner la ligne OK autour de chacun des axes donnés (*).

Engrenages coniques. — Si l'adhérence entre les deux cônes n'est pas assez forte pour assurer la transmission du mouvement, on arme les surfaces en contact de saillies ou dents, entre lesquelles sont ménagés des creux. On constitue ainsi les *engrenages coniques* ou *roues d'angle*. Les surfaces qui limitent les dents doivent être telles, que la transmission du mouvement reste uniforme, et s'effectue absolument de la même manière que lorsqu'on avait simplement les deux cônes primitifs roulant sans glisser l'un sur l'autre.

On satisferait à cette condition par l'emploi d'une lanterne à fuseaux coniques, combinée avec une roue pour le tracé de laquelle je renverrai au *Traité des Machines* de Hachette; mais les seuls engrenages coniques usités aujourd'hui sont fondés sur les mêmes principes que les engrenages cylindriques à profils épicycloïdaux, avec lesquels ils présentent les analogies habituelles de la Géométrie de la sphère avec la Géométrie plane.

Épicycloïdes sphériques. — Observons d'abord que, les dents étant toujours limitées par des surfaces coniques (surfaces coniques à base quelconque) de même sommet que les deux cônes primitifs, une seule directrice suffit à les déterminer.

Pour trouver cette directrice, coupons les deux cônes par une sphère décrite de leur sommet commun comme centre; et soient (B) et (B_1) les cercles ainsi déterminés, que nous appellerons les bases des deux cônes (*fig.* 172). Considérons un troisième cône, tangent aux deux premiers suivant leur génératrice commune, et soit (b) la base de ce cône auxiliaire sur notre sphère.

Cela posé, faisons tourner simultanément les trois cônes autour de leurs axes avec les mêmes vitesses relatives que

(*) Dans la pratique, on n'emploie jamais que deux tronçons de cône de faible épaisseur.

celles qui résulteraient du roulement de leurs surfaces l'une sur l'autre : un point a de la base du cône auxiliaire décrira une épicycloïde sphérique $A'a$ par rapport au cône (B), et une autre épicycloïde sphérique par rapport au cône (B_1). Ces courbes sont précisément les directrices demandées.

Cette solution rigoureuse, parfaitement analogue comme principe à celle que nous avons donnée pour le problème des engrenages cylindriques, n'est pas employée dans la pratique, vu les difficultés que présente le tracé des courbes sphériques. En définitive, on a plus de garanties pour l'exactitude matérielle, si l'on s'arrête à une solution simplement approchée en théorie, mais plus commode à réaliser. Aussi a-t-on universellement adopté, pour déterminer les directrices des dents des roues d'angle, la méthode approximative que nous allons exposer. Cette méthode, imaginée par Tredgold (*), repose sur les considérations suivantes.

En pratique, la portion de surface sphérique occupée par les arcs utiles des épicycloïdes constitue seulement une zone assez étroite, autour de la base de chaque cône primitif; et l'on peut admettre que, dans l'étendue d'une pareille zone, la surface de la sphère se confond sensiblement avec celle de son cône circonscrit. En se contentant de l'approximation fournie par cette hypothèse, c'est sur la surface des cônes circonscrits à la sphère, le long des bases de chacun des cônes primitifs respectivement, qu'on se proposera de déterminer les directrices des dents : on substituera ainsi aux lignes sphériques des courbes tracées sur des cônes; or les constructions relatives à ces dernières courbes n'offrent aucune difficulté, par suite de la propriété dont jouissent les surfaces coniques d'être développables sur un plan.

On va plus loin encore : les cônes circonscrits S et S' (*fig.* 173) ont chacun un élément angulaire infiniment petit compris dans le plan tangent à la sphère au point C; et l'on admet comme deuxième simplification, le pas n'étant jamais bien considérable, que ce plan tangent commun à la sphère et aux cônes contient la portion occupée sur chacune des zones par le plein et le creux de deux dents en prise.

(*) *Buchanan's Essays on mill-work*, by Tredgold, p. 103; 1823.

Or, on n'a pas besoin de suivre le mouvement des deux roues pendant un temps excédant celui qui correspond au passage d'une paire de dents, puisqu'il y a identité parfaite entre toutes les paires qui viennent successivement au contact; donc en définitive on n'a à se préoccuper que du mouvement relatif des deux secteurs SCc, S'Cc', lequel est un simple mouvement plan.

Ces bases préliminaires acceptées, soient (*fig.* 174) SOC, S'OC, les deux cônes primitifs. Tirons SS' perpendiculaire à la génératrice de contact OC : SC et S'C sont les génératrices des cônes circonscrits à la sphère, qui contiennent les zones dont nous avons besoin. Ces deux cônes, ou plutôt les deux troncs de cône CD, CD', étant exécutés sur le tour, les procédés les plus élémentaires de la Géométrie descriptive vont nous permettre de déterminer, par une épure identique aux épures d'engrenages plans, les patrons ou panneaux des directrices des surfaces des dents.

En effet, développons les deux cônes sur leur plan tangent commun : pour cela, des points S et S', comme centres, décrivons des circonférences tangentes au point C, et prenons sur ces circonférences des arcs égaux au développement des bases (B) et (B_1). D'après ce que nous avons admis, le mouvement relatif des facettes coniques élémentaires, qui viennent successivement se placer dans le plan sur lequel s'effectue notre développement, est identique au roulement de deux secteurs circulaires, correspondant à des arcs infiniment petits égaux des circonférences (SC), (S'C).

Considérons donc ces deux circonférences comme les circonférences primitives d'un engrenage cylindrique, et déterminons les profils des dents de cet engrenage par l'un des tracés que nous connaissons : il suffira ensuite de découper suivant chacun de ces profils un carton flexible, et d'appliquer ce patron sur la surface du tronc de cône correspondant. On taillera les dents suivant la surface engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur la directrice ainsi déterminée, et à passer constamment par le point O.

Comme on n'a généralement, pour l'exécution de la denture, qu'une portion de cône qui ne se prolonge pas jusqu'au sommet O, on remplace celui-ci par une deuxième directrice

tracée, pour chaque roue, sur une deuxième surface conique auxiliaire, parallèle à la surface qui contient la première directrice. Chacune des deux couronnes à tailler se trouve ainsi limitée par quatre surfaces coniques droites, de manière à présenter la section trapézoïdale qu'indique la *fig.* 174.

L'horlogerie emploie, sous le nom de *roues de champ*, d'autres espèces de roues d'angle destinées seulement à résister à de minimes efforts. Je ne m'arrêterai pas à décrire ces mécanismes peu importants, ni à définir les conditions d'invariabilité du rapport des vitesses angulaires.

Joint universel sphérique.

C'est ici le lieu de dire quelques mots du dispositif fort ingénieux imaginé par M. Porro, pour communiquer à une grande lunette un mouvement uniforme de rotation autour de son axe de figure. Cet axe, maintenu par deux collets dans une position inclinée (*Pl. XXIII, fig.* 221), se termine à sa partie inférieure par une sphère pleine qui repose sur une sorte de coupe ou calotte creuse, mobile autour d'un axe vertical. Le rayon de la calotte est un peu plus petit que celui de la sphère pleine, de manière que le contact a lieu seulement sur la circonférence extrême de la première. Cela posé, il est évident :

1° Que le mouvement de rotation se transmettra, en vertu de l'adhérence résultant de la pression exercée par la lunette, à l'arbre de celle-ci, pourvu que la résistance appliquée à cet arbre ne soit pas trop forte ;

2° Que le rapport des vitesses angulaires des deux solides autour de leurs axes respectifs sera constant, puisqu'il y a identité parfaite entre toutes les positions relatives occupées par ces deux corps ;

3° Enfin (propriété caractéristique du mécanisme que nous décrivons), que l'angle des deux arbres pourra varier, sans que la régularité et l'uniformité du mouvement soient altérées.

Le rapport des vitesses angulaires des deux arbres dépend du rayon de la sphère et de celui de la circonférence de contact, ainsi que de l'inclinaison de la lunette ; de plus, circonstance qui ne se rencontre dans aucun autre organe de ma-

chines, ce rapport varie avec la nature physique des corps en contact; c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de le calculer par les seules ressources de la Mécanique géométrique.

3° Axes non situés dans un même plan. — Engrenages hyperboloïdes. — Vis sans fin.

On peut résoudre sans nouveau tracé le problème de la transmission uniforme du mouvement de rotation, dans le cas où les deux axes qu'il s'agit de relier ne sont pas situés dans un même plan.

Il suffit pour cela de prendre un axe intermédiaire, qui coupe chacun des deux axes donnés : on rentre ainsi dans le cas précédent.

Engrenages hyperboloïdes.

Une disposition récemment imaginée, et basée sur l'emploi de deux hyperboloïdes gauches dentés (*), permet d'effectuer directement la transmission.

Considérons deux hyperboloïdes de révolution, dont les axes coïncident avec les axes donnés, et disposés de manière à se toucher tout le long d'une génératrice. Il n'est pas possible ici de compter sur l'adhérence des surfaces, pour obtenir la transmission du mouvement : car deux hyperboloïdes, à moins d'être tout à fait identiques, ne sont pas susceptibles de se développer l'un sur l'autre par une succession de roulements simples, et il y a nécessairement glissement dans le sens de la génératrice commune. Mais on peut, en cannelant les surfaces gauches suivant les directions de leurs génératrices respectives, rendre les rotations des deux roues solidaires, tout en permettant le glissement relatif dont nous venons de parler: le mouvement est alors celui que nous avons étudié (p. 158).

En désignant par A l'angle des axes, par R et R_1 les rayons

(*) Les premiers engrenages construits dans ce système dérivaient, sans règles bien précises, des engrenages coniques. Il y avait des frottements considérables; mais par le temps et l'usure les roues s'appropriaient peu à peu à leur usage.

On obtient un engrenage régulier, en se conformant aux indications suivantes, qui sont extraites d'une Note publiée par M. Belanger, sous le titre de : *Théorie de l'engrenage hyperboloïde*. Décembre 1860.

des cercles de gorge, l'équation qui lie le rapport de ces rayons au rapport des vitesses angulaires est

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega} + \cos A}{\frac{\omega}{\omega_1} + \cos A}.$$

Cette équation détermine les rayons des cercles de gorge des hyperboloïdes à employer, pour produire un rapport de vitesses donné; quant à la direction de la droite qui doit, en tournant autour de chacun des axes respectivement, engendrer les deux hyperboloïdes, on la trouve par la relation

$$R \cot i = R_1 \cot i_1,$$

i et i_1 étant les inclinaisons de la génératrice sur les deux axes.

Quand ces axes sont rectangulaires, on a

$$\cos A = 0,$$

par suite

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \sqrt{\frac{R}{R_1}}.$$

Nous ne nous occuperons pas de rechercher la forme rigoureuse qu'il faudrait donner aux dents destinées à assurer la solidarité des deux hyperboloïdes. Disons seulement que les roues employées se réduisent à deux troncs d'hyperboloïdes tangents, limités à des plans menés perpendiculairement à leurs axes respectifs. Les surfaces de ces espèces de troncs de cône sont couvertes de stries rectilignes, fines et suffisamment rapprochées, représentant la série des couples de génératrices qui doivent arriver successivement en contact.

Ces stries ou cannelures doivent être en nombres réciproques aux vitesses angulaires des roues, et par conséquent elles ne sont pas espacées de quantités égales sur deux circonférences qui passent par un même point de la génératrice de contact. En d'autres termes, les dentures des deux roues ont des pas différents, propriété qui distingue essentiellement les engrenages actuels des engrenages cylindriques ou coniques.

Vis sans fin.

Dans le cas où les arbres qui ne se rencontrent pas sont rectangulaires, on peut employer une solution depuis longtemps connue, qui paraît même avoir été décrite par Pappus (*) : c'est la vis sans fin.

Vis et écrous. — Aucun organe ne se rencontre aussi fréquemment dans les machines que les vis de toute nature, aucun ne se prête à des applications plus variées. Toutes ces applications reposent sur ce que le mouvement de la vis, par rapport à son écrou considéré comme fixe, se compose d'une translation dans la direction de l'axe et d'une rotation autour de cet axe : ces deux mouvements étant réglés de telle façon que pour un tour entier la vis avance d'un pas. Par suite, le mouvement de l'un des deux corps étant donné, l'autre se trouve déterminé.

Par exemple, quand l'écrou est fixe et qu'on oblige la vis à tourner sur son axe, celle-ci s'enfonce en même temps d'une fraction de pas égale à la fraction de tour qu'on lui fait faire : tel est le principe des vis de pression, de certaines vis micrométriques, de celles qui servent à assembler deux objets. Inversement, quand la vis est maintenue fixe, l'écrou possède à la fois un mouvement de translation et un mouvement de rotation, dont les vitesses sont dans le rapport indiqué.

Le mécanisme employé pour donner ou retirer l'eau à certaines roues hydrauliques se compose d'une vanne, mobile dans une feuillure verticale, et fixée à une grosse vis en bois dont l'écrou repose sur un appui fixe : la vis, qui fait corps avec la vanne, peut seulement, comme celle-ci, monter ou descendre parallèlement à elle-même.

Quand on veut lever la vanne, on tourne l'écrou au moyen d'une barre analogue à celle d'un cabestan, le poids du système maintient l'écrou appuyé sur son support, et lui permet seulement de prendre un mouvement de rotation sur son axe : la translation est alors le partage de la vis, qui s'élève ou s'abaisse d'un pas pour chaque tour de barre.

(*) *Voir* Pappus, l. VIII, prop. 24.

La combinaison opposée se rencontre aussi très-fréquemment, par exemple dans les *vis de rappel*. La vis tourne dans des collets fixes, et l'écrou, convenablement guidé, prend un mouvement de translation dans le sens de son axe (*).

Il n'est en aucune façon nécessaire que l'écrou affecte la forme ordinaire d'un anneau enveloppant la vis de toutes parts. Réduisons cet écrou à un simple onglet, compris entre deux plans conduits par l'axe et faisant entre eux un angle aussi petit qu'on le voudra; nous aurons une sorte de crémaillère, ou *peigne*, à laquelle une vis de deux ou trois spires, dont les collets sont fixes, communiquera un mouvement de translation. Cette disposition est peu usitée, mais elle nous conduit tout naturellement à la vis sans fin, qui l'est beaucoup.

Vis sans fin. — Concevons qu'on enroule le peigne dont nous venons de parler sur une jante cylindrique MN (*Pl. XIII, fig.* 175), tournant autour du centre C. Nous n'aurons rien changé à l'élément d'écrou sur lequel s'exerce l'action de la vis, et cette action aura toujours pour effet de communiquer au point qui touche le filet une vitesse parallèle à l'axe de la vis.

Seulement, le point animé de cette vitesse étant invariablement lié à l'axe C, il résultera de là une rotation continue de la roue MN autour de l'axe C, perpendiculaire à l'axe de la vis : tel est le principe de la *vis sans fin*.

Pour étudier d'un peu plus près ce mécanisme, réduisons la roue à une lame sans épaisseur, et considérons la série des sections axiales de la vis : sections qui, par l'effet de la rotation, arrivent l'une après l'autre dans le plan de la roue. Ces sections sont toutes superposables : elles se présentent à la roue comme les positions successives d'un profil animé d'un mouvement de translation parallèle à l'axe de la vis; c'est-à-dire que la vis sans fin joue précisément, par rapport à la roue, le rôle d'une crémaillère indéfinie. Si donc la vis est à

(*) Enfin, nous verrons plus loin que dans les mouvements qu'on appelle différentiels, on s'arrange de telle sorte que la vis, indépendamment de la rotation, possède une certaine portion de la translation : l'écrou est alors animé de la fraction complémentaire (positive ou négative) de la translation. Cette fraction est aussi petite qu'on le veut.

filets carrés, ce qui est le cas le plus habituel, la forme des dents de la roue, supposée toujours infiniment mince, devra être la même que si cette roue était destinée à engrener avec une crémaillère à flancs droits.

Rétablissons l'épaisseur de la roue : il résulte de l'inclinaison des filets de la vis que si l'on taillait, suivant le profil en développante déterminé par les considérations précédentes, une dent cylindrique à génératrices perpendiculaires au plan de la roue, celle-ci ne pourrait pénétrer dans les creux de la vis; il faut donc rendre la dent oblique, et lui donner l'inclinaison de l'hélice moyenne, avec un jeu suffisant. La forme de la roue se trouve ainsi complétement déterminée.

La loi du rapport des vitesses angulaires est telle, que pour un tour de la vis il passe une dent de la roue, de sorte que la vis, à ce point de vue, doit être assimilée à un pignon d'une seule dent.

L'engrenage est ou n'est pas réciproque, suivant la grandeur de l'inclinaison du filet de la vis sur son axe. Si, comme dans la plupart des cas, cet angle est voisin de 90 degrés, la roue ne saurait communiquer le mouvement à la vis, quelque force qu'on fasse agir sur elle : on utilise cette propriété dans plusieurs machines.

A partir d'une certaine obliquité du filet, il y a réciprocité, et l'on trouve dans les anciens tournebroches une vis conduite par une roue : mais cette disposition est très-peu usitée.

Vis multiples. — Dans le cas d'une forte obliquité de l'hélice, le pas de la vis occupe une grande longueur, et il serait impossible, en conservant la même disposition que précédemment, d'avoir toujours un filet en prise. On dispose alors deux ou trois filets sur un même noyau : chacun d'eux conduit pendant un demi-tour ou un tiers de tour. En général, si n est le nombre des filets, il passe n dents pour chaque tour de la vis; c'est-à-dire que celle-ci se comporte comme un pignon à n dents.

Vient-on à multiplier de plus en plus le nombre des filets, la longueur de la vis n'est plus qu'une fraction restreinte du pas. La vis finit même par devenir semblable à la roue portée par l'autre axe : l'engrenage est alors parfaitement symétrique.

Mais ce mécanisme est détestable en pratique (sauf quelques cas spéciaux) : il donne lieu à des frottements considérables, et on doit conseiller de le remplacer par l'engrenage hyperboloïde.

Vis tangente. — La vis tangente est une modification de la vis sans fin, dans laquelle la denture du pignon, au lieu d'être limitée à un cylindre de révolution concentrique au cylindre primitif, se termine par une gorge en forme de tore embrassant la vis sans fin. On l'emploie quelquefois dans les machines à diviser, où la vis tangente a l'avantage de donner aux deux pièces un contact très-intime qui empêche le plus petit recul. Ces vis sont ordinairement à plusieurs filets suffisamment fins.

L'épure de la vis tangente est assez compliquée. En effet, chaque section faite dans la vis par un plan perpendiculaire à l'axe de la roue agit comme une crémaillère sur la section correspondante de la roue. Or les courbes qu'on obtient en coupant une vis par une série de plans parallèles à son axe sont toutes différentes, et comme l'avantage de l'engrenage à vis tangente consiste en partie dans l'intimité du contact, il faudrait déterminer avec soin la série des sections perpendiculaires à l'axe de la roue, en rapport avec les profils connus fournis par la vis. Une pièce aussi compliquée serait certes extrêmement pénible à réaliser.

On évite la difficulté d'exécution par l'emploi d'une *vis tailleuse* en acier, de même forme que la vis définitive; on la creuse de cannelures pour la rendre tranchante, puis on la trempe convenablement. On exécute ensuite un disque à gorge en cuivre; on installe ce disque et la vis sur un tour, et on fait tailler le disque peu à peu par la vis, en rapprochant celle-ci à mesure qu'elle entaille la roue, jusqu'à ce que la gorge vienne affleurer le noyau (*).

(*) *Compteur de Wollaston.* — On peut citer parmi les usages de la vis tangente l'application qu'en a faite Wollaston pour l'établissement d'un compteur destiné à enregistrer le nombre des tours faits par un arbre à mouvement très-rapide.

La vis tangente A est fixée sur l'arbre dont on veut mesurer la vitesse (*fig.* 176); elle engrène avec deux roues ou demi-roues C, D, l'une de 100, l'autre de 101 dents, symétriquement placées par rapport au plan médian de la vis, sur un arbre auxiliaire B, perpendiculaire au premier. La roue C est calée

4° Détails généraux sur les engrenages.

La forme ordinaire d'une roue dentée est celle d'une couronne cylindrique ou conique, portant sur tout son contour des dents égales et également espacées. Ces dents sont elles-mêmes limitées par des surfaces réglées, disposées de telle manière, que le contact de deux dents en prise s'effectue tout le long d'une génératrice commune, afin que la pression se trouve convenablement répartie.

Il y a deux éléments importants à considérer dans une roue dentée; ce sont le pas, a, et le nombre des dents, N : le rayon de la circonférence primitive est lié à ces deux quantités par la relation

$$2\pi R = N a.$$

Nous avons dit que le pas est essentiellement le même pour deux roues qui engrènent l'une avec l'autre; donc :

Les rayons des circonférences primitives d'un engrenage sont proportionnels aux nombres de dents des roues;

Et par suite,

Les vitesses angulaires des deux arbres sont dans le rapport inverse des nombres de dents des roues.

Il résulte de cette règle que, pour qu'on puisse établir un engrenage dans un rapport donné, il est indispensable que ce rapport soit exprimé par le quotient $\frac{N}{n}$ de deux nombres entiers. Il faut même que ces nombres entiers ne soient ni trop grands ni trop petits pour être admissibles (à peu près de

---

sur l'arbre B, la roue D est folle sur le même arbre et porte un cadran devant lequel se trouve une aiguille c, solidaire avec la roue C.

D'après les lois du rapport des vitesses dans l'engrenage à vis sans fin, le cadran fait un tour pour 101 révolutions de la vis; or pendant ce temps l'aiguille a fait $\frac{101}{100}$ de tour : elle est donc en avance par rapport au cadran du centième de la circonférence de celui-ci, et elle ne reviendra à son point de départ que lorsque l'arbre A aura fait 10 100 tours.

8 à 120) : aussi verrons-nous la théorie des nombres jouer un certain rôle dans l'étude des rouages.

Si les nombres N et n sont premiers entre eux, chaque dent de l'une des roues vient successivement en prise avec toutes les dents de l'autre roue : on recherche en général, dans la pratique, cette disposition qui rend l'usure plus égale. Les horlogers, au contraire, s'efforcent de prendre N et n ayant des facteurs communs, afin qu'une dent déterminée revienne toujours aux mêmes dents de l'autre roue, ce qui laisse moins de chances à l'irrégularité.

Amplitude de prise. — Un engrenage ne pourrait pas fonctionner s'il n'y avait toujours au moins une couple de dents en contact; et encore, s'il n'y avait jamais que deux dents en prise, on aurait presque toujours un choc au moment où, l'un des couples se quittant et l'autre étant sur le point d'entrer en prise, la transmission se trouverait pendant un temps très-court interrompue. Quelquefois on s'arrange de façon qu'il y ait constamment contact de deux couples, mais cela n'est pas nécessaire : il suffit que l'amplitude de prise ait une étendue supérieure à un pas.

Cela posé, nous verrons dans la IVe Section que le frottement est d'autant plus dur que le point de contact des dents s'éloigne davantage de la ligne des centres, surtout avant le passage de cette ligne. On conclut de là la convenance de répartir la durée de l'action de part et d'autre de la ligne des centres, mais de la répartir inégalement, de manière que l'*arc d'approche* soit toujours inférieur ou au plus égal à l'*arc de retraite*. On pourra par exemple faire le premier de ces arcs égal à un demi-pas, et le deuxième à trois quarts de pas.

Une fois qu'on a fixé la valeur de ces deux arcs, il est facile de limiter graphiquement la saillie des dents, dans chacun des systèmes usités en pratique. Indépendamment de la méthode rigoureuse, il existe plusieurs règles empiriques pour déterminer cet élément important.

La règle que nous avons donnée (p. 197) suppose une saillie égale pour chacune des deux dentures (comme cela doit nécessairement avoir lieu quand le sens de la commande n'est pas déterminé); elle peut être employée en toute sécurité quand les nombres de dents des roues surpassent 15.

Désignons par S et s les rayons extrêmes de la roue et du pignon (*), N et n étant toujours les nombres de dents : la règle dont nous parlons s'exprime à peu près par l'équation

$$\frac{S}{s} = \frac{N+2}{n+2}. \tag{1}$$

Reid, auteur d'un Traité d'horlogerie estimé, indique

$$\frac{S}{s} = \frac{N+2,5}{n+1,5}. \tag{2}$$

Enfin M. Willis, après avoir analysé la question d'une manière complète, démontre aisément qu'il n'est pas possible d'avoir une relation de la forme (1) ou (2), avec laquelle on soit assuré de maintenir toujours l'arc d'action dans des limites convenables. Les formules précédentes donneront d'ailleurs des résultats assez satisfaisants, dans le cas où le pignon mène la roue; dans le cas contraire, il faudra prendre

$$\frac{S}{s} = \frac{N+3}{n+1}. \tag{3}$$

Dans la construction d'un engrenage, il faut se préoccuper, non-seulement des conditions géométriques et mécaniques du problème, mais encore de la résistance des dents à la rupture, résistance qui est à peu près proportionnelle à leur largeur et au carré de leur épaisseur (**). Mais en augmentant l'épaisseur des dents, on augmente le pas, et par suite l'étendue du contact de chaque couple, ce qui est mauvais au point de vue du frottement; d'un autre côté, on se trouve bien vite limité dans le sens de la largeur de la roue, car si les surfaces en contact sont très-étendues, il y a nécessairement des parties qui portent à faux, et on ne profite pas d'un trop grand accroissement de largeur.

(*) On appelle *pignon* la plus petite de deux roues qui engrènent ensemble; les dents des pignons portent le nom d'*ailes*.

Dans l'horlogerie ordinaire, les pignons sont toujours conduits par les roues.

(**) Quand les deux roues sont de même nature, on donne aux dents des épaisseurs égales, mesurées sur la circonférence primitive. Dans les engrenages à développantes, il serait plus rationnel de s'arranger de manière que l'égalité d'épaisseur eût lieu à la racine, plutôt qu'à la circonférence primitive.

Engrenages échelonnés. — L'artifice suivant permet de donner à chaque dent une épaisseur aussi grande que l'on veut, sans augmenter le pas dans la même proportion.

Pour cela, dès qu'une dent a décrit un espace égal, par exemple, au tiers du pas, elle cesse d'être en prise et se trouve remplacée, non par la dent suivante, mais par la dent d'une roue latérale qui se trouve d'un tiers de pas en arrière. Une troisième paire de roues vient de même succéder à la deuxième, après quoi le contact a lieu derechef entre deux dents de la première paire, et ainsi de suite.

On a ainsi (*Pl. XIX, fig.* 186) trois ou un plus grand nombre de dentures (*) disposées en échelons sur une même couronne (la figure représente le développement d'une portion de la surface du cylindre primitif); et plus on multiplie le nombre de ces roues accolées, plus on réduit la fraction de pas qui correspond à l'action de chacune d'elles.

Or, rien n'empêche de supposer que le nombre des dentures croisse indéfiniment, l'épaisseur (ou plutôt la largeur) diminuant dans la même proportion : chaque série de dents constitue à la limite une surface continue (*fig.* 186 *bis*), sorte de dent héliçoïde dont les diverses tranches agissent successivement sur les tranches correspondantes d'une dent de même forme. L'action de chaque tranche se fait sentir seulement pendant un espace de temps infiniment court, de manière que le contact des surfaces ait toujours lieu en un point du plan des axes.

Les deux dispositions précédentes ont été imaginées par Hooke, et communiquées par lui à la Société Royale de Londres en 1666. L'engrenage à dents héliçoïdes est assez généralement connu sous le nom d'*engrenage de White*, et on lui attribue fréquemment la propriété de fonctionner sans frottement.

Nous avons en effet démontré que, *dans le mouvement de deux cylindres qui se touchent suivant une génératrice*, le

(*) Dans la machine à planer de M. Collier, de Manchester, il y a jusqu'à huit dentures accolées. On obtient ainsi un mouvement très-doux; et, si l'on fait usage de roues ordinaires juxtaposées, il n'y a aucune difficulté d'exécution.

glissement élémentaire est nul quand le point de contact des deux sections droites est sur la ligne des centres de rotation; mais il n'y a aucune assimilation possible entre les héliçoïdes de l'engrenage de White et les cylindres pour lesquels le théorème que nous rappelons a été établi. Le cas actuel nécessite une analyse spéciale; et il est aisé de reconnaître que le mouvement relatif des deux dents héliçoïdes n'est pas un roulement simple, car l'axe instantané de rotation est oblique au plan tangent commun.

Ce mouvement relatif se décompose en une rotation autour d'un axe situé dans le plan tangent, et un *pivotement* (*) autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Or nous avons vu que si, dans le pivotement, le point de contact géométrique n'a aucun mouvement de glissement sur le plan tangent commun, on n'en doit pas moins considérer l'élément mobile comme glissant effectivement sur ce plan tangent : tout ce qu'on peut dire, c'est que l'arc de glissement s'abaisse du premier ordre infinitésimal au second. Mais le frottement est en

---

(*) Le pivotement que nous signalons ici est de la même nature que celui qu'on réalise dans les meules à broyer employées dans diverses industries, entre autres dans celle de la fabrication de la poudre. Ces meules tronconiques (*fig.* 187) sont traversées par un essieu sur lequel elles ont la faculté de tourner, pendant que cet essieu est lui-même entraîné dans la rotation d'un arbre vertical AB. Le mouvement réel de la meule se compose de la rotation d'entraînement Ip, et d'une certaine rotation relative Iq.

Si l'axe de rotation AB passait par le sommet géométrique S, comme dans les galets des plaques tournantes, le mouvement de la meule serait un roulement simple et le poids seul de cette meule agirait pour écraser les substances. Avec la disposition employée, l'axe instantané Ir vient rencontrer le fond de l'auge en un point situé quelque part entre la circonférence intérieure et la circonférence extérieure de la meule; et on peut décomposer la rotation absolue en un roulement simple, autour de la génératrice de contact OS, plus un pivotement autour de l'axe OP perpendiculaire au plan tangent commun. L'effet de pivotement est d'étirer, de broyer les matières, comme cela se passe entre les deux meules ordinaires d'un moulin à blé.

Le rapport de la rotation relative à la rotation d'entraînement varie dans le cours d'une même opération, suivant le degré de consistance des matières sur lesquelles passe la meule. L'expérience a prouvé que, lorsque le mélange à broyer vient d'être chargé et se trouve à l'état pulvérulent, ce rapport est tel, que l'axe instantané passe toujours par un point de la grande base de la meule. Le point de rencontre de cet axe avec le fond de l'auge se rapproche de la petite base, à mesure que la piste se durcit.

raison directe de la pression : et celle-ci, qui se répartit dans le système actuel sur un élément infiniment petit dans tous les sens, s'accroît de son côté dans une proportion du même ordre, de sorte que le frottement ne se trouve nullement supprimé.

Les dents d'une roue construite dans le système de Hooke sont limitées par des surfaces héliçoïdales dont la forme est à peu près indifférente, dans les parties situées de part et d'autre de l'élément qui correspond à l'hélice d'intersection avec le cylindre primitif. Il suffit d'éviter les arcs-boutements. Pour cela, après avoir tracé le patron épicycloïdal fourni par les règles ordinaires, on se contente de tailler la dent circulairement, en restant à l'intérieur de la forme théorique.

L'engrenage héliçoïde a l'inconvénient d'exercer sur les axes une action longitudinale, à cause de l'obliquité des surfaces; il fonctionne d'ailleurs avec une grande douceur, et a été avantageusement appliqué par M. Bréguet à des organes délicats, devant atteindre des vitesses exceptionnelles.

§ IV. — Deuxième genre. — Transmission par l'intermédiaire d'un lien rigide.

L'emploi d'un lien rigide, réuni aux corps qui doivent se transmettre le mouvement par une double articulation, est très-fréquent dans les machines; mais ce mode de liaison offre assez peu de ressources, appliqué à deux points qui doivent être animés de vitesses en rapport constant.

Nous avons étudié (p. 117) les propriétés géométriques d'un système de deux corps qui tournent respectivement autour des axes parallèles C et C′ (*Pl. IX, fig.* 86), et qui sont réunis par une barre articulée en M et en M′. Pour que le rapport des vitesses soit constant, il faut que le point T, intersection du lien (prolongé s'il est nécessaire) avec la ligne des centres CC′, soit invariable; or le point T ne peut être fixe qu'à la condition d'être constamment à l'infini, ce qui exige que les rayons CM, C′M′ soient pris égaux et parallèles, et par conséquent que le lien MM′ ait précisément pour longueur la distance CC′.

Dans ces conditions, les vitesses angulaires des arbres (C) et (C′) seront évidemment égales et de même sens. C'est le

seul cas où il soit possible d'obtenir un rapport constant de vitesses par l'emploi d'un lien rigide.

Accouplement des roues de locomotives. — Une locomotive ordinaire repose sur trois paires de roues, entre lesquelles son poids se trouve inégalement réparti. L'un des essieux, qui porte le nom d'*essieu moteur,* est mis directement en mouvement par la machine; et l'adhérence des roues correspondantes sur les rails, par un effet analogue à ce qui se produit dans la transmission par cylindres de friction, détermine le mouvement de progression du corps de la machine et du train qui s'y trouve attelé.

Seulement, quand la résistance du train est trop considérable, la locomotive *patine,* c'est-à-dire que ses roues tournent sur place, malgré le frottement de la jante sur le rail. Du moment que cet effet se produit, il ne servirait à rien d'augmenter la puissance de la machine motrice; de sorte qu'il y a, quelle que soit cette puissance, une limite à la résistance qu'une locomotive donnée est capable de vaincre. Cette limite est le produit de la pression qui s'exerce sur l'essieu moteur par un coefficient qui dépend de l'état des surfaces de la roue et du rail, ainsi que des circonstances atmosphériques.

Pour donner à la locomotive la puissance d'entraîner un train plus considérable, on réunit une ou deux paires de roues portantes avec les roues motrices, au moyen de bielles d'accouplement disposées comme nous l'avons indiqué tout à l'heure. L'effet de ces bielles est d'obliger toutes les roues couplées à tourner en même temps que les roues motrices, de sorte que la machine ne peut plus patiner sans vaincre le frottement qui se développe à la jante de toutes les roues solidaires, et que la limite dont nous avons parlé se trouve reculée.

Des points morts. — Considérons deux manivelles égales, CM, C_1M_1 (*Pl. XIII, fig.* 177), reliées par la bielle d'accouplement MM_1. Pour chaque position CM du premier rayon, l'extrémité opposée du lien peut occuper sur la circonférence (C_1) deux positions différentes, M_1, M'; en sorte qu'on peut disposer les trois tiges données de deux manières bien distinctes : la figure CMM_1C_1 répond à deux vitesses angulaires égales et de même sens, et l'autre arrangement à des vitesses opposées, dont le rapport est variable.

Les points M_1 et M' coïncident quand le point M est en A ou en B. Les deux rayons sont alors couchés sur la ligne des centres, et il se présente une circonstance remarquable : c'est que si l'on considère, par exemple, le rayon CA marchant dans la direction de CM, il y a indécision au point de vue géométrique sur le mouvement que prendra le deuxième rayon C_1A_1 : rien ne l'oblige à se diriger vers C_1M_1 plutôt que vers C_1M'. Une fois d'ailleurs que le premier pas est fait dans un sens ou dans l'autre, le mouvement persiste nécessairement, pendant un demi-tour de chacune des deux roues; après quoi la même incertitude se reproduit, et ainsi de suite.

Si l'on veut que la régularité de la marche d'un mécanisme de ce genre ne soit pas compromise périodiquement chaque fois que les extrémités des rayons se trouveront sur la ligne des centres, il est indispensable d'employer un artifice particulier pour le passage de ce qu'on appelle les *points morts*. Dans les locomotives, il y a une bielle d'accouplement de chaque côté de la voie; les articulations des deux bielles sont, pour un même essieu, disposées sur deux rayons rectangulaires CM, C*m*, de sorte que, quand l'une d'elles est au point mort, l'autre a nécessairement dépassé ce point.

Tiges et varlets. — Le système d'une suite de tiges et de bras en bois (*Pl. XVII, fig.* 178) a été longtemps employé dans l'art des mines pour transmettre à une grande distance le mouvement produit par une chute d'eau (*). Quand le terrain est ondulé, la transmission se compose de plusieurs tiges rigides successives, soutenues par des varlets AB articulés d'autre part dans des supports fixes. Enfin des leviers coudés CDE servent à changer la direction du mouvement. Ces appareils, qui ferraillent beaucoup, développent des frottements considérables.

Renvois de sonnettes. — On peut encore rattacher à ce paragraphe le petit mécanisme des sonnettes d'appartement; les bielles sont remplacées par des fils de fer, lesquels doivent toujours être tirés.

(*) L'ancienne machine de Marly, établie en 1682, faisait ainsi marcher des pompes situées à une distance de 631 mètres. Nous verrons dans le paragraphe suivant la véritable solution du problème de la transmission du mouvement à de grandes distances.

§ V. — Troisième genre. — Transmission par l'intermédiaire d'un lien flexible.

Les cordes, chaînes ou courroies, qu'on emploie dans l'industrie pour réaliser avec plus ou moins d'approximation la fiction géométrique d'un fil parfaitement flexible et inextensible, établissent une liaison entre deux corps dont les mouvements ont des directions tout à fait arbitraires.

C'est ainsi que, s'il s'agit d'imprimer à des corps pesants une vitesse verticale ascendante, comme pour tirer de l'eau d'un puits ou pour élever des matériaux à la partie supérieure d'un mur en construction, il serait peu commode pour un homme, et tout à fait impossible pour un cheval, d'exercer directement son action motrice dans la direction obligée de la vitesse que doit prendre le fardeau à élever. En suspendant celui-ci à l'extrémité d'une corde, on peut, au moyen d'appuis fixes convenablement disposés, amener l'autre bout de la corde dans la direction que l'on voudra; par exemple : l'homme s'arrangera de manière à tirer à peu près verticalement de haut en bas, le cheval sera attelé à des traits sensiblement horizontaux; et chaque agent se trouvera dans les conditions qu'une expérience bien des fois séculaire a fait adopter universellement comme les plus favorables au développement de sa puissance motrice.

Poulies. — Pour changer la direction d'une corde tirée par une de ses extrémités, on fait usage d'une poulie (*) dont la chape est accrochée à un point fixe (*Pl. XIX, fig.* 179) : on diminue ainsi considérablement le frottement qui se développerait si la corde était obligée de glisser sur une surface immobile (**). Une pareille poulie, qui tourne autour d'un axe

(*) Une seule poulie suffit quand les directions des deux brins de la corde convergent en un point. Quand ces deux lignes ne se rencontrent pas, ou que le point de concours est trop éloigné, on trace une ligne arbitraire qui coupe les premières en deux points convenables, et on place une poulie près de chaque point d'intersection. (Poncelet, *Mécanique industrielle.*)

(**) Nous verrons dans la IVe Section qu'il se développe un frottement énorme quand une corde ou une courroie glisse sur une surface cylindrique fixe, ou inversement, quand une jante cylindrique tourne sous l'étreinte d'un lien flexible immobile. On utilise cette propriété dans la construction du frein des grues, etc..

invariable, s'appelle *poulie fixe*. En vertu de l'inextensibilité de la corde (ce qui veut dire pratiquement : *dans les limites où cette inextensibilité pourra être admise*), la vitesse du point auquel est appliquée la puissance est égale à la vitesse du poids qu'on élève ; la poulie fixe n'a donc pas pour effet de changer la grandeur de la vitesse d'un point, mais seulement la direction de cette vitesse : c'est ce qu'indique la dénomination de *poulie de renvoi*. Cette loi est vraie quels que soient le nombre et la disposition des poulies fixes.

Poulie mobile. — Une poulie est dite *mobile*, quand la chape qui porte son axe est elle-même en mouvement. Dans ce cas, le fardeau est accroché à la chape de la poulie (*Pl. XIX, fig.* 180); quant à la corde, arrêtée en un point situé verticalement au-dessus du puits, elle descend jusqu'à l'endroit où se trouve le poids à enlever, remonte après avoir embrassé la moitié de la circonférence de la poulie mobile, et s'infléchit, s'il y a lieu, une deuxième fois sur une poulie de renvoi, pour redescendre enfin aboutir dans la main du manœuvre qui remplit la fonction de moteur.

Pour avoir la loi des vitesses dans la poulie mobile, nous supposerons les trois brins verticaux : il est alors facile de voir que, pour une élévation donnée du poids, chacun des deux cordons qui le supportent a diminué d'une quantité égale, et que le brin qui reste libre s'est allongé de la somme de ces deux longueurs ou du double de l'une d'elles; donc la vitesse de l'extrémité courante est double de celle de l'axe de la poulie mobile. En multipliant le nombre des poulies mobiles, on arrive, comme nous le verrons, à réduire la vitesse du moteur dans une assez forte proportion.

Treuils et cabestans. — Souvent la corde destinée à tirer un corps, mobile dans une direction quelconque, s'enroule autour d'un cylindre monté sur deux tourillons ; et le moteur, au lieu d'agir directement sur la corde, communique au cylindre un mouvement de rotation autour de son axe.

Cet axe est horizontal dans le *treuil*, vertical dans le *cabestan* : les deux appareils fonctionnent d'ailleurs identiquement de la même manière, comme organes de transmission de mouvement. En admettant toujours la parfaite inextensibilité de la corde, la vitesse du corps auquel celle-ci est attachée est

égale à la vitesse à la circonférence du treuil. La corde s'enroule par spires contiguës; et, si le treuil est cylindrique, le rapport de la vitesse d'un point de la partie rectiligne de la corde à la vitesse angulaire du treuil est constant (*).

Courroies sans fin.

Mais c'est principalement sous la forme de cordes ou courroies sans fin que l'industrie fait un grand usage des corps flexibles, pour établir une liaison entre deux solides en mouvement. Considérons seulement le cas où il s'agit de deux solides assujettis à tourner chacun autour d'un axe fixe, et supposons d'abord que les deux axes de rotation soient parallèles. La courroie s'enroule sur deux surfaces convexes fixées respectivement aux deux arbres tournants; elle présente entre ces deux surfaces une portion rectiligne qui doit rester constamment tendue : condition indispensable au fonctionnement de ce mode de transmission.

Nous avons vu dans la Ire Section (p. 118) comment on détermine le rapport des vitesses angulaires de deux solides rattachés par un fil tendu. Quels que soient les profils d'enroulement, le rapport qui nous occupe peut être constant, pourvu que la tangente commune aux deux profils, tangente qui représente la partie rectiligne de la courroie ou son prolongement, vienne couper la ligne des centres en un point fixe. Mais en pratique, on prend toujours pour les sections des poulies deux cercles centrés sur les axes : ces courbes satisfont évidemment à la condition nécessaire et suffisante pour la constance du rapport des vitesses angulaires, et il résulte de la théorie que ce rapport est l'inverse du rapport des rayons des poulies.

Il suit de là que, pour établir une transmission de mouve-

(*) Ces appareils où le rapport de vitesse est constant ont un grave inconvénient dans le cas où, comme dans certaines mines de charbon, le fardeau à extraire est lourd et la profondeur du puits considérable; en effet, le poids du câble acquiert une importance relative très-notable, de sorte que la charge à élever varie beaucoup. Il y a alors avantage à s'adresser aux appareils à rapport variable, qui feront l'objet du chapitre suivant.

ment par courroies, entre deux arbres parallèles donnés, il suffit d'installer sur ces arbres deux poulies circulaires, dont les rayons soient dans une raison inverse du rapport des vitesses angulaires qu'on veut obtenir : ces rayons n'ont aucune relation avec la distance qui sépare les axes.

La courroie, convenablement tendue, fait un demi-tour environ sur chaque jante; elle forme, comme on dit, *courroie sans fin*, passant d'une poulie sur l'autre, et revenant sur la première se raccorder à son point de départ au moyen d'une boucle ou d'une suture. La courroie peut être droite ou croisée : c'est-à-dire que ses parties rectilignes peuvent être dirigées suivant les tangentes communes extérieures ou intérieures des deux cercles (*); dans le premier cas, les deux mouvements ont lieu dans le même sens; dans le second, ils s'effectuent en sens inverse.

Poulies folles. — En général, dans une manufacture, la machine motrice communique directement le mouvement à un *arbre de couche* qui règne dans toute l'étendue du bâtiment, soit au plafond, soit sous terre, et qui transmet à son tour le mouvement, par un grand nombre de courroies, aux diverses machines-outils de l'atelier. Chacun de ces outils est confié à un ouvrier spécial, qui doit pouvoir le faire marcher ou l'arrêter à sa volonté (**), sans se préoccuper de ce qui se passe dans le reste de l'usine.

Pour cela l'arbre de l'outil porte, outre la roue calée sur laquelle passe la courroie qui lui donne le mouvement, une

---

(*) Il y a deux manières de croiser les courroies : l'une de ces manières laisse le plan de la courroie toujours parallèle aux axes de rotation, de sorte qu'au point où les deux brins se rencontrent, ils se présentent la tranche et tendent à se couper. L'autre manière consiste à retourner chaque brin, de façon que ce soit la même face de la courroie qui touche les deux poulies. Les deux brins se rencontrent comme précédemment; seulement, à l'endroit de cette rencontre, tous deux sont perpendiculaires aux axes de rotation, et par conséquent ils ne se présentent pas la tranche, mais la face, et ne tendent nullement à se couper. Comme une courroie a toujours une face lisse et une face rugueuse, cette manière de croiser présente encore un autre avantage, en ce qu'elle permet que ce soit toujours la face rugueuse qui porte sur les poulies.

(**) L'action par laquelle une machine se trouve tout à coup mise en relation avec le moteur s'appelle *embrayage*, l'opération inverse se nomme *débrayage* ou *désembrayage*.

seconde poulie dite *poulie folle,* de même diamètre que la poulie motrice, mais pouvant tourner indépendamment de l'arbre. Quand l'ouvrier veut arrêter sa machine, il fait passer la courroie sur la poulie folle au moyen d'une fourchette (*). L'arbre, qui ne reçoit plus de force motrice, ne tarde pas à s'arrêter; mais la courroie continue son mouvement, et il suffit, par un mouvement inverse de la fourchette, de la faire repasser sur la poulie motrice, pour remettre immédiatement la machine en activité.

Une pareille transmission fonctionne avec une grande douceur, sans bruit, sans vibrations, et s'installe avec beaucoup plus de facilité qu'un engrenage : aussi les courroies sont-elles fort employées par l'industrie. Seulement, comme elles sont sujettes à glisser sur les poulies, quand la résistance est trop grande, elles ne peuvent convenir aux cas où la condition principale de la transmission est une relation constante bien exacte entre les mouvements des deux arbres.

D'ailleurs, pour peu qu'une courroie soit tendue, il faut, comme nous l'avons déjà dit, une force énorme pour vaincre son frottement sur un cylindre fixe, de sorte que le danger du glissement sera en général peu important, excepté pour les mécanismes qui exigent une grande précision. Il y a plus : la seule possibilité de ce glissement, maintenu dans des limites convenables par une tension modérée, est une propriété très-précieuse du mode de liaison que nous étudions, quand la résistance est sujette à éprouver brusquement des variations importantes : le glissement qui se produit alors est une garantie contre des accidents plus graves.

Des appareils nommés *tendeurs* servent à régler la tension et à lui donner une valeur suffisante pour empêcher le glissement, sans toutefois la rendre assez forte pour fatiguer les arbres et leurs supports. On emploie assez généralement une poulie, dite *poulie de tension,* dont la chape est fixée à l'une des branches d'un levier de forme quelconque, tournant autour d'un axe fixe. L'autre branche du levier est chargée de

(*) Il faut remarquer que la fourchette doit toujours agir sur le brin qui arrive sur la poulie et non sur celui qui la quitte; nous verrons l'explication de ce fait.

poids qui pressent la poulie contre la courroie. Il est facile de régler la tension en faisant varier la distance de la charge au point d'appui du levier.

Forme des poulies pour courroies. — On pourrait donner aux poulies qui portent des courroies la forme cylindrique : on s'opposerait au déplacement latéral en terminant la poulie de chaque côté par une joue de plus grand rayon que la jante proprement dite.

Il vaut mieux former la poulie de deux troncs de cône accolés par leurs grandes bases, ou, en général, prendre pour la génératrice de la surface de la jante un profil convexe. Pour justifier cette forme, considérons une courroie placée sur une poulie conique (*Pl. XVIII, fig.* 181). Le côté le plus rapproché du sommet tourne moins vite que l'autre ; par suite la courroie tend à se placer obliquement, et le brin qui s'enroule cherche à se rapprocher de la base du cône ; par conséquent, avec la forme bi-conique, la courroie se maintiendra d'elle-même au milieu de la poulie. Sur une poulie plate munie de deux rebords, on aurait, au contraire, des mouvements irréguliers de la courroie contre ces rebords.

Cordes et chaînes.

C'est presque toujours aux courroies qu'on a recours comme organe flexible de transmission de mouvement. Les cordes ne se rencontrent guère que dans certains mécanismes grossiers : les poulies sont alors anguleuses et pourvues de deux rebords. Quant aux poulies de renvoi, pour lesquelles il n'y a pas lieu de se préoccuper du glissement, leur section est en forme de gorge proprement dite, ou demi-circulaire.

Les câbles en chanvre ou en aloès sont au contraire d'un usage très-fréquent dans la marine et dans l'art des mines. Un câble d'extraction est généralement plat comme une courroie ; il est formé de quatre, cinq ou six aussières cousues ensemble, et s'enroule sur une bobine, de manière que les spires se recouvrent successivement.

Les chaînes en fer sont assez peu usitées, sauf quelques circonstances spéciales.

L'industrie emploie la chaîne ordinaire, la *chaîne à la Vau-*

canson, et la *chaîne de Galle*. Les poulies qui reçoivent ces diverses chaînes sont dentées (*fig.* 182), car on ne saurait compter sur l'adhérence des surfaces pour prévenir le glissement; en conséquence, l'un des brins de la chaîne seulement est tendu : l'autre pend librement au-dessous des poulies. L'inconvénient de toutes les chaînes, c'est que, par suite de la tension, les anneaux s'allongent, et la chaîne ne cadre plus avec la poulie : on entend alors une succession de chocs, chaque fois qu'un anneau est saisi par une des saillies de la roue.

Câbles en fer. — Les câbles en fer s'emploient aujourd'hui très-avantageusement, sous forme de câbles sans fin, pour transmettre le mouvement à de grandes distances : c'est-à-dire à des distances pouvant varier de 100 à 1500 mètres, et même au delà. Ces câbles sont formés de fils de fer enroulés en hélice, et renferment généralement une âme en chanvre.

Tous les 150 mètres environ, il faut soutenir les deux brins du câble au moyen de poulies en bois ou en fonte (*fig.* 183). La gorge de ces poulies-supports est plate, et recouverte d'une courroie dont les extrémités viennent s'arrêter dans l'intérieur de la poulie, au moyen d'une ou deux entailles. Mais la courroie, laminée par la pression du câble, est exposée à se détendre, par suite à s'user rapidement; et il est préférable, d'après M. Hirn, l'inventeur de ces nouvelles transmissions, de garnir la gorge de la poulie par de la gutta-percha matée dans une entaille en queue d'aronde (*fig.* 183 *bis*). Le câble se promène librement d'une joue à l'autre de la poulie, sur laquelle il est maintenu par deux rebords.

Il semble que la roideur du câble dépende plutôt du diamètre du fil de fer que de celui du câble lui-même : aussi a-t-on adopté comme règle pratique, que le diamètre des poulies doit être 2000 fois le diamètre du fil de fer employé pour la fabrication du câble.

La tension du câble est produite par la partie qui forme librement chaînette au-dessous des poulies (*fig.* 184). Cette portion n'est qu'une fraction du brin inférieur du câble, quand les deux poulies extrêmes ne sont pas au même niveau : on doit tenir compte de cette circonstance dans le calcul de la longueur à donner au câble.

Liaison de deux poulies dont les plans ne coïncident pas.

Quand on veut relier au moyen d'une courroie deux arbres tournants qui ne sont pas dans le même plan, il faut en général, outre les poulies de transmission calées sur chacun des deux arbres, employer deux poulies fixes de renvoi (*fig.* 185).

Soient A et B les poulies calées sur les arbres donnés, C l'intersection des plans de ces poulies supposées sans épaisseur : il faut, pour que la courroie ne soit pas sollicitée à se détacher des deux jantes, qu'un brin rectiligne quelconque soit dans le plan de chacune des deux poulies qu'il réunit. On atteint ce but en installant deux poulies de renvoi D, E, auprès de l'intersection C, de façon que le brin AD soit dans le plan de la poulie A, que celui qui va de D en B soit dans le plan de la poulie B, enfin que D soit dans le plan des deux lignes AD et DB. De même pour la poulie E. De cette manière, chaque poulie est dans le plan des deux brins de courroie qui la touchent, et la transmission fonctionne indifféremment dans les deux sens.

Quand cette dernière condition n'est pas imposée, on peut supprimer les poulies de renvoi, en ayant égard aux considérations suivantes. L'observation prouve que le brin qui arrive sur une poulie doit nécessairement être dans le plan de cette poulie, tandis que le brin qui quitte la poulie peut sans inconvénient sortir de ce plan (*). Partant de là, soient A et B les deux axes donnés (*Pl. XIX, fig.* 185 *bis*), MN la perpendiculaire commune à ces axes; prenons *mp*, *nq*, perpendiculaires à A, B, et respectivement égaux aux rayons des deux poulies, de manière que la ligne *mn*, parallèle à la perpendiculaire commune, soit tangente à la fois aux deux cylindres décrits autour des axes avec les rayons respectifs des poulies; enfin plaçons la courroie comme l'indique la figure : nous aurons une disposition dans laquelle le mouvement ne peut avoir lieu que dans le sens indiqué par les flèches. Dans l'autre sens, la courroie tomberait immédiatement.

(*) C'est pour cela qu'on n'obtiendrait aucun résultat si, contrairement à la règle que nous avons donnée, on faisait agir une fourchette d'embrayage sur le deuxième brin et non sur le premier.

Influence de l'allongement des courroies sur le rapport des vitesses (*).

On comprend facilement que, dans une transmission par courroie, le brin conduisant possède une tension T, supérieure à la tension t de l'autre brin. Or la matière de la courroie est élastique et s'allonge proportionnellement à la tension qu'elle supporte. Soit l la longueur de courroie qui s'enroule dans un temps ϑ sous la tension t sur la poulie conduite : la même quantité, lorsqu'elle se déroule sous la tension T, est représentée par une longueur plus grande L; le rapport de L à l est donné par la relation

$$\frac{L}{l} = \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t},$$

α étant le coefficient d'allongement de la courroie (**).

Or, il faut, pour qu'il n'y ait pas accumulation de la matière de la courroie d'un certain côté, que la même quantité de cette matière passe dans le même temps sur les deux poulies ; donc les longueurs qui se développent simultanément de la poulie motrice et de la poulie conduite sont dans le rapport de L à l : et l'on a, au lieu de la relation admise

$$\omega R = \omega' R',$$

l'équation

$$\frac{\omega R}{\omega' R'} = \frac{L}{l} = \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t},$$

R, ω, étant le rayon et la vitesse angulaire de la poulie motrice, R', ω' les quantités analogues pour la poulie conduite.

Le rapport des vitesses angulaires n'est donc pas tout à fait réciproque du rapport des rayons. En calculant le diamètre des

---

(*) Note de M. Kretz, ingénieur des tabacs (*Annales des Mines*, 6e série, t. I, p. 73).

(**) Si S est la section de la courroie en millimètres carrés, on a, suivant que la courroie est neuve ou qu'elle a déjà servi quelque temps :

$$\alpha = \frac{0^m,21}{S} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{0^m,16}{S}.$$

poulies par la règle ordinaire, on aurait, après plusieurs transmissions de mouvement, une vitesse notablement inférieure à la vitesse calculée. L'expérience a montré qu'il faut, pour tenir compte de la circonstance signalée par M. Kretz, augmenter d'un cinquantième le diamètre des poulies motrices, ou réduire dans la même proportion le diamètre des poulies conduites.

Appendice. — Transmission par l'intermédiaire d'un liquide.

C'est au paragraphe actuel qu'il convient de rattacher les machines dans lesquelles la communication du mouvement s'effectue par l'interposition d'un corps liquide.

Presse hydraulique. — La presse hydraulique, dont l'invention est due à Pascal, et dont les applications prennent un développement de jour en jour plus considérable, se compose de deux corps de pompe cylindriques réunis par un tuyau : un piston se meut dans chacun des deux cylindres. Quand l'un des pistons s'enfonce, il refoule une certaine masse d'eau qui passe dans le deuxième corps de pompe, au moyen du tuyau de communication : par suite, le piston correspondant se soulève. Or, en vertu de l'incompressibilité du liquide, le volume contenu dans le premier cylindre a diminué d'une quantité précisément égale à l'augmentation de volume du second; si donc S et S′ sont les sections des deux cylindres, v et v' les vitesses des deux pistons, on a

$$vS = v'S'.$$

Balancier hydraulique. — Quand les deux corps de pompe ont même diamètre, les vitesses des deux pistons sont les mêmes : l'appareil a simplement pour effet d'obliger ces deux pistons à prendre simultanément des vitesses égales, et généralement de sens contraire. Il porte alors le nom de *balancier hydraulique*.

CHAPITRE III.

COMBINAISONS DES ORGANES A RAPPORT DE VITESSES CONSTANT : ROUES, TAMBOURS ET POULIES.

§ VI. — Trains ou équipages ordinaires de roues dentées et de poulies.

Il arrive rarement qu'on puisse, dans une machine, établir une liaison directe entre le récepteur et l'outil, par le moyen d'un des organes simples dont nous avons exposé la théorie dans le chapitre précédent. Le plus souvent on est obligé de combiner plusieurs engins convenablement choisis, et c'est ainsi seulement qu'on parvient à résoudre les divers problèmes relatifs à la transmission uniforme du mouvement, dans les conditions les plus variées.

Exposons brièvement les principes généraux qui servent de guides aux mécaniciens dans l'étude du projet d'une machine complexe (*).

Équipages de roues dentées. — Les plus petits pignons employés dans l'horlogerie sont des pignons de 6 ailes (il est même préférable de ne pas descendre au-dessous de 8); quant aux roues, on leur donne rarement plus de 120 à 150 dents. Le rapport des vitesses de deux arbres liés par un engrenage simple se trouve donc pratiquement renfermé dans des limites assez étroites (**). Pour obtenir un rapport de vitesses quelconque, il faut procéder de la manière suivante.

Le premier arbre (*Pl. XIX, fig.* 189) porte un pignon *a*, lequel engrène avec la roue A, fixée sur un arbre intermé-

(*) Cette partie du Cours n'est qu'un extrait abrégé du chapitre VII des *Principles of Mechanism*.

(**) On ne gagnerait rien, comme nous l'avons vu, sous le rapport de la vitesse, à interposer entre ces deux arbres une ou plusieurs roues du genre de celles que nous avons appelées parasites, roues dont l'effet est seulement de changer le sens du mouvement transmis.

diaire ; sur ce même arbre intermédiaire se trouve un deuxième pignon b, qui transmet à son tour le mouvement à l'arbre de la roue B : cette roue sera, si l'on veut, la roue extrême du train que nous considérons.

Adoptons l'usage de représenter le nombre des dents d'une roue par la lettre même qui nous sert à désigner cette roue : le rapport de la vitesse de l'arbre intermédiaire à celle du premier arbre sera, en tenant compte du changement de sens,

$$-\frac{a}{A};$$

on aura de même, du dernier arbre à l'arbre intermédiaire, le rapport

$$-\frac{b}{B}.$$

Donc le rapport des vitesses des arbres extrêmes est égal à la fraction

$$\frac{ab}{AB}.$$

S'il y avait un plus grand nombre d'arbres, on arriverait à réduire la vitesse dans une proportion plus considérable, le rapport des vitesses extrêmes étant toujours déterminé de la même manière.

Canons. — Les arbres (a) et (B) sont quelquefois concentriques : c'est le cas qui se présente dans la minuterie des horloges; l'un de ces arbres est creux, et prend le nom de *canon*. Il tourne sur l'autre à frottement doux.

On peut aussi relier deux roues dont les arbres sont concentriques, en n'employant qu'une seule roue d'angle (*fig.* 190); l'arbre intérieur et le canon tournent alors en sens inverse, tandis qu'avec le dispositif de la *fig.* 189 les deux rotations sont de même sens (*).

(*) Il faut remarquer que la roue (α) de la *fig.* 190 est une roue parasite, de sorte que le rapport des vitesses des deux roues a et A dépend uniquement du rapport $\frac{a}{A}$. Rien n'empêche d'ailleurs d'avoir sur l'arbre intermédiaire, au lieu de la roue unique α, une roue B et un pignon b; le rapport des vitesses serait alors $-\frac{ab}{AB}$.

On appelle *raison d'un système de rouages* le quotient ε de la vitesse du dernier arbre par celle du premier; soit

$$\varepsilon = \frac{a.b.c...}{A.B.C...} :$$

c'est le rapport du produit des nombres de dents des pignons, au produit des nombres de dents des roues, quel que soit l'ordre dans lequel ces divers éléments se trouvent disposés. Quand le train comprend une vis sans fin, celle-ci compte pour un pignon à une seule dent (à n dents si la vis est à n filets).

On représente un train de roues dentées sans figures, en indiquant seulement les axes géométriques des rouages, et inscrivant sur ces axes les nombres de dents correspondants : on a soin de placer l'un au-dessous de l'autre les nombres qui se rapportent à deux roues engrenant ensemble.

Le diagramme suivant représente une horloge à secondes :

Roue d'échappement. 30 — 6	Aig. des sec
Roue moyenne..... 45 — 6	
Roue motrice..... 48 — 25 — 6	
25 —	Aig. des min.
72 —	Aig. des h.

Le mouvement est communiqué de la roue motrice à la roue d'échappement, par le moyen de deux pignons de 6 dents, et de deux roues comptant l'une 45, l'autre 48 dents.

La roue d'échappement est réglée à raison d'un tour par minute, et c'est sur l'arbre de cette roue qu'est fixée l'aiguille des secondes. Il résulte du tableau que la roue motrice fait un tour par heure, car le rapport de sa vitesse à celle de la roue d'échappement est donné par la fraction

$$\varepsilon = \frac{6 \times 6}{45 \times 48} = \frac{1}{60}.$$

Enfin cette même roue motrice transmet encore le mouvement, d'une part à l'aiguille des minutes au moyen de deux

roues de 25 dents, d'autre part à l'aiguille des heures au moyen d'un pignon de 6 dents et d'une roue de 72.

Il ne suffit pas d'avoir la valeur absolue du rapport des rotations des arbres extrêmes d'un train : il faut encore connaître la relation qui existe entre les sens des mouvements de ces arbres (*). La règle est extrêmement simple, toutes les fois qu'on a seulement affaire à des engrenages cylindriques extérieurs ou intérieurs ; mais chaque paire de roues coniques, et chaque vis sans fin, nécessite un examen spécial. Dans tous les cas, avec un peu d'attention, on trouvera sans peine les lois de la transmission du mouvement de rotation, dans un équipage de roues dont tous les axes sont fixes.

Notions sur le calcul des rouages. — Quand on se propose au contraire d'établir un train, propre à réaliser un rapport de vitesses donné, le problème qui consiste à déterminer le nombre des arbres intermédiaires et les proportions des diverses roues présente dans la plupart des cas de très-grandes difficultés, et ne peut être résolu que par une série de tâtonnements souvent longs et pénibles.

Voici quelques exemples de calculs de ce genre.

Horloge à secondes. — Pour relier, dans une horloge, l'aiguille des secondes à celle des minutes, il est indispensable de recourir à un arbre intermédiaire, afin d'éviter à la fois l'emploi d'une roue à dents trop nombreuses, et l'engrenage intérieur qui serait nécessaire si l'on voulait, conformément à l'usage, faire tourner les deux aiguilles dans le même sens.

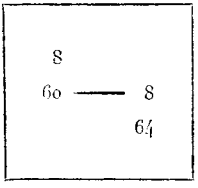
Nous avons indiqué tout à l'heure le train

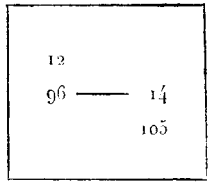
$$\frac{6}{45} \cdot \frac{6}{48}$$

qui fournit une première solution du problème.

(*) Quand ces deux arbres sont parallèles, il est commode d'affecter z du signe + ou du signe −, selon que les deux rotations sont de même sens ou de sens contraires.

Mais, les pignons de 6 ailes étant assez défectueux, il est préférable de ne pas descendre au-dessous de 8 ailes, et d'employer, par exemple, l'un des deux trains :





dont la raison est aussi égale à $+\frac{1}{60}$.

Pour établir un système de rouages, il est indispensable d'avoir le rapport ε sous la forme d'une fraction rationnelle

$$\frac{a.b.c\ldots}{A.B.C\ldots},$$

dont les deux termes soient décomposés en facteurs compris entre les limites que nous avons indiquées; et par conséquent, si l'un des termes de ε possède un facteur premier considérable, on est obligé de se contenter d'une approximation.

Horloge lunaire. — Considérons deux aiguilles, l'une marquant les heures sur un cadran ordinaire, l'autre faisant un tour complet dans la durée d'une lunaison : soit $29^j\,12^h\,44^m$. On a

$$\varepsilon = \frac{720}{42524} = \frac{180}{10631},$$

et 10631 est un nombre premier.

Le rapport

$$\varepsilon' = \frac{720}{42524+1} = \frac{8\times 8}{54\times 70}$$

correspond à un train facile à exécuter, lequel est en erreur d'une minute par lunaison.

Méthode des fractions continues. — Quand les deux termes du rapport ε sont de très-grands nombres, on développe ce rapport en fraction continue; et on cherche, parmi les réduites successives, une fraction fournissant à la fois une décomposi-

tion convenable et une approximation suffisante. Cette méthode, indiquée pour la première fois par Huygens, est basée sur la propriété qu'ont les réduites d'exprimer une approximation donnée avec les plus petits entiers possibles.

Application. — Supposons qu'on veuille construire une horloge donnant à la fois le temps sidéral et le temps moyen.

L'un des procédés pour arriver à ce résultat consiste à placer derrière l'aiguille des heures un cadran mobile plus petit que le cadran ordinaire, et concentrique avec lui. L'aiguille fait sa révolution en 24 heures solaires, et marque le temps moyen sur le cadran fixe; elle indiquera en même temps l'heure sidérale sur le cadran mobile, si l'on s'arrange de manière à donner à celui-ci un mouvement rétrograde de $3^m 56^s,555 = 236^s,555$ par jour moyen.

Comme le cadran contient 86400 secondes, le rapport de la vitesse de l'aiguille à celle du cadran est

$$\frac{86400000}{236555} = 60 \times \frac{288000}{47311}.$$

La fraction $\frac{288000}{47311}$, réduite en fraction continue, donne les résultats suivants :

Quotients...	6,	11,	2,	3,	1,	152,	...
Réduites....	$\frac{6}{1}$,	$\frac{67}{11}$,	$\frac{140}{23}$,	$\frac{487}{80}$,	$\frac{627}{103}$,	...	...

La réduite

$$\frac{627}{103} = \frac{3 \times 11 \times 19}{103} = \frac{66 \times 76}{103 \times 8}$$

fournit une grande approximation.

L'important n'est pas précisément d'avoir de petits nombres pour les deux termes de la fraction qui exprime la raison d'un rouage à établir; il faut surtout que ces nombres soient décomposables en facteurs. Aussi, quand on ne trouve pas de fraction satisfaisante parmi les réduites, faut-il avoir recours à des fractions moins simples, parmi lesquelles il s'en rencontrera souvent de plus avantageuses pour l'objet qui nous occupe.

Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{p_1}{q_1}$, deux réduites consécutives (lesquelles comprennent, comme on sait, la valeur exacte de la fraction continue); la différence de ces deux réduites s'exprime par une fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le produit des dénominateurs q, q_1. C'est uniquement à cette circonstance que les réduites des fractions continues doivent leur propriété arithmétique fondamentale; et du moment que deux fractions quelconques $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, satisfont à la relation

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \pm \frac{1}{bd}, \tag{1}$$

toute fraction comprise entre celles-ci aura nécessairement des termes plus considérables. La réciproque de cette proposition est vraie.

Cela posé, quel que soit le procédé par lequel on soit arrivé à la découverte des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, il est facile de reconnaître que la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ jouit, par rapport à chacune de celles-ci, de la propriété qu'exprime l'équation (1) : donc elle est la plus simple des fractions intermédiaires, capables de représenter le rapport donné. M. Brocot (*) a fondé sur cette remarque une méthode élémentaire pour le calcul des rouages.

Cette méthode, qui n'exige pas la réduction préalable de la raison ε en fraction continue, est basée sur l'emploi d'une table dans laquelle figurent toutes les fractions dont les deux termes sont inférieurs à 100, réduites en décimales et classées par ordre de grandeurs. Un rapport quelconque tombe nécessairement entre deux fractions contenues dans la Table, et ces deux fractions sont évidemment les fractions ordinaires les plus simples, entre lesquelles le rapport donne se trouve compris. En ajoutant ces premières fractions terme à terme, on aura une expression moins simple, mais plus approchée, du

(*) *Calcul des rouages par approximation.* Nouvelle méthode par Achille Brocot, horloger. Paris et Londres, 1862.

même rapport; et on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu une fraction satisfaisante.

Enfin, quand l'exactitude rigoureuse est indispensable, on est obligé de renoncer aux équipages de roues tournant sur des axes fixes; il faut alors introduire dans le train des roues à mouvement épicycloïdal plan ou sphérique, combinaisons auxquelles nous arrivons dans un instant.

Équipages de poulies.

Quand on ne peut pas transmettre directement par une courroie sans fin le mouvement pris sur l'arbre de couche à l'arbre d'un outil, on a recours à un ou plusieurs arbres intermédiaires. Soient r et R les rayons des poulies calées sur les deux premiers arbres, on a, pour le rapport des vitesses angulaires de ces poulies, la quantité

$$\frac{r}{R},$$

affectée du signe + ou du signe —, suivant que la courroie est droite ou croisée.

Le deuxième arbre porte une seconde poulie (r_1), reliée par une nouvelle courroie à une poulie (R_1) calée sur le troisième arbre, et ainsi de suite. La raison du train est donnée par une formule

$$\varepsilon = \frac{r.r_1.r_2\ldots}{R.R_1.R_2\ldots},$$

tout à fait analogue à la formule des roues dentées. Seulement, les rayons des poulies pouvant être dans des rapports quelconques, on n'aura jamais de difficultés arithmétiques du genre de celles que nous avons rencontrées dans le calcul des rouages. Les poulies de renvoi, semblables aux roues parasites, n'ont aucune influence sur les rapports de vitesses des arbres entre lesquels elles sont installées.

Des moufles et palans.

Les *moufles* ou *palans*, appareils fort usités, principalement dans la marine, se composent d'un certain nombre de poulies

dont les axes sont portés par deux chapes, l'une fixe et l'autre mobile. Ces chapes affectent diverses dispositions (*fig.* 188); mais les propriétés essentielles de l'organe sont les mêmes dans tous les cas.

Le fardeau qu'il s'agit de soulever est attaché à la moufle mobile : un cordon, fixé en un point de l'une des deux moufles, circule de l'une à l'autre en passant alternativement sur une poulie fixe et sur une poulie mobile, jusqu'à ce que l'extrémité libre se détache de la dernière poulie fixe pour aboutir, sous le nom de *garant*, dans la main du manœuvre qui cherche à soulever le poids.

Pour avoir le rapport des vitesses, il suffit de compter combien il y a de cordons réunissant deux poulies. En effet, quand la moufle mobile s'est élevée d'une certaine quantité, chacun des cordons qui la supportent s'est raccourci d'autant, et le garant s'est allongé de la somme de tous ces raccourcissements. Si donc on désigne par V la vitesse d'un point du garant, par v celle de la chape mobile, on a la relation

$$V = nv, \tag{1}$$

n étant le nombre des cordons qui vont d'une chape à l'autre :

Dans un palan, le rapport de la vitesse du point auquel est appliquée la résistance, à la vitesse du point où s'exerce l'effort du moteur, est égal à l'unité divisée par le nombre des cordons.

Équipages de moufles. — Considérons deux palans, donnant lieu chacun à une équation de la forme (1),

$$V = nv,$$
$$V' = n'v';$$

on pourra, en combinant convenablement ces deux palans, obtenir les rapports nn' ou $\frac{n}{n'}$, selon qu'on fera $v = V'$, ou $v = v'$, c'est-à-dire selon qu'on attachera la deuxième chape mobile au premier garant ou à la première chape mobile. On voit que l'une de ces dispositions donne naissance à des rapports fractionnaires.

§ VII. — Mouvements différentiels.

Les équipages ordinaires de roues dentées, vis et poulies, n'offrent que des ressources insuffisantes, quand on veut que le rapport des vitesses ait une valeur extrêmement faible. Il faut alors avoir recours à des artifices particuliers, dont le principe est d'avoir deux engins en quelque sorte opposés, dont l'un défasse à peu de chose près ce que l'autre a fait; le résultat définitif est la différence des effets dus à chacun des deux organes agissant séparément, et il est facile de rendre cette différence aussi petite que l'on voudra.

Les combinaisons de ce genre sont connues sous le nom de *mouvements différentiels :* en voici quelques exemples.

Treuil chinois (*fig.* 191). — Le corps du treuil se compose de deux cylindres de même axe, et de rayons R, r, placés à la suite l'un de l'autre et liés d'une manière invariable. Le poids à élever est accroché à la chape d'une poulie mobile, et les deux cordons qui supportent cette poulie mobile viennent s'enrouler en sens inverse sur les deux parties du treuil.

Si l'on tourne la manivelle de telle sorte que la corde s'enroule sur le plus gros des deux arbres et se déroule du plus petit, chaque révolution raccourcit l'un des brins rectilignes d'une quantité égale à $2\pi R$, et allonge l'autre de $2\pi r$. On gagne ainsi $2\pi(R - r)$, ce qui correspond pour le fardeau à une élévation représentée par

$$2\pi \frac{R - r}{2},$$

absolument comme si l'on avait un treuil ordinaire, de rayon égal à la demi-différence des rayons du treuil chinois.

Seulement, quand on emploie le dernier système, on peut aisément rendre $R - r$ aussi petit qu'on le veut, tandis qu'on ne saurait diminuer par trop le rayon d'un treuil, de crainte de l'affaiblir outre mesure. Malgré cet avantage, le treuil chinois n'est jamais employé, à cause de la quantité de corde qu'il exige pour produire une élévation donnée.

Palan différentiel. — Cet inconvénient est évité dans le

palan différentiel de Wilson (*Pl. XIX, fig.* 188 *bis*). Imaginons une sorte de treuil chinois, dans lequel les deux cylindres sont remplacés par deux poulies légèrement inégales, réunies dans une même chape qui figure la moufle fixe d'un palan.

Les deux bouts de la corde (qu'il n'est plus possible d'arrêter à la manière ordinaire) viennent se réunir pour former une deuxième boucle, qui pend librement au-dessous du crochet de la poulie mobile, dont la disposition n'a pas changé. Le frottement suffit pour empêcher le glissement sur les poulies.

Vis différentielle de Prony. — Considérons un cylindre servant de noyau à deux vis de pas différents. Les écrous de ces deux vis étant maintenus par des guides dans une direction invariable, leur écartement varie évidemment, pour chaque tour, d'une quantité égale à la différence ou à la somme des deux pas, selon que les deux vis sont de même sens ou de sens contraire.

Dans la disposition imaginée par M. de Prony (*fig.* 192), l'un des écrous est formé de deux pièces fixes E, E : l'autre, E', est animé d'un mouvement aussi lent qu'on le veut.

Les deux vis sont inverses dans le tendeur d'attelage des wagons : elles équivalent géométriquement à une vis unique de pas double, tout en offrant plus de sécurité au point de vue des ébranlements qui pourraient desserrer un pas trop allongé.

Machine à aléser (*fig.* 193). — Le cylindre qu'on se propose d'aléser est fixe, et l'outil doit en parcourir lentement toute la surface intérieure. Il reçoit à cet effet un mouvement de rotation, qu'il s'agit de combiner avec un déplacement longitudinal très-lent. Or l'arbre de cet outil présente une partie filetée K, laquelle pénètre dans un écrou E; et, si cet écrou était fixe, la rotation de l'outil ferait avancer celui-ci pour chaque tour d'une quantité égale au pas de la vis.

Au lieu de cela, l'écrou tourne lui-même dans le même sens que la vis, mais un peu moins vite. De cette façon, pour une rotation absolue de la vis égale à un tour, la rotation relative n'est qu'une fraction de tour, déterminée par la différence des vitesses angulaires de la vis et de l'écrou : à cette différence correspond une avance du burin, représentée par la même fraction du pas.

Voici le tableau du rouage différentiel qui transmet le mouvement de la vis à l'écrou :

Vis ——	36	36 ═══	Écrou.
	37 ——	36	

L'arbre auxiliaire est carré : ce qui permet à la roue A′ de tourner solidairement avec lui, tout en glissant longitudinalement à mesure que la roue A s'avance par l'effet du mouvement de progression de la vis.

C'est par un artifice analogue que l'arbre de l'outil reçoit son mouvement de rotation de l'engrenage fixe $\boxed{\frac{m}{M}}$.

Compteur de Wollaston. — Il faut encore citer, parmi les mécanismes à mouvements différentiels, le compteur de Wollaston, que nous avons décrit p. 220. Enfin on rattache assez souvent à cette catégorie les rouages à mouvement épicycloïdal, auxquels nous consacrons le paragraphe suivant.

§ VIII. — Théorie des trains épicycloïdaux.

On appelle *train épicycloïdal* un système de rouages dont les axes sont portés par un châssis, mobile autour d'un centre fixe (*). Les deux exemples suivants sont choisis parmi les plus simples.

Premier exemple (*fig.* 194). — Le mécanisme complet se compose de deux roues concentriques, et d'une troisième roue dont l'axe A est porté par le levier OL, mobile autour du point O. La roue A, qui constitue le train épicycloïdal proprement dit, engrène extérieurement avec la roue C, et intérieurement avec la grande roue B.

Si l'une des roues B et C est immobile, et qu'on fasse tour-

(*) Graham (1715) est le premier qui ait cité quelques dispositifs de ce genre, sans donner d'ailleurs aucune indication générale sur leur théorie et leurs principales propriétés. Willis, p. 361.

ner le levier OL, la roue A prend un mouvement épicycloïdal sur la roue fixe, en entraînant avec elle la roue mobile. Les colliers à roulettes des arbres de grues (p. 182) représentent, à la denture près, un système de ce genre : la roue extérieure est fixe, l'arbre tient la place de la roue centrale C, et son mouvement détermine celui des galets ainsi que la rotation de la couronne ou châssis qui porte leurs arbres (ce châssis se trouve représenté dans la figure actuelle par le levier OL).

Si la roue B n'était pas fixe, le mouvement du châssis dépendrait à la fois des rotations des deux roues extrêmes, conformément aux lois générales que nous allons exposer tout à l'heure.

Deuxième exemple (*fig.* 195). — Deux roues coniques égales, A, B, tournant autour de deux arbres concentriques, engrènent avec un pignon C, monté sur le levier mobile OM. Le mouvement épicycloïdal sphérique du pignon jouit des mêmes propriétés que le mouvement épicycloïdal plan précédemment considéré; et la combinaison très-simple des trois roues A, B, C, est susceptible, comme nous le verrons, d'un grand nombre d'applications intéressantes.

Nous avons déjà rencontré cette disposition dans les supports des plaques tournantes. La roue B étant fixe, si l'on imprime un mouvement de rotation à la roue A (*), on oblige le pignon C à tourner autour de l'essieu OM, qui se déplace lui-même avec une vitesse égale à la moitié de la vitesse de la roue.

Comme dans notre premier exemple, on pourrait n'avoir aucune roue fixe.

Quand un train épicycloïdal se compose de plusieurs roues, les rapports des vitesses de celles-ci sont les mêmes que si leurs axes étaient fixes. Les rouages intermédiaires ont pour unique objet de relier les roues situées aux deux extrémités du système mobile (**); et nous allons montrer que, quelle que soit la disposition du train, il existe une relation linéaire

(*) Pour les grandes plaques, on agit de préférence sur l'un des galets C, au moyen d'une manivelle, folle sur l'arbre M.

(**) L'une de ces roues au moins doit être centrée sur le point fixe du châssis (nous verrons tout à l'heure pourquoi).

entre les rotations absolues de ces roues extrêmes, et la rotation propre du châssis.

Théorie générale des trains épicycloïdaux. — Soit OA (*fig.* 196) le châssis tournant, dont la forme est absolument indifférente. L'une des roues extrêmes a son centre au point O, sur l'axe de rotation du châssis. L'autre peut être également concentrique au châssis, comme dans les deux exemples précédents : en général, elle aura son axe fixé en un point mobile A. Désignons par m la vitesse angulaire absolue de la roue O autour de son axe, par n la vitesse de la roue A, par rapport à son axe et à deux autres axes coordonnés Ax, Ay, situés dans son plan et conservant des directions invariables (*).

Pour nous rendre compte de l'action des rouages mobiles, interposés entre notre première et notre dernière roue, supposons le châssis fixe; et calculons par les règles ordinaires la *raison* ε du train lié à ce châssis (c'est-à-dire le quotient, pris avec un signe convenable, de la vitesse relative de la dernière roue par la vitesse relative de la première). Pour fixer les idées, nous supposerons les rotations positives; mais notre équation subsistera, par suite de la généralité propre aux formules algébriques, quels que soient les signes des quantités qui y figurent.

Soit a la vitesse angulaire du châssis OA autour du point O : la rotation de la roue O par rapport à ce châssis est $m - a$, celle de la roue A est $n - a$. On a donc, d'après la définition même de ε,

$$\varepsilon = \frac{n - a}{m - a}. \qquad (1)$$

Cette formule renferme toute la théorie des trains épicycloï-

(*) Je crois devoir appeler l'attention sur la manière dont la signification de n est déterminée, parce qu'on oublie quelquefois la nécessité de rapporter toute rotation autour d'un axe mobile à un système bien défini d'axes coordonnés, par rapport auxquels on compte les angles de rotation. D'ailleurs, nous aurons ici à considérer également la rotation de la roue A par rapport à un système d'axes mobiles tout différent de xAy, système qui se composera de l'axe de la roue, de la droite OA, et d'une perpendiculaire à cette droite.

daux : c'est à R. Willis qu'on doit d'avoir ramené cette théorie à un tel degré de simplicité.

Discussion de la formule générale. — Considérons d'abord les cas particuliers où l'une des roues extrêmes est fixe.

1° La roue O est fixe : en faisant dans l'équation générale (1)

$$m = 0,$$

il vien

$$\varepsilon = -\frac{n-a}{a},$$

d'où

$$(2) \qquad a = \frac{n}{1-\varepsilon}, \quad n = a(1-\varepsilon).$$

Ces relations font connaître la rotation du châssis, quand celle de la dernière roue est donnée, ou réciproquement (*).

2° La roue A est fixe, ou du moins n'a pas de rotation par rapport aux axes $x\mathrm{A}y$:

$$n = 0, \quad \varepsilon = \frac{-a}{m-a},$$

d'où

$$(3) \qquad a = \frac{m\varepsilon}{\varepsilon - 1}, \quad m = a\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

3° *Cas général.* — Les deux roues extrêmes sont mobiles :

$$\varepsilon = \frac{n-a}{m-a}, \quad a = \frac{m\varepsilon - n}{\varepsilon - 1},$$

d'où enfin

$$(4) \qquad \begin{cases} a = \dfrac{m\varepsilon}{\varepsilon - 1} + \dfrac{n}{1-\varepsilon}; \\ m = a + \dfrac{n-a}{\varepsilon}, \\ n = a + (m-a)\varepsilon. \end{cases}$$

La valeur générale de a est la somme des valeurs qui correspondent aux cas où chacune des rotations des roues extrêmes

(*) La raison ε est dans tous les cas une donnée de la question : elle dépend uniquement de la composition géométrique du train mobile.

existe seule : l'effet du train est donc de composer, pour ainsi dire, en une seule, ces deux rotations indépendantes.

Différentes manières de transmettre au train l'action d'un moteur. — En général, dans un système de rouages, tous les mouvements sont pris sur un arbre moteur, dont nous représenterons la vitesse angulaire par p. Si l'on donne le rapport à la rotation p de deux des quantités m, n, a, le troisième rapport est déterminé par les relations (4).

Le mouvement peut d'ailleurs être communiqué au train de deux manières différentes :

1° On peut transmettre le mouvement de l'arbre moteur aux deux roues extrêmes (ce qui comprend le cas où l'une de ces roues est immobile). On connaît alors les rapports de m et n à la rotation motrice p, et on calcule a par la formule (4). Pour cela il est indispensable que les roues extrêmes aient leurs axes fixes, c'est-à-dire qu'elles soient concentriques avec le châssis, afin qu'on puisse leur donner le mouvement par les procédés ordinaires.

2° On peut, au contraire, communiquer le mouvement au châssis et à l'une des roues, laquelle est nécessairement concentrique au châssis (*).

Dans le premier cas, si l'on a

$$m = \mu p, \quad n = \nu p,$$

les formules (4) donnent

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon - 1} = \frac{\mu\varepsilon}{\varepsilon - 1} + \frac{\nu}{1 - \varepsilon}. \tag{5}$$

Dans le second cas, si

$$m = \mu p, \quad a = \alpha p,$$

on trouve, par les mêmes formules (4) :

$$\frac{n}{p} = \alpha(1 - \varepsilon) + \mu\varepsilon = \alpha + \varepsilon(\mu - \alpha). \tag{6}$$

(*) On voit que, dans toutes les dispositions, il y a toujours au moins une des roues extrêmes, dont l'axe coïncide avec l'axe du train mobile.

Ces équations ne présentent aucune difficulté pour l'application. Tout se réduit, dans chaque cas particulier, à calculer ε. Or, pour ce calcul, le châssis doit être supposé en repos, ce qui transforme le train épicycloïdal en un système pur et simple de roues dentées dont les axes sont fixes (*) : la seule précaution à prendre, c'est de bien faire attention au signe de la raison ε, et au sens dans lequel cette quantité doit être prise.

Usages des trains épicycloïdaux.

Les trains épicycloïdaux s'emploient pour quatre objets principaux :

I. Lorsque le mouvement épicycloïdal est une partie de l'effet à produire, comme dans la *plume géométrique de Suardi* pour le tracé des épicycloïdes, la *mouche de Watt*, certains *planétaires*, les corderies des mines et de la marine, etc.

II. Pour établir entre deux axes fixes un rapport de vitesses déterminé avec une grande précision, lorsque ce rapport est composé de termes où figurent des nombres premiers considérables, et qu'une approximation n'est pas admissible.

III. Pour produire un mouvement différentiel.

IV. Enfin, pour concentrer sur une même roue l'action de plusieurs moteurs indépendants.

Donnons des exemples d'applications qui se rapportent à chacune de ces quatre catégories.

I. *Mouche ou roue planétaire de Watt* (*fig.* 197). — Dans cet appareil, imaginé par Watt pour transmettre le mouvement du balancier de sa machine à l'arbre du volant, le train épicycloïdal se compose de deux roues, A, B, dont les centres sont maintenus à une distance invariable l'un de l'autre, par le moyen de la tige AB.

La roue A est calée sur l'arbre du volant, et la tige AB est folle sur le même arbre (**). Quant à la roue B, elle est soli-

(*) Il est d'ailleurs évident que la théorie s'applique sans modifications aux cas où le train comporterait d'autres organes que des roues dentées.

(**) En supposant la tige calée sur l'arbre A, on pourrait supprimer les deux roues dentées, et l'on obtiendrait avec plus de simplicité la transmission voulue. C'est ce que Watt lui-même s'est empressé de faire dès que le système, alors breveté, de *bielle* et *manivelle*, est tombé dans le domaine public.

daire de la bielle BC; et, comme celle-ci reste sensiblement parallèle à elle-même, on peut admettre que le mouvement de la roue B est un pur mouvement de translation.

Si donc on considère cette roue B comme la dernière roue du train porté par le rayon AB, on a

$$n = 0,$$

par suite

$$\frac{m}{a} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or la raison du train mobile est égale à $-\frac{A}{B}$: donc

$$\frac{m}{a} = 1 + \frac{B}{A}.$$

En faisant, avec Watt, les deux roues égales, on a

$$m = 2a :$$

c'est-à-dire que le volant tournera deux fois plus vite que la manivelle. On obtiendrait un rapport de vitesses quelconque, en multipliant les roues intermédiaires.

Paradoxe de Fergusson. — On connaît sous ce nom un petit mécanisme assez ingénieux, destiné à mettre en lumière les propriétés des rouages épicycloïdaux.

Le châssis du train mobile se réduit à la manivelle horizontale OM (*fig.* 198), qui tourne librement autour de l'essieu fixe OI. La première roue A est invariablement liée à cet essieu fixe; elle engrène avec une roue parasite B, à la suite de laquelle se trouvent trois roues indépendantes C, D, E, dont les axes géométriques coïncident.

La roue A ayant par exemple 20 dents, les nombres respectifs des roues C, D, E (qui doivent être considérées chacune comme la dernière roue d'un train particulier) sont

$$C = 19, \quad D = 20, \quad E = 21.$$

Quant au nombre de dents de B, il est indifférent.

Cela posé, comme la première roue, commune à nos trois trains, est fixe, la formule à employer est

$$n = a(1 - \varepsilon);$$

et l'on doit faire dans cette formule, suivant que l'on considère les roues C, D ou E :

$$\varepsilon = \frac{20}{19}, \quad \varepsilon = 1, \quad \varepsilon = \frac{20}{21}.$$

La substitution de la première valeur de ε donne $n < 0$, la deuxième $n = 0$, et la troisième $n > 0$. Il suit de là que, si l'on fait tourner à la main le levier OM, les roues C et E prendront des mouvements de rotation de sens contraires, tandis que la roue D se transportera parallèlement à elle-même.

Appareil automatique de Fulton et Cutting pour la fabrication des aussières. — Cette machine, employée depuis 1799 dans les corderies de la marine et des mines, pour le commettage des torons (*), se compose d'une grande roue dentée fixe, et de quatre ou cinq pignons égaux, dont les axes sont portés par un fort anneau ou volant concentrique à la roue (*fig.* 199). Aux pignons P, P, ..., correspondent un pareil nombre de châssis à bobines horizontales, chargées chacune d'un toron, qui participent au mouvement épicycloïdal déterminé par la rotation de l'anneau autour de l'axe de la roue fixe.

Ces divers torons, en sortant de leurs bobines, s'élèvent verticalement jusqu'au niveau d'autant de poulies de renvoi, liées invariablement à l'arbre moteur; puis ils viennent converger au sommet de cet arbre, et sont reçus dans un entonnoir où, en se resserrant les uns contre les autres, ils reçoivent la torsion nécessaire, par l'effet de la rotation relative de leurs châssis. En même temps, la rotation de l'anneau produit l'enroulement des torons en hélice, lequel s'effectue souvent autour d'une mèche centrale ou âme.

(*) Pour constituer un câble, on forme, en tordant des fils de caret, une première corde nommée *toron*, laquelle est l'élément de tous les câbles. Plusieurs torons tordus ensemble forment une *aussière*. Enfin le commettage de plusieurs aussières produit ce que les marins appellent un *grelin*. Pour l'usage des mines, on coud ensemble plusieurs aussières placées l'une à côté de l'autre, de façon à obtenir un câble plat.

11. Quand on veut établir entre deux arbres un rapport de vitesses exprimé par une fraction $\frac{P}{Q}$, dont l'un des termes au moins renferme des nombres premiers considérables, et qu'une approximation n'est pas admissible, les équipages ordinaires de roues tournant sur des axes fixes deviennent insuffisants; et on est obligé d'introduire dans le train une ou plusieurs roues à mouvement épicycloïdal.

Supposons d'abord que le dénominateur de la raison donnée soit le produit de facteurs convenables, et qu'on ait, par exemple,

$$Q = fgh.$$

Posons

$$\frac{P}{f.g.h} = \frac{x}{gh} + \frac{y}{fh} = \frac{fx}{fgh} + \frac{gy}{fgh},$$

en introduisant deux indéterminées x et y.

On n'a entre ces deux indéterminées qu'une relation unique

$$fx + gy = P,$$

laquelle admet, comme on sait, une infinité de solutions en nombres entiers (positifs ou négatifs), sous la condition toujours facile à remplir que les coefficients f et g n'aient pas de facteurs communs, P étant un nombre premier.

Une fois qu'on a trouvé des valeurs convenables pour x et pour y, il est facile d'identifier l'équation

$$\frac{P}{Q} = \frac{x}{gh} + \frac{y}{fh}$$

avec l'équation générale des trains épicycloïdaux,

$$\frac{a}{p} = \mu \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} + \nu \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

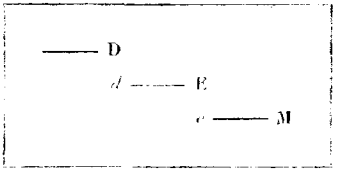
dans laquelle on peut disposer des quantités μ, ν, ε.

Pour réaliser cette conception, nous remarquerons que, le train proprement dit étant ici purement accessoire, la composition de ce train importe fort peu. Il convient de le réduire à deux roues d'angle, indépendantes et égales, reliées par

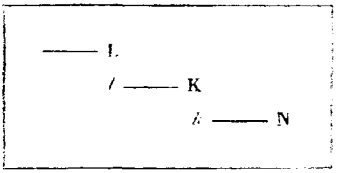
une troisième roue d'angle à mouvement épicycloïdal sphérique (*fig.* 195). Cette combinaison donne

$$\varepsilon = -1, \quad \frac{a}{p} = \frac{1}{2}(\mu + \nu).$$

Cela posé, soit O (*fig.* 200) l'arbre moteur, A un arbre faisant corps avec l'essieu de la roue épicycloïdale, arbre dont la vitesse angulaire est a; enfin soient M et N les deux roues d'angle, fixées à des canons concentriques à l'arbre A. La figure montre que l'arbre moteur O transmet le mouvement : d'une part à la roue M au moyen du train



d'autre part à la roue N au moyen du train



On a donc

$$\mu = \frac{\mathrm{DE}}{de}, \quad \nu = \frac{\mathrm{LK}}{lk};$$

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{DE}}{de} + \frac{\mathrm{LK}}{lk}\right).$$

Telle est la formule qui donne le rapport des vitesses des arbres A et O (*).

(*) *Application numérique.* — Proposons-nous de calculer un train pour relier l'aiguille des heures d'une horloge ordinaire, avec une aiguille faisant un tour de cadran dans une lunaison.

Une lunaison moyenne ..... $29^{j}\,12^{h}\,44^{m}\,3^{s} = 2551\,44^{s}$.

12 heures comprennent ..... 43200^{s}.

Quand les deux termes de la fraction $\frac{P}{Q}$ ne sont ni l'un ni l'autre décomposables en facteurs, on prend un dénominateur arbitraire fgh, et on pose

$$\frac{P}{Q} = \frac{\left(\frac{P}{f.g.h}\right)}{\left(\frac{Q}{f.g.h}\right)}.$$

Puis, considérant séparément les fractions

$$\frac{P}{fgh}, \quad \frac{Q}{fgh},$$

on calcule par la méthode précédente deux trains dont les raisons respectives soient :

$$\frac{a}{p} = \frac{P}{fgh}, \quad \frac{a'}{p} = \frac{Q}{fgh}.$$

En installant ces deux trains à droite et à gauche de l'arbre O, dont nous représentons toujours la vitesse par p, on communiquera à l'axe A la vitesse a, à l'axe A′ la vitesse a'; et on aura, pour le rapport des vitesses des deux derniers arbres,

$$\frac{a}{a'} = \frac{P}{Q}.$$

Horloge lunaire de Pecqueur (*fig.* 201). — Voici une autre disposition d'horloge lunaire, fondée toujours sur les mêmes principes.

L'arbre moteur O, dont la vitesse angulaire est p, donne le mouvement à la roue folle L, qui joue le rôle de châssis mo-

---

Le rapport de ces deux nombres est

$$\frac{2551443}{43200} = \frac{850481}{14400},$$

et 850481 est un nombre premier.

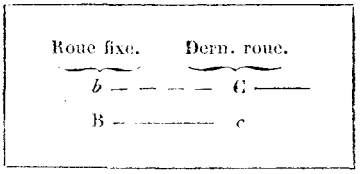
Les méthodes de l'analyse indéterminée fournissent la décomposition

$$\frac{850481}{14400} = \frac{40 \times 50}{6 \times 6} + \frac{71 \times 79}{50 \times 36},$$

d'où

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}\left(\frac{80 \times 50}{6 \times 6} + \frac{71 \times 79}{25 \times 36}\right).$$

bile. Quant au train épicycloïdal, il comprend les quatre roues : b, B, c, C. La roue b est fixe, les autres sont disposées conformément au diagramme suivant :



D'après la composition de ce train, en considérant la roue fixe comme la première, on a

$$\varepsilon = \frac{bc}{BC}.$$

D'autre part, la raison de l'engrenage qui produit le mouvement d'entraînement est

$$\alpha = -\frac{l}{L}.$$

On conclut de ces valeurs, ainsi que de la condition $m = 0$:

$$\frac{n}{p} = \alpha(1-\varepsilon) = \frac{l}{L}\,\frac{cb - CB}{CB}.$$

Voici les nombres qui se rapportent à l'horloge de Pecqueur :

$$l = 31, \quad b = 62, \quad c = 33,$$
$$L = 54, \quad B = 85, \quad C = 41 :$$

$$\frac{n}{p} = -\frac{44609}{188190}.$$

La fraction $\frac{44609}{188190}$ représente à peu de chose près le rapport de la semaine au mois lunaire de $29^j,530588$.

III. Les trains épicycloïdaux se prêtent aisément, avec un faible nombre de roues, à la réalisation de rapports très-petits : il suffit de faire en sorte que les deux termes du second membre de l'équation (5) (p. 254) aient des signes contraires,

en même temps que des valeurs numériques peu différentes. On construit ainsi des compteurs d'une grande simplicité.

Imaginons un train formé d'une roue fixe A (*fig.* 202), d'une roue C de même axe et de même diamètre, enfin d'un long pignon parasite B, dont l'axe est porté par la manivelle OL. La roue A compte une dent de moins que la roue C, et l'on a

$$\varepsilon = \frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C} = \frac{C-1}{C} = 1 - \frac{1}{C},$$

d'où, comme $m = 0$:

$$\frac{u}{a} = 1 - \varepsilon = \frac{1}{C}.$$

Si l'on prend $C = 100$, le rapport des vitesses est de $\frac{1}{100}$: on obtiendrait une réduction plus considérable en introduisant dans le train quelques rouages intermédiaires.

Mais un mécanisme qui présente dans ce genre des ressources pour ainsi dire illimitées, c'est celui que représente la *fig.* 203.

Le train proprement dit comprend quatre roues d'angle, savoir : deux roues animées d'un mouvement épicycloïdal sphérique autour du centre O, et deux roues extrêmes tournant sur des canons concentriques. La composition de ce train est la suivante :

Dernière roue..	B
Axe mobile....	b —— A
Première roue.....	a

On en conclut

$$\varepsilon = -\frac{ab}{AB}.$$

L'arbre moteur PQ donne le mouvement à l'arbre de la première roue, par l'engrenage $\left[\frac{C}{C}\right]$, et à l'arbre de la dernière

par l'engrenage placé symétriquement $\boxed{\frac{d}{D}}$: on a

$$\mu = \frac{c}{C}, \quad \nu = -\frac{d}{D},$$

d'où, en appliquant la formule (5) (p. 254) :

$$\frac{a}{p} = \frac{abcD - ABCd}{(ab + AB)CD}.$$

La combinaison de ces huit roues permet de réaliser presque tous les rapports de vitesses imaginables. En faisant :

$$a = 83, \quad b = 83, \quad c = 83, \quad d = 82,$$
$$A = 84, \quad B = 65, \quad C = 106, \quad D = 83,$$

on trouve

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{108.646.502}.$$

IV. Enfin rien n'empêche de supposer les moteurs qui donnent le mouvement à la première et à la dernière roue d'un train, absolument indépendants l'un de l'autre. Le mouvement transmis au châssis dépend alors des lois spéciales qui régissent l'action de ces deux moteurs (*).

On a imaginé dans le siècle dernier un grand nombre de mécanismes de ce genre, à l'effet d'obtenir une horloge marquant le temps vrai. On décomposait le mouvement du soleil en deux mouvements élémentaires : l'un uniforme, correspondant au temps moyen, et l'autre varié, représentant la quantité à laquelle, en astronomie, on donne le nom d'*équation du temps*. Le premier de ces deux mouvements s'obtenait au moyen d'une horloge ordinaire, formant l'une des extrémités d'un train épicycloïdal. En communiquant, d'autre part, au levier du même train un mouvement lent représentant l'équation du temps, le mouvement de la dernière roue se trouvait identique au mouvement du soleil vrai.

(*) Cette combinaison offre surtout de l'intérêt quand le mouvement communiqué à l'une des extrémités du train est variable, car autrement il serait inutile d'employer deux moteurs distincts.

Mais voici l'application la plus intéressante de ce principe.

On sait que, dans les filatures de coton, la mèche, après avoir été soumise à une série d'étirages sans torsion, doit subir dans les bancs à broches un nouvel étirage accompagné d'une faible torsion : on obtient ainsi un rudiment de fil, qu'on peut renvider sur une bobine, et filer ensuite dans les mull-jenny. Pour cela, au sortir d'une dernière paire de laminoirs étireurs, la mèche passe sur une ailette qui tourne très-rapidement, puis sur une bobine. Mais l'enroulement serait trop rapide et le fil se briserait, si la bobine était immobile : aussi a-t-on soin d'imprimer à celle-ci un mouvement de rotation de même sens que celui de l'ailette, de manière que l'enroulement s'opère en raison de la différence des vitesses. Il y a plus : si l'on veut que la longueur envidée soit constante dans un temps donné, il faut que la bobine s'accélère à mesure qu'elle grossit, afin que le produit du rayon d'enroulement par la différence de vitesse angulaire reste invariable.

La manière la plus ingénieuse de produire cette accélération est la suivante, inventée par Houldsworth (1826).

Concevons deux roues d'angle A, B (*fig.* 204), égales et concentriques, reliées par un pignon E à mouvement épicycloïdal sphérique. L'axe de ce pignon est supporté par une saillie ou mentonnet, logé dans l'intérieur d'une grande roue D, laquelle représente le châssis du train : cette roue, par une denture extérieure, reçoit du pignon C un mouvement accéléré.

Avec ces données, on a :

$$\epsilon = -1,$$

$$n = -(m - 2a).$$

La rotation m de la roue A étant uniforme, et la vitesse du pignon C variant suivant une loi convenable, la formule qui précède fait connaître la loi du mouvement de l'arbre de la roue B, lequel est l'arbre de la bobine.

CHAPITRE IV.

ORGANES DE MACHINES.

CLASSE B. — SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT. — RAPPORT DES VITESSES VARIABLE.

Nous avons condamné en principe les mécanismes dans lesquels la transformation d'un mouvement continu en un autre de même nature s'effectue avec un rapport de vitesses variable.

Parmi ces mécanismes, il y en a beaucoup dans lesquels la variation du rapport des vitesses est un inconvénient qu'on subit, pour une raison de simplicité ou pour tout autre motif. Au contraire, dans un grand nombre de cas, l'irrégularité du mouvement transmis par certains organes est un moyen de compenser des irrégularités d'une autre espèce, lesquelles proviennent soit du moteur, soit de la résistance, soit même d'une autre partie de la transmission : à ce point de vue, l'étude des mécanismes à rapport variable présente un véritable intérêt.

Géométriquement, les organes compris dans la classe B dérivent pour la plupart des appareils analogues qui répondent au cas d'un rapport constant : c'est ce qui en simplifiera beaucoup la description.

§ IX. — Premier genre. — Transmission du mouvement par contact.

On trouve dans la première section (p. 152) la solution générale des problèmes auxquels donne lieu le mouvement de deux solides, assujettis à rester en contact. Nous n'avons donc pas à revenir ici sur la partie théorique des questions qui font l'objet de ce paragraphe : nous nous bornerons à donner quelques exemples des mécanismes les plus usités,

en commençant par ceux dans lesquels le mouvement des pièces en rapport est un roulement simple.

PREMIER EXEMPLE. — *Ellipses et courbes dérivées.* — Considérons deux ellipses égales, placées bout à bout comme le représente la *fig.* 205, et mobiles autour de leurs foyers respectifs C et C_1. A partir du point de contact, prenons sur les deux courbes des arcs égaux AM, AM_1 : en vertu de la symétrie, CM est égale à D_1M_1. Les rayons vecteurs CM, C_1M_1 forment donc une somme égale au grand axe de l'ellipse, c'est-à-dire à la longueur CC_1 : par suite on peut amener les points M et M_1 à coïncider sur la ligne des centres ; et cela fait, comme la tangente à l'ellipse est également inclinée sur les deux rayons vecteurs, les deux courbes dans leurs nouvelles positions seront encore tangentes.

Si donc on s'arrange de manière à obliger les deux ellipses à se toucher constamment, on aura pour leur mouvement relatif un roulement simple (*). Le rapport variable des vitesses angulaires correspondantes est donné, dans chaque phase du mouvement, par la relation

$$\frac{\omega}{\omega_1} = -\frac{r_1}{r};$$

les valeurs extrêmes de ce rapport sont

$$-\frac{a-c}{a+c} \quad \text{et} \quad -\frac{a+c}{a-c}.$$

Courbes dérivées de l'ellipse. — Si l'on voulait que le rapport des vitesses angulaires atteignît plusieurs maxima dans une

(*) Deux cames, taillées suivant les profils de la *fig.* 205, établiront une transmission de mouvement sans frottement entre les deux arbres parallèles (C) et (C_1) ; et il est à remarquer que, (C) étant moteur et tournant dans le sens indiqué par la flèche, la transmission du mouvement sera géométriquement obligatoire pour les positions telles que CD, CD', sans qu'il soit besoin de faire intervenir l'adhérence des surfaces.

Les choses sont ainsi jusqu'à ce que les cames soient arrivées en *cd*, cd_1. Mais, à partir de ce moment, le mouvement de l'ellipse conductrice continuant toujours dans le même sens, il n'en résultera plus de pression sur la courbe conduite ; et les deux surfaces se sépareraient, si l'on n'avait soin d'employer un artifice particulier. On pourra, par exemple, denter les portions des cames qui correspondent à la deuxième période du mouvement.

seule révolution, ou bien si les deux courbes devaient faire des nombres de tours différents dans le même temps, le système des deux ellipses deviendrait insuffisant. On emploie dans ce cas des courbes qui présentent un certain nombre de lobes égaux, chacun de ces lobes correspondant à un maximum et à un minimum du rapport $\frac{\omega}{\omega_1}$.

Ces courbes dérivent de l'ellipse suivant le mode indiqué (p. 157). Pour construire, par exemple, une courbe bilobée, nous mènerons par le foyer d'une ellipse (*fig.* 206) une série de rayons vecteurs faisant entre eux des angles égaux à une partie aliquote quelconque de la demi-circonférence. Puis, ayant tracé quelque part un angle droit *afb*, nous diviserons cet angle en un nombre égal de parties, et nous porterons sur les lignes de division les longueurs des rayons vecteurs FA, $FA_1, \ldots$, de l'ellipse. Les points obtenus forment un certain arc de courbe. En construisant trois arcs symétriques dans les trois autres angles droits contigus, on achève le profil demandé (*).

On construirait une courbe à trois saillies, en prenant un angle de 60 degrés $a'f'b'$ pour correspondre à deux angles droits (*fig.* 207).

Les courbes fournies par les tracés précédents ne sont autre chose que les transformées qu'on obtient en plaçant l'ellipse AA_1B sur un cône de révolution, et développant ce cône sur un plan. On peut combiner deux à deux toutes les courbes qui proviennent d'une même ellipse, placée sur un cône arbitraire : pour que le mouvement soit continu, ces cônes doivent être choisis de manière que la transformée occupe une partie aliquote de la circonférence.

L'équation de la courbe à n lobes est

$$r = \frac{n^2 b^2}{\sqrt{n^2 b^2 + c^2} + c \cos n\theta} \quad (**),$$

n étant un entier quelconque.

(*) Selon la valeur de l'excentricité de l'ellipse, la courbe affectera l'une ou l'autre des deux formes indiquées par la figure.

(**) Les courbes qui nous occupent présentent fréquemment des points d'in-

Les transformées d'ellipse, combinées avec des arcs de cercle, répondent à des mouvements dans lesquels le rapport des vitesses est alternativement constant ou variable.

DEUXIÈME EXEMPLE. — *Emploi de la spirale logarithmique.* — Considérons deux spirales logarithmiques, égales et inversement placées (*fig.* 208), tangentes en un point quelconque, A, de la ligne qui réunit leurs pôles C, C_1.

Soient AM, AM_1 deux arcs infiniment petits égaux. En vertu de la définition de la spirale logarithmique, les angles CMA, M_1AC_1 sont égaux : donc les triangles infinitésimaux ANM, AN_1M_1 sont aussi égaux, et l'on a $NM = AN_1$.

Il est donc possible d'amener sans glissement les points M et M_1 à coïncider sur la ligne des centres, en N_1; les deux spirales seront tangentes en ce point, et jouiront des mêmes propriétés que les ellipses que nous venons d'étudier.

Pour appliquer ces considérations géométriques, on exécute deux cames en prenant pour profils des polygones réguliers égaux, et remplaçant chacun des côtés rectilignes de ces polygones par deux arcs de spirale. Dans la machine à imprimer de Bacon et Donkin (*fig.* 209), on trouve deux carrés tournant respectivement autour de leurs centres, et portant chacun 8 arcs de spirale (*).

Le rapport des vitesses angulaires varie de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

---

flexion. Ces points sont déterminés par l'équation

$$\cos n\theta = \frac{1}{(n^2-1)e};$$

leur existence dépend donc de l'inégalité

$$e > \frac{1}{n^2-1},$$

ou

$$\frac{b}{a} < \frac{n}{n^2-1}\sqrt{n^2-2}.$$

(*) L'équation générale de la spirale logarithmique étant

$$r = ae^{m\theta},$$

TROISIÈME EXEMPLE. — *Presses Normand.* — On a remarqué, à l'Exposition universelle de 1862, un système nouveau de presses mécaniques destinées à imprimer une feuille des deux côtés à la fois.

Le papier est placé entre une table de marbre mobile, et un rouleau qui porte la composition. Il importe que les mouvements de la table et du rouleau soient parfaitement synchrones, sans quoi le papier se déchire, les caractères s'usent et se déforment : en un mot, l'impression est mauvaise. Avec les presses ordinaires, ce résultat est facile à obtenir; mais dans les presses à impression simultanée des deux côtés, on emploie, pour transmettre le mouvement du rouleau à la table, un joint universel, c'est-à-dire un appareil à rapport de vitesses variable, dont nous allons voir la théorie dans un instant.

Les choses étant ainsi disposées, si l'on veut rétablir le synchronisme des mouvements de la table et du rouleau, il suffit d'intercaler, entre celui-ci et le joint universel, un nouveau mécanisme à rapport variable, lequel annule l'effet nuisible du premier. Ce mécanisme, dans la presse de M. Normand, consiste simplement en un pignon ovale, conduisant une crémaillère ondulée : les profils sont déterminés de ma-

---

il est facile de déterminer les valeurs des constantes a et m, de manière à obtenir un arc de spirale passant par les points A et B.

En premier lieu, le paramètre a n'est autre chose que le rayon vecteur qui correspond à $\theta = 0$, c'est donc le demi-côté du carré donné.

Ensuite, on doit avoir simultanément

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad r = a\sqrt{2}.$$

Donc

$$\sqrt{2} = e^{m\frac{\pi}{4}},$$

d'où

$$l\sqrt{2} = m\frac{\pi}{4}, \quad m = \frac{4l\sqrt{2}}{\pi} = 0,44128.$$

En calculant, au moyen de cette valeur, l'angle que fait la tangente à la spirale avec le rayon vecteur, on trouve

$$60^\circ \ldots$$

nière que le mouvement varié du pignon produise l'uniformité du mouvement de la crémaillère. Le problème ainsi posé ne présente pas la moindre difficulté. En effet, nous savons trouver le centre instantané de la rotation relative du pignon, quand nous connaissons le rapport qui doit exister entre la vitesse angulaire de celui-ci et la vitesse de translation de la crémaillère. Le lieu de ces centres, considéré, soit par rapport au pignon, soit par rapport à la crémaillère, détermine à la fois la courbe ovale et le profil ondulé dont nous avons besoin.

QUATRIÈME EXEMPLE. — *Système de deux roues dentées dont l'une est excentrée* (*fig.* 210). — Cette combinaison, où n'entrent que des roues dentées ordinaires, est une des plus simples qu'on puisse imaginer pour établir un rapport variable entre les rotations de deux arbres fixes parallèles.

C et C_1 sont les projections des axes de rotation. Le centre de la roue B ne coïncide pas avec le point C_1 ; et pour obtenir la transmission du mouvement malgré cette excentricité, on fait usage d'une roue parasite P, maintenue en contact avec les roues extrêmes au moyen des barres CC′, C′O.

Soient R et R_1 les rayons des roues A et B, e l'excentricité C_1O : le rapport des vitesses varie de

$$\frac{R}{R_1 + e} \quad \text{à} \quad \frac{R}{R_1 - e}.$$

CINQUIÈME EXEMPLE. — *Roues d'Olaüs Rœmer* (*fig.* 211). — Ce sont deux roues tronc-coniques inversement placées. L'une de ces roues est dentée à la manière ordinaire, et l'autre porte une série de pointes dont on détermine les positions, suivant la loi de mouvement qu'on veut obtenir. En appelant R, r, les rayons extrêmes de la première roue, R′, r', ceux de la deuxième, le rapport des vitesses varie de

$$\frac{R'}{r} \quad \text{à} \quad \frac{r'}{R}.$$

SIXIÈME EXEMPLE. — *Roue de champ excentrique d'Huygens* (*Pl. XXIII, fig.* 212). — Ce système, facile à comprendre, répond au cas de deux axes concourants rectangulaires : il a

été employé, comme le précédent, pour figurer le mouvement des planètes.

SEPTIÈME EXEMPLE. — *Vis à pas variable.* — Enfin, l'engrenage de la vis sans fin peut également se transformer de manière à procurer une transmission non uniforme : il suffit pour cela de faire varier le pas de la vis, c'est-à-dire de remplacer, pour la génération de la surface héliçoïdale, l'hélice ordinaire par une courbe déterminée en vue de l'effet qu'on veut obtenir.

Systèmes dans lesquels le rapport des vitesses varie brusquement.

En composant deux roues par la réunion de plusieurs secteurs dentés (*fig.* 213), dont les rayons sont différents, on obtient des organes où le rapport des vitesses change brusquement de valeur.

Enfin les mécanismes représentés par les *fig.* 214 et 215 servent à produire un mouvement intermittent. On voit que, dans ces systèmes, l'une des roues (la roue conductrice) a une partie de sa denture enlevée : pendant que cette partie est en présence de l'autre roue, la transmission cesse d'avoir lieu.

§ X. — DEUXIÈME GENRE. — SYSTÈMES ARTICULÉS A RAPPORT DE VITESSES VARIABLE.

Considérons deux corps animés de mouvements circulaires continus (*) autour de deux axes fixes; et distinguons, comme dans la classe précédente, le cas où les axes des deux rotations sont parallèles, et celui où ces deux axes concourent en un point.

1° Axes parallèles.

Deux manivelles, OA, EB (*fig.* 216), mobiles autour des axes fixes et parallèles O et E, sont reliées à leurs extrémités par une

(*) Les cas où le mouvement de l'un des corps n'est pas susceptible de se continuer indéfiniment dans le même sens seront traités dans le chapitre suivant.

barre rigide AB. Soient R et r les rayons des circonférences décrites par les deux points d'articulation, a la longueur AB, enfin e l'excentricité OE. Cherchons d'abord sous quelles conditions le mouvement pourra être continu.

Si les deux circonférences étaient concentriques, la seule condition serait que la longueur du lien fût comprise entre $R - r$ et $R + r$: le rapport des vitesses serait constant, et les mouvements des points A et B différeraient seulement en ce sens, qu'il n'y aurait pas synchronisme entre leurs phases.

Introduisons une certaine excentricité e : les limites de la longueur a deviennent $R - r + e$ et $R + r - e$: c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$a > R - r + e,$$
$$a < R + r - e.$$

Or, ces deux inégalités ne sont compatibles que si r est plus grand que e. Donc :

Pour que les mouvements de deux manivelles réunies par une barre rigide articulée soient susceptibles de se continuer indéfiniment dans le même sens, il faut :

1° *Que le point fixe de la grande manivelle soit dans l'intérieur du cercle décrit par le bouton de la petite* (*);

2° *Que la longueur du lien soit comprise entre les deux segments déterminés, sur le diamètre de la circonférence qui*

(*) Notre analyse laisse en dehors le cas isolé dans lequel on a à la fois $R = r$ et $a = e$. Avec ces hypothèses particulières, le mouvement continu est possible de deux manières différentes : soit que la bielle se tienne constamment parallèle à la ligne des centres, auquel cas les vitesses des deux manivelles sont nécessairement égales, soit que la bielle, au contraire, vienne couper la ligne des centres dans l'intervalle des points fixes des deux manivelles, ce qui établit un rapport variable entre les deux rotations.

Dans ce dernier cas, quand les manivelles sont plus petites que la distance des arbres, la relation de mouvement de ceux-ci est la même que celle qu'on réalise au moyen des deux ellipses de la *fig.* 205. Quand les manivelles sont plus grandes que la distance des centres fixes, le mouvement est celui de deux hyperboles disposées d'une façon analogue.

Pour l'analyse complète des propriétés du système géométrique qui nous occupe, je renverrai à l'ouvrage de M. Girault, intitulé : *Géométrie appliquée à la transformation des mouvements*.

correspond à la grande manivelle, par le point de la deuxième circonférence dont la distance à la première est un maximum.

Dans ces conditions, le mouvement du point B étant supposé uniforme, la vitesse du point A varie comme le rapport des deux segments DO et DE (*). La bielle n'est jamais en ligne droite avec aucune des deux manivelles, de sorte qu'il n'y a pas de *points morts*.

Projetons les mouvements des points A et B sur le diamètre commun aux deux circonférences.

La rotation du point B étant uniforme, la projection de ce point est animée d'un mouvement oscillatoire parfaitement symétrique, dont les lois sont représentées par les courbes de la *fig.* 46.

Le mouvement de la projection du point A est également un mouvement de va-et-vient; mais il n'y a plus symétrie entre les deux demi-oscillations. En effet les points extrêmes, A_0 et A_1, de la course de cette projection répondent aux positions B_0 et B_1 de la pièce animée d'un mouvement uniforme : donc le rapport entre le temps de la descente et celui de la montée est égal au rapport des deux portions de la circonférence (E), déterminées par les points B_0 et B_1.

Cette irrégularité est avantageuse dans certaines machines, telles que les étaux limeurs : l'outil descend lentement, tandis qu'il a de la résistance à vaincre; le retour à vide s'ef-

---

(*) Pour peindre graphiquement la loi de ces variations, nous considérerons le point C, centre instantané de la rotation de la bielle AB, et nous écrirons la proportion

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{AC}{BC}.$$

Prenant donc une longueur BH égale à la vitesse constante V_b, et menant par le point H une parallèle à AB, nous aurons

$$AK = V_a.$$

La *fig.* 216 *bis* représente le lieu géométrique du point K, pour une révolution entière du système.

fectue au contraire rapidement, de manière à perdre le moins de temps possible (*).

Manivelle à coulisse (*fig.* 218). — Cette combinaison est l'une des plus simples qu'on puisse employer pour relier deux rotations continues, s'effectuant autour de deux arbres paral-

---

(*) *Ventilateur Lemielle.* — Les propriétés géométriques du mouvement d'une droite de longueur constante, dont les extrémités parcourent deux circonférences fixes, donnent lieu en Mécanique aux applications les plus variées. Un exemple des plus intéressants, relatif au cas du mouvement continu, nous sera fourni par le ventilateur Lemielle, employé dans l'aérage des mines importantes, dont l'assainissement exige un volume d'air considérable.

Cet appareil se compose d'un tambour hexagonal (*fig.* 217), tournant à frottement doux sur un essieu coudé immobile. A chacun des six pans correspond un volet, ou sorte d'aile articulée qui se rattache d'une part au prisme par le moyen de la charnière A, tandis que son extrémité libre est retenue par une bielle dont le point fixe est en E.

Considérons spécialement une des palettes AB, et suivons son mouvement pendant une rotation complète du tambour.

La section droite du ventilateur présente les mêmes éléments géométriques que la *fig.* 216. La longueur a du lien est égale à celle du côté de l'hexagone, ou au rayon r du cercle circonscrit; de plus on a

$$R = r + e.$$

Il résulte de cette dernière relation que les deux circonférences sont tangentes, et que le volet, dans une de ses positions, se trouve exactement appliqué sur le côté correspondant. A partir de cette position, la rotation ayant lieu dans le sens de la flèche, le volet se développe, et atteint son écart maximum quand la bielle est dirigée dans le prolongement de la ligne OE. Ce point une fois franchi (ce qui n'est possible que si l'on a $R + e < 2r$, ou $r > 2e$), le volet se replie et finit par se retrouver appliqué sur le tambour.

Considérons la circonférence (EB), et construisons un coursier dont la section droite comprenne deux arcs de cette circonférence, de part et d'autre d'un espace libre inférieur qui débouche dans le puits d'aérage, la partie supérieure communiquant librement avec l'atmosphère.

La longueur des deux portions du coursier doit être calculée de telle manière qu'il y ait toujours une aile dont l'extrémité se trouve sur l'arc MN, et une autre sur l'arc M'N', afin que la communication soit interceptée entre l'air de la mine et l'air extérieur, sauf le jeu qu'on a été obligé de ménager sur tout le pourtour du ventilateur.

Les choses étant ainsi disposées, au moment où l'une des palettes arrive au point N', celle qui la précède immédiatement n'a pas encore atteint le point M': de sorte qu'un certain volume d'air, compris entre les deux arcs, le coursier et l'hexagone, se trouve isolé de la mine, pour être un instant après rejeté dans l'atmosphère. On voit que, par chaque tour, l'appareil expulse six fois ce volume.

jées. Le même système se prête à la production d'un mouvement alternatif, quand l'excentricité est supérieure à la longueur de la manivelle pleine.

2° Axes concourants.

Joint universel (*). — Considérons deux arbres dont les prolongements géométriques se rencontrent (*fig.* 219), et qui forment un angle voisin de 180 degrés. Chacun de ces arbres est terminé par une fourche, et les deux fourches sont elles-mêmes réunies par un croisillon invariable, qui s'assemble avec elles au moyen de quatre points d'articulation.

Le mouvement de l'un des deux arbres se communique à l'autre par l'intermédiaire du croisillon, mais la transmission n'est pas uniforme. Le rapport des vitesses varie, comme nous allons le voir, d'autant plus que l'angle des deux axes est plus considérable : aussi le joint universel ne peut-il s'employer avec quelque avantage que dans le cas où cet angle est assez faible. On y a recours, par exemple, pour relier les deux tronçons d'un arbre trop long pour être fait d'une seule pièce : l'interposition du joint universel dispense de la nécessité d'ajuster les paliers avec précision. De plus, l'angle des deux axes peut varier, sans qu'il résulte de cette circonstance des efforts anormaux sur les pièces du mécanisme. Seulement, ces effets n'étant obtenus qu'aux dépens de la régularité (**), on doit se garder de faire servir le joint universel à la transmission d'efforts un peu considérables.

Soient OA, OB, les deux axes de rotation ; les bras du croisillon sont représentés par les droites CC', DD', perpendiculaires : la première à l'axe OA, la seconde à l'axe OB.

La droite DD', astreinte à rester perpendiculaire à l'axe OB, décrit un plan dont la trace sur une sphère ayant son centre en O est le grand cercle E, tandis que les extrémités de la droite CC' décrivent le grand cercle F, perpendiculaire à l'axe

(*) Le joint universel est aussi connu sous le nom de *joint de Cardan* ou *joint hollandais*. M. Willis en attribue l'invention à Hooke (1675).

(**) Rappelons à cette occasion que M. Porro a imaginé une sorte de joint universel à rapport constant (p. 215), qui jouit des mêmes propriétés que le joint de Cardan.

OA. Comme de plus les droites OC, OD sont perpendiculaires entre elles, l'arc CD est constamment égal à un quart de grand cercle; et la position de l'un des points C, D sur sa trajectoire est connue, lorsqu'on a la position de l'autre point sur la sienne.

On peut donc chercher la loi de la transmission du mouvement par le joint universel, en étudiant les lois du mouvement sphérique des extrémités d'un arc de grand cercle égal à un quadrant, qui se meut entre deux grands cercles dont l'angle est égal au supplément de l'angle des axes (*fig.* 220).

Partons de l'instant où le croisillon est dans le plan perpendiculaire à l'axe A. Représentons par C_1, D_1 deux positions simultanées des points d'articulation C, D; et désignons par x et y les arcs CC_1, DD_1, décrits par ces points à partir de leurs positions initiales.

Le déplacement x du point C, extrémité d'une perpendiculaire à l'axe A, mesure la rotation de l'arbre correspondant; de même, l'arc y mesure la rotation autour de l'axe B.

Or on a dans le triangle DD_1C_1 :

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin y\cos D,$$

ou

$$\sin x\cos y = \cos x\sin y\cos D,$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} y\cos D \ (*).$$

En différentiant cette équation, on trouve le rapport des vitesses angulaires simultanées, lequel est égal à $\frac{dy}{dx}$. On obtient également ce rapport en appliquant les principes de la composition des rotations : en effet, les trajectoires des points C_1, D_1 étant connues, le pôle instantané de la rotation du croisillon est en I, intersection des arcs normaux à DD_1 et CC_1.

Cela posé, on a

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin ID_1}{\sin IC_1} = \frac{\sin IC_1D_1}{\sin ID_1C_1} = \frac{\cos CC_1D_1}{\cos DD_1C_1}.$$

(*) Dans ces équations, D est l'angle aigu des deux axes de rotation.

En remplaçant les deux cosinus par leurs valeurs, il vient

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos D}{1 - \sin^2 D \cos^2 x}.$$

Il résulte de cette relation que le rapport des vitesses angulaires des deux arbres est variable : il atteint son maximum, $\frac{1}{\cos D}$, pour $x = 0$, et son minimum, $\cos D$, pour $x = \frac{\pi}{2}$. L'écart entre ces deux valeurs est d'autant plus grand, que l'angle D est lui-même plus grand.

§ XI. — Troisième genre. — Poulies et tambours a rapport de vitesses variable.

Fusées des montres. — Une fusée n'est autre chose qu'un treuil dont l'arbre, au lieu d'être cylindrique, présente la forme d'une surface de révolution quelconque. La destination des appareils de ce genre est de compenser une irrégularité inhérente à la nature d'une machine donnée; on détermine la section méridienne de la fusée d'après les lois du mouvement qu'on se propose de régulariser.

Dans les montres et chronomètres, l'effort moteur est appliqué au barillet B (*Pl. XXII, fig.* 222); le mouvement est transmis à l'arbre FF par l'intermédiaire d'une chaîne articulée, qui fait un certain nombre de tours sur une fusée conique. La conicité de la fusée ne permet pas de disposer la chaîne comme une corde sans fin : on attache donc les extrémités de cette chaîne, d'une part au barillet, d'autre part à la fusée, et la transmission dure jusqu'à ce que la chaîne soit entièrement déroulée; après quoi il faut remonter la montre, pour replacer les choses dans la position première.

On trouve dans les mull-jenny une fusée qui diffère des fusées de montre en ce qu'elle est renflée au milieu, et amincie aux deux bouts. En communiquant à l'arbre de cette fusée une rotation uniforme, on fait prendre au chariot tiré par la corde un mouvement d'abord accéléré, puis retardé.

Tambours et bobines d'extraction. — Nous avons déjà signalé l'inconvénient des treuils cylindriques d'extraction, pour le cas d'un puits d'une grande profondeur. En donnant au

corps du treuil la forme conique, on peut s'arranger de manière que la vitesse ascensionnelle soit d'autant moindre, que le poids total à enlever est plus considérable.

Il est d'ailleurs difficile, avec ce système, de faire varier le rayon d'enroulement dans des limites assez étendues. On n'obtient une compensation suffisante qu'en remplaçant les tambours cylindriques ou coniques par des *bobines*, et substituant aux câbles ronds, à tours juxtaposés, des câbles plats, dont les spires, en se recouvrant mutuellement, procurent un diamètre variable suivant une loi convenable.

Le noyau de la bobine (*fig.* 223) n'est autre chose qu'un tambour en fonte, dont la largeur est très-peu supérieure à celle du câble plat que la bobine doit recevoir : un certain nombre de bras latéraux en bois maintiennent les spires à droite et à gauche. La distance de l'axe à la partie rectiligne du câble augmente, pour chaque tour, de deux fois l'épaisseur de celui-ci, soit de 6 à 8 centimètres.

L'extrémité du câble, opposée à celle qui soutient la benne, est fixée à demeure sur le noyau, de sorte qu'il faut une deuxième bobine, calée sur le même arbre que la première, pour le service de l'autre benne. Les deux câbles sont d'ailleurs enroulés en sens inverse l'un de l'autre, afin que l'une des bennes descende quand l'autre monte.

Câbles sans fin. — Les câbles sans fin s'appliquent difficilement à la production d'un rapport de vitesses variable. Cependant on peut imaginer (*fig.* 224) un mécanisme composé de deux poulies dont l'une soit elliptique, la courroie étant maintenue constamment tendue par un poids (*).

Ce système n'est pas employé.

(*) La rotation de l'arbre A étant uniforme, l'arbre B est animé d'un mouvement continu varié (*voir* p. 118), et le poids P, d'un mouvement alternatif.

Ainsi, la combinaison (A, B) se rapporte à notre deuxième classe, et la combinaison (A, P), ou (B, P), à la troisième.

CHAPITRE V.

ORGANES DE MACHINES.

CLASSE C. — SENS DE LA TRANSMISSION VARIANT PÉRIODIQUEMENT. — RAPPORT DES VITESSES CONSTANT OU VARIABLE.

Du mouvement alternatif. — Il existe un grand nombre d'organes de machines, dans lesquels le sens du mouvement transmis est sujet à des variations périodiques. En d'autres termes, tandis que l'un des éléments du mécanisme se meut constamment dans le même sens, l'autre pièce est limitée dans l'amplitude de son excursion, *par la nature géométrique de la liaison employée*. Par suite, cette pièce peut seulement prendre un mouvement de va-et-vient, dont la direction change à des intervalles de temps réguliers. La pédale du rémouleur peut être présentée comme le type des machines de cette catégorie.

Dans ces machines, au rebours de ce que nous avons conseillé jusqu'ici, il est avantageux que le rapport des vitesses soit variable. On doit en effet s'arranger de telle manière que, l'uniformité étant toujours le partage de celui des deux mouvements qui est continu, l'organe à mouvement oscillatoire soit animé d'une vitesse qui décroisse régulièrement, depuis le milieu de sa course jusqu'aux époques des changements de sens. Il faut éviter avec le plus grand soin toute disposition dans laquelle une masse un peu considérable passerait brusquement, d'une vitesse finie dans un sens, à une vitesse finie de sens contraire.

En général, la pièce oscillante est la pièce conduite, comme dans les marteaux, les cisailles, les scies à mouvement alternatif, etc. Le contraire se rencontre pourtant quelquefois. Ainsi dans le rouet, le tour, la plupart des machines à vapeur, c'est l'organe moteur qui possède un mouvement de va-et-vient, et qui communique, au moyen de dispositions convenables, un mouvement continu à peu près uniforme à un arbre tournant.

§ XII. — Premier genre. — transmission du mouvement par contact.

1° Engrenages à mouvement alternatif.

Les engrenages intérieurs répondent à deux rotations de même sens, les engrenages extérieurs à deux rotations de sens contraires. Si donc on fait en sorte que l'engrenage d'une roue et d'un pignon soit alternativement extérieur et intérieur, le mouvement continu du pignon fera prendre à la roue un mouvement *circulaire alternatif*.

Roues tronquées à double denture. — La *fig.* 225 indique un certain nombre de dispositions propres à réaliser cette idée.

La roue A est une lanterne ordinaire, dont la denture présente quelque part une lacune, suffisante pour permettre au pignon de passer d'un côté à l'autre de l'enceinte des fuseaux. L'extrémité de l'arbre de ce pignon est engagée dans une rainure, pratiquée dans un plateau qui tourne avec la lanterne; et le tracé de la rainure est combiné de manière à obliger le pignon à passer périodiquement de l'intérieur à l'extérieur de la lanterne, et *vice versâ*.

La grande longueur de l'arbre fait qu'un petit déplacement horizontal du pignon peut s'effectuer sans fausser sensiblement cet arbre.

La denture extérieure et la denture intérieure ayant même circonférence primitive, le rapport des vitesses des deux arbres est le même, quel que soit le sens de la transmission.

Cet avantage n'existe pas dans la roue B, qui présente la forme d'une couronne circulaire échancrée, munie d'une double denture sur son contour extérieur et intérieur. Le rapport des vitesses est constant tant que le mouvement ne change pas de sens, mais ce rapport change avec le sens de la transmission. Dans la roue C, dans la roue D, où chacune des dentures est excentrée, le rapport des vitesses varie pendant chaque demi-oscillation (*).

On peut aisément disposer ces roues de manière à satisfaire

(*) On trouve de pareilles roues dans le métier automate de Smith.

aux conditions les plus variées. Dans tous les cas, les courbes de raccordement permettent le changement graduel de la vitesse, conformément à ce que nous venons de recommander.

Crémaillère double oscillante. — Un système parfaitement analogue, dans lequel une crémaillère est substituée à la roue tronquée (*fig.* 226), sert à transformer le mouvement circulaire continu en mouvement rectiligne alternatif (*). Dans le cas de la disposition F, la vitesse varie brusquement, et l'effet est généralement moins bon.

Roue à demi-denture avec double pignon (*fig.* 227). — Dans ce mécanisme, qui produit également un changement brusque dans le sens de la rotation d'un arbre AB, l'arbre moteur est terminé par une roue de champ, dentée sur la moitié de son contour. Cette roue engrène alternativement, pendant un demi-tour avec le pignon A, pendant le demi-tour suivant, avec le pignon B; et le sens de la transmission change deux fois pour chaque tour de la roue.

2° Cames. — Excentriques.

On donne le nom de *cames* ou d'*excentriques* à des pièces de formes plus ou moins compliquées, qui tournent autour d'un centre fixe, en poussant devant elles d'autres pièces convenablement guidées. Il est facile de déterminer le profil d'une came, de manière à obliger la pièce conduite à prendre le mouvement que l'on veut.

Marteaux de forge. — Nous avons déjà indiqué l'usage des cames en développante, pour le soulèvement d'un pilon; les marteaux de forge présentent une disposition analogue (*fig.* 228). Dans les appareils de ce genre, la came a seulement pour fonction de soulever le marteau : la chute de celui-ci est déterminée par l'action de la pesanteur, aidée, s'il y a lieu, par celle d'un ressort ou rabat.

Cisailles. — Une cisaille ordinaire se compose d'une mâchoire fixe, et d'une mâchoire mobile autour d'un point fixe. Cette dernière se prolonge de l'autre côté du point fixe, sous la

(*) Il est possible avec la disposition E, en donnant à la crémaillère la liberté de prendre un petit mouvement transversal, de ne pas fausser du tout l'arbre du pignon.

forme d'une longue queue qui porte sur un excentrique. Le poids de tout cet appareil maintient la pièce mobile appliquée sur la came, de sorte qu'il n'y a pas de choc comme dans les marteaux.

Excentriques.

Les excentriques proprement dits sont combinés de manière à guider une pièce à mouvement alternatif, dans toute l'étendue de sa double excursion : ils peuvent se ranger dans deux catégories principales.

1° *Excentriques agissant sur des galets.* — Soit

$$r = f(\theta)$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires. Faisons tourner cette courbe autour du pôle, avec une vitesse angulaire constante n : les rayons vecteurs qui viendront à l'époque t se placer dans une direction fixe déterminée, prise pour origine des angles θ, s'obtiennent en faisant dans l'équation de la courbe

$$\theta = nt.$$

On conclut de là

$$r = f(nt).$$

Imaginons maintenant, suivant la droite ($\theta = 0$), une tige guidée de manière à pouvoir seulement se mouvoir dans sa propre direction, et assujettie à s'appuyer sur la courbe mobile : il est clair que la loi du mouvement rectiligne d'un point de cette tige sera donnée par l'équation

$$x = f(nt).$$

Réciproquement, connaissant la loi du mouvement qui doit animer la tige, ainsi que la vitesse angulaire n, on déterminerait le profil de l'excentrique.

Généralement, l'excentrique agit sur la tige par l'intermédiaire d'un galet, dont l'axe est fixé à celle-ci : par suite, quand on a arrêté le tracé de la courbe conductrice, sans se préoccuper du galet, il faut raccourcir la courbe, suivant toutes ses normales, d'une quantité égale au rayon de ce galet.

Si l'on veut que l'excentrique produise lui-même le mouvement de retour, sans qu'il soit besoin d'une disposition spéciale pour maintenir la tige appuyée sur sa surface, on place un deuxième galet de l'autre côté du centre de rotation, de manière à embrasser l'excentrique. Dans ce cas, la longueur d'un diamètre quelconque, mené par le centre de rotation, doit être constante, et il suffit de connaître la moitié du profil pour pouvoir tracer l'autre moitié.

Au lieu d'employer deux galets, on peut terminer la tige par un bouton qui s'engage dans une rainure découpée dans un plateau tournant : le tracé de la rainure s'effectue comme précédemment.

Enfin, si l'axe de la rotation était parallèle à la direction de la translation, l'excentrique aurait la forme d'une couronne comprise entre deux cylindres concentriques, et découpée suivant une courbe convenablement calculée; la tige se terminerait par un galet, ou par un bouton mobile dans une rainure.

2° *Excentriques agissant sur un cadre.* — Un autre système consiste à souder à la tige guidée un cadre rectangulaire (*Pl. XXV, fig.* 233), dans l'intérieur duquel se meut l'excentrique. Celui-ci pousse alternativement les deux côtés du cadre, qui sont perpendiculaires à la direction de la tige; quant à la loi du mouvement de cette tige, elle n'est plus en relation simple avec la grandeur du rayon vecteur de la courbe conductrice, mais bien avec la distance du pôle à ses tangentes, ou, ce qui revient au même, avec le rayon vecteur de la podaire correspondante. La distance de deux tangentes parallèles quelconques doit être constante.

Ces principes généraux étant posés, entrons dans le détail des divers tracés usités.

Mouvement uniforme. — Quand on veut que la tige guidée soit animée d'un mouvement uniforme, la courbe $r=f(\theta)$ est une spirale d'Archimède (ou une développante de cercle, si le prolongement de la tige mobile ne passe pas par le centre de rotation de la came).

Soit L l'amplitude de l'oscillation; on détermine le paramètre de la spirale de telle sorte que, pour une rotation de

180 degrés, l'accroissement du rayon vecteur soit égal à L. Cette condition donne pour l'équation de la courbe

$$r = r_0 + \mathrm{L}\frac{\theta}{\pi},$$

r_0 étant arbitraire.

On construit cette équation en divisant la demi-circonférence en un certain nombre de parties égales, et portant sur les rayons vecteurs des longueurs qui croissent en progression arithmétique, de r_0 à $r_0 + \mathrm{L}$.

Un arc symétrique complète le tracé de l'excentrique (*), dont l'ensemble présente une forme qui lui a fait donner le nom de *came en cœur*.

Afin de comparer facilement les divers excentriques, construisons, pour chacun d'eux, les courbes figuratives des lois du mouvement d'un point de la tige.

Dans le cas de l'excentrique en cœur, la courbe des espaces se compose de deux portions de droites, limitées à leur intersection commune; la courbe des vitesses est formée de deux droites parallèles à l'axe des temps, et symétriquement placées par rapport à cet axe (*fig.* 229 *bis*). On voit que la vitesse de la tige change brusquement de sens à chacune des extrémités de la course : c'est là un grave inconvénient de l'excentrique en cœur.

Excentrique Morin. — On évite cet inconvénient en choisissant, avec M. Morin, la courbe directrice de telle sorte que le mouvement s'accélère uniformément jusqu'au milieu de la course de la tige, et se retarde ensuite de même : la vitesse se trouvant nulle au moment des changements de sens.

(*) *On doit, conformément à nos indications générales, remplacer la courbe* que nous venons de déterminer par un profil parallèle (*fig.* 229) : ce qui donne lieu aux particularités géométriques suivantes. D'une part, dans le voisinage du point A, les deux branches du profil laissent entre elles un vide, qu'on remplit en décrivant du point A comme centre un arc de cercle de même rayon que le galet. Au contraire, de l'autre côté, les parties utiles des courbes se croisent. On est obligé, en cet endroit, de supprimer les deux petits arcs qui dépassent la pointe *b*, et même d'arrondir un peu cette pointe : de sorte que, pendant une petite fraction de la course, le guidage est supprimé.

Pour tracer un excentrique satisfaisant à cette condition, nous prendrons comme point de départ la courbe des espaces du point guidé. Cette courbe est composée de trois arcs de parabole (*fig.* 230 *bis*), qui se raccordent tangentiellement aux points m_2 et m_6. On en déduit le profil de l'excentrique en décrivant un cercle quelconque, divisant la circonférence de ce cercle en huit parties égales (*fig.* 230), et prolongeant les rayons aboutissant aux points de division de longueurs égales aux ordonnées de mêmes numéros, mesurées sur la courbe des espaces. La longueur d'un diamètre passant par l'axe est encore constante : on peut donc, comme dans le cas précédent, employer deux galets pour guider la tige. Avec ce système, la courbe des espaces présente une continuité apparente, mais la discontinuité géométrique se manifeste sur la courbe des vitesses, et surtout sur la courbe des accélérations.

Excentrique circulaire. — Enfin nous avons dit que l'oscillation devient tout à fait régulière, quand un des points de la tige guidée peut être considéré comme la projection d'un point qui se meut uniformément sur un cercle (*fig.* 231). C'est ce qu'on obtient à peu près par le moyen d'une manivelle réunie à la tige par une longue bielle, système que nous étudierons dans le paragraphe suivant. On peut arriver au même résultat par l'emploi d'un excentrique : c'est l'*excentrique circulaire* (*fig.* 232), lequel est géométriquement équivalent à la combinaison d'une bielle et d'une manivelle.

Supposons en effet que le bouton placé au point d'articulation de la bielle et de la manivelle grandisse de manière à embrasser l'axe de rotation : nous obtiendrons une sorte de poulie, traversée par un arbre excentré, et connue sous le nom d'excentrique circulaire. La *poulie d'excentrique* est entourée d'une bague composée de deux moitiés d'anneau boulonnées : c'est le *collier d'excentrique;* enfin, à l'un des segments qui constituent cette bague est assemblée une longue bielle, ou *barre d'excentrique*, dont l'extrémité vient s'articuler sur la tige à conduire.

Les courbes représentatives du mouvement diffèrent très-peu de celles que nous avons discutées (p. 64), à cause de la grande longueur de la barre d'excentrique, comparée à l'amplitude de l'excursion.

Excentrique triangulaire.

Comme exemple d'excentrique appartenant à la deuxième catégorie, citons l'excentrique triangulaire (*fig.* 233), dont l'objet est de communiquer au cadre qui lui est circonscrit, et à la tige fixée à ce cadre, un mouvement alternatif intermittent.

Soit C un centre fixe, et BB_1C un triangle équilatéral dont les côtés sont remplacés par des arcs de cercle décrits des sommets opposés comme centres. Considérons cette figure comme le profil d'un excentrique tournant autour du point C dans le sens de la flèche *f*, et analysons les diverses circonstances du mouvement du cadre rectangulaire PP'QQ', assujetti à se mouvoir parallèlement à la direction Cy.

Première période. — Le côté QQ', tangent à l'arc CB_1, est poussé par cet arc jusqu'à ce que le point de contact se soit transporté de C en B_1; l'excentrique occupe alors la position CB_1B_2, et le cadre a marché d'une quantité égale à la moitié du rayon CB.

Deuxième période. — La rotation continuant dans le même sens, le cadre poursuit sa marche en avant, conduit par l'arête vive B_2. Il atteint ainsi la position QQ'TT', limite extrême de son excursion (*).

Troisième période. Station. — A partir de cet instant, la came tourne sans exercer aucune pression sur le cadre; et celui-ci reste stationnaire jusqu'à ce que l'excentrique soit arrivé en CB_2B_1, position exactement symétrique de la première.

La poussée de la came a lieu dans cette position sur le côté opposé du cadre, et détermine le retour de la tige en arrière : l'oscillation inverse s'exécute d'ailleurs suivant des lois identiques à celles de l'oscillation directe, elle se termine comme celle-ci par un temps d'arrêt, correspondant au passage de CB_2B à CBB_1.

(*) On voit que l'amplitude de cette excursion est égale, non pas au diamètre, mais seulement au rayon du cercle décrit par le point de l'excentrique le plus éloigné de l'axe de rotation.

Construisons les courbes représentatives du mouvement d'un point du cadre. Dans la première période, le point *b* est la projection de B, et les courbes sont identiques à celles de la *fig.* 231. Pendant la deuxième période, il y a également un point *c* du cadre, lequel est la projection d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, de sorte que les courbes figuratives du mouvement du cadre pendant la seconde période sont encore des arcs de sinusoïdes, qui se trouvent construits (*fig.* 231). Il faut seulement remarquer qu'il n'y a pas concordance entre les phases des mouvements de *c* et de *b*, de sorte que les arcs qui répondent aux deux périodes que nous avons distinguées ne se raccordent pas, et les courbes présentent une discontinuité dont on se rend parfaitement compte, à l'inspection de la *fig.* 233 (*).

Excentrique à ondes. — Dans le profil d'un excentrique, un arc de cercle décrit du centre de rotation répond évidemment à une station du cadre ou de la tige conduite. La courbe ondulée de la *fig.* 234 se compose de trois arcs de cercle concentriques dont les rayons sont différents. Il suit de là que, pendant la durée d'une révolution complète de l'excentrique, le galet occupe successivement trois positions qui correspondent : celle du milieu à la fermeture de l'orifice A, et les deux extrêmes à la mise en communication de cet orifice avec l'espace qui se trouve à droite ou à gauche de l'obturateur.

Les angles au centre des trois arcs de cercle sont proportionnels aux durées respectives des trois stations, le mouvement de l'arbre étant toujours supposé uniforme. Ces arcs sont raccordés par des courbes qui doivent présenter une courbure suffisamment continue. Le tout est disposé de telle sorte qu'un diamètre quelconque ait une longueur constante, afin qu'on puisse embrasser l'excentrique dans son mouvement par deux galets.

La *fig.* 234 *bis* représente la loi des espaces parcourus par l'un des galets.

(*) Pour déduire les courbes (233) des courbes (231), il faut supprimer de ces dernières les deux parties hachées, et intercaler en deux endroits des lignes droites représentant les temps d'arrêt.

§ XIII. — Deuxième genre. — Transmission par l'intermédiaire de pièces rigides.

1° Bielle et manivelle.

Les excentriques offrent toutes les ressources qu'on peut désirer, géométriquement parlant, pour réaliser un mouvement oscillatoire quelconque. Seulement ces appareils donnent lieu à des frottements très-notables, dès que les efforts mis en jeu sont un peu grands : de sorte que, sous ce rapport, les combinaisons de tiges assemblées à charnière sont préférables. L'organe principal est toujours une bielle, articulée en un point d'une manivelle qui tourne d'une manière continue. L'extrémité de la bielle, opposée au bouton de la manivelle, doit être guidée suivant une trajectoire déterminée; elle accomplit sur cette trajectoire, quelle qu'en soit la nature, des oscillations dont les lois ne diffèrent pas sensiblement des lois de la projection du mouvement circulaire uniforme, pourvu que la bielle ait une longueur suffisante.

Le système le plus simple est celui qui se rencontre dans la pédale du rémouleur, dans le rouet à filer, et aussi dans les puissantes machines à vapeur à balancier (*Pl. XXVII, fig.* 235). L'extrémité libre de la bielle vient s'articuler à un balancier, lequel oscille autour d'un point fixe. Le point d'articulation se trouve ainsi assujetti à rester sur une circonférence de cercle : il parcourt d'un mouvement alternatif un certain arc B_0B_1 de cette circonférence (si les proportions des divers éléments sont convenables), tandis que la manivelle tourne d'une manière continue (*).

Mouvement rectiligne alternatif. — Dans les machines à vapeur horizontales, l'extrémité de la bielle décrit une ligne

(*) La bielle tourne à chaque instant autour du point C, intersection de la manivelle et du balancier prolongés. On se fait une idée géométrique du mouvement continu de la bielle en construisant (*fig.* 235) le double lieu décrit par le centre instantané, soit dans l'espace absolu, soit relativement à la bielle. La *fig.* 236 répond au cas où le mouvement de l'extrémité oscillante de la bielle est rectiligne.

droite (*fig.* 236). En supposant la rotation de la manivelle uniforme, les propriétés du centre instantané de rotation font connaître les lois du mouvement du point B. On construit les courbes représentatives de ce mouvement (*fig.* 237), en portant sur un axe horizontal B_1P des longueurs proportionnelles aux arcs décrits par le point A (arcs qui sont eux-mêmes proportionnels aux temps), et élevant en chacun des points ainsi déterminés, tels que p, des ordonnées égales respectivement aux espaces parcourus, aux vitesses et aux accélérations (*).

Ces courbes donnent lieu aux remarques suivantes :

1° La courbe des espaces ne présente plus la symétrie des sinusoïdes de la *fig.* 231, qui répondent au mouvement oscillatoire le plus parfait. Cependant la différence entre les deux formes n'est peut-être pas très-appréciable; et à ce point de vue les inconvénients résultant du peu de longueur de la bielle ne seraient pas de nature à frapper vivement les regards.

2° En examinant la courbe des vitesses, on reconnaît que la vitesse maxima ne coïncide plus avec le milieu de la course, de sorte que la demi-oscillation CB_1 s'effectue plus vite que CB_0. Le rapport des temps qui correspondent à ces deux parcours est marqué par le rapport des lignes IK et CI (**).

(*) Pour avoir les ordonnées de la courbe des vitesses, nous déterminerons par la construction indiquée (p. 273) la vitesse BQ, qui correspond à la position B de l'extrémité de la tige du piston; et nous porterons cette longueur dans un sens convenable sur l'ordonnée du point p. Quant à ce qui concerne l'accélération, nous remarquerons que le lieu du point Q est une courbe qui donne la vitesse en fonction de l'espace parcouru. Or on a

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds};$$

donc l'accélération n'est autre chose que la sous-normale $v\frac{dv}{ds}$ de la courbe B_0QB_1.

(**) *Métier Taylor.* — Cette propriété a été mise à profit dans la construction d'un métier à tisser destiné à fonctionner avec une grande vitesse. Le battant reçoit son mouvement d'une bielle, qui possède à peine une fois et demie la longueur de la manivelle. La portion de l'excursion correspondant au coup de battant s'effectue plus rapidement que l'autre, le passage reste donc plus longtemps ouvert pour une même excursion totale : ce qui revient à dire que, pour un temps donné nécessaire au passage de la navette, on peut battre plus de coups par minute.

3° Enfin, avec les données que nous avons choisies,

$$AB = \frac{3}{2} OA,$$

la courbe des accélérations présente trois lobes au lieu de deux; et l'une des ordonnées maxima est de beaucoup supérieure à celle qui correspondrait à l'hypothèse d'une bielle infinie. Nous verrons, en Dynamique, quelle est la signification de ce résultat.

Proportions des bielles. — Toutes ces remarques n'ont pas une grande importance lorsque, conformément à la pratique de Watt, on donne à la bielle au moins cinq fois la longueur de la manivelle. On descend aujourd'hui beaucoup au-dessous de cette limite : soit quand on ne dispose pas d'une place suffisante, soit quand on a en vue quelque résultat spécial, comme dans la machine que nous avons signalée en note.

Transformation du mouvement alternatif en mouvement continu.

Lorsque, dans les appareils que nous venons de décrire, l'organe moteur est celui qui est animé du mouvement alternatif, il semble qu'aux deux points morts A_0 et A_1 (*fig.* 235) le balancier se trouve dans l'impossibilité de communiquer le mouvement à la manivelle. Cependant tout le monde a vu ou fait fonctionner des appareils de ce genre; et chacun sait que, sauf quelques précautions au moment du *démarrage* (*), le mouvement continu est facile à produire et à entretenir. Nous donnerons en Dynamique les conditions nécessaires et suffisantes pour arriver à ce résultat.

2° Encliquetages.

Roue à rochet. — On connaît sous le nom de *rochet* une roue dont les dents sont généralement dissymétriques (*Pl. XXIII, fig.* 224 *bis*). L'accessoire obligé de cette sorte de

(*) Dans les locomotives, il est tout à fait indispensable d'avoir, pour donner le mouvement à l'arbre de la roue motrice, deux machines distinctes dont les points morts ne coïncident pas, afin d'être à même de démarrer en toute position.

roue est un *cliquet*, qui s'engage dans l'intervalle de deux dents, et qui est maintenu dans cette position par un ressort.

On voit que le cliquet, organe purement passif, empêche l'arbre de la roue à rochet de tourner dans le sens de la flèche *f*. Quant au mouvement dans le sens opposé, il s'effectue à peu près comme si le cliquet n'existait pas.

Les *encliquetages* sont des engins dont la destination est diverse, mais dont l'organe principal est toujours une roue plus ou moins analogue au rochet que nous venons de décrire. Quand le cliquet, au lieu d'être articulé en un point fixe, est, comme C, attaché à une pièce mobile (*fig.* 225 *bis*), le mouvement descendant de cette pièce détermine une rotation de l'arbre du rochet, tandis qu'un mouvement inverse laissera cet arbre immobile. De la sorte, on peut communiquer un mouvement continu (ou tout au moins progressif) à un treuil O, en imprimant au levier L un mouvement alternatif (*). Il faut avoir soin d'installer quelque part un cliquet rétenteur C_1, afin d'empêcher le cylindre de revenir en arrière, pendant qu'il ne reçoit pas d'effort moteur.

La facilité avec laquelle un manœuvre peut développer un effort considérable en agissant à l'extrémité du levier, pour lui imprimer un mouvement de va-et-vient, rend cet organe précieux pour appliquer la force de l'homme. Un treuil à encliquetage remplace avantageusement le treuil à manivelle, pour élever les matériaux à la partie supérieure d'une maçonnerie. L'ouvrier abaisse et relève alternativement le levier, dont chaque oscillation fait passer une dent de la roue : le mouvement se communique ainsi à l'arbre du treuil, et produit l'enroulement de la corde, qui passe sur une poulie de renvoi, et vient enfin s'attacher au fardeau qu'il s'agit d'enlever. Un contre-poids fait que le manœuvre exerce seulement son action de haut en bas.

Levier de la Garousse. — Le levier de la Garousse (*fig.* 226 *bis*), connu depuis le dernier siècle, porte un double cliquet moteur, de manière qu'il y a effort exercé sur le rochet, pour

(*) L'emploi des encliquetages fournit le seul moyen connu, qui permette de fonder uniquement sur des combinaisons géométriques la transformation d'un mouvement oscillatoire en mouvement progressif.

chaque oscillation simple : on diminue ainsi les intermittences du mouvement.

Pied-de-biche des scieries. — On trouve également un cliquet moteur, ou pied-de-biche, dans les scieries mécaniques à mouvement alternatif, pour commander la crémaillère qui fait avancer la pièce de bois à chaque coup de scie.

Inconvénients des encliquetages ordinaires.

Ces inconvénients sont : d'une part les chocs bruyants du cliquet sur la roue, et de la roue sur le cliquet, d'autre part les temps perdus qui résultent de ce que le cliquet n'est jamais exactement en prise, à la position du repos.

On évite le bruit par l'emploi de l'*encliquetage muet* (*fig.* 227 *bis*), dans lequel le cliquet, au lieu d'être chassé par un ressort, est mû par un levier qui le met en place au moment convenable.

Mais les encliquetages les plus parfaits, au point de vue de la suppression complète du bruit, des chocs et des temps perdus, sont les encliquetages à frottement, dont nous exposerons plus tard la théorie, et dont nous allons dès à présent citer un exemple.

Encliquetage Dobo (*fig.* 228 *bis*). — Le rochet denté est remplacé par une roue folle A, qui reçoit directement le mouvement et doit le transmettre à l'arbre O. Celui-ci porte quatre ailes $a, a, \ldots$, articulées près du centre, et maintenues par des ressorts de façon que l'extrémité de leur courbe extérieure touche la circonférence de la roue.

Ceci posé, il est facile de comprendre le jeu de l'appareil. Quand la roue tourne dans le sens de la flèche, sa circonférence intérieure frotte contre la courbe extérieure des leviers, oblige les petits ressorts à fléchir, et n'entraîne pas l'arbre dans son mouvement, parce que chaque aile cède sous l'action du frottement.

Quand la rotation a lieu en sens inverse, le frottement tend également à faire tourner les leviers autour de leurs axes: mais comme la longueur de la ligne menée de l'angle I à l'axe E est telle, que cette extrémité peut s'éloigner du point O, à une distance plus grande que le rayon intérieur de la jante, il

se produit un arc-boutement des leviers contre la roue, ce qui les rend, ainsi que l'arbre, solidaires avec celle-ci.

Les ressorts étant disposés de manière à tenir constamment l'angle extérieur des ailes appliqué contre la surface interne de la roue, l'action de cet encliquetage se produit dès que le mouvement commence en sens contraire de la flèche (*).

3° Combinaisons de pièces articulées.

En combinant un certain nombre de balanciers, bielles, liens, et en général de pièces rigides réunies par des articulations, on obtient assez simplement des mouvements oscillatoires d'une grande complication.

Nous n'insisterons pas sur ces mécanismes, dont l'usage est naturellement restreint à un petit nombre de cas spéciaux; mais nous devons décrire avec détails l'application curieuse des propriétés des systèmes articulés à la production d'un mouvement à peu près rectiligne.

Parallélogramme de Watt.

Dans les machines à vapeur à balancier, la tige du piston, après avoir traversé dans une boîte à étoupes, ou *stuffing box*, le couvercle supérieur du cylindre, vient s'articuler à un lien dont l'autre extrémité est fixée au balancier. On transforme ainsi le mouvement oscillatoire rectiligne du piston et de sa tige en un mouvement oscillatoire circulaire (**); mais il im-

---

(*) M. Clair a construit de petits appareils fort ingénieux, fondés sur les propriétés de l'encliquetage Dobo, pour transformer directement en circulaire continu un mouvement, rectiligne ou circulaire, dont le sens change à des intervalles irréguliers. L'un de ces appareils a été appliqué à l'indicateur de Watt, que nous étudierons plus tard.

(**) *Sur la machine à vapeur, considérée au point de vue de la transmission du mouvement.*

Avant Watt, le balancier de la machine à vapeur se terminait par un secteur circulaire, au sommet duquel venait s'attacher une chaîne, fixée d'autre part à la tige du piston. Celui-ci n'avait ainsi d'action sur le balancier que pendant son mouvement descendant : le retour s'effectuait au moyen d'un contre-poids. Ce système était à la rigueur suffisant, pour des machines servant exclusivement à l'épuisement des mines.

Le parallélogramme de Watt rendit possible la machine de rotation, c'est

porte d'empêcher que l'extrémité supérieure de la tige du piston ne se trouve soumise à des efforts obliques de la part du lien, ce qui amènerait promptement des fuites de vapeur par la boîte à étoupes. Le *parallélogramme de Watt* résout le problème du guidage de la tige en ligne droite, seulement d'une manière approximative, mais avec une exactitude suffisante pour la pratique.

On facilite la théorie géométrique de cet appareil, en considérant d'abord la combinaison plus claire qui constitue le *balancier à bride* ou *parallélogramme simple*.

Soit OA (*fig.* 238) le balancier, M l'extrémité de la tige du piston, qui doit parcourir la verticale TT'. Prolongeons le lien AM d'une certaine quantité MB, et relions le point B à

à-dire une machine dans laquelle le mouvement alternatif du piston détermine la rotation continue d'un arbre de couche, par l'intermédiaire du parallélogramme, du balancier, de la bielle et de la manivelle. Seulement les machines de Watt ont le grave inconvénient d'occuper avec leurs accessoires une place considérable, et on est conduit à supprimer tout cet attirail dans un grand nombre de cas. Voici quelques-unes des dispositions actuellement en usage pour transformer plus simplement le mouvement oscillatoire du piston, en un mouvement de rotation continu.

Machines à connexion directe. — Maudslay articule directement la tige du piston sur la bielle qui conduit la manivelle (*Pl. XVIII, fig.* 2[4]; l'extrémité de la tige est guidée par deux montants verticaux, entre lesquels se meut un galet qui doit rouler successivement sur l'un et sur l'autre. Nous avons déjà dit qu'il est préférable de remplacer le galet par des glissières à larges surfaces, qui permettent de graisser convenablement les contacts.

Aujourd'hui, dans toutes les machines horizontales, la tige du piston se termine par une *coquille*, munie de deux larges patins embrassant des guides fixes au couvercle du cylindre (*Pl. XV, fig.* 136). En composant ces guides de deux flasques jumelles situées de part et d'autre de la tige, tout l'espace intermédiaire reste libre pour le passage de la bielle. On place aussi les guides dans le plan vertical de la tige, alors la partie de la bielle qui vient s'articuler sur la coquille a la forme d'une fourche. Ce dernier système paraît être de moins en moins employé.

Machines oscillantes. — Dans les machines de M. Cavé (*fig.* 2[5]), le cylindre est mobile sur deux tourillons qui lui permettent de s'incliner de part et d'autre de sa position moyenne. La tige remplit alors la fonction de bielle, et commande directement la manivelle.

Machines à fourreau. — Enfin, dans certaines machines de bateau à hélice, où la place est excessivement restreinte, la tige du piston est creuse : elle forme une sorte de fourreau, dans l'intérieur duquel joue librement la bielle, articulée sur le piston lui-même. Ces machines sont fort répandues dans la marine anglaise.

un deuxième centre fixe E, au moyen d'une bride ou contre-balancier BE. Nous retrouvons ici trois droites articulées de longueur constante; seulement les mouvements des points A et B sont actuellement réduits à de simples oscillations, qui s'effectuent suivant des arcs de cercle à courbures inverses.

Un point tel que M, situé vers le milieu du lien, décrit une courbe connue sous le nom de *courbe à longue inflexion*. Cette courbe, considérée dans son ensemble, présente à peu près la forme d'un 8; elle s'infléchit trois fois en des points très-rapprochés l'un de l'autre, I, I', I'' : dans la région voisine de ces trois points d'inflexion, on peut trouver un arc assez long qui s'écarte fort peu d'une ligne droite. Or, il est facile, en choisissant convenablement les nombreux paramètres dont on dispose, de s'arranger de manière à faire coïncider cette portion de la trajectoire du point M avec la verticale suivant laquelle se meut l'extrémité de la tige du piston : c'est ainsi qu'on arrive à guider celle-ci, sans faire intervenir le frottement direct.

Règles données par Watt. — Ces préliminaires géométriques étant établis, voici comment Watt a réalisé sa conception. Considérant les deux positions limites du balancier, A_1, A_2 (*fig.* 239), Watt commence par placer la corde de l'arc A_1A_2 verticalement; puis menant l'horizontale OA, bissectrice de l'angle décrit par le balancier, il fait coïncider le milieu P de la flèche correspondante avec la verticale qu'il s'agit de faire décrire au point M. Enfin ce point M est pris exactement au milieu du lien, et l'on donne à la bride une longueur égale à celle du balancier.

Cela fait, on s'impose la condition que la tige soit rigoureusement verticale au commencement, au milieu et à la fin de sa course. Comme on connaît la longueur constante AM, il est facile, en prenant successivement les trois points A, A_1, A_2 pour centres, avec une ouverture de compas égale à cette longueur, ou à la demi-longueur du lien, de marquer sur la verticale TT' trois points M, M_1, M_2 de la courbe à longue inflexion. Si l'on prolonge les lignes AM, A_1M_1, A_2M_2, de longueurs égales au deuxième segment du lien (ce que nous n'avons pas indiqué sur la figure pour ne pas introduire de confusion),

on obtient trois positions de l'extrémité B de la bride : en faisant passer une circonférence par ces trois positions, on détermine le point fixe E de celle-ci.

D'après les proportions adoptées, il est évident : 1° que la longueur de la bride est égale à celle du balancier; 2° que l'arc décrit par l'extrémité de cette bride est en tout symétrique de l'arc A_1A_2, par rapport à la ligne TT'.

On établit tout aussi facilement les conséquences suivantes :

1° La corde A_1A_2 est égale à la course du piston, et le milieu de cette course répond au milieu de l'oscillation du balancier;

2° Les angles du lien avec la tige ont leurs valeurs maxima égales dans les deux sens, ce qui réduit autant que possible la grandeur absolue de ces maxima;

3° La position moyenne M est un des trois points d'inflexion de la courbe, et la tangente en ce point coïncide avec la direction normale du mouvement.

Soient R le rayon du balancier, C la course du piston (égale à la corde A_1A_2), f la flèche, et θ la demi-amplitude de l'oscillation circulaire; on a

$$OP = \frac{1}{2} R(1 + \cos\theta).$$

En prenant, toujours avec Watt, la longueur OP triple de la demi-course, ou du sinus de l'arc AA_1, on a

$$\frac{1}{2} R(1 + \cos\theta) = 3R \sin\theta,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{6}, \quad \theta = 18°55'28''.$$

Avec ces données, les quantités R, C, f sont entre elles comme les nombres entiers

$$37,\ 24,\ 2.$$

Quant à la longueur du lien, on la prend égale au plus à la corde C, et au moins à $\frac{6}{7}$ C.

Parallélogramme articulé. — Le parallélogramme articulé (*Pl. XIV, fig.* 143) est une modification du parallélogramme simple, imaginée dans le but de diminuer la place occupée par le contre-balancier. Les propriétés géométriques des deux organes sont d'ailleurs exactement les mêmes.

M étant toujours le point d'articulation de la tige du piston, au lieu de prolonger le lien AM, on construit sur la portion AA′ du balancier (portion généralement égale à la moitié de la longueur totale OA) un parallélogramme articulé, dont le sommet B′ est rattaché par une bride à un point fixe E.

Pour comprendre le jeu de ce mécanisme, tirons la ligne OM, et remarquons que cette droite coupe toujours au même point M′ le côté A′B′ du parallélogramme. Cette propriété résulte immédiatement du parallélisme des lignes AM et A′B′. Les triangles semblables qui démontrent ce lemme donnent également la proportion

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OA},$$

c'est-à-dire que M′ décrit une courbe semblable au lieu du point M. Or, les trois tiges OA′B′E constituent un parallélogramme simple; donc la trajectoire du point M′, et par suite celle du point M, est précisément la courbe à longue inflexion, que nous venons d'étudier (*). Seulement, par l'introduction du parallélogramme proprement dit, le point E se trouve beaucoup rapproché de l'ensemble de la machine (**).

(*) Dans les machines à vapeur ordinaires, on utilise la propriété du point M′, qui décrit, comme nous venons de le voir, une trajectoire semblable à celle du point M, en fixant en ce point la tige de la pompe à air. Enfin, dans les machines à deux cylindres de Woolf, le point M′ sert à articuler la tige d'un deuxième piston à vapeur; dans ce cas, pour placer la tige de la pompe à air, on construit un second parallélogramme sur A′M′, et l'on obtient un point M″ qui décrit une courbe à longue inflexion semblable aux deux précédentes.

(**) *Parallélogramme des bateaux.* — Pour appliquer le parallélogramme de Watt aux machines de bateaux, il est nécessaire de restreindre encore l'espace occupé par toutes les pièces encombrantes. Aussi le balancier est-il placé au-dessous de la tige (*fig.* 240) : le point d'appui est pris sur le cylindre lui-même. On ramène facilement ce système, comme théorie géométrique, au parallélogramme simple.

Parallélogramme de Tchébychef. — Nous nous abstiendrons de mentionner diverses modifications du parallélogramme de Watt, conçues en vue de rendre la déviation rigoureusement nulle. Il n'est certes pas difficile d'obliger un point à suivre une trajectoire rectiligne; mais ce qui caractérise la belle invention de Watt, c'est que le parallélogramme articulé permet, sans notables inconvénients pratiques, de sacrifier la rigueur absolue du guidage à la suppression du glissement.

Seulement, ce principe étant admis et la disposition générale de Watt adoptée, si l'on discute les règles au moyen desquelles nous avons déterminé les nombreux éléments géométriques du parallélogramme, on reconnaît bien vite que ces règles ont été établies en vue d'avantages purement secondaires (quelques-uns même tout à fait hypothétiques), tandis que l'objet principal aurait dû être de diminuer le plus possible la déviation.

Il est juste de dire que la question ainsi posée est excessivement difficile à aborder, ce qui explique comment elle est restée tout à fait intacte jusqu'aux travaux récents de M. Tchébychef (*). Indiquons brièvement les principaux résultats des savantes recherches de ce géomètre.

Et d'abord, il n'y a aucun avantage particulier à donner à la tige guidée la direction tout à fait exacte au commencement, au milieu et à la fin de la course; il est même facile de voir que cette disposition n'est pas la plus favorable, pour la précision du jeu de l'organe dans les autres points de l'excursion du piston.

En effet, soit A_1A_2 la droite de Watt (*fig.* 241), il est évident qu'il existe une droite plus rapprochée que celle-là de l'arc décrit par le point M; et en général, quand on veut atténuer les irrégularités d'une fonction quelconque, il convient toujours de faire en sorte que l'écart soit un maximum aux deux extrémités de l'intervalle considéré.

En deuxième lieu, nous n'avons fait appel à aucune raison de quelque valeur, pour déterminer la position la plus avantageuse de la tige du piston par rapport au balancier. Cette position,

(*) *Académie de Saint-Pétersbourg : Mémoires des Savants étrangers*, t. VII; 1854.

d'après M. Tchébychef, dépend essentiellement des dimensions du parallélogramme.

Si l'on suppose celui-ci construit sur la demi-longueur du balancier (comme Watt l'a fait lui-même, et comme on doit le faire si l'on est maître de disposer des dimensions du parallélogramme), on diminue notablement la limite de la déviation de la tige de sa direction normale en l'approchant du centre du balancier, plus qu'on ne devrait le faire d'après la règle que nous avons donnée un peu plus haut.

Quand on tient à rendre la tige tout à fait verticale, au commencement, au milieu et à la fin de la course, on doit prendre pour sa direction la ligne qui divise le sinus verse de l'arc décrit par l'extrémité du balancier, dans le rapport de 2 à 1; et si, obéissant à des idées plus rationnelles, on ne cherche pas l'exactitude absolue dans les deux positions extrêmes de la tige, il faut prendre pour cette direction la ligne qui divise le sinus verse dans le rapport de 5 à 3.

Dans ce dernier cas, la tige guide ne sera plus déterminée par les positions limites du balancier, mais par des positions qui précèdent celles-ci, d'un quarantième à peu près de l'amplitude de l'oscillation.

« On s'assure par l'analyse, dit M. Tchébychef, qu'avec ces modifications la limite de déviation de la tige par rapport à la ligne verticale diminue de plus de moitié. »

Cette limite a été plus tard singulièrement reculée par le même savant, qui, rompant de plus en plus avec la tradition de Watt, tout en restant fidèle à ses principes, propose (*) de remplacer le parallélogramme ordinaire par un dispositif fort analogue (*fig.* 252), dans lequel on remarquera l'existence d'un nombre précisément égal de tiges et d'articulations.

O et E sont les deux centres fixes, M est le point d'articulation de la tige du piston (dans la position moyenne, représentée par la *fig.* 243, les points M et E sont confondus). Enfin, AM et A'P sont deux liens, qui ne restent pas parallèles dans le

(*) T. IV du *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, p. 433 (1861).

mouvement, de sorte que l'appareil ne mérite plus, à proprement parler, le nom de parallélogramme.

Les dimensions des diverses tiges sont les suivantes :

$$OA = 1,$$

$$EQ = MQ = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$AA' = EP = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$PQ = \frac{1}{2}OA',$$

$$AM = A'P < \frac{1}{2}\text{ course}.$$

M. de Prony a calculé qu'en suivant les indications de Watt, supposant l'amplitude de l'oscillation du balancier égale à 35° 11′, et prenant

$$OA = 2^{m},515,$$
$$AM = 0^{m},762,$$

on avait 2 millimètres de déviation. En appliquant tous les perfectionnements ci-dessus indiqués, on trouve seulement $0^{mm},05$, c'est-à-dire quarante fois moins.

« On est donc certain, conclut M. Tchébychef, qu'il n'y a aucune raison, pour les cas ordinaires de la pratique, de rechercher un mécanisme capable de donner le mouvement rectiligne avec une précision supérieure. »

CHAPITRE VI.

ORGANES SERVANT A ÉTABLIR, INTERROMPRE OU MODIFIER UNE LIAISON DE MOUVEMENT.

Quelle que soit la nature du moteur chargé de donner le mouvement à une usine un peu considérable, on s'arrange ordinairement de manière à transmettre tout d'abord l'action de ce moteur à un arbre tournant; de plus, par une série de dispositions dont nous verrons plus tard la théorie, on rend le mouvement de l'arbre de couche à peu près uniforme : c'est-à-dire qu'on maintient les variations de la vitesse entre des limites qui n'empêchent pas les différents outils commandés par cet arbre de fonctionner constamment dans les conditions les plus avantageuses.

Ce premier point une fois réalisé, comme on connaît, par les chapitres précédents, les moyens à employer pour passer d'un mouvement circulaire uniforme à un mouvement quelconque, il n'y a rien de plus facile que de déterminer les éléments de la liaison à établir entre l'arbre de couche, et chacun des outils de l'atelier.

Il faut avoir en outre, en un certain point de la transmission, un système d'embrayage qui permette d'ouvrir ou de fermer la communication entre le moteur et l'outil, soit automatiquement, soit à volonté; quelquefois même on veut se ménager la facilité de modifier la liaison des deux organes pendant le cours du mouvement. Il nous reste à étudier les engins qui répondent à cette double fonction.

§ XIV. — Organes de mise en mouvement et d'arrêt.

Embrayage des courroies. — Nous avons dit que, dans les transmissions par courroies sans fin, on produit l'embrayage en faisant passer la courroie, de la poulie folle sur la poulie

motrice. Pour arrêter la machine, on ramène la courroie sur la poulie folle ; et ensuite, selon les cas, on laisse la machine s'arrêter d'elle-même, ou bien on emploie un frein (*) pour éteindre plus vite son mouvement.

On arrive aux mêmes résultats en agissant sur la tension de la courroie : ce qui peut se faire, soit en manœuvrant convenablement une poulie de tension, soit en déplaçant d'une petite quantité un palier de l'un des arbres (*fig.* 246).

Cylindres et cônes de friction. — C'est également en établissant ou supprimant la pression qu'on opère l'embrayage ou le débrayage d'une paire de cylindres de friction. Nous avons indiqué l'application de ce principe aux monte-sacs.

On emploie quelquefois un procédé analogue pour élever et laisser retomber périodiquement un marteau vertical. La roue motrice et la tige du marteau (*Pl. XXIX, fig.* 246 *bis*) se trouvent à une très-faible distance l'une de l'autre ; et il suffit, pour faire soulever la tige, de l'appuyer contre la poulie au moyen d'un galet fixé à un levier coudé. Quand on lâche le levier, le marteau retombe. En faisant varier la hauteur de chute, on règle à volonté la force des coups de marteau.

Accouplement de deux arbres situés dans le prolongement l'un de l'autre. — Quand un arbre d'une certaine longueur doit être composé de deux pièces rapportées bout à bout, il faut, pour établir une solidarité parfaite entre les deux parties : 1° centrer bien exactement les deux arbres ; 2° les empêcher de tourner indépendamment l'un de l'autre ; 3° enfin, s'opposer à tout déplacement longitudinal. On atteint ce triple résultat en enveloppant les deux arbres d'un *manchon* calé sur chacun d'eux, au point où a lieu la solution de continuité. Ce manchon est maintenu dans une position fixe au moyen d'une vis qui le traverse, et qui s'engage dans le vide existant entre les abouts des deux pièces : une *languette à ergots*, ou tout autre système équivalent, empêche de son côté l'écartement des deux tronçons. Telle est la disposition en usage quand on veut constituer un assemblage invariable.

(*) Nous ne faisons pas figurer les freins parmi les organes d'arrêt, parce que nous étudions seulement ici les appareils qui opposent une impossibilité *géométrique* à la continuation d'un mouvement.

Dans la plupart des cas, on tient à se réserver la faculté de supprimer à volonté la solidarité entre les deux portions de l'arbre; alors, au lieu d'un manchon unique établissant une liaison invariable, on emploie un *manchon d'embrayage*, composé de deux parties, l'une fixe, l'autre mobile (*fig.* 249), qu'on approche ou qu'on éloigne au moyen d'une fourchette (*). La partie fixe du manchon est calée sur l'arbre qui reçoit directement l'action du moteur, l'autre est munie d'une languette ou prisonnier qui l'oblige à tourner avec l'arbre conduit, en lui laissant la faculté de se mouvoir dans le sens de l'axe. La solidarité entre les deux moitiés est obtenue par le moyen de dents ou griffes (**), qui s'engagent les unes dans les autres quand on agit sur la fourchette d'embrayage.

Embrayage à cônes de friction. — On supprime quelquefois les dents, et l'on donne aux deux parties du manchon la forme de surfaces coniques égales, l'une concave, l'autre convexe (*fig.* 247). En appuyant légèrement ces cônes l'un contre l'autre au moyen de la fourchette, on détermine un frottement très-dur, qui empêche les deux arbres de tourner l'un sans l'autre. Ce mode d'assemblage n'a pas la rigidité des assemblages ordinaires (***); aussi, lorsqu'il survient une

---

(*) Si les manchons sont trop lourds pour être manœuvrés directement à la main, on fixe à la fourchette une bielle (*fig.* 250), dont l'extrémité s'articule à un levier rappelé par une vis. Les collets de la vis sont montés sur deux tourillons, et lui permettent de prendre une légère obliquité.

(**) Ces dents sont généralement dissymétriques (*fig.* 249) : elles sont limitées, d'un côté par des plans conduits par l'axe, de l'autre par des surfaces héliçoïdales à plan directeur. Il est alors indispensable que la rotation ait constamment lieu dans le sens de la flèche *f* : autrement, les deux parties du manchon glisseraient l'une sur l'autre, et le débrayage se produirait de lui-même.

On fait aussi des manchons à dents droites (*fig.* 250), qui permettent la transmission dans les deux sens. Avec cette disposition, il y a forcement choc au moment de l'embrayage et du désembrayage, tandis que, dans le cas précédent, avant l'instant où la liaison des deux manchons est parfaite, il se produit un glissement préparatoire des dents les unes sur les autres, ce qui ménage la transition du repos au mouvement.

(***) La disposition représentée (*fig.* 248), qui se rapporte à la liaison de deux arbres parallèles, offre de l'analogie avec celle qui nous occupe. Elle présente plus de sécurité que les galets de friction, tout en conservant comme réserve extrême la possibilité du glissement en cas d'accident.

résistance exceptionnelle, les cônes ont-ils la ressource de frotter sans se communiquer le mouvement, ce qui évite les chocs et les ruptures.

Désembrayage brusque d'une machine puissante. — Lorsqu'on a besoin de désembrayer brusquement une machine d'une grande puissance, il serait peu commode et peu sûr, en agissant sur une fourchette d'embrayage, d'exercer une pression qui suffît à dégager promptement le manchon mobile. Dans ce cas on ménage, entre les deux parties du manchon (*fig.* 251), une fente dont la largeur diminue progressivement jusqu'à devenir nulle en un point de la circonférence. On chasse dans cette fente, à l'instant où l'on veut désembrayer, une forte tige de fer, espèce de verrou maintenu solidement par des guides dans une position perpendiculaire à l'axe de rotation des arbres. Cette pièce une fois engagée fait effort contre les parois de la fente, par suite du mouvement même de l'arbre, et la rupture de la liaison des deux pièces se trouve produite automatiquement.

Embrayage d'un engrenage (*fig.* 252 et 253). — Les manchons d'embrayage servent aussi à caler à volonté une roue folle A (*fig.* 252). Les griffes sont disposées de manière à pénétrer dans les intervalles des bras de la roue, lorsque le manchon est suffisamment rapproché. La roue A se trouvant ainsi calée sur son arbre, celui-ci devient solidaire avec l'arbre de la roue B (*).

On peut encore établir ou supprimer la dépendance de deux arbres reliés par un engrenage, en donnant à l'un d'eux la faculté de glisser longitudinalement, d'une quantité suffisante pour que les dentures cessent d'être en regard.

L'arbre mobile porte deux gorges (*fig.* 253) : un *levier d'arrêt* T le maintient dans la position que l'on veut. Sur la figure, on voit les deux roues désembrayées; pour embrayer, on soulèverait le levier d'arrêt, on pousserait vers la

(*) On peut appliquer ce principe de deux manières différentes. Si le moteur agit sur l'arbre à manchon, cet arbre tourne continuellement : mais les deux roues dentées, ainsi que l'arbre de la roue B, restent immobiles quand le manchon n'est pas embrayé. Si au contraire l'action du moteur s'exerce sur le deuxième arbre, l'arbre de la roue A ne tourne que lorsque le manchon est embrayé.

gauche l'arbre rendu à la liberté, et l'on ferait retomber le levier d'arrêt dans la seconde gorge.

Les deux axes peuvent n'être pas parallèles.

Déclics.

Les déclics servent à produire un mouvement ou un arrêt brusque. On les applique surtout aux machines peu puissantes, ou aux organes accessoires des machines plus importantes.

La manœuvre de ces appareils est quelquefois automatique et confiée à la machine elle-même, comme dans l'exemple que voici.

La poulie K (*fig.* 254) est folle sur l'arbre O, animé d'un mouvement de rotation continu dans le sens de la flèche *f* : un doigt calé sur l'arbre, qui bute contre un taquet fixé à la poulie, oblige celle-ci à tourner solidairement avec l'arbre. Mais le taquet n'est pas lié à la poulie d'une manière invariable : il forme l'une des extrémités d'un levier dont le point fixe est en F ; et, dans l'état ordinaire des choses, un ressort pèse sur le petit bras de ce levier, de manière à maintenir le taquet en prise.

A un certain instant du mouvement, la queue du levier rencontre un arrêt qui, en la faisant basculer, produit le déclanchement du taquet : alors la poulie, abandonnée à elle-même, tourne en sens contraire sous l'action du contre-poids P. Mais bientôt le doigt dégagé revient saisir le taquet, et la rotation recommence dans le sens (*f*).

Sonnette à déclic. — Pour enfoncer les pilotis, on emploie un *mouton*, c'est-à-dire une masse pesante qu'on soulève par divers procédés à une certaine hauteur, et qu'on laisse ensuite retomber sur la tête du pieu (*fig.* 257). L'appareil qui sert à cette manœuvre, depuis un temps immémorial, est la *sonnette à tiraude*. Le mouton est maintenu par deux oreilles entre deux pièces de bois verticales : il est suspendu à une corde qui passe sur une poulie de renvoi, pour se diviser ensuite en plusieurs cordelles dont chacune est tirée par un homme. Ce système permet de graduer à volonté l'effort exercé : il est excellent pour commencer le battage. Mais, à mesure que l'opération avance, on rencontre une résistance

plus grande, et il faut de toute nécessité augmenter la course du mouton ou son poids. Or, quel que soit le parti auquel on s'arrête, on arrive rapidement à une limite d'élévation et de poids qu'on ne saurait dépasser, vu la nature du moteur employé.

En effet, il est évident qu'on ne peut pas augmenter beaucoup la course. D'autre part, si l'on donne au mouton un poids considérable, il faudra avoir un grand nombre de manœuvres agissant sur des cordes très-écartées : ces hommes se gêneront mutuellement, et ne pourront exercer efficacement leur action. Il convient, dans ces conditions, de remplacer la sonnette à tiraude par un treuil à engrenages, donnant le mouvement à un arbre sur lequel s'enroule la corde du mouton, après avoir passé sur une poulie de renvoi. Un déclic fait retomber le mouton, parvenu à la hauteur voulue.

Voici à cet égard le procédé le plus simple : la corde, après avoir fait une ou deux fois le tour de l'arbre du treuil, vient aboutir dans la main d'un homme, qui la maintient suffisamment tendue. Pour supprimer la transmission et faire tomber le mouton, l'homme n'a qu'à lâcher la corde.

D'autres fois, entre le mouton et la corde qui sert à l'élever, on dispose une pièce intermédiaire, à laquelle le mouton proprement dit est accroché par un anneau engagé dans une pince articulée (*fig.* 258). Cette sorte de tenaille vient buter à une certaine hauteur contre un obstacle fixe, qui la force à s'ouvrir en lâchant le mouton.

La pince est conformée de manière à ressaisir l'anneau d'elle-même, quand on la laisse tomber à son tour.

Trépan à chute libre. — M. Kind a employé un système analogue pour le forage des trous de sonde. L'outil de percussion, ou *trépan,* est fixé à une série de tiges dont la longueur totale est égale à la profondeur du trou. Or, dès que cette profondeur devient un peu considérable, non-seulement le poids des tiges tend à briser les parties inférieures, mais de plus, lorsqu'on vient à battre, c'est-à-dire à soulever la sonde et à la laisser retomber pour défoncer le sol, les tiges dégradent latéralement le forage par leur fouettement; et leurs vibrations provoquent des éboulements, par suite desquels le trépan peut se trouver engagé.

Ce double inconvénient est évité par l'emploi du trépan à chute libre de M. Kind (*Pl. XXX, fig.* 270).

Au moment où la sonde est abandonnée à elle-même, l'eau dont le trou est toujours rempli soulève le disque qu'on voit à la partie supérieure de la figure : les branches inférieures de la pince *p, p,* s'écartent, et lâchent la tige T, à l'extrémité de laquelle se trouve le trépan. Celui-ci continue son mouvement accéléré, tandis que les tiges descendent lentement, par suite de la résistance que l'eau oppose au mouvement du disque-parachute. Le choc qui se produit sur la tête du trépan permet aux crochets de ressaisir l'outil, pour le soulever de nouveau.

Cataracte des machines de Cornouailles. — Dans les machines d'épuisement dites *de Cornouailles,* l'admission de la vapeur dans le cylindre a lieu en vertu d'un déclic manœuvré par un appareil spécial appelé *cataracte.*

Cet appareil communique à une tige AB (*fig.* 256) un mouvement ascensionnel très-lent, en vertu duquel celle-ci vient au moment convenable soulever le levier T, et rendre la liberté au secteur S. L'arbre O, ne se trouvant plus retenu par l'action du cran sur le secteur, bascule sous l'influence d'un contre-poids qui l'entraîne dans le sens de la flèche; et ce mouvement ouvre la soupape d'admission de la vapeur.

Échappements.

Les mécanismes employés dans l'horlogerie sous le nom d'*échappements* se composent en général d'une roue à rochet, entre les dents de laquelle viennent s'interposer périodiquement deux arrêts fixés à une pièce oscillante.

Le moteur tend à imprimer un mouvement de rotation continu à l'arbre de la roue à rochet; l'interruption périodique a pour but de régulariser ce mouvement, en faisant intervenir un pendule ou un balancier à vibrations isochrones.

On profite en même temps du temps très-court pendant lequel le régulateur est en relation avec le moteur, pour faire donner au pendule ou au balancier une légère impulsion, suffisante pour entretenir leur mouvement.

L'étude des échappements n'entre pas dans le programme de ce Cours.

§ XV. — Moyens de modifier une liaison de mouvement.

On a souvent à changer, pendant la marche d'une machine, la liaison géométrique existant entre deux parties de cette machine. La modification est, selon les cas, brusque ou graduelle : elle peut porter, soit sur le sens du mouvement transmis à la pièce conduite, soit sur le rapport des vitesses, soit même sur ces deux éléments à la fois.

Dans les machines à raboter, par exemple, l'outil reçoit de l'arbre moteur un mouvement de translation uniforme, par l'intermédiaire d'une crémaillère et d'un pignon.

Mais une fois que le rabot a parcouru toute la longueur de la crémaillère, la continuation du mouvement suivant les mêmes lois devient impossible: il faut modifier la liaison du moteur avec l'outil, et s'arranger de façon à mettre celui-ci à même de poursuivre son travail, en le ramenant dans sa position primitive, avec un léger déplacement latéral.

D'autres fois l'outil, arrivé au bout de sa course, se retourne de manière à raboter alternativement dans les deux sens. Enfin, dans un autre genre de machines, c'est l'outil qui est fixe, et l'objet qui reçoit un mouvement convenable. A cet égard, une simple visite dans les ateliers en apprend plus que toutes les descriptions.

Changement brusque de la vitesse.

Pour pouvoir à volonté faire varier la vitesse d'un arbre tournant (ou plutôt le rapport de la vitesse de cet arbre à celle de l'arbre moteur), on dispose sur les deux arbres deux ou plusieurs couples de roues dentées ou de poulies, qu'on embraye suivant les besoins. Souvent ces divers trains ne sont pas fixés à demeure sur les arbres : on a un certain nombre de roues de rechange, et l'on substitue une paire à une autre, ce qui ne peut se faire sans arrêter la machine. Quand on ne s'astreint pas à ce que les rayons de ces roues forment une somme égale à la distance des axes, on emploie comme intermédiaire une roue parasite (*fig.* 255), dont on fixe le centre dans une position convenable.

Il n'est d'ailleurs jamais indispensable d'arrêter complète-

ment l'organe dont on veut modifier la vitesse; et la substitution d'un engrenage à un autre peut s'effectuer aisément, pendant la marche de la machine, à l'aide des systèmes d'embrayage que nous avons décrits dans le paragraphe précédent.

Considérons deux arbres tels que P et Q (*fig.* 259 et 260), dont les axes de rotation sont dans un même plan; et soient $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$ les rouages correspondant à deux valeurs différentes du rapport des vitesses. Les deux roues qui appartiennent à l'un des arbres sont folles, et dans l'intervalle de ces roues joue un manchon d'embrayage double, c'est-à-dire armé de dents ou saillies sur ses deux bases opposées. Suivant que ce manchon est engagé à droite ou à gauche, l'un ou l'autre des deux engrenages fonctionne comme s'il existait seul.

Dans la disposition représentée *fig.* 259, le déplacement du manchon change seulement le rapport des vitesses angulaires, sans altérer le sens de la transmission; avec la combinaison de la *fig.* 260, on change à la fois la grandeur et le signe du rapport des vitesses. Enfin le système de la *fig.* 261 sert à renverser simplement le sens du mouvement de l'arbre conduit, sans altérer la grandeur absolue de sa vitesse.

S'agit-il d'une transmission par courroies, on dispose sur deux arbres parallèles plusieurs paires de poulies (*fig.* 267), dont les diamètres sont calculés de manière que la longueur totale de la courroie reste constante. Au moyen d'une fourchette, on transporte la courroie d'une paire sur l'autre.

On peut encore avoir une série de poulies égales et voisines les unes des autres (*fig.* 268), montées sur des arbres creux ou canons, qui s'emboîtent à frottement doux. Outre la poulie qui lui donne le mouvement, chacun des canons porte une roue dentée, de sorte qu'on aperçoit les unes à la suite des autres, sur le même axe géométrique :

1° Une poulie folle;

2° Une deuxième poulie, calée immédiatement sur l'arbre moteur;

3° Une troisième poulie, calée sur le premier canon;

4° Une quatrième poulie, calée sur le deuxième canon;

Puis :

5° La roue dentée du deuxième canon;

6° Une roue dentée plus petite, calée sur le premier cannon;

7° Enfin une troisième roue dentée plus petite que la seconde, et calée sur l'arbre central.

Sur un second arbre parallèle au premier sont fixées à demeure trois nouvelles roues qui engrènent avec les trois précédentes, et dont les diamètres varient par conséquent en sens inverse : une courroie, mise en mouvement par un tambour non représenté dans la figure, est susceptible d'être embrayée tour à tour sur les quatre poulies. Il est facile de voir comment, en transportant la courroie d'une poulie à l'autre, on fait varier la vitesse de l'arbre conduit : la vitesse du tambour moteur et celle de la poulie directement embrayée restant constantes.

Dans la *fig.* 269, le déplacement de la courroie change à la fois la grandeur et le sens de la vitesse de l'arbre AB.

On rencontre dans les machines un grand nombre de dispositions spéciales, dont l'objet est de faire varier brusquement le sens ou la grandeur de la vitesse transmise à un engin déterminé. Nous allons en donner encore deux exemples.

Premier exemple. — Une corde sans fin s'enroule sur deux poulies dont les axes sont parallèles et horizontaux (*fig.* 262) : on veut pouvoir changer à volonté le sens du mouvement de cette corde. A cet effet, entre les arbres des poulies, on installe une vis sans fin verticale. Chacun des arbres porte une roue disposée de manière à pouvoir engrener avec la vis : seulement l'intervalle des deux roues est un peu trop grand pour que celle-ci engrène à la fois avec l'une et avec l'autre.

Cela posé, il est évident que, selon que l'engrenage aura lieu avec la roue de droite ou avec celle de gauche (la vis tournant toujours dans le même sens), le mouvement de la corde sans fin se produira dans un sens ou dans l'autre.

On obtient l'engrenage alternatif en faisant reposer le pivot de l'arbre de la vis sur un chariot, capable de prendre un petit mouvement latéral.

Deuxième exemple. — *Machine à forer* (*fig.* 263). — Le foret est fixé à l'extrémité inférieure d'un arbre vertical, auquel

l'engrenage $\frac{A}{a}$ communique un mouvement rapide de rotation. La roue *a* porte une languette qui fait saillie dans l'œil circulaire dont elle est percée; et cette languette est engagée dans une rainure creusée sur toute la longueur de l'arbre. La roue, maintenue par un support fixe, reste toujours à la même hauteur et ne cesse pas d'entraîner le foret dans son mouvement; mais on voit que celui-ci, tout en tournant avec une grande rapidité, peut descendre graduellement au fur et à mesure de la pénétration. Enfin, l'arbre vertical est fileté à sa partie inférieure, et de part et d'autre du filet de vis se trouvent deux roues folles, qui tournent librement sur leurs coussinets pendant que l'outil travaille.

Quand le forage est terminé, on cale les deux roues, qui font alors fonction d'écrou immobile. L'arbre continuant à tourner sur son axe, la vis remonte avec l'outil, dont le mouvement ascensionnel ne s'arrête que quand la vis est entièrement hors de l'écrou.

Changement graduel de la vitesse.

Cônes alternes. — Au lieu de deux rangées de poulies permettant d'établir entre deux arbres parallèles un certain nombre de rapports de vitesses formant une série discontinue, concevons deux troncs de cônes (*fig.* 264), posés de la même manière que les poulies. Une courroie dont la longueur est constante peut les embrasser et rester également tendue, quel que soit le plan perpendiculaire aux axes dans lequel on la place. Le rapport des vitesses varie avec cette disposition par degrés insensibles.

On fixe la courroie dans la position que l'on veut, au moyen d'un anneau traversé par la courroie, et conduit par une tige guidée.

Un autre système consiste à donner à l'un des cônes la faculté de glisser le long de son arbre. L'autre cône peut alors être remplacé par un cylindre; et il est toujours indispensable d'avoir quelque part une poulie de tension, l'un des diamètres d'enroulement étant seul variable.

Citons comme exemple le mécanisme employé dans les

anciens bancs à broches, pour accélérer progressivement le mouvement de rotation des bobines, avant l'invention du rouage épicycloïdal dont nous avons parlé p. 264.

Le tambour conique A (*fig.* 265) est monté à frottement doux sur un arbre carré, ou sur un arbre rond à languette. Dans la gorge s'engage une fourche d'embrayage au moyen de laquelle on pousse le tambour à gauche ou à droite, selon qu'on veut augmenter ou diminuer la vitesse de la courroie, et par conséquent celle du tambour cylindrique B (*).

Changement de vitesse par rouleau de friction (*fig.* 266). — L'arbre moteur est terminé par un plateau, contre lequel s'appuie une roulette fixée sur un arbre vertical. La transmission s'effectue en vertu de l'adhérence de la roulette sur le plateau. Le pivot de l'arbre vertical repose sur une crapaudine qu'on peut élever ou abaisser au moyen d'un levier coudé. Selon que la roulette s'approche ou s'éloigne du centre de rotation du plateau, le rapport de sa vitesse angulaire à celle de celui-ci diminue ou augmente.

Les applications de ce mécanisme sont nombreuses. On y a recours toutes les fois qu'on veut imprimer progressivement à un arbre tournant une vitesse considérable.

(*) Dans la disposition indiquée par la figure, les axes des deux tambours ne sont pas parallèles; aussi a-t-on employé deux poulies de renvoi, projetées en C, dont les arbres glissent dans des coulisses verticales : ces poulies font en même temps fonction de poulies de tension.

CHAPITRE VII.

MOYENS D'OBSERVATION ET APPAREILS PROPRES A DÉCOUVRIR EXPÉRIMENTALEMENT LA LOI D'UN MOUVEMENT.

Nous avons dit qu'on détermine expérimentalement la loi du mouvement d'un point en fixant, au moyen d'un système quelconque de coordonnées, un certain nombre de positions de ce point, et notant les temps écoulés entre deux observations consécutives.

On obtient ainsi directement la loi des espaces parcourus, sous la forme d'une table numérique ou d'un tableau graphique; et, cela fait, les règles que nous avons données font connaître toutes les quantités qu'on a besoin de considérer dans l'étude d'un mouvement.

Ce procédé, qui n'offre aucune difficulté quand le mouvement est suffisamment lent, a été employé par Coulomb pour déterminer les lois du mouvement d'un traîneau, glissant sur un plan horizontal. En un point de ce traîneau était fixé un index, mobile le long d'une règle divisée en pouces : un aide comptait les vibrations d'un pendule battant la demi-seconde, un autre annonçait par un cri le passage du traîneau à chaque division, tandis que Coulomb écrivait la correspondance des deux mesures.

Mesure de la vitesse.

Quand il s'agit d'un mouvement rapide, mais qui se prolonge à peu près uniformément, pendant un temps suffisamment long, il est facile d'en avoir la vitesse moyenne.

C'est ainsi qu'on calcule la vitesse d'un navire en jetant le loch, celle d'un train en mesurant le temps employé à parcourir un espace donné, la vitesse angulaire d'une roue en comptant le nombre de tours effectués pendant une demi-minute.

Enfin, pour constater la vitesse moyenne, pendant une longue

durée, d'un mouvement de rotation ou d'un mouvement oscillatoire, on emploie les compteurs à chiffres, dont la disposition générale est la suivante.

L'arbre dont il s'agit d'enregistrer d'une manière continue les nombres de tours est armé d'une pièce saillante ou doigt qui, à chaque révolution, fait avancer d'une seule dent une roue fixée sur un second arbre. Celui-ci porte également un doigt qui, à chaque révolution de ce deuxième arbre, fait avancer d'une dent une roue fixée sur un troisième arbre, et ainsi de suite. En supposant le nombre des dents de toutes ces roues égal à 10, on voit qu'elles marqueront respectivement, par le passage d'une dent, les unités simples, les dizaines, les centaines,..., du nombre de tours effectué par l'arbre donné. Une disposition facile à imaginer fait apparaître ces divers chiffres sur une série de cadrans, de manière à permettre de lire immédiatement le résultat cherché.

Appareil de Mattei et Grosbert. — Cet appareil, destiné à mesurer la vitesse initiale d'une balle de fusil, n'est autre chose qu'un tambour à fonds de papier, qui tourne uniformément autour de son axe de figure, parallèle à celui du canon. La balle perce rapidement les deux fonds; et l'angle que forment les rayons menés par les deux trous à l'axe de rotation mesure le temps employé à parcourir la profondeur du tambour. Connaissant la vitesse angulaire de celui-ci, on a la vitesse de la balle.

Chronographe électrique. — Dans le chronographe du commandant Martin de Brettes (*), fondé sur le même principe que l'appareil précédent, la mesure du temps s'effectue avec une grande exactitude, grâce à l'idée d'utiliser les propriétés de l'électricité d'induction.

Le projectile traverse deux cibles séparées par une distance de deux mètres, et formées d'un réseau de fils très-fins de fer ou de cuivre, dont la rupture détermine l'interruption d'un courant. Le courant induit correspondant est transmis à un pendule portant une pointe : l'étincelle jaillit entre cette pointe et une plaque métallique parallèle au plan d'oscilla-

(*) Académie des Sciences, 23 juin 1860.

tion du pendule, en traversant une feuille de papier sur laquelle elle laisse un petit point rond très-net et très-visible. Enfin, un courant mis en jeu par la détente même du fusil indique par un premier point la position initiale de la tige du pendule.

On connaît, par la loi du mouvement de celui-ci, le temps écoulé entre les deux étincelles.

Observation de la loi des mouvements rapides.

Quand il s'agit, non plus seulement de mesurer une vitesse moyenne, mais bien de déterminer toutes les circonstances d'un mouvement rapide, on emploie un procédé automatique : c'est-à-dire qu'on s'arrange de manière à faire tracer une ligne par le mobile, sur une surface animée d'un mouvement connu.

Si cette surface était immobile, on obtiendrait seulement la trajectoire du mobile. En supposant cette même surface en mouvement, la courbe tracée par le mobile nous fera connaître la loi des espaces parcourus, comme nous allons le montrer par quelques exemples.

Appareil d'Eytelwein. — Pour étudier le mouvement oscillatoire vertical d'une soupape, Eytelwein fixait à un point de la tige de cette soupape un crayon mobile, devant lequel une bande de papier se déroulait horizontalement (*fig.* 272), avec une vitesse uniforme (*). Les abscisses de la courbe tracée par le crayon sont proportionnelles aux temps, tandis que les ordonnées sont égales aux espaces parcourus par le mobile. Cette courbe est donc précisément celle que nous connaissons sous le nom de *courbe des espaces*.

Lois de la chute des corps. — Les procédés indiqués dans les cours de Physique pour vérifier expérimentalement les

(*) Le mouvement de la bande est produit par un mécanisme d'horlogerie, au moyen de deux bobines disposées de manière que le papier qui se déroule de l'une s'enroule sur l'autre, en offrant dans l'intervalle une portion tendue sur laquelle le crayon trace sa courbe. Pour que le mouvement du papier soit uniforme, il ne faut pas que celui des bobines le soit, car le diamètre de celles-ci varie d'une manière sensible avec la quantité de papier enroulée. On régularise le mouvement par l'emploi d'une fusée, dont les diamètres extrêmes sont les mêmes que ceux du cylindre, vide et couvert de papier.

lois de la chute des corps : à savoir, le plan incliné de Galilée et la machine d'Atwood, se rapportent en réalité à des phénomènes plus complexes. Avec l'appareil à cylindre tournant du général Poncelet (*voir* p. 27), on étudie au contraire le mouvement non modifié par une machine; et la méthode est combinée de manière à triompher de la difficulté qui résulte de la rapidité de ce mouvement.

On emploie la disposition analogue que voici, pour déterminer les lois d'un mouvement rotatoire.

Plateau tournant de M. Poncelet (*). — Un plateau circulaire est fixé par son centre à l'extrémité de l'arbre dont on veut étudier la rotation. Un pinceau animé d'un mouvement circulaire et uniforme autour du point O′ (*fig.* 273) s'appuie constamment sur le plateau, et trace sur celui-ci une ligne qui, s'il était immobile, serait une circonférence ayant O′ pour centre. Par suite du mouvement du plateau, cette circonférence se transforme en une courbe épicycloïdale, sur laquelle on peut mesurer les déplacements angulaires de l'arbre pendant des temps connus.

En effet, soit AB la courbe relevée sur le plateau (c'est-à-dire la trajectoire relative du pinceau), AB′C, la trajectoire absolue de ce même pinceau, lequel occupe actuellement la position A.

A l'instant où le pinceau a marqué le point B de la courbe, il était sur la circonférence (O′A), en un point dont la distance au centre O est égale à OB, donc il était en B′, intersection de ladite circonférence avec l'arc de cercle BB′. AO′B′ est donc l'angle décrit par le pinceau autour de son axe, pendant que l'arbre O tournait de l'angle AOB.

Usage du diapason pour apprécier avec justesse les très-petites fractions du temps.

Toute la précision des expériences de ce genre repose essentiellement sur l'uniformité du mouvement produit par le mécanisme d'horlogerie.

(*) Cet appareil a été appliqué par le général Morin à l'étude des lois du frottement.

Pour se mettre à l'abri de la cause d'erreur qui résulte de l'imperfection de ces mécanismes, on compare la courbe tracée par le corps mobile avec celle que trace en même temps sur le plateau une pointe fixée à un diapason mis en vibration. L'isochronisme parfait de ce dernier mouvement dénonce les plus petites irrégularités de l'appareil d'horlogerie.

Ce procédé a été employé par M. Wertheim, puis par le capitaine Schultz.

Chronographe du capitaine Schultz, construit par M. Froment. — Cet appareil, le plus précis qu'on ait encore construit, donne sans difficulté la cinq-cent-millième partie d'une seconde. Il se compose d'un tambour d'un mètre de circonférence, argenté et recouvert de noir de fumée à sa surface extérieure : ce tambour tourne uniformément sur son axe à raison de trois tours par seconde. Mais, pour l'extrême précision qu'on veut atteindre, on ne peut compter sur l'uniformité de la rotation du tambour : car les mouvements les plus réguliers ne sont en réalité que périodiquement uniformes.

On a donc installé devant le tambour un diapason bien réglé, qui fait 500 vibrations à la seconde, et qui dessine, au moyen d'une pointe, chaque vibration sur le noir de fumée (*) : un appareil électrique à étincelle d'induction imprime aussi sur le noir de fumée deux points, qui correspondent au commencement et à la fin du phénomène qu'on étudie. Pour mesurer le temps écoulé entre les deux étincelles, on compte d'abord autant de cinq-centièmes de seconde que l'intervalle des deux points renferme de vibrations complètes; puis, on estime les fractions, en admettant que le mouvement du tambour est uniforme pendant le temps d'une vibration.

Au moyen d'un microscope et d'un micromètre, on divise facilement en mille parties l'intervalle occupé sur le tambour par une vibration, c'est-à-dire qu'on apprécie un cinq-cent-millième de seconde.

On a pu mesurer avec cet appareil le temps que met une balle à parcourir quelques centimètres, et déterminer ainsi

(*) Par la combinaison du mouvement oscillatoire du diapason avec le mouvement uniforme du tambour, la courbe décrite par la pointe sur le cylindre développé est une sinusoïde (*fig.* 274).

la loi du mouvement d'un boulet dans l'âme d'une bouche à feu.

Étude des vibrations sonores par M. Lissajous (*). — Tout le monde connaît le phénomène optique connu sous le nom de *persistance des impressions lumineuses sur la rétine* : M. Lissajous a fondé sur cette propriété un moyen simple de rendre sensible aux yeux le mouvement vibratoire d'un diapason. Il suffit pour cela de fixer à l'une des branches de celui-ci un miroir métallique (en ayant soin d'ajouter à l'autre branche un contre-poids égal), et de regarder dans le miroir l'image réfléchie d'un corps lumineux. Lorsque le diapason vibre, l'image semble s'allonger dans le sens de la longueur de la branche : l'œil perçoit une ligne lumineuse.

Pour trouver la loi du mouvement du diapason, il faut, après la première réflexion, faire tomber le pinceau lumineux sur un deuxième miroir, mobile autour d'un axe vertical, et recevoir la nouvelle image sur un écran, en interposant une lentille convergente de foyer convenable.

Par l'effet de la rotation du second miroir, la pointe du faisceau réfléchi parcourt l'écran dans le sens horizontal; et la combinaison de ce mouvement connu avec l'oscillation verticale produite par la vibration du diapason fait connaître les lois du mouvement de celui-ci.

Comparaison de deux diapasons. — Cette première expérience fait comprendre le moyen, imaginé également par M. Lissajous, pour comparer deux sons à l'aide de l'œil, organe beaucoup plus sensible que l'oreille, et en même temps moins sujet à la fatigue.

L'un des diapasons qu'il s'agit de comparer est vertical, l'autre horizontal; chacun d'eux porte un miroir disposé comme dans l'expérience précédente : les deux miroirs sont en regard. Le faisceau lumineux se réfléchit d'abord sur le premier miroir, puis sur le second, et enfin sur un miroir fixe qui projette l'image sur un écran. Dès qu'on ébranle le diapason vertical, on voit l'image s'allonger et se transformer en une ligne verticale. Si l'on ébranle au contraire le diapason horizontal, l'image est une droite horizontale. Enfin, quand on fait

(*) *Voir* les leçons professées à la Société Chimique, en 1861.

vibrer à la fois les deux diapasons, l'image est animée d'un mouvement composé de deux mouvements oscillatoires rectangulaires : elle décrit sur l'écran une ligne sinueuse plus ou moins compliquée, dont la forme dépend de la relation qui existe entre la durée de l'oscillation dans chacun des deux mouvements (*fig.* 275). Cette courbe est d'ailleurs toujours comprise à l'intérieur d'un rectangle, dont les côtés sont précisément égaux aux amplitudes des mouvements vibratoires des deux diapasons.

Dans le cas de l'unisson, l'image reçue sur le plan est une courbe fermée, qui n'a que deux tangentes parallèles à une direction quelconque (A) : elle affecte la forme d'une ligne droite, d'un cercle ou d'une ellipse, suivant la différence de phase des deux vibrations.

A l'octave, l'un des diapasons faisant deux vibrations pendant que l'autre n'en fait qu'une, on a pour la courbe l'une des formes (B). Le rapport de quinte est représenté par les figures (C). Enfin, si les nombres des vibrations ne sont pas dans un rapport simple, la courbe est plus ou moins irrégulière.

FIN DE LA CINÉMATIQUE.

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes les langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon, soit du texte, soit des gravures, ou toute traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage (deuxième fascicule) a été fait à Paris dans le cours de 1868, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. EDM. BOUR,

INGÉNIEUR DES MINES;

Publié par M. PHILLIPS, Professeur de Mécanique à l'École Polytechnique, avec la collaboration de MM. COLLIGNON et KRETZ.

DEUXIÈME FASCICULE.

STATIQUE

ET

TRAVAIL DES FORCES DANS LES MACHINES A L'ÉTAT DE MOUVEMENT UNIFORME.

AVEC ATLAS DE 8 PLANCHES IN-4°.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1868

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT VII

PREMIÈRE SECTION.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER. — Principes fondamentaux de la Statique et de la Dynamique 3

CHAPITRE II. — Équilibre d'un point matériel 33

CHAPITRE III. — Équilibre des systèmes quelconques de points matériels 39

CHAPITRE IV. — Équilibre des solides invariables 66

CHAPITRE V. — Applications de la Statique 97

DEUXIÈME SECTION.

TRAVAIL DES FORCES DANS LES MACHINES A L'ÉTAT DE MOUVEMENT UNIFORME.

CHAPITRE PREMIER. — Notions générales sur le travail des forces dans les machines 137

CHAPITRE II. — Des résistances passives 165

CHAPITRE III. — Des cordes et courroies 208

CHAPITRE IV. — Appareils servant à mesurer le travail des forces. 221

AVERTISSEMENT.

Ce fascicule est le deuxième du *Cours de Mécanique et Machines* professé à l'École Polytechnique par M. Edm. Bour, pendant la trop courte durée de son enseignement dans cette École.

Lorsque la mort vint prématurément interrompre la carrière scientifique si brillamment parcourue par le jeune Professeur, le premier fascicule de son Cours (Cinématique) avait seul été publié, et on pouvait craindre que la suite ne fût perdue pour la science; mais il avait laissé entre les mains de son ami, M. Mannheim, Professeur à l'École Polytechnique, le manuscrit de la fin de son Ouvrage. M. Mannheim, voulant s'entourer de toutes les garanties possibles pour la publication de ce manuscrit, a obtenu le concours dévoué de MM. Phillips, Collignon et Kretz.

M. Phillips, qui a été appelé à succéder à M. Bour dans la chaire de Mécanique, était mieux que personne en position de revoir la rédaction, d'en combler les lacunes, en un mot de mener à bonne fin une si délicate

entreprise. M. Collignon, Ingénieur des Ponts et Chaussées, avait été le répétiteur du Cours de M. Bour à l'École Polytechnique. Enfin M. Kretz, Professeur de Mécanique à l'École d'Application des Ingénieurs des Manufactures de l'État, ami intime de M. Bour, avait une connaissance complète des idées de l'Auteur sur la Mécanique et avait spécialement discuté avec lui toutes les questions relatives aux applications de la théorie aux machines.

G.-V.

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

STATIQUE

ET

TRAVAIL DES FORCES DANS LES MACHINES

A L'ÉTAT DE MOUVEMENT UNIFORME.

Ce volume est divisé en deux Sections.

La première a pour objet la *Statique* proprement dite, c'est-à-dire l'étude des lois de l'équilibre des forces appliquées aux systèmes matériels.

La seconde est consacrée aux *machines*, et comprend l'exposition du *théorème des forces vives*, l'application de ce théorème aux machines en mouvement, la mesure du travail des forces, et l'étude particulière des *résistances passives*, entre autres du frottement de glissement.

PREMIÈRE SECTION.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA STATIQUE ET DE LA DYNAMIQUE.

Le véritable objet de la Mécanique est l'étude du mouvement dans ses rapports avec les causes qui lui ont donné naissance et qui en déterminent les diverses affections.

Le but de cette étude est de nous mettre à même de résoudre le problème suivant, problème qui ne présente pas la moindre analogie avec ceux que nous avons rencontrés en Cinématique :

Un corps étant placé dans des conditions parfaitement définies, quel mouvement va-t-il prendre?

Réciproquement : *Pour obliger un corps à prendre un mouvement donné, comment faut-il faire?*

Commençons par définir avec précision les expressions, empruntées pour la plupart au langage ordinaire, qui sont d'un usage continuel dans la science que nous abordons.

Définitions.

Un *corps*, en Géométrie pure, est simplement une portion bien délimitée de l'étendue. Au point de vue physique, un

corps est quelque chose de *matériel* (*), réunissant à la propriété de l'*étendue* celle de l'*impénétrabilité* (dont nous aurons plus tard à préciser le véritable caractère), et quelques autres attributs qui se rapportent d'une manière toute spéciale à la partie de la Mécanique à laquelle nous sommes naturellement arrivés.

Du point matériel. — Nous avons distingué soigneusement, en Cinématique, le mouvement simple d'un point géométrique, des phénomènes beaucoup plus compliqués que nous offre le mouvement d'un corps de dimensions finies, même quand ce corps peut être considéré comme solide, c'est-à-dire comme invariable de forme.

De même, dans le nouvel ordre d'idées que nous abordons, nous simplifions considérablement les choses en considérant d'abord un corps assez petit pour que nous puissions faire abstraction de ses dimensions, ne pas nous préoccuper des mouvements relatifs de ses diverses parties, et voir uniquement le mouvement simple de l'un quelconque de ses points.

L'*élément* auquel on arrive en concevant ainsi un corps divisé en parties de plus en plus petites, élément qui conserve nécessairement toutes les propriétés du corps et en particulier la qualité d'être matériel, cet élément, dis-je, est connu sous le nom de *point matériel.*

Un point matériel est donc un corps dont les dimensions dans tous les sens peuvent être considérées comme plus petites que toute grandeur assignable, sont *infiniment petites,* suivant le langage mathématique. Un corps de dimensions

---

(*) Voici une définition de la matière, empruntée à un excellent ouvrage de M. Cournot :

« L'expérience la plus familière nous apprend que les objets qui affectent nos sens d'une manière si variée, et auxquels nous donnons le nom de *corps* quand nous voulons les désigner par une appellation commune, sont sujets, non-seulement à se déplacer, mais encore à changer de dimensions, de figure, d'aspect et d'état, et même à périr dans leur individualité par la désagrégation et la dispersion de leurs parties.

» Ce qui persiste après le changement ou la destruction du corps, en restant inaltérable dans la collection des parties, c'est ce que nous appelons la *matière.* » (*Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire,* chap. III, *Des idées de matière, de masse et d'inertie.*)

finies est la collection d'une *infinité* de points matériels, liés entre eux d'une manière quelconque (*).

Les premiers chapitres de la Statique et de la Dynamique sont naturellement consacrés à l'étude de l'équilibre et du mouvement d'un point matériel.

§ I. — Équilibre d'un point matériel.

Des principes de la Mécanique rationnelle. — Le caractère de ces principes a été différemment apprécié : les uns y ont vu des axiomes évidents, les autres des faits d'expérience, d'autres encore des postulats, des hypothèses. La difficulté est des plus sérieuses.

D'une part, en effet, on ne peut guère nier la certitude rationnelle de la Mécanique, dont les théorèmes présentent le même caractère que les vérités les mieux démontrées de la Géométrie.

D'autre part, la valeur d'une conséquence ne saurait être supérieure à celle des prémisses, et l'on ne peut dire que les principes de la Mécanique soient d'une évidence absolue, qu'ils s'imposent nécessairement à la raison comme les axiomes fondamentaux de la Géométrie.

Les principes de la Mécanique présenteraient plutôt le caractère de postulats, plus ou moins analogues à la proposition célèbre qui sert de base à la théorie de parallèles. L'exactitude de ces principes ou postulats est rendue *à posteriori* incontestable par la vérification expérimentale des résultats que la Mécanique rationnelle en déduit par des raisonnements rigoureux; et la plus grande preuve de ce genre se trouve dans la concordance remarquable des mouvements des corps célestes avec les lois théoriques de ces mouvements.

(*) Nous verrons que, dans certains cas, un corps, solide ou non solide, voire même la réunion de plusieurs corps indépendants, se comporte comme si toute la matière correspondante était condensée autour d'un certain point dans un volume aussi exigu qu'on voudra le supposer.

L'étude de l'équilibre et du mouvement d'un point matériel n'est donc pas une pure abstraction, un simple point de départ de ce qui se rapporte à un corps proprement dit : c'est un chapitre de la Mécanique qui comporte des applications spéciales.

Quoi qu'il en soit, les principes dont nous ferons usage, en demandant au lecteur de les accepter sans démonstration, sont au nombre de trois seulement (*) : les deux premiers se rapportent au mouvement d'un point matériel.

PREMIER PRINCIPE. — *Loi de l'inertie de la matière.* — Cette loi doit s'énoncer de la manière suivante :

Un point matériel en repos ne peut jamais prendre de mouvement sans la présence d'une cause externe.

Il faut bien remarquer que la propriété de l'inertie appartient exclusivement à cet *être de raison* qu'on nomme *point matériel.* Notre premier principe nous apprend que la cause qui fait passer un pareil corps de l'état de repos à l'état de mouvement est *externe*, et voilà tout.

Cette cause, quelle qu'elle soit, reçoit en Mécanique le nom générique de *force* (**).

Ainsi, un corps abandonné à lui-même se met en mouvement, il tombe, donc il est soumis à une force; cette force a reçu le nom de *pesanteur.*

Un grand nombre de forces sont ainsi désignées par des noms spéciaux, tels que l'*attraction magnétique*, la *tension des vapeurs*, l'*élasticité des solides*, *etc.* Mais, sans entrer pour le moment dans la discussion des propriétés particulières de chaque espèce de force, nous pouvons dire d'une manière générale :

Toutes les fois qu'un point matériel en repos se met en mouvement, ce point est sollicité par une force.

(*) Toutes les autres propositions pour lesquelles l'usage a consacré le nom de *principes* sont de véritables théorèmes, comme nous le verrons.

(**) « L'idée de *force*, dit M. Cournot, provient originairement de la conscience du pouvoir que nous avons d'imprimer du mouvement à notre propre corps et aux corps qui nous entourent, jointe au sentiment intime de l'effort ou de la tension musculaire, qui est la condition organique du déploiement de notre puissance motrice. Si nous n'avions pas le sentiment de l'effort musculaire, le spectacle du monde pourrait bien encore nous suggérer la notion de l'étendue des figures et celle de leurs mouvements, mais l'idée fondamentale de la Mécanique et celle de bien d'autres théories nous échapperaient tout à fait. » (*Traité de l'enchaînement des idées, etc.*, p. 123.)

La force est dite appliquée au point; celui-ci est le point d'application de la force.

La direction suivant laquelle le point d'application d'une force commence à se mouvoir s'appelle la direction de la force.

Outre la direction et le point d'application d'une force, un troisième élément est encore nécessaire pour que cette force soit définie d'une maniere complète : c'est la grandeur, ou, comme on dit, l'*intensité* de la force.

Nous comprenons parfaitement que des effets identiques proviennent de forces égales; nous comprenons également qu'il existe des forces inégales. Par suite, la force nous apparaît comme susceptible d'augmentation et de diminution : c'est donc une quantité qu'on peut comparer à une grandeur de même nature, prise pour unité et dont on peut avoir une expression numérique. Nous ne tarderons pas à voir comment les principes de la Mécanique permettent de réaliser cette conception.

On représente en Mécanique une force par une ligne droite (*fig.* 1). A étant le point d'application, on prend sur la ligne qui représente la direction de la force une longueur AF proportionnelle au nombre qui en mesure l'intensité; et l'on obtient une ligne AF, *qui représente la force en grandeur et en direction.*

Deuxième principe. — *Loi de l'indépendance et de la composition des effets des forces.* — De la manière dont nous avons défini ce qu'on doit entendre par une *force* et par la *direction d'une force*, il résulte nécessairement que *toute force agissant seule, sur un point matériel en repos, aura pour effet de faire prendre au point un certain mouvement dans la direction de la force.* Ceci est un premier point parfaitement acquis à la science.

Si nous considérons actuellement une force F, appliquée à un point en mouvement, point soumis d'autre part à l'action d'un nombre quelconque d'autres forces, F′, F″, . . . et que nous nous demandions quel sera dans ces conditions l'effet de la force F, il est clair que nous nous trouvons en face d'un problème d'un ordre tout nouveau. Ce problème ne peut être

résolu qu'à l'aide d'un deuxième principe, axiome ou postulat, que nous énoncerons de la manière suivante :

Une force agit sur un point matériel en mouvement, et sollicité par des forces quelconques, absolument comme si elle était seule et comme si le point était en repos.

Avec cette proposition, dont la première notion est due à Galilée, nous avons maintenant tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour établir les fondements de la Statique et de la Dynamique du point matériel ; mais l'énoncé que nous venons de donner a besoin de quelques éclaircissements pour être bien compris.

Soit MA (*fig.* 3) la trajectoire d'un point matériel soumis à l'action de forces quelconques F′, F″, ... ; par une position quelconque M du mobile, faisons passer trois axes rectangulaires, et supposons que ces axes se transportent parallèlement à eux-mêmes, l'origine décrivant la trajectoire MA, avec les mêmes accidents de mouvement que le point M.

Les choses restant ainsi disposées, le point M ne cessera pas de coïncider avec l'origine des axes mobiles; relativement à ces axes, il se trouvera en repos. Supposons maintenant qu'une nouvelle force F vienne à agir sur le point M, cette force modifiera évidemment le mouvement primitif; notre mobile se séparera de l'origine, il prendra un certain mouvement par rapport aux axes que nous avons définis. Cela posé, notre principe veut dire que ce mouvement relatif est absolument indépendant du mouvement des axes, et *le même que si la force agissait seule sur le corps en repos.*

Il suit de là que le point M, relativement aux axes mobiles, va prendre un certain mouvement dans la direction de la force F; et la composition de ce mouvement relatif avec le mouvement d'entraînement fera connaître le mouvement effectif.

Développons maintenant les principales conséquences de ce principe fondamental, en commençant par les cas les plus simples.

Mouvement uniforme. — Considérons d'abord un point matériel en mouvement auquel aucune force n'est appliquée ; s'il est animé d'une vitesse V, et qu'on le considère comme l'origine

de trois axes rectangulaires (ou obliques) animés d'un mouvement de translation avec une vitesse égale à V, son mouvement par rapport à ces axes sera celui que tendraient à lui imprimer les forces qui agissent sur lui, c'est-à-dire sera nul, puisque ces forces n'existent pas.

Donc, le mouvement absolu du point se réduit, dans ce cas, au mouvement d'entraînement, c'est-à-dire qu'il est rectiligne, uniforme, et que sa vitesse est égale à V. Donc, tout point matériel en mouvement qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure conserve sa vitesse en intensité et en direction. Ce résultat est tout à fait évident, et on l'admet généralement comme une conséquence de la loi de l'inertie.

Mouvement uniformément varié. — Supposons en second lieu un point matériel animé d'une vitesse v, et soumis à l'action d'une force F, dont l'intensité est constante, et dont la direction coïncide avec celle de la vitesse v.

Considérons toujours trois axes passant par la position qu'occupe le mobile à l'époque t, et se transportant parallèlement à eux-mêmes avec une vitesse égale à v (*fig.* 4). En même temps que l'origine de ces axes parcourt l'espace AA', égal à vdt, le mobile s'écarte de cette origine, et le déplacement relatif ne diffère pas de celui qu'aurait déterminé la force F agissant sur le corps en repos. Soit donc A' M l'espace que la force ferait ainsi parcourir dans sa direction, laquelle est aussi celle de la vitesse v; le déplacement réel est la somme algébrique des déplacements AA' et A' M. On voit que le mouvement ne cesse pas d'être rectiligne; seulement l'espace parcouru par le mobile pendant le temps dt est plus grand (algébriquement) que vdt, c'est-à-dire qu'il y a une certaine *accélération*.

On obtient la moitié de cette accélération en divisant par dt^2 le chemin A'M dû à la force F, et il est facile de reconnaître que l'accélération ainsi déterminée sera constante. En effet, transportons-nous à un autre instant du mouvement, l'origine aura une autre vitesse v', et dans le temps dt elle parcourra un espace $v'dt$; mais la force qui accélère le mouvement ayant un effet indépendant du mouvement déjà acquis fera parcourir au point matériel, dans le même temps dt, le même espace dans son mouvement relatif; donc on aura toujours la même accélération; le mouvement sera uniformément varié. Cette

deuxième conséquence se présente encore comme à peu près évidente.

Mouvement parabolique. — Le corps animé d'une certaine vitesse v est soumis à l'action d'une force F constante en intensité et en direction (au moins pendant un temps très-court); mais la direction de la force diffère de celle de la vitesse (*fig.* 5).

Nous aurons toujours à considérer trois axes animés d'un mouvement de translation dont la vitesse sera v en intensité et en direction.

Pendant le temps dt, l'origine, qui, à l'instant initial, coïncidait avec le point mobile, parcourra dans la direction de la vitesse un espace $AA' = v\,dt$; quant au mobile lui-même, il aura un mouvement relatif, lequel ne différera pas du mouvement absolu que lui aurait imprimé la force F, s'il avait été au repos; c'est-à-dire qu'il parcourra, pendant le temps dt, dans la direction de la force et avec une certaine accélération J un espace $A'M = \frac{1}{2} J\,dt^2$. Le déplacement réel du point s'obtient en composant les deux déplacements AA′ et A′M.

Prenons deux axes fixes ayant pour origine le point A, position du mobile à l'instant initial (*fig.* 5). Si ces axes ont pour directions, l'un Ax la direction de la vitesse v, l'autre Ay celle de la force F, les coordonnées du point mobile, au bout du temps infiniment petit que nous considérons, seront précisément les déplacements composants AA′ et A′M; elles auront donc les valeurs respectives

$$x = v\,dt, \quad y = \frac{1}{2} J\,dt^2.$$

De ces équations, et des théories développées en Cinématique, on tire immédiatement les conclusions suivantes :

Quand la force qui sollicite un point matériel en mouvement a une direction qui diffère de celle de la vitesse du point,

1° *Le mouvement est curviligne* (*);

(*) La trajectoire se confond, aux infiniment petits du troisième ordre près, avec la parabole représentée par l'équation

$$y = \frac{1}{2} J \frac{x^2}{v^2},$$

qu'on obtient en éliminant dt entre les équations qui donnent x et y.

2° *Le plan osculateur de la trajectoire est celui qui contient à la fois la direction de la force et celle de la vitesse ;*

3° *Cette même trajectoire est tangente à la ligne suivant laquelle est dirigée la vitesse ;*

4° *Enfin, la droite qui représente la force fait connaître la direction de l'accélération totale du mouvement du point, et cette accélération totale ne diffère pas de l'accélération qui aurait été déterminée par l'action de la force sur le même point matériel pris au repos.*

Ce dernier résultat est très-important : il nous donne la clef du rôle que joue dans la théorie géométrique du mouvement la notion de l'*accélération totale*. C'est cette grandeur, en effet, qui représente à elle seule l'effet total de la force, effet qui se manifeste à la fois par la substitution du mouvement curviligne au mouvement en ligne droite, et par celle du mouvement varié au mouvement uniforme.

Quand on a déterminé les lois du mouvement d'un point, soit par l'observation, soit par l'étude géométrique des liaisons de ce point avec d'autres points dont le mouvement est connu, chaque théorème de Géométrie relatif à l'accélération totale nous fournira un théorème correspondant de Dynamique sur la force qui sollicite le mobile. Par exemple, on déduit de la loi des aires de Képler, et du raisonnement que nous avons emprunté à Newton (*), que la force qui sollicite une planète est constamment dirigée vers le centre du soleil. Nous compléterons ces notions quand la théorie de la mesure des forces nous aura fait connaître la relation de grandeur existant entre l'accélération totale et la force dont l'action sur un point matériel donné détermine la production de cette accélération totale.

Mesure des forces.

Un point matériel M, animé d'une certaine vitesse v, est soumis à l'action de deux forces F et F′, dont les directions coïncident. En raisonnant comme précédemment, on voit que l'espace parcouru par le point M dans cette direction com-

(*) Tome Ier de cet ouvrage, p. 73.

mune, pendant le temps dt (indépendamment de l'espace $v dt$ dû à la vitesse v pendant le même temps), est égal à

$$\frac{1}{2} j\, dt^2 + \frac{1}{2} j'\, dt^2,$$

si $\frac{1}{2} j\, dt^2$ et $\frac{1}{2} j'\, dt^2$ représentent respectivement les espaces que chacune des forces F et F′, agissant seule, aurait fait parcourir au point dont nous nous occupons.

Ceci veut dire que, lorsque deux forces agissent sur un même point dans une même direction, *les effets de ces forces s'ajoutent*, l'accélération que prend le corps sous leur action combinée étant la somme algébrique $j + j'$ des accélérations qui répondent à chacune des deux forces en particulier.

Or, on ne peut refuser d'admettre que, parmi toutes les forces existant dans la nature, il ne s'en trouve une qui, appliquée isolément au point matériel M, lui aurait imprimé aussi l'accélération $j + j'$. Cette force peut être substituée aux deux premières, en tant que résultat produit, c'est-à-dire qu'elle est capable de produire le même mouvement que les forces F et F′ réunies.

On dit que cette force est la somme de F et de F′, et on la représente par la notation

$$\mathrm{F} + \mathrm{F}'.$$

Deux forces agissant dans une même direction peuvent être remplacées par une force unique égale à leur somme (*).

Proportionnalité des forces aux accélérations. — Il résulte de la définition précédente que : une force F produisant l'accélération j, la force 2 F produira l'accélération $2j$; par suite, la force nF répondra à l'accélération nj, et réciproquement. Donc :

Deux forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à un même point matériel.

(*) Cette phrase exprime identiquement la même idée que nous exprimions tout à l'heure, en disant que les effets de ces deux forces s'ajoutent.

Cette propriété est indépendante de l'état de repos ou de mouvement du point considéré.

Nous nous trouvons maintenant en possession d'un moyen qui nous permet de mesurer une force, de la comparer à une force prise pour unité, et d'avoir ainsi l'expression numérique de ce que nous avons appelé l'*intensité* d'une force.

L'unité de force est le *kilogramme :* c'est le poids d'un décimètre cube d'eau distillée à la température de $4°,1$, dans le vide, au niveau de la mer et à la latitude de Paris.

Notion de l'équilibre. — En général, on ne mesure pas les forces par les accélérations qu'elles produisent : on s'appuie, pour arriver à effectuer cette mesure d'une manière pratique, sur la propriété de l'équilibre.

Reprenons nos deux forces F et F′, dont les directions sont les mêmes, et supposons qu'on ait

$$F = F',$$

c'est-à-dire

$$j = j',$$

et que d'ailleurs les sens dans lesquels ces deux forces agissent soient opposés : il résultera de leur action simultanée une accélération nulle, c'est-à-dire que, si le point était en repos, il y persistera malgré la présence des deux forces : on dit alors que ces deux forces se font équilibre, ou que le point est en équilibre sous l'action de deux forces égales et contraires.

Deux forces égales et contraires, appliquées à un point matériel en mouvement, n'altèrent en rien ce mouvement, et l'on peut indifféremment, pour la commodité d'une démonstration, par exemple, introduire ou supprimer de pareils groupes de forces parmi celles qui agissent sur un corps en repos ou en mouvement, tout comme on introduit ou supprime deux termes égaux et de signes contraires dans les équations algébriques.

Toutes les fois que nous voyons un point matériel rester en repos, nous devons affirmer qu'il n'est soumis à aucune force, ou que si une certaine force agit sur lui, il y a d'autres forces qui font équilibre à celle-là.

Un corps abandonné à lui-même tombe sous l'action d'une certaine force qu'on appelle le *poids* de ce corps. Suspendons ce corps à un fil ou déposons-le sur un appui, il reste en re-

pos. Il n'en est pas moins pesant, et la force qui le sollicitait tout à l'heure agit toujours sur lui; seulement elle est équilibrée par une autre force égale et contraire, qu'on appelle, suivant les cas, la *tension* du fil, ou la *réaction* de l'appui.

On dit quelquefois que deux forces qui se font équilibre se détruisent : c'est une expression vicieuse qui donne naissance à un grand nombre d'erreurs. Ainsi, quand un corps repose sur un appui, son poids ne produit pas de mouvement, mais il produit un autre effet. Il y a toujours déformation du corps et de l'appui. Cette déformation, qui est souvent insensible à l'œil, est quelquefois au contraire extrêmement marquée, comme dans le cas où le corps est suspendu à l'extrémité d'un ressort flexible. Dans ce cas, l'effet de la force est de maintenir le ressort courbé, malgré l'élasticité de la matière qui tend à le ramener à sa forme et à sa position première (*fig.* 2).

Les propriétés de l'équilibre fournissent le moyen le plus commode pour comparer et mesurer les forces. Deux forces, quels que soient leur nature physique et le nom sous lequel on les désigne, sont égales quand elles font équilibre à une même force. C'est ainsi que pour peser un corps, par exemple, nous pouvons le suspendre à l'extrémité du ressort de la *fig.* 2, et constater la flexion produite. Si nous cherchons ensuite combien il faut de décimètres cubes d'eau distillée pour arriver au même résultat, le nombre trouvé donnera l'expression du poids du corps en kilogrammes, puisque ce poids et le poids formé par ce nombre de kilogrammes font tous deux équilibre à une même réaction de ressort (*).

Il y a plus : tout autre effort développé, soit par la puissance musculaire d'un homme ou d'un animal, soit par le choc d'une veine liquide, d'un jet de gaz ou de vapeur, etc., qui aura encore pour conséquence une flexion égale, sera encore représenté par le même nombre de kilogrammes. Il existe une grande variété d'appareils servant à mesurer les forces, mais ce que nous venons de dire suffit pour que l'on comprenne comment une force quelconque est susceptible d'être exprimée en kilogrammes.

(*) Tout ceci suppose, bien entendu, que l'élasticité du ressort n'aura pas subi de changement dans l'intervalle des deux expériences.

COMPOSITION DES FORCES. — *Loi générale de l'équilibre d'un point.* — Un point matériel A étant soumis à l'action de forces en nombre quelconque, considérons deux de ces forces (*fig.* 6).

La force F, si elle agissait seule, imprimerait au corps, dans sa direction, une certaine accélération $AB = j$.

De même la force F′ imprimerait au point une accélération $AB' = j'$; et, d'après notre deuxième principe, cette accélération j' est celle du mouvement du point A par rapport à trois axes animés d'un mouvement de translation avec une accélération égale à j. D'ailleurs, d'après la règle du parallélogramme des accélérations, l'accélération J de ce mouvement résultant sera représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations AD, AD′ des mouvements composants. Si au lieu des deux forces F et F′ on avait une force unique dirigée suivant la diagonale AC, et capable de produire l'accélération J, le mouvement du point serait le même. On peut donc remplacer deux forces appliquées à un même point par une troisième qui sera la *résultante* de deux autres; on obtiendrait cette résultante en grandeur et en direction par la règle du parallélogramme, puisque les forces sont proportionnelles aux accélérations des mouvements qu'elles produisent. On peut donc, au lieu de composer les mouvements produits par chaque force prise isolément, composer ces forces elles-mêmes, et déterminer directement ensuite le mouvement résultant.

Ces deux manières de procéder paraissent au premier abord tout à fait équivalentes; mais si elles conduisent au même résultat final, il y a pour ainsi dire tout un abîme entre la règle géométrique évidente de la composition des mouvements et le théorème fondamental que nous venons de démontrer, et qui nous permet de trouver la résultante de deux forces appliquées à un même point matériel.

Équilibre d'un point matériel.

Observons que ce théorème, en nous indiquant quelle est la force qui peut remplacer deux forces quelconques appliquées à un même point, nous fait connaître par cela même la

force unique capable de faire équilibre à ces deux forces. Nous voyons qu'on peut arriver à ce résultat sans employer deux forces respectivement égales et contraires aux forces données; il suffit d'appliquer au point une force égale et contraire à la résultante de ces deux forces.

Et de même, si l'on a un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, on peut les remplacer par la force représentée par la ligne qui ferme le polygone des forces données; et la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre de ces forces est que le polygone soit fermé.

Telle est la loi générale de l'équilibre d'un point matériel, et toute la Statique découle aisément de cette proposition fondamentale, proposition dont l'importance est égale au point de vue de la théorie du mouvement, comme au point de vue de la théorie de l'équilibre (*).

On détermine analytiquement la grandeur et la direction de

(*) Si l'on se place exclusivement à ce dernier point de vue, on peut reprocher à la démonstration que nous venons de donner, et qui est due à Newton, de faire intervenir la considération étrangère du mouvement dans la théorie de l'équilibre. Aussi cette démonstration a-t-elle été fort critiquée, et remplacée par plusieurs autres fondées sur les constructions géométriques et les artifices analytiques les plus variés.

Jean Bernoulli dit dans le quatrième volume de ses *Opuscules*, p. 256 : « *Peccant, qui compositionem virium cum compositione motuum confundunt.* » Je suis tout à fait de l'avis de Jean Bernoulli, et il y a, comme je l'ai dit, un abîme entre ces deux choses. C'est même un fait digne de toute notre attention que la manière dont cet abîme se trouve lestement franchi, sans qu'on s'en aperçoive, pour ainsi dire, si l'on n'y prend pas garde. C'est l'exemple le plus curieux que je connaisse du passage d'un ordre d'idées à un autre tout à fait différent, d'une vérité géométrique évidente à un théorème de Statique fort difficile à démontrer directement, théorème qu'il est peut-être impossible de démontrer sans introduire d'une manière plus ou moins déguisée des hypothèses qui rentrent au fond dans notre grande loi fondamentale de l'indépendance et de la composition des effets des forces.

La démonstration de Newton nous semble à la fois la plus simple et la plus naturelle. N'est-il pas évident que l'esprit ne peut se contenter d'une démonstration artificielle, quand il s'agit de propositions qui ont cette importance fondamentale ? « Il faut que les principes sur lesquels une science tout entière repose se démontrent simplement ou qu'ils ne se démontrent pas du tout; et l'esprit ne se flatte pas d'avoir saisi l'ordre naturel suivant lequel les vérités s'enchaînent, tant qu'une vérité bien générale n'est établie qu'à la faveur de constructions et d'artifices très-particuliers. » (Cournot, *ib.*, p. 143.)

la résultante R d'un groupe de forces représentées d'une manière générale par F, au moyen des équations

$$R\cos\overline{R,\,x} = \sum F\cos\overline{F,\,x},$$

$$R\cos\overline{R,\,y} = \sum F\cos\overline{F,\,y},$$

$$R\cos\overline{R,\,z} = \sum F\cos\overline{F,\,z}.$$

Remarque. — Il suit de ce qu'on vient de dire que si à un système quelconque de forces nous en ajoutons une autre égale et opposée à leur résultante, nous produirons l'équilibre.

En effet, on a un polygone OABCD (*fig.* 7), formé par les forces mises bout à bout ; la résultante est représentée en grandeur et en direction par OD ; si nous ajoutions une force égale, mais dirigée de D vers O, le polygone des forces serait fermé, la résultante serait nulle ; les forces se feraient donc équilibre.

Pour exprimer qu'un point est en équilibre sous l'action d'un nombre quelconque de forces, il faut donc exprimer que le polygone des forces est fermé ; ainsi ces conditions d'équilibre sont évidemment

$$\sum F\cos\overline{F,\,x} = 0,$$

$$\sum F\cos\overline{F,\,y} = 0,$$

$$\sum F\cos\overline{F,\,z} = 0,$$

§ II. — Définition de la masse.

On a vu que les forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à un même point matériel ; donc, pour un point matériel quelconque, nous aurons une équation de la forme

$$F = mj,$$

m étant un coefficient constant. Ce coefficient varie d'ailleurs quand on passe d'un point matériel à un autre ; sa valeur nu-

mérique dépend à la fois de l'unité de force et de l'unité de longueur; mais ces unités une fois choisies, F et j sont représentées par des nombres, et alors la valeur numérique de m est déterminée.

Les corps, même supposés réduits à de simples points matériels, ne doivent pas être regardés comme identiques les uns aux autres, au point de vue des effets qu'ils éprouvent de la part des forces qui leur sont appliquées. Il existe dans les corps une qualité en vertu de laquelle ils diffèrent les uns des autres au point de vue mécanique, et dont on reconnaît l'existence par les accélérations plus ou moins grandes qu'ils éprouvent de la part d'une même force, c'est-à-dire par les différentes valeurs que prend, pour différents corps, le coefficient m de l'équation $F = mj$.

Cette qualité est ce qu'on nomme la *masse;* et l'on dit que deux corps, quelle que soit leur nature chimique, ont la même masse, lorsque, soumis à l'influence d'une même force, ils acquièrent des vitesses égales dans des temps égaux.

Il est naturel de dire que deux corps ont des masses doubles, triples, etc., l'une de l'autre, s'ils exigent des forces doubles, triples, etc., pour prendre une accélération déterminée. Or, ceci revient à considérer les masses des corps comme proportionnelles aux quotients $\frac{F}{j}$ d'une force par l'accélération qu'elle leur imprime. Enfin, on est convenu de prendre ce quotient, c'est-à-dire le nombre m, pour la valeur même de la masse; c'est-à-dire qu'on appelle *masse* le coefficient m, constant pour un même corps défini par l'équation

$$F = mj.$$

La masse ne constitue pas une *résistance* au mouvement. Théoriquement, la plus petite force appliquée à un point matériel libre le mettra toujours en mouvement; seulement, le mouvement sera toujours plus ou moins lent, selon que la masse sera plus ou moins grande. On se fait une idée de ce que c'est que la masse en se reportant à la théorie de la chaleur : un corps quelconque ne repousse pas complétement la chaleur; seulement, il s'échauffe plus ou moins, selon sa nature, tout comme un corps soumis à l'action d'une force

prend une accélération plus ou moins grande, en raison de la grandeur de sa masse.

En Statique, où l'on considère seulement des corps en équilibre sous l'action des forces qui leur sont appliquées, la considération de la masse ne s'introduit pas.

Il n'y a pas d'unité de masse, pas plus qu'il n'y a d'unité de vitesse. Dans l'équation

$$F = mj,$$

la valeur numérique du coefficient m est déterminée quand on a les valeurs de F et de j; elle dépend donc à la fois de l'unité de force et de l'unité de longueur, le rapport de deux masses étant toutefois indépendant de ces deux unités.

En Astronomie, on a l'habitude de rapporter toutes les masses à la masse du soleil prise pour unité, ce qui semble en contradiction avec ce que nous venons de dire. Mais alors il faut remarquer que les forces ne sont plus exprimées en kilogrammes : elles ne peuvent même pas être rapportées à aucune unité particulière; ce sont de simples coefficients numériques dont la valeur est donnée par l'équation

$$F = mj.$$

Désignons par P le poids d'un corps; l'expérience a montré qu'avec certaines restrictions physiques, ce poids communique au corps une accélération g, constante dans un même lieu pour tous les corps. L'équation générale devient alors

$$P = mg,$$

g étant une constante dont la valeur à la latitude de Paris et au niveau de la mer a été trouvée égale à 9,8088.

Donc la masse d'un corps est proportionnelle à son poids (*).

(*) Ceci va nous permettre de comprendre la raison pour laquelle on définit quelquefois la masse la *quantité de matière* qui se trouve dans un corps.

Nous venons de voir que le poids est proportionnel à la masse; nous avons défini la matière : ce qui persiste d'un corps quand il a perdu toutes les propriétés qui le constituaient comme corps. Or, l'expérience montre que, quelles que soient les transformations, soit physiques, soit chimiques, que l'on peut faire subir à un corps, son poids reste constant; il est donc naturel de regarder le

Toutefois, il faut bien se garder de confondre le poids avec la masse. En effet, le poids varie avec une foule de circonstances physiques; mais la valeur de g varie dans les mêmes circonstances, de sorte que le quotient $\frac{P}{g}$ reste constant.

Il nous est facile actuellement de calculer l'accélération que prend, sous l'influence d'une force donnée, un corps assez petit pour qu'on puisse l'assimiler à un point matériel. En effet, le poids de ce corps, divisé par g, fera connaître sa masse m; et l'on obtiendra ensuite l'accélération cherchée en divisant par m le nombre de kilogrammes qui mesure la force.

§ III. — Du travail des forces.

Considérons une force F, appliquée à un point matériel A (*fig.* 8), et supposons que, sous l'action de cette force (*), le point A ait parcouru dans le temps dt un arc infiniment petit AA', que nous représenterons par ds.

Définition. — *On appelle travail élémentaire de la force* F *correspondant au déplacement* AA' *de son point d'application le produit de la force par le chemin parcouru, projeté sur la direction de cette force.*

Cette définition se traduit analytiquement par l'équation

$$d.\mathrm{TF} = \mathrm{F}\,ds\cos\overline{\mathrm{F}, ds}. \qquad (1)$$

---

poids comme proportionnel à la quantité de matière qui existe dans le corps. En y regardant d'un peu plus près, on voit que la masse, plutôt que le poids, doit être regardée comme proportionnelle à la quantité de matière; en effet, le poids est une quantité tout à fait contingente, qui varie suivant le lieu où l'on se trouve; la masse, au contraire, reste rigoureusement et absolument constante dans toutes les circonstances.

(*) Il serait souverainement inexact de dire que le déplacement du point d'application a lieu *en vertu de l'action de la force*. L'espace parcouru par un point mobile pendant le temps dt a pour expression $v\,dt$: il est uniquement dû à la vitesse acquise en vertu des causes qui ont agi antérieurement à l'époque que l'on considère. Quand plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel, les travaux de ces forces sont des quantités absolument indépendantes l'une de l'autre.

Le travail d'une force est positif ou négatif, suivant le signe du cosinus qui figure dans le second membre de l'équation (1). L'usage a consacré les dénominations de *travail moteur*, pour désigner un travail positif, c'est-à-dire le travail d'une force qui fait un angle aigu avec la direction de la vitesse de son point d'application ; et de *travail résistant*, pour désigner le travail négatif qui fait un angle obtus avec la direction de cette même vitesse.

Nous aurons à justifier plus tard l'introduction dans le langage mathématique de toutes ces expressions empruntées au *Dictionnaire des Économistes*. La notion du travail est une donnée tout à fait fondamentale dans la Mécanique appliquée ; comme elle implique nécessairement l'idée de mouvement, elle peut sembler étrangère à la Statique. Nous verrons pourtant que la considération du travail est la base d'un principe ou théorème célèbre, dont l'introduction dans la science de l'équilibre date de l'époque de Galilée, et sur lequel Lagrange a établi le fondement de toute la Statique.

C'est pourquoi nous avons dû définir dès à présent le travail comme une quantité purement géométrique, comme le produit d'une force par une longueur. Les théorèmes suivants résultent immédiatement de la définition du travail.

THÉORÈME I. — *Le travail de la résultante d'un nombre quelconque de forces agissant sur un point matériel en mouvement est égal à la somme des travaux des composantes.*

(PONCELET.)

En effet, la projection de la résultante sur une direction quelconque est égale à la somme des projections des composantes sur la même direction. Projetons sur la direction du chemin parcouru, nous aurons

$$\mathrm{R}\cos\overline{\mathrm{R}, ds} = \sum \mathrm{F}\cos\overline{\mathrm{F}, ds}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par le déplacement ds, il vient, en ayant égard à l'équation (1),

$$d.\mathrm{TR} = \sum d\ \mathrm{TF}. \tag{2}$$

Dans les applications du calcul à la Mécanique, les forces

sont toujours définies par leurs projections sur trois axes rectangulaires, ainsi que par les coordonnées x, y, z de leurs points d'application.

Soient X, Y, Z les composantes d'une force F sur trois axes rectangulaires, la somme des travaux de ces trois composantes sera évidemment

$$\mathrm{X}\,ds\cos\overline{x,\,ds} + \mathrm{Y}\,ds\cos\overline{y,\,ds} + \mathrm{Z}\,ds\cos\overline{z,\,ds}.$$

Or,

$$ds\cos\overline{x,\,ds} = dx, \quad ds\cos\overline{y,\,ds} = dy, \quad ds\cos\overline{z,\,ds} = dz,$$

donc

$$(3) \qquad d\mathrm{TF} = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz.$$

Considérons maintenant le déplacement ds comme résultant de plusieurs déplacements $d\sigma$, $d\sigma'$; cette décomposition donne lieu au théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Le travail d'une force quelconque* F, *pour le déplacement ds, est égal à la somme des travaux de cette force correspondants aux déplacements composants* $d\sigma$, $d\sigma'$, ...

Projetons en effet les déplacements composants et le déplacement résultant sur la direction de la force, nous aurons

$$ds\cos\overline{\mathrm{F},\,ds} = \sum d\sigma\cos\overline{\mathrm{F},\,d\sigma};$$

en multipliant par F, on démontre le théorème énoncé.

Théorie géométrique des moments.

Travail des forces dans le mouvement de rotation. — Considérons en particulier une force dont le point d'application M tourne autour d'un axe fixe O (*fig.* 9). Soit P la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe O, et choisi de manière que le mouvement du point M s'effectue dans le même sens que la rotation des aiguilles d'une montre ; l'espace parcouru dans le temps dt est un arc MM′ dirigé à peu près suivant la perpendiculaire à OM. On a

$$\mathrm{MM}' = r\,d\alpha,$$

en désignant OM par r et MOM′ par $d\alpha$. Pour avoir le travail de la force, il faut projeter celle-ci dans la direction MA : cette projection est le produit de P par le cosinus de l'angle φ, compris entre les directions MP et MM′ ou MP et MA, et l'on a

$$d.\mathrm{TF} = rd\alpha\,\mathrm{P}\cos\varphi.$$

Abaissons du point O une perpendiculaire OB sur la direction de P, et appelons p cette perpendiculaire, dont l'angle avec OM est précisément égal à φ, on a

$$r\cos\varphi = p;$$

donc, le travail de la force a également pour expression

$$d.\mathrm{TF} = \mathrm{P}p.d\alpha. \tag{4}$$

Le produit Pp s'appelle le *moment* de la force par rapport à l'axe de rotation, et l'équation précédente s'énonce :

THÉORÈME III. — *Le travail d'une force dont le point d'application tourne autour d'un axe fixe est le produit du déplacement angulaire par le moment de la force par rapport à l'axe de rotation.*

On appelle *moment* d'une force par rapport à un axe, le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe, par la plus courte distance de la force et de l'axe; on représente le moment d'une force F, par rapport à un axe O, par la notation $\mathrm{M}_o\mathrm{F}$; on a alors

$$\mathrm{M}_o\,\mathrm{F} = \mathrm{P}p.$$

Si θ est l'angle de la force avec l'axe, on a

$$\mathrm{P} = \mathrm{F}\sin\theta,$$

$$\mathrm{M}_o\,\mathrm{F} = \mathrm{F}p\sin\theta.$$

Le moment est nul quand p ou θ sont nuls, c'est-à-dire quand la force rencontre l'axe ou qu'elle lui est parallèle; en un mot, quand la force et l'axe sont dans un même plan.

Pour que l'équation

$$d.\mathrm{TF} = \mathrm{M}_o\,\mathrm{F}d\alpha$$

soit générale, il faut donner un signe au moment; or, $d\alpha$ est positif; le signe de $\mathrm{M}_o\,\mathrm{F}$ doit donc toujours être le même que

celui de $d.\mathrm{TF}$. Or, si l'angle φ est aigu, $d.\mathrm{TF}$ est positif, et la force, si elle agissait seule, tendrait à faire tourner le point dans le sens positif; si φ est obtus, $d.\mathrm{TF}$ est négatif, et la force tend à faire tourner le point M dans le sens négatif; donc, enfin, le moment de la force sera positif ou négatif, selon que la force tendra à faire tourner le point dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Axe représentatif d'un moment. — Le moment d'une force peut être représenté par une longueur portée sur l'axe, dans un sens ou dans l'autre, selon que le moment est positif ou négatif, mais toujours de manière qu'en se plaçant sur cet axe à la manière de Poinsot ou d'Ampère, on voie la force tendre à faire tourner son point d'application dans le sens de la rotation des aiguilles d'une montre, sens qui est notre sens positif.

Théorème de Varignon. — De l'équation

$$d.\mathrm{TF} = \mathrm{M}_0\,\mathrm{F}\,dz,$$

on déduit un théorème célèbre dû à Varignon. Nous avons démontré que le travail d'une résultante est égal à la somme des travaux des composantes; or, les travaux de diverses forces appliquées à un même point sont proportionnels à leurs moments; donc :

Théorème IV (théorème de Varignon). — *Le moment d'une résultante par rapport à un axe est égal à la somme des moments des composantes par rapport au même axe.*

Cherchons les expressions algébriques des moments respectifs d'une force par rapport à trois axes rectangulaires.

Soient F une force quelconque (*fig.* 10), X, Y, Z ses composantes sur les trois axes, et x, y, z les coordonnées de son point d'application. Cherchons d'abord le moment de cette force par rapport à l'axe des x. Si je désigne ce moment par L, nous aurons évidemment

$$\mathrm{L} = \mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z.$$

Nous aurons de même, en désignant par M et N les moments respectifs de F par rapport à l'axe des y et à l'axe des z,

$$\mathrm{M} = \mathrm{X}z - \mathrm{Z}x$$
$$\mathrm{N} = \mathrm{Y}x - \mathrm{X}y.$$

Trouvons enfin le moment G de la force par rapport à une droite quelconque OU déterminée par les angles λ, μ, ν, qu'elle fait avec les trois axes coordonnés. Soit $d\alpha$ le déplacement angulaire autour de cette droite : on peut regarder ce déplacement comme résultant des déplacements simultanés

$$d\alpha\cos\lambda, \quad d\alpha\cos\mu, \quad d\alpha\cos\nu,$$

parallèles respectivement aux trois axes coordonnés.

Exprimons que le travail de la résultante pour un mouvement résultant est égal à la somme des travaux de cette force pour chacun des mouvements composants, nous aurons

$$\mathrm{G}\,d\alpha = \mathrm{L}\,d\alpha\cos\lambda + \mathrm{M}\,d\alpha\cos\mu + \mathrm{N}\,d\alpha\cos\nu,$$

ou, en supprimant le facteur commun $d\alpha$,

$$\mathrm{G} = \mathrm{L}\cos\lambda + \mathrm{M}\cos\mu + \mathrm{N}\cos\nu. \tag{5}$$

Projections des moments. — Considérons les axes représentatifs des moments L, M, N, G, c'est-à-dire portons sur les droites Ox, Oy, Oz, OU des longueurs respectivement égales aux moments correspondants, et cherchons le lieu des points ainsi déterminés. Il faut faire dans l'équation (5), x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées courantes d'un point du lieu,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{G} &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ \cos\lambda &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \\ \cos\mu &= \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

La substitution de ces valeurs donne

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}y_1 + \mathrm{N}z_1. \tag{7}$$

Le lieu cherché est donc une sphère qui passe par l'origine, où elle est tangente au plan conduit par cette origine et par la direction de la force F. En effet, l'équation du plan tangent au point $(x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0)$ est

$$\mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}y_1 + \mathrm{N}z_1 = 0,$$

et ce plan contient à la fois le rayon vecteur OM et la parallèle à la force F menée par l'origine. Le moment est nul par rapport à une droite quelconque contenue dans ce plan.

Le même moment atteint au contraire son maximum, représenté par le diamètre de la sphère, autour d'une perpendiculaire au plan dont nous venons de parler. Ce maximum, égal au produit de la force par sa distance à l'origine, s'appelle le *moment de la force par rapport au point* O. Le moment relatif à un axe quelconque est la projection sur cet axe du diamètre de la sphère, c'est-à-dire du moment maximum ou du moment relatif à l'origine.

§ IV. — Notions sur la constitution des corps naturels.

Pour terminer ce chapitre, consacré aux notions préliminaires, et avant d'entrer dans le détail de la recherche des conditions d'équilibre d'un point matériel, ou d'un corps quelconque placé dans des conditions déterminées, exposons avec précision la manière dont nous comprenons la constitution intime des corps de la nature.

Si l'on se reporte à notre définition du *point matériel*, on aura le droit de dire en toute rigueur, en renversant cette définition, qu'un corps quelconque est composé d'une infinité de points matériels infiniment petits. Qu'ils soient isolés, qu'ils soient en contact, peu nous importe; mais puisqu'ils forment un corps, ces points ne sont pas libres, indépendants les uns des autres; il se développe entre eux des actions mutuelles qui suivent des lois que nous ne connaissons pas et que nous ne pouvons pas connaître. Nous introduirons ces actions dans nos raisonnements, et nous considérerons que les points matériels sont en équilibre sous l'effet combiné des forces données et de ces actions inconnues.

On peut être tenté de confondre nos points matériels avec les *molécules* des physiciens; c'est là une erreur contre laquelle il faut se mettre en garde. Si les corps sont composés de molécules, nous sommes obligés d'admettre que les dimensions, la forme et la disposition de celles-ci doivent influer sur les propriétés des corps : le seul phénomène de la cristallisation rend ce fait indubitable. Il n'y a donc aucun rapport possible

entre les *molécules*, telles que les physiciens les conçoivent, et nos *points matériels*, qui n'ont, eux, ni dimensions, ni formes spéciales. Les molécules, si elles existent, sont des assemblages de points matériels.

Enfin, ce qui est un point assez important, l'existence des molécules est encore une chose tout à fait hypothétique, qui peut être commode pour relier entre elles diverses théories physiques, tandis que nous énonçons une vérité tout à fait incontestable quand, après avoir défini *point matériel* ce qu'on obtient en divisant un corps, nous disons qu'on reconstitue le corps en en réunissant *à posteriori* toutes les parties.

Or, toutes les fois que nous sommes obligés de recourir à une hypothèse, nous avons soin de la mettre nettement en évidence ; et il est juste aussi de montrer, d'un autre côté, ce qui découle rigoureusement de nos définitions.

J'ai dit que nous ne savions absolument rien sur le mode de liaison, d'assemblage, pour ainsi dire, qui constitue un corps physique au moyen des éléments que nous nommons *points matériels*. Il ne nous est pourtant pas possible d'aborder la Mécanique proprement dite sans avoir quelque idée à ce sujet, c'est-à-dire sans faire quelques hypothèses, sans poser quelque principe analogue à ceux qui nous ont servi à résoudre les problèmes qui se rapportent au point matériel.

Une seule de ces hypothèses se rencontre dans la Mécanique rationnelle : elle constitue le troisième principe fondamental dont nous avons parlé, principe qui a été introduit dans la science par Newton.

Troisième principe. — *Égalité de l'action et de la réaction.* — Ce principe suppose d'abord que toute force réellement, physiquement existante (par opposition avec les forces fictives telles que les résultantes, les projections, et autres forces du même genre que nous avons introduites uniquement pour la commodité du raisonnement), toute force donc, réellement existante, non-seulement est subie par un point matériel, mais encore est nécessairement due à l'existence d'un autre point matériel, qui peut être considéré comme exerçant sur le premier la force dont il est question. Or, le principe dont il s'agit consiste en ce que :

Si un point matériel M *reçoit d'un autre point matériel* M' *une certaine action f; réciproquement, le point* M' *reçoit de* M *une action égale et contraire f', qu'on appelle la réaction du point* M'.

Distinction des forces extérieures et des forces intérieures. — Il suit de là que dans chaque système de points matériels que nous étudierons, il faudra considérer deux genres de forces : celles que nous appellerons *forces intérieures*, et les *forces extérieures*.

Soit A un point du système que nous étudions, B un point qui agit sur lui; si B appartient également à notre système matériel, la force qu'il exerce sur le point A est une force intérieure; nous la désignerons par une petite lettre. Si le point B ne fait pas partie du système dont nous nous occupons, cette force qui émane du point B est une force extérieure au système, et nous la représenterons par une grande lettre.

Les forces extérieures et les forces intérieures ne diffèrent évidemment pas dans leur essence; elles ne diffèrent que par la manière dont elles figurent dans nos raisonnements et nos calculs.

Une même force peut jouer, tantôt le rôle de force intérieure, tantôt le rôle de force extérieure, suivant les cas. Si l'on considère, par exemple, le mouvement d'un corps qui tombe à la surface de la terre, l'attraction qu'une des molécules de ce corps éprouve de la part d'une molécule quelconque de la terre est une force extérieure; si, au contraire, on considère le mouvement d'un système matériel formé de la terre tout entière et des corps qui se trouvent à sa surface et dans son voisinage, la même attraction devient une force intérieure.

Il est clair, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, que si l'on prend, parmi les forces qui agissent sur les divers points d'un système matériel, toutes celles qui sont des forces intérieures, ces forces sont égales deux à deux et opposées. Il existe bien une force égale et opposée à chacune des forces extérieures, mais nous n'avons pas à nous occuper de cette force, puisqu'elle n'est pas appliquée à l'un des points dont nous étudions le mouvement ou l'équilibre.

Il arrive que dans certaines équations, où l'on considère l'ensemble de toutes les forces agissant sur un système matériel, les forces intérieures disparaissent, parce que les deux forces jumelles, qui ne vont pas l'une sans l'autre, d'après notre définition des forces intérieures, introduisent dans ces équations des termes égaux en valeur absolue et de signes contraires.

Par exemple, on reconnaît aisément que :

1° *La somme des projections sur un axe quelconque de deux forces intérieures conjuguées est identiquement nulle.*

2° *La somme des moments de deux pareilles forces autour d'une droite quelconque est identiquement nulle.*

En effet, la projection ou le moment d'une force est une quantité qui change de signe avec le sens de la force, et qui ne dépend nullement de la position du point d'application de la force, sur la droite qui en représente la direction.

Travaux des forces intérieures. — Au contraire, la somme des travaux des forces intérieures est susceptible d'une expression remarquable, dont nous ferons fréquemment usage.

Soient M et M′ (*fig.* 11) deux points matériels agissant l'un sur l'autre, je suppose, par répulsion; soit f l'action, égale à la réaction. Supposons que les points M et M′ se soient déplacés d'une manière quelconque et soient venus, le premier en M_1, le second en M'_1. La somme des travaux des deux forces sera

$$f(M'P' - MP),$$

P′ et P étant les projections des points M_1 et M'_1 sur la direction MM′; cette somme sera encore représentée par

$$f(PP' - MM').$$

Or $M_1M'_1$ et PP′ ne diffèrent que d'un infiniment petit de deuxième ordre; nous pouvons donc, dans l'expression précédente, remplacer PP′ par $M_1M'_1$, et alors le coefficient de f devient

$$M_1M'_1 - MM' = dr,$$

en désignant par r la longueur MM′. On aura donc pour la somme des travaux

$$f\,dr.$$

La même expression représentera aussi bien le travail, dans

le cas d'une force attractive, en convenant de regarder les attractions comme négatives, les répulsions étant positives.

Des solides invariables. — Si nos deux points **M**, **M'** se sont déplacés sans que leur distance ait changé (comme cela aurait lieu si ces points faisaient partie d'un système absolument invariable de forme, tel que ceux dont nous avons étudié le mouvement géométrique dans la première Section de cet ouvrage), on a

$$dr = 0;$$

par conséquent la somme fdr des travaux des actions mutuelles de ces deux points est nulle.

Il suit de là que, dans tout déplacement commun qui n'altère pas les distances mutuelles des points d'un système quelconque, les forces intérieures ne figurent pas dans la somme des travaux des forces agissant sur tous les points du système : ce qui tient à ce que ces forces introduisent dans cette somme des termes qui sont deux à deux égaux et de signes contraires, et qui se détruisent algébriquement.

Il s'attache un très-grand intérêt aux équations qui sont indépendantes des actions intérieures, vu notre ignorance au sujet de ces forces : aussi a-t-on l'habitude en Mécanique de distinguer soigneusement les systèmes qu'on suppose absolument invariables de formes, c'est-à-dire composés de points matériels qui ne peuvent en aucune façon s'approcher ou s'éloigner les uns des autres; c'est à un pareil système que nous donnons le nom de *solide invariable.*

Cette invariabilité absolue de forme d'un système matériel ne se rencontre pas dans la nature. Il existe, il est vrai, un grand nombre de corps solides qui semblent ne pas éprouver de changement de forme, de quelque manière qu'on cherche à agir sur eux, pourvu toutefois que les forces qu'on leur applique ne dépassent pas de certaines limites; mais si ces corps paraissent conserver la figure qu'ils avaient d'abord, c'est que les déformations qu'ils ont subies sont trop petites pour que nous puissions les apercevoir; elles n'en existent pas moins et se manifestent dans les machines par des pertes de travail et des usures de matériaux.

Pour distinguer ces corps des premiers, nous leur donnerons le nom de *solides naturels*.

Un mode de raisonnement que nous emploierons souvent en Statique est celui-ci : Pour trouver les conditions d'équilibre d'un corps *naturel* quelconque, solide, liquide, d'un cordon, d'un système articulé, nous supposerons l'équilibre établi, et dès lors nous pourrons, sans troubler cet équilibre, concevoir que le corps devienne rigoureusement invariable. Donc, si l'on cherche les conditions pour que l'équilibre ait lieu en supposant ce corps rigide, ces conditions devront être nécessairement remplies pour l'équilibre du corps, après que nous lui aurons rendu la possibilité de subir certaines déformations. Seulement, en général, ces conditions ne seront plus alors suffisantes.

De l'élasticité. — Il faudra donc, après avoir établi les conditions qui seraient suffisantes pour l'équilibre si le corps était rigoureusement invariable, faire une deuxième étude plus soignée, et voir comment les corps naturels peuvent se déformer sous l'influence des efforts auxquels ils doivent se trouver soumis dans nos machines ou nos constructions. Ce nouvel ordre de questions est du domaine de l'expérience.

C'est l'expérience qui nous apprend que les solides naturels présentent, pour la plupart, la propriété connue sous le nom d'*élasticité*, en vertu de laquelle ils reprennent leur forme primitive, quand, par un certain effort, on les a déformés. Nous aurons donc une seconde approximation en tenant compte de cette propriété; d'ailleurs, pour avoir des hypothèses nettes et précises, nous considérerons deux cas limites, celui d'un corps doué d'une élasticité parfaite, et celui d'un corps complétement dénué d'élasticité.

C'est encore à l'expérience qu'il faudra faire appel pour savoir dans quels cas nous pourrons appliquer aux corps naturels les résultats de ces nouvelles recherches qui reposent encore sur de pures abstractions. Ainsi, pour un corps solide déterminé, nous reconnaîtrons que sous l'influence d'efforts qui ne dépassent pas une certaine limite, l'élasticité peut être, sans erreur appréciable, considérée comme parfaite; au delà, on ne peut plus compter que le corps revienne à son état primitif, c'est à un autre corps qu'on aura affaire. Les forces con-

tinuant à augmenter à partir de cette limite, le corps finira par se briser. Nous déterminerons avec soin cette limite, qu'on appelle limite d'élasticité, et nous saurons ainsi que tant que nous ne la dépasserons pas, nous pourrons appliquer sans crainte les résultats que la théorie nous a donnés pour ce cas idéal.

Si certaines pièces de machines, certaines parties de nos constructions se trouvent soumises à des efforts dépassant la limite d'élasticité de la matière, il sera sage de changer les dispositions employées, afin de rentrer dans le cas normal.

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL.

§ V. — Équilibre d'un point matériel libre. — Équilibre d'un point qui n'est pas absolument libre.

La *Statique* est la science de l'équilibre des forces.

Nous allons d'abord considérer le cas où un corps réduit à un simple point matériel est sollicité par des forces quelconques; et nous chercherons quelles sont les conditions qui doivent être satisfaites pour que ces forces se fassent équilibre. Ces conditions étant supposées remplies, le corps restera en repos, s'il est en repos; ou, s'il est en mouvement sous l'action d'autres forces, le mouvement continuera comme si celles qui se font équilibre n'existaient pas.

Cette première partie de la Statique est extrêmement simple; et il n'y a absolument rien à ajouter aux notions qui précèdent, pour avoir la théorie complète de l'équilibre d'un point matériel. En effet, tant de forces que l'on voudra, agissant sur un point matériel, ont une résultante, c'est-à-dire qu'il existe une force unique capable de les remplacer toutes. Pour l'équilibre, il faut que cette résultante, qui est représentée par une longueur, soit nulle; or, pour qu'une longueur soit nulle, il faut et il suffit que ses projections sur trois axes rectangulaires soient nulles séparément : nous traduirons donc les conditions de l'équilibre en écrivant

$$\sum F\cos\overline{F,x}=0,\quad \sum F\cos\overline{F,y}=0,\quad \sum F\cos\overline{F,z}=0,$$

ou, d'après nos notations

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0. \tag{1}$$

Telles sont les équations nécessaires et suffisantes pour qu'un point matériel *libre* soit en équilibre.

Il peut se faire que le point dont on cherche les conditions d'équilibre ne soit pas libre de se mouvoir d'une manière quelconque dans l'espace, c'est-à-dire que ses coordonnées ne puissent pas prendre toutes les valeurs possibles. Les déplacements de ce point étant soumis à certaines conditions, si la résultante des forces qui agissent sur lui tend à lui faire prendre un mouvement incompatible avec ces conditions, le point restera en repos, absolument comme si cette résultante était nulle.

L'effet de la force sera alors simplement, comme on dit, de *tendre les liens du système*, expression déduite des cas analogues à ceux où l'on a, par exemple, un corps suspendu à un fil et soumis à une force agissant dans le prolongement du fil.

En général, quand un corps est gêné dans ses mouvements par d'autres corps, et qu'il reste en équilibre malgré l'action d'une force, l'effet de cette force se reporte sur les corps qui s'opposent à certains mouvements : elle produit ce qu'on appelle la charge des appuis ou la tension des liens.

Dans la Mécanique rationnelle, on ne tient pas compte de la nature physique des liens, appuis, etc. On traduit en Algèbre, et on exprime par des équations (dites équations de liaison) les conditions qui résultent de la présence de ces appuis fixes ou mobiles; et l'on suppose ainsi que ces appuis sont doués de toute l'inflexibilité d'une équation algébrique. Pratiquement, il est indispensable de calculer les charges des appuis et de s'assurer, en ayant égard à leur nature réelle, qu'*ils peuvent résister aux efforts qu'ils ont à supporter.*

§ VI. — Équilibre d'un point assujetti a rester sur une surface fixe.

Un point qui n'est pas libre peut être plus ou moins gêné. Supposons d'abord que ses coordonnées soient liées entre elles par une relation unique

$$\varphi(x, y, z) = 0. \qquad (2)$$

On peut matérialiser la condition exprimée par cette équation, quelles que soient les véritables liaisons physiques des-

quelles on l'ait déduite, en supposant que le point ne puisse pas quitter la surface représentée par l'équation (2), en ayant d'ailleurs la liberté de se mouvoir sur cette surface de toutes les manières possibles. Ainsi, quand un point doit rester à une distance constante d'un axe fixe, on peut supposer qu'il se meut sur un cylindre de révolution autour de cet axe; s'il doit rester à une distance constante d'un point fixe, comme dans le cas du pendule simple, on pourra supposer qu'il se meut sur une sphère, etc.

Il est évident que l'équilibre aura lieu si la résultante des forces qui agissent sur le point matériel est dirigée suivant la normale à la surface directrice; car alors, tout l'effort de cette résultante consistant à écarter le point matériel de la surface, dans un sens ou dans l'autre, chose que nous supposons impossible, cet effort sera complétement sans effet et le point restera en repos.

Il arrive souvent que le corps est simplement posé sur une surface matérielle; il faut alors, si l'on veut que le corps reste en équilibre, que la résultante des forces tende à le faire pénétrer dans l'intérieur de la surface, et non à l'en détacher. C'est ce qu'on exprime en disant que la direction de la résultante doit être celle de la normale *intérieure*.

L'analyse nous apprend que si nous appelons α, β, γ les angles formés avec les axes coordonnés par la direction de la normale extérieure à la surface (2), on a

$$\cos\alpha = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\Delta\varphi}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\Delta\varphi}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{d\varphi}{dz}}{\Delta\varphi},$$

en posant

$$\Delta\varphi = +\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2};$$

il faut donc, pour l'équilibre, que les projections de la résultante X, Y, Z soient respectivement proportionnelles à $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$, ou à

$$-\frac{d\varphi}{dx}, \quad -\frac{d\varphi}{dy}, \quad -\frac{d\varphi}{dz};$$

donc on écrira, en appelant λ un certain facteur positif,

$$X = -\lambda\cos\alpha, \quad Y = -\lambda\cos\beta, \quad Z = -\lambda\cos\gamma,$$

ou bien

$$X = -\lambda_1\frac{d\varphi}{dx}, \quad Y = -\lambda_1\frac{d\varphi}{dy}, \quad Z = -\lambda_1\frac{d\varphi}{dz},$$

en représentant $\frac{\lambda}{\Delta\varphi}$ par λ_1.

On peut écrire ces équations de la manière suivante :

$$(3)\qquad \begin{cases} X + \lambda\cos\alpha = 0, \\ Y + \lambda\cos\beta = 0, \\ Z + \lambda\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Les trois cosinus qui figurent dans ces équations sont des fonctions connues des coordonnées du point que nous étudions, λ est un coefficient indéterminé. En éliminant ce coefficient entre les équations (3), on obtiendra les deux relations auxquelles doivent satisfaire les composantes X, Y, Z, pour l'équilibre de leur point d'application. Ces relations étant supposées vérifiées, l'une quelconque des équations (3) fera connaître la valeur de l'indéterminée λ.

Mises sous la forme (3), les équations de l'équilibre d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface sont les mêmes que celles de ce point matériel libre soumis aux mêmes actions, en supposant qu'on joigne aux forces dont les projections sur les trois axes sont représentées par X, Y, Z, une nouvelle force λ dirigée suivant la normale extérieure. Cette force λ, qui fait que le point matériel peut être regardé comme libre, est ce qu'on appelle la *réaction* de la surface. La direction de cette réaction est celle de la normale extérieure; sa grandeur n'est pas immédiatement connue; mais il suffit que les trois équations aient lieu pour une valeur convenable de λ; les conditions d'équilibre, dans ce cas, se réduisent donc à deux, qu'on tirerait des équations (3) en éliminant λ. Ces deux conditions étant supposées satisfaites, l'une des équations fournira la valeur de la réaction inconnue λ.

En réalité, dans la nature, les choses ne se passent pas ainsi.

Nous avons admis qu'un corps placé sur une surface peut se déplacer comme on veut sur cette surface, sans un effort

quelconque, mais qu'il ne peut y pénétrer. Il existe une force particulière appelée *frottement*, qui fait qu'un point ne peut se déplacer sur la surface que si on lui applique, dans le plan tangent à la surface, un effort déterminé ou un effort plus grand. L'action de la surface n'est donc pas normale; on n'a plus, à proprement parler, d'équations d'équilibre; l'équilibre est indéterminé, et les forces indépendantes de la surface peuvent varier dans une certaine mesure sans qu'il y ait de mouvement produit. Pour nous, qui faisons actuellement de la Mécanique rationnelle, nous commencerons par négliger le frottement, et nous supposerons toujours que l'action de la surface soit dirigée suivant la normale extérieure. Nos résultats seront ainsi forcément entachés d'inexactitude, et ne seront pas directement applicables aux corps tels qu'ils existent dans la nature.

§ VII. — Équilibre d'un point assujetti a rester sur une courbe fixe.

Le point matériel que nous considérons peut être encore plus gêné dans ses mouvements que nous ne venons de le supposer; c'est ce qui arrivera, par exemple, si les liaisons sont telles, qu'il résulte de leur présence deux équations distinctes entre les coordonnées de ce point :

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Ces deux équations représentent une courbe dont le point ne peut pas s'éloigner : c'est sa trajectoire (*) qui se trouve ainsi immédiatement connue.

Donc, il faut, pour l'équilibre, que la résultante tende à faire sortir le point de cette ligne, c'est-à-dire qu'elle soit perpen-

(*) N'oublions pas que nos équations d'équilibre n'impliquent pas le moins du monde l'idée que le point reste en repos. Si les forces que nous considérons et qui satisfont aux conditions d'équilibre agissaient seules sur le corps en repos, il y resterait, voilà tout. Mais rien n'empêche que le point n'ait à l'instant considéré un certain mouvement dû à des causes quelconques. Alors ce mouvement se continuera absolument comme si les forces qui se font équilibre n'existaient pas.

diculaire à l'élément ds de cette courbe; on doit donc avoir

$$\mathbf{X}\,dx + \mathbf{Y}\,dy + \mathbf{Z}\,dz = 0. \tag{5}$$

En vertu des équations (4), dx, dy, dz sont liés par les relations

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx}\,dx + \dfrac{d\varphi}{dy}\,dy + \dfrac{d\varphi}{dz}\,dz = 0, \\ \dfrac{d\psi}{dx}\,dx + \dfrac{d\psi}{dy}\,dy + \dfrac{d\psi}{dz}\,dz = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Éliminons dx, dy, dz entre les équations (5) et (6); pour cela, ajoutons-les membre à membre après avoir multiplié la deuxième par λ, la troisième par μ, et égalons à zéro les coefficients respectifs de dx, dy, dz; nous aurons

$$\begin{cases} \mathbf{X} + \lambda\dfrac{d\varphi}{dx} + \mu\dfrac{d\psi}{dx} = 0, \\ \mathbf{Y} + \lambda\dfrac{d\varphi}{dy} + \mu\dfrac{d\psi}{dy} = 0, \\ \mathbf{Z} + \lambda\dfrac{d\varphi}{dz} + \mu\dfrac{d\psi}{dz} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Au lieu d'une seule réaction, comme dans le cas d'une surface, nous en aurons deux dirigées suivant les normales respectives aux surfaces représentées par les équations (4).

Les conditions de l'équilibre se réduiront à une en éliminant λ et μ entre les équations (7). En même temps, on déterminera la valeur des quantités λ et μ qui sont liées aux réactions inconnues.

On aurait pu, dans les deux cas que nous venons d'étudier, trouver directement l'équation ou les équations d'équilibre, sans introduire d'inconnues auxiliaires.

En effet, la réaction d'une surface étant normale à cette surface, on pourrait prendre pour axes cette normale et deux autres droites rectangulaires. Les équations obtenues en égalant à zéro les projections des forces sur ces deux derniers axes ne contiendraient pas la réaction inconnue; ce seraient les équations d'équilibre.

De même pour le cas d'une courbe fixe.

CHAPITRE III.

ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES QUELCONQUES DE POINTS MATÉRIELS.

Après avoir étudié tout ce qui se rapporte à l'équilibre d'un point matériel, il faut passer au cas d'un corps proprement dit, c'est-à-dire d'un système de points matériels liés entre eux d'une manière quelconque.

Ces liaisons des divers points résultent des forces intérieures, dont nous avons parlé en définissant d'une manière générale la constitution des corps matériels. Le caractère spécial des forces intérieures est d'être deux à deux égales et directement opposées, mais non appliquées au même point. Leur nombre est infini comme celui des points du système. Elles se distinguent par là des forces extérieures qui peuvent être quelconques, et qui sont appliquées à un certain nombre de points bien déterminés.

Tout étant ainsi disposé, et le corps étant supposé en repos, il arrivera nécessairement de deux choses l'une : ou bien le corps restera en repos, c'est le cas de l'équilibre, ou bien il prendra un certain mouvement. Le premier cas, dont l'étude est l'objet de la Statique, paraît beaucoup plus simple que le second; de plus, il arrive, comme nous le verrons en Dynamique, que le cas du mouvement, qui semblait d'un ordre de complication bien supérieur, se ramène immédiatement au cas de l'équilibre.

Il est donc naturel de commencer l'étude de la Mécanique par la Statique; seulement, je ferai remarquer que nous n'avons nullement la prétention de nous débarrasser, dans cette première Partie, de la considération du mouvement. Tout au contraire, c'est de là que nous avons tiré nos principes et nos théorèmes fondamentaux; et nous avons commencé cette Section par définir l'effet produit par une ou plusieurs forces appliquées à un point matériel.

Il est d'ailleurs évident qu'au point de vue de la théorie proprement dite, quand on laisse de côté la résolution des problèmes particuliers, il n'y a pas de différence entre la Statique et la Dynamique, tant qu'on se borne à considérer l'effet des forces sur un point matériel unique. Il résulte de notre principe fondamental que ces forces, quel qu'en soit le nombre, peuvent toujours être remplacées par une résultante unique. Cette résultante fait connaître à la fois, d'une part la direction et l'accélération du mouvement produit par les forces données, d'autre part la direction et la grandeur de la force qu'il faudrait employer pour leur faire équilibre. Il n'y a pas là deux problèmes, mais une équation entre deux quantités, équation qui fait connaître l'une ou l'autre de ces deux quantités, suivant celle que l'on suppose donnée. Il est vrai qu'une fois l'équilibre établi, il persiste indéfiniment tant qu'on ne modifie pas l'ordre de choses existant; tandis qu'en Dynamique, il faut pousser les choses plus loin, et chercher ce que sera le mouvement dans toute la suite du temps. Mais ceci est une pure question de calcul intégral : si nous connaissons, comme cela doit être, les forces qui agissent à chaque instant sur le mobile, nous connaissons à chaque instant l'accélération totale de son mouvement, nous pouvons tracer un élément de la trajectoire, et suivre le mobile pendant qu'il parcourt cet élément; voilà tout ce qu'on peut demander à la Mécanique; c'est à l'analyse qu'il appartient de réunir ces éléments pour en faire une courbe continue, et de trouver la loi générale qui embrasse toutes les lois élémentaires.

Si nous considérons un corps, même un solide invariable, il n'est pas possible de commencer par définir le mouvement qu'il doit prendre sous l'influence de forces données, et de conclure de là les conditions de son équilibre.

Il est vrai que si l'on connaissait les forces intérieures, rien n'empêcherait de regarder chacun des points matériels qui composent le corps comme parfaitement libre, sous l'action des forces tant intérieures qu'extérieures qui le sollicitent, et de déterminer par la théorie qui précède les lois de son équilibre et de son mouvement.

Malheureusement, nous ne savons pour ainsi dire absolument rien sur les forces intérieures; et tous nos efforts vont

tendre à les éliminer autant que possible, c'est-à-dire que nous nous proposons surtout de chercher ce que l'on peut dire en Statique sans connaître les lois de l'action de ces forces, comme on étudie la capillarité sans avoir besoin de connaître au juste la nature des forces moléculaires qui produisent les phénomènes.

Il est alors indispensable d'étudier d'abord ce qui se passe quand le corps reste en équilibre sous l'action des forces qui en sollicitent les divers points, c'est-à-dire de commencer la Mécanique des systèmes matériels par la Statique.

§ VIII. — Des différents principes de la Statique (*).

Les trois principes fondamentaux que nous avons posés au commencement de cette Section nous suffisent pour exposer à la fois la Statique et la Dynamique. Mais nous avons dit que la naissance de la première science avait précédé de beaucoup celle de la seconde. La Statique a donc ses principes spéciaux, plus simples que ceux de la Dynamique, et il ne sera pas sans intérêt, dans une rapide étude historique, de rechercher quels sont les principes que les auteurs ont pris à diverses époques pour bases de la Statique.

Ces principes peuvent se réduire à trois : nous allons, en les discutant succinctement, justifier le choix que nous avons fait et l'ordre que nous avons suivi.

Premier principe ou principe du levier. — Archimède, le seul parmi les anciens qui nous ait laissé une théorie de l'équilibre dans ses livres *De æquiponderantibus* et *De planorum æquilibriis*, est l'auteur du principe du levier, lequel consiste, comme le savent tous les mécaniciens, en ce que, si un levier est chargé de deux poids quelconques placés de part et d'autre du point d'appui, à des distances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes poids, ce levier sera en équilibre,

(*) Ce paragraphe est extrait, pour la plus grande partie, de l'excellente Notice historique mise par Lagrange en tête de la *Mécanique analytique*, part. I, sect. I.

Consulter aussi l'ouvrage cité de M. Cournot, liv. II, chap. II, *Revue des principes de la Statique*, t. I, p. 137.

et son appui sera chargé de la somme des deux poids. Archimède prend ce principe, dans le cas des poids égaux placés à des distances égales du point d'appui, pour un axiome évident de soi-même, ou du moins pour un principe d'expérience; et il ramène à ce cas simple et primitif celui des poids inégaux.

L'équilibre d'un levier droit et horizontal, dont les extrémités sont chargées de poids égaux, et dont le point d'appui est au milieu du levier, est une vérité tout à fait évidente, car il n'y a aucune raison pour que l'un des poids l'emporte sur l'autre, tout étant égal de part et d'autre du point d'appui. Il n'en est pas de même de la supposition que la charge de l'appui soit égale à la somme des deux poids. Il paraît que tous les mécaniciens l'ont prise comme un résultat de l'expérience journalière, qui apprend que le poids d'un corps dépend seulement de sa masse totale, et nullement de sa figure.

On passe aisément du levier droit au cas d'un levier de forme quelconque; et ensuite, par des démonstrations analogues à celles de la Géométrie pure, on déduit du principe d'Archimède la solution de toutes les questions de Statique.

Ce principe est le seul qui soit fondé sur la nature de l'équilibre considéré en lui-même, et comme un état indépendant du mouvement. Les puissances sont des poids, ou peuvent être regardées comme tels; et une puissance n'est censée double ou triple d'une autre qu'autant qu'elle est réellement formée par la réunion de deux ou trois puissances égales; la clarté de l'énoncé n'exige ni que les forces soient représentées par des lignes, ni que l'on invoque aucun axiome tiré de la nature du mouvement.

Si l'on se bornait à la Statique seule, on devrait peut-être prendre ce principe pour base. Mais on relèguerait ainsi au second plan le problème le plus simple de la Statique, celui de l'équilibre d'un point matériel, pour introduire dès le début la notion d'un corps rigide, et celle des forces intérieures, dont le rôle ne se trouve d'ailleurs pas, quand on emploie cette méthode, suffisamment mis en évidence, circonstance d'où il peut résulter des embarras pour l'ensemble de la Mécanique.

DEUXIÈME PRINCIPE OU PRINCIPE DE LA COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES. — Le second principe fondamental de la Statique

est celui de la *composition des forces concourantes*. C'est celui qui nous a servi de base dans notre exposition, ou plutôt c'est un cas particulier de notre deuxième principe général, relatif à la composition des effets des forces qui agissent sur un même point matériel.

Si nous cherchons l'origine de ce principe, il est nécessaire de remonter assez haut dans l'histoire des sciences; car le livre des *Questions mécaniques*, attribué à Aristote, présente des applications nombreuses de la notion de la composition des mouvements, mais confuses et obscurément présentées. La règle du parallélogramme des vitesses s'y trouve cependant nettement énoncée, et l'auteur en a bien senti la liaison avec la composition et la décomposition des forces.

En général d'ailleurs, parmi les anciens, la considération des mouvements composés a surtout été employée par les géomètres, qui l'ont appliquée à la description des courbes, comme Archimède pour la spirale, Nicomède pour la conchoïde, etc.; plus récemment Roberval a déduit des mêmes principes une méthode ingénieuse de tirer les tangentes aux courbes dont la définition est présentée d'une manière convenable. Mais Galilée est le premier qui ait fait usage de la considération des mouvements composés dans la Mécanique, pour déterminer la courbe décrite par un corps pesant, en vertu de l'action de la gravité et de la vitesse communiquée par la force de projection; il paraît d'ailleurs que Galilée n'a pas connu toute l'importance de ce principe dans la théorie de l'équilibre.

On trouve encore la théorie des mouvements composés dans les écrits de Descartes, de Roberval, de Mersenne, de Wallis, etc.; mais jusqu'à l'année 1687, dans laquelle ont paru les *Principes mathématiques* de Newton, et le *Projet de la nouvelle Mécanique* de Varignon, on n'avait point pensé à substituer, dans la composition des mouvements, les forces aux mouvements qu'elles peuvent produire, et à déterminer la force composée résultante de deux forces données, comme on détermine le mouvement composé de deux mouvements rectilignes et uniformes donnés.

Le principe de la composition des forces donne tout de suite les conditions de l'équilibre entre trois puissances, ou

même entre un nombre quelconque de puissances agissant sur un point, condition qu'on n'avait pu déduire de l'équilibre du levier que par une suite de raisonnements; et pourtant le problème de l'équilibre d'un point est bien certainement le plus simple de toute la Statique, puisqu'il est le seul dans lequel on n'ait pas à se préoccuper de la modification que produisent les forces que l'on considère, sur l'équilibre intérieur du corps. Quand on connaît la loi de l'équilibre des forces concourantes, on en déduit la règle du levier par le théorème des moments, dû à Varignon. Le seul inconvénient de cette manière de procéder, c'est qu'on est obligé d'introduire la considération étrangère du mouvement pour l'étude des cas où il n'y a pas de mouvement.

On a cherché depuis, pour rendre à la Statique son indépendance et en quelque sorte son autonomie, à affranchir le principe de la composition des forces de la considération du mouvement, et à l'établir uniquement sur des vérités évidentes par elles-mêmes. Au commencement du XVIIIe siècle, Daniel Bernoulli a donné le premier, dans les *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*, t. Ier, une démonstration très-ingénieuse du parallélogramme des forces. Cette démonstration, longue et compliquée, a été ensuite rendue un peu plus simple par d'Alembert, dans le premier volume de ses *Opuscules*, et aussi par M. Aimé, *Journal de M. Liouville*, t. Ier. Mais il faut avouer, avec Lagrange, qu'en séparant ainsi le principe de la composition des forces de celui de la composition des mouvements, on lui fait perdre ses principaux avantages, l'évidence et la simplicité, et on le réduit à n'être qu'un résultat de constructions géométriques ou d'analyse.

En parlant du principe du levier, nous avons vu que ce principe se composait de deux parties dont l'une est évidente, et dont l'autre ne l'est nullement *à priori* : c'est celle qui consiste à déterminer l'intensité de la résultante des deux forces, ou la charge du point d'appui. Ici, au contraire, la difficulté consiste à prouver l'existence d'une résultante. Pour arriver à cette notion, on est obligé de considérer le mouvement qu'un corps doit prendre sous l'action de deux forces qui ne se font pas équilibre, mouvement qui, étant nécessairement unique,

peut être attribué à une force unique agissant sur le corps dans la direction de son mouvement (*).

Il y a plus : on est encore obligé d'admettre que la direction de la résultante de deux forces passe dans l'intérieur de l'angle de ces deux forces, et cette seule chose suppose implicitement une sorte d'indépendance entre les effets des deux forces. En effet, cet axiome serait aussi peu évident que possible si la présence de la deuxième force pouvait modifier le genre d'action de la première, de même qu'un courant électrique agit par influence sur un courant voisin.

Il me semble résulter clairement de cette discussion que le véritable principe de la Mécanique est celui dont nous avons fait usage, après Galilée et Newton. Deux forces agissant simultanément sur un point matériel produisent chacune son effet, lequel est en outre indépendant de l'état de repos ou de mouvement du point. Ce principe nous a permis d'élucider tout d'un coup les fondements de la Dynamique et ceux de la Statique, sciences jumelles, que nous allons maintenant suivre l'une après l'autre dans leur existence distincte, après avoir autant que possible cherché à pénétrer le mystère de leur origine commune.

TROISIÈME PRINCIPE OU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES. — Auparavant, il est encore nécessaire de parler d'un troisième principe, connu sous le nom de *principe des vitesses virtuelles*. Celui-ci paraît encore plus étranger à la Statique proprement dite; et pourtant, il est certainement l'expression la plus générale des lois de l'équilibre, en même temps qu'il donne la vraie raison de ces lois dans leurs détails comme dans leur généralité.

On doit entendre par *vitesse virtuelle*, dit Lagrange, celle qu'un corps en équilibre est disposé à recevoir, en cas que l'équilibre vienne à être rompu, c'est-à-dire la vitesse que ce corps prendrait réellement dans le premier instant de son mou-

(*) Ainsi l'on peut dire que les démonstrations du genre de celle de Bernoulli ne sont pas tout à fait exemptes de la considération du mouvement. Il serait d'ailleurs assez extraordinaire qu'on pût démontrer la propriété fondamentale des forces sans s'appuyer sur leur définition, qui les présente comme des causes de mouvement.

vement : et le principe dont il s'agit consiste en ce que des puissances sont en équilibre, quand elles sont en raison inverse des vitesses virtuelles de leurs points d'application, vitesses estimées suivant les directions de ces puissances.

Cette phrase de Lagrange n'est autre chose, comme nous le verrons, que la traduction en langage mathématique de l'adage suivant, bien connu de tous les mécaniciens :

Ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse, et réciproquement.

Si l'on n'a pas oublié que nous appelons *travail* d'une force le produit de l'intensité de la force par le déplacement de son point d'application, estimé suivant la direction de la force, on voit que l'énoncé de Lagrange revient encore à dire que, quand deux forces sont en équilibre sur un corps quelconque, l'équilibre ne saurait être rompu sans que les produits que nous appelons travaux soient égaux pour les deux forces. En considérant l'une de ces forces comme la *puissance* appliquée à la machine, l'autre comme la *résistance* à vaincre, on dira que l'équilibre a lieu quand le travail de la résistance est égal au travail de la puissance, pour un déplacement hypothétique infiniment petit.

Les anciens n'ont pas connu cette loi dont l'importance est capitale, qu'on la regarde ou non comme un principe; et il paraît qu'on doit rapporter à Descartes (*) et à Wallis l'honneur d'avoir cherché les premiers la raison et le principe de l'équilibre des machines dans l'équivalence entre les travaux respectifs de la puissance et de la résistance, dans l'hypothèse où

(*) *Explication des machines et engins par l'aide desquels on peut avec une petite force lever un fardeau fort pesant.* (*Méchanique* de Descartes, traduite par Nicolas Poisson, de l'Oratoire, 1668.)

Page 7 : « L'invention de tous ces engins n'est fondée que sur un seul prin-» cipe, qui est que la même force qui peut lever un poids, par exemple de » 100 livres, à la hauteur de deux pieds, en peut aussi lever un de 200 livres à » la hauteur d'un pied, ou un de 400 à la hauteur d'un demi-pied, et ainsi » des autres...

» ... Car c'est le même de lever 100 livres à la hauteur d'un pied, et de re-» chef encore 100 livres à la hauteur d'un pied, que d'en lever 200 à la hauteur » d'un pied, et le même aussi que d'en lever 100 à la hauteur de deux pieds. »

la machine prendrait un certain mouvement dans un sens ou dans l'autre.

Avant Descartes et Wallis, Guido Ubaldi a le premier signalé la loi dont nous parlons, dans les poulies mobiles ou mouffles. Ensuite arrive Galilée, dont les idées fort nettes à cet égard sont consignées dans un petit ouvrage curieux ayant pour titre :

Les Méchaniques de Galilée, mathématicien et ingénieur du duc de Florence, avec plusieurs additions, traduites de l'italien par le P. Mersenne, Minime. Paris, 1634.

Dans son épître dédicatoire, Mersenne dit :

« Mais j'estime que l'ordre, et le règlement admirable que » la nature observe dans les forces mouvantes, vous donnera » encore plus de plaisir, parce que vous y verrez reluire une » équité et une justice perpétuelle qui se garde, et que l'on » remarque si justement entre la force, la résistance, le temps, » la vitesse et l'espace, que l'un récompense toujours l'autre, » car si le mouvement est viste, il faut beaucoup de force, et » s'il est lent, une petite force suffit. En effet, il est impos- » sible de gaigner la force et le temps tout ensemble....

» Or, il faut conclure de tout ce discours que *l'on ne peut* » *rien gaigner en force que l'on ne le perde en temps...* (*). »

L'auteur passe ensuite en revue les principaux appareils connus sous le nom de *machines simples*, appareils qui sont les éléments dont se compose une machine quelconque; et il insiste à propos de chaque machine sur la loi capitale et universelle qui lie les forces en équilibre avec les vitesses que prendraient leurs points d'application, en cas de rupture de l'équilibre. Cette loi est ainsi présentée, à proprement parler, par Galilée et son commentateur, comme une propriété générale de l'équilibre, et non comme la vraie raison de l'équilibre, ainsi qu'on l'a fait depuis Descartes.

Enfin, c'est dans une lettre de Jean Bernoulli, adressée de Bâle à Varignon, le 26 janvier 1717, qu'on trouve le principe dont nous nous occupons, énoncé pour la première fois avec toute sa généralité.

(*) C'est l'axiome des mécaniciens, énoncé pour la première fois presque dans les termes qu'on emploie encore aujourd'hui.

« *Tout cela étant bien entendu, je forme*, dit Bernoulli, » *cette*

PROPOSITION GÉNÉRALE.

» *En tout équilibre de forces quelconques, de quelque ma-*
» *nière qu'elles soient appliquées et suivant quelque direction*
» *qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement,*
» *ou immédiatement, la somme des énergies affirmatives sera*
» *égale à la somme des énergies négatives prises affirmative-*
» *ment.* » (VARIGNON, *Nouvelle mécanique.*)

Bernoulli se contenta d'énoncer cette proposition générale et ne la démontra point. Il est probable qu'il y était arrivé par une simple induction fondée sur des cas un peu plus compliqués que ceux qu'avait étudiés Galilée.

Lagrange, dans la première édition de sa *Méchanique analytique*, admet le principe de Bernoulli comme une espèce d'axiome; et il tire de ce principe une formule générale, qui renferme la solution de tous les problèmes qu'on peut proposer sur l'équilibre des forces.

Il semble pourtant que cette proposition n'est pas assez évidente en elle-même pour qu'il soit convenable de l'ériger en principe primitif. Il est préférable de prendre pour base une proposition plus simple, ainsi que nous l'avons fait, et de considérer le principe des vitesses virtuelles comme un théorème à démontrer (*). Cela fait, la formule de Lagrange permet d'en déduire la solution de tous les problèmes d'équilibre, sans constructions nouvelles, sans artifices particuliers, par une méthode simple, élégante, uniforme, ainsi que cela doit arriver quand on a été assez heureux pour saisir dans une science le principe suprême et générateur d'où tout le reste dérive.

Ce qui fait le caractère original de ce principe, c'est qu'il

(*) Ce n'est qu'après la publication du grand ouvrage de Lagrange que parut la première démonstration générale du principe des vitesses virtuelles. Elle est due à Fourier et ne date que de 1797. (Voir *Journal de l'École Polytechnique*, t. II.) On en a publié depuis un grand nombre d'autres, et Lagrange lui-même a cru devoir en proposer une dans la deuxième édition de la *Mécanique analytique*.

réduit toute question d'équilibre de forces à une détermination de rapport de vitesses, de sorte qu'il ramène immédiatement et tout d'un coup la Statique à la Cinématique, c'est-à-dire à la Géométrie. On trouverait difficilement un exemple aussi curieux de passage d'une science à une autre science, toute différente comme objet et comme principes.

On comprend d'ailleurs facilement qu'une fois que, par une induction tirée de l'étude rationnelle et expérimentale d'un grand nombre de cas particuliers, on est parvenu au théorème général qui les renferme tous, on puisse inversement déduire de ce théorème les faits qui ont servi de point de départ, comme en démolissant un édifice on retrouve tous les matériaux qui ont servi à l'édifier; c'est cette marche que nous allons suivre actuellement. Nous aurions pu commencer par donner ainsi, sous leur forme mathématique actuelle, l'énoncé et la démonstration du principe des vitesses virtuelles, mais l'essence intime de ce principe ou théorème et sa véritable signification auraient complétement disparu sous la sécheresse de la forme didactique; on n'y aurait plus vu qu'une formule commode pour résoudre des problèmes, et pour ainsi dire le dénoûment d'un drame dont on ignorerait les péripéties. C'est pourquoi nous avons cru indispensable de donner ces quelques détails historiques.

Nous avons été par là, il est vrai, entraîné à présenter, contre notre habitude, les choses avec tout le vague et la demi-obscurité qu'on retrouve autour du berceau de chaque science, mais nous nous hâterons de réparer cette faute volontaire en donnant des définitions nettes et précises, qui désormais nous serviront exclusivement dans tous nos raisonnements et nos calculs.

§ IX. — Théorème du travail virtuel.

Définitions. — Considérons un système matériel dont les divers points sont sollicités par des forces quelconques. Supposons chacun des points du système transporté de la position qu'il occupe dans une position infiniment voisine : on nomme *vitesse virtuelle* d'un quelconque de ces points, ou mieux *dé-*

placement virtuel (*), la droite qui joint la première position à la deuxième.

Ces déplacements virtuels sont des grandeurs purement géométriques; ils n'ont rien de commun avec les déplacements réels qui prendraient naissance si le corps n'était pas en équilibre. Les déplacements attribués à un ou plusieurs points peuvent être impossibles, d'autres incompatibles entre eux, ce qui n'empêche nullement de concevoir géométriquement un point dans deux positions voisines quelconques.

Le *travail virtuel* d'une force appliquée à ce point est le travail qui correspond au déplacement virtuel, c'est-à-dire qu'il est le produit du déplacement virtuel par la force et par le cosinus de l'angle que forment les directions respectives du déplacement et de la force. Nous désignerons cette quantité par la notation $T_v F$, c'est-à-dire que nous ferons

$$T_v F = F \delta s \cos \overline{F_1 \delta s} \ (**).$$

Nous allons maintenant établir l'enchaînement des propositions qui constituent les diverses parties du théorème.

I. *Équilibre d'un point matériel.* — Nous avons vu que, pour qu'un point matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante de toutes les forces qui lui sont appliquées soit nulle.

Nous énoncerons identiquement la même chose en disant que *le travail de cette résultante doit être nul pour tout déplacement virtuel attribué au point sur lequel elle agit.* En effet, si cette résultante est nulle, son travail est aussi nul, quel que soit le déplacement du point d'application; et réciproquement, si le travail d'une certaine force est nul pour tout déplacement infiniment petit qu'on voudra supposer, cette force est nécessairement nulle elle-même.

(*) La dénomination de *vitesse virtuelle* vient de ce qu'on peut concevoir que le déplacement virtuel se fasse avec uniformité dans un temps infiniment petit, et qu'alors les espaces parcourus sont proportionnels aux vitesses.

(**) Pour distinguer les déplacements virtuels des déplacements réels, nous désignerons, suivant l'usage, les premiers par la lettre δ, les seconds par la caractéristique d.

Mais nous savons que le travail de la résultante des forces appliquées à un point est égal à la somme des travaux de toutes les composantes; donc on peut dire que :

Pour qu'un point matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux de toutes les forces appliquées à ce point soit nulle pour tous les déplacements virtuels imaginables.

Quand le point dont il s'agit fait partie d'un système matériel, nous avons l'habitude de distinguer en deux groupes les forces que nous considérons comme appliquées à ce point, savoir : les *forces extérieures* F et les *forces intérieures f*.

Nous écrirons donc la propriété qui précède de la manière suivante :

$$\text{(I)} \qquad \sum T_r F + \sum T_r f = 0,$$

et nous énoncerons ainsi la première partie du théorème :

PREMIÈRE PARTIE. — *Pour tout point faisant partie d'un système matériel en équilibre, la somme des travaux des forces appliquées à ce point, tant intérieures qu'extérieures, est nulle, pour un déplacement virtuel quelconque.*

II. *Équilibre d'un système matériel quelconque.* — En appliquant le même raisonnement à tous les points matériels qui constituent notre système en équilibre, et faisant la somme de toutes les équations telles que (I), relatives à ces divers points, on voit que :

DEUXIÈME PARTIE. — *Dans un système matériel en équilibre, la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, est égale à zéro, quels que soient les déplacements virtuels infiniment petits et indépendants les uns des autres que l'on imagine être pris en même temps par les différents points du système.*

Ce théorème s'exprime analytiquement par l'équation

$$\text{(II)} \qquad \sum\sum T_r F + \sum\sum T_r f = 0,$$

la sommation s'étendant à la fois à toutes les forces agissant

sur un point quelconque et à tous les points que l'on considère comme formant le système étudié. Réciproquement, si la somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées au système est nulle, pour tous les déplacements imaginables des divers points qui le composent, le système, supposé primitivement en repos, ne sortira pas de cet état de repos : car, si l'on ne déplace qu'un seul de ces points matériels, ce qui revient à supposer que les déplacements des autres points sont nuls, on conclura de notre hypothèse que la somme des travaux virtuels des forces appliquées à ce point est égale à zéro, quel que soit le déplacement qu'on lui attribue, c'est-à-dire que ce point, considéré seul, est en équilibre. Le même raisonnement, appliqué successivement aux divers points du système, montrera que tous ces points sont également en équilibre, et, par conséquent, le système tout entier est en équilibre. Ainsi, l'on peut dire que, pour qu'un système matériel quelconque soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels de toutes les forces qui agissent sur ses divers points soit nulle, quels que soient les déplacements infiniment petits et indépendants les uns des autres que l'on imagine être pris en même temps par ces différents points.

III. *Équilibre d'un solide invariable.* — Parmi tous les déplacements virtuels, en nombre infini, que nous pouvons attribuer simultanément aux divers points d'un système matériel, choisissons en particulier des déplacements tels, que les distances mutuelles de tous les points du système restent les mêmes; c'est-à-dire, concevons que nous déplacions le système matériel tout d'une pièce, comme si c'était un solide invariable. L'équation fournie par le théorème du travail virtuel, pour un pareil déplacement de l'ensemble des points matériels du système, ne contiendra aucun terme dépendant des forces intérieures. En effet, dans le déplacement particulier que nous considérons, la distance de deux quelconques des points matériels du système ne change pas. Donc les travaux virtuels des forces intérieures sont deux à deux égaux et de signes contraires, et, par conséquent, disparaissent tous de l'équation fournie par le théorème du travail virtuel.

L'équation générale (II) se réduit alors à

$$\sum\sum T_i F = 0. \qquad \text{(III)}$$

Donc :

TROISIÈME PARTIE. — *Lorsqu'on communique à un système un déplacement virtuel compatible avec la parfaite solidité du système, la somme des travaux virtuels des forces extérieures est nulle.*

Le théorème que nous venons de démontrer nous donne une propriété générale de l'équilibre, dans laquelle n'entrent pas les forces intérieures. Cette propriété sera donc toujours vérifiée, quel que soit le degré de solidité ou de rigidité des parties du système; c'est-à-dire qu'elle devra nécessairement avoir lieu pour que l'équilibre existe; mais, en général, cela ne sera pas suffisant.

IV. *Équilibre des systèmes à liaisons.* — Les solides invariables sont des cas particuliers des systèmes matériels dans lesquels on suppose qu'il existe entre les divers points certaines liaisons géométriques.

On entend par *liaisons* des conditions que le système doit nécessairement remplir. On peut imaginer une variété infinie de liaisons, et cela aussi bien au point de vue géométrique qu'au point de vue physique; mais on peut toujours, quelles que soient ces liaisons, les supposer remplacées par des forces capables d'obliger le système à satisfaire aux mêmes conditions. C'est ainsi que, dans le cas où un point matériel est assujetti à rester sur une courbe fixe ou sur une surface fixe, sans frottement, nous avons vu comment on peut déterminer une force capable de produire le même effet. Cette force s'appelle la réaction normale de la courbe ou de la surface.

En substituant aux liaisons les forces qui peuvent en tenir lieu, on fait rentrer le système matériel dans le cas général pour lequel le théorème du travail virtuel a été établi. Pour que ce système soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels de toutes les forces, y compris celles qui tiennent la place des liaisons, soit égale à zéro, quels que soient les déplacements virtuels qu'on attribue à

tous les points matériels dont il est formé. Ce mode de procéder a l'avantage de faire connaître les forces capables de remplacer les liaisons, ou, comme on dit, les *charges des appuis*. En éliminant ces forces entre les équations fournies par le théorème général, on obtient les véritables équations d'équilibre.

On peut aussi ne pas introduire dans le calcul ces inconnues auxiliaires. En effet, nous allons montrer que si, parmi tous les déplacements virtuels infiniment petits qu'on est libre d'attribuer à tous les points du système, on choisit spécialement ceux qui sont *compatibles avec les liaisons*, la somme des travaux virtuels des forces de liaison est identiquement nulle, de sorte que ces forces disparaissent d'elles-mêmes des équations fournies par le théorème du travail virtuel, appliqué à ces déplacements particuliers.

Pour établir ce point capital, nous considérerons seulement les trois modes de liaison suivants, qui sont ceux qu'on rencontre le plus fréquemment dans les machines.

1° Quand certains points sont obligés de rester sur des courbes fixes ou sur des surfaces fixes, sans éprouver de frottement de la part de ces courbes ou de ces surfaces, le travail de la réaction normale est évidemment nul, pour tout déplacement du point dirigé suivant la courbe ou sur la surface fixe, puisqu'un pareil déplacement virtuel est perpendiculaire à la direction de la force.

2° Quand deux points du système sont assujettis par un mode de liaison quelconque à rester à des distances invariables l'un de l'autre, on obtiendrait le même effet au moyen de deux forces égales et contraires, appliquées respectivement à chacun de ces deux points, et dont il est possible de calculer *à posteriori* l'intensité, comme on calcule la réaction d'une surface fixe. Or nous avons démontré, p. 30, que la somme des travaux de deux forces de ce genre est nulle, pour tout déplacement virtuel en vertu duquel la distance des deux points ne change pas.

3° Enfin, quand deux parties du système, assimilées à des solides invariables, sont maintenues en contact, sans qu'il se développe de frottement entre leurs surfaces, on peut regarder ce résultat comme produit par deux réactions égales et con-

traires, agissant sur les deux solides aux points par lesquels ils se touchent, et dirigées suivant la normale commune à leurs surfaces (*). Or, dans ce cas encore, la somme des travaux des deux réactions est nulle, pour tout mouvement virtuel du système en vertu duquel les deux surfaces ne cessent pas de se toucher.

En effet, les deux points M, m (*fig.* 12), qui se trouvaient en contact, occupent par l'effet du déplacement virtuel des positions M', m', toutes deux situées sur le nouveau plan de contact des surfaces, plan qui fait un angle infiniment petit avec le plan tangent commun en M.

Les déplacements virtuels MM', mm' des points d'application de nos deux forces ont donc une même projection sur la normale commune NN; et, comme ces forces elles-mêmes ont des directions opposées suivant cette normale, la somme de leurs travaux virtuels est nulle (**).

Si donc nous considérons seulement des systèmes matériels dont les liaisons rentrent dans l'un des trois types que nous venons d'étudier, il résulte de la discussion précédente qu'il n'y aura pas lieu de s'occuper des forces provenant des liaisons, tant qu'on appliquera seulement le théorème du travail virtuel à des déplacements compatibles avec ces liaisons. Ce résultat constitue la quatrième partie de notre théorème fondamental.

QUATRIÈME PARTIE. — *Quand un système de points matériels liés entre eux d'une manière quelconque est en équilibre, la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées au système est nulle, tout comme si chacun des points du système était libre, mais seulement pour tout système de déplacements virtuels compatible avec l'existence des liaisons.*

(*) Quand on tient compte du frottement, l'action mutuelle de deux solides en contact n'est plus dirigée suivant la normale commune à leurs surfaces, mais l'action et la réaction sont toujours égales en grandeur absolue et opposées en direction.

(**) On voit que, conformément aux programmes de l'École Polytechnique, nous ne démontrons pas dans toute sa généralité le théorème du travail virtuel. On peut consulter à cet égard la *Mécanique rationnelle* de M. Duhamel, 3e édition, et un Mémoire de Poinsot sur l'équilibre et le mouvement des systèmes, Mémoire qui se trouve à la suite des *Éléments de Statique* de cet auteur.

Des machines. — Les machines ne sont pas autre chose que des systèmes de corps assujettis à certaines liaisons; et généralement ce sont des systèmes *à liaisons complètes*, dans lesquels le mouvement d'un seul point détermine celui de tous les autres, le mouvement du premier ne pouvant d'ailleurs avoir lieu que sur une trajectoire déterminée.

Dans ce cas, il n'existe qu'un seul système de déplacements virtuels possibles, et le théorème du travail virtuel ne fournit qu'une seule équation pour l'équilibre des forces appliquées à la machine.

Réciproque du théorème du travail virtuel.

En démontrant la deuxième partie du théorème, nous avons établi que réciproquement, toutes les fois que la somme des travaux de toutes les forces du système est nulle, pour un déplacement virtuel quelconque, on est assuré que le système est en équilibre.

Mais il est bien évident qu'une pareille vérification est impossible, et que le théorème en question serait peu utile, si l'on n'avait des moyens de discerner dans chaque cas particulier, parmi toutes ces conditions dont le nombre est infini, celles qui sont suffisantes (*) pour l'équilibre du système.

Le seul cas qui présente de l'intérêt est celui d'un système à liaisons, car si l'on avait des points isolés, indépendants les uns des autres, il est bien clair que chacun de ces points devrait être en équilibre séparément, et que le système constitué par leur réunion ne présenterait aucune propriété. Or nous allons faire voir que réciproquement, si la somme des travaux des forces directement appliquées au système est égale à zéro pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, ce système est en équilibre.

En effet, désignons toujours d'une manière générale par F les forces directement appliquées au système; s'il n'y avait

(*) Il faut entendre par là les conditions qui, une fois vérifiées, entraînent toutes les autres, car il ne faut pas oublier que ces conditions sont toutes également nécessaires, et que, si une seule d'entre elles n'était pas remplie, l'équilibre ne saurait subsister.

pas équilibre, le système supposé en repos se mettrait en mouvement, et son mouvement s'effectuerait conformément aux liaisons auxquelles il est assujetti. On pourrait s'opposer à ce mouvement, en appliquant à chacun des points matériels du système une force convenable, dirigée en sens contraire de la direction suivant laquelle ce point matériel tendrait à se déplacer; dès lors, le système matériel serait en équilibre sous l'action des forces Q, Q′, Q″, . . . , que l'on devrait ainsi appliquer à ses divers points, et des forces F que l'on avait déjà. D'après ce qui vient d'être établi il n'y a qu'un instant, la somme des travaux des forces Q et F devrait être nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, et en particulier pour le déplacement infiniment petit que le système aurait pris tout d'abord sous l'action des forces F seules, si l'on n'avait pas appliqué les forces Q pour s'y opposer. Mais, par hypothèse, la somme des travaux virtuels des forces F est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons, et par conséquent pour le mouvement particulier dont il s'agit : donc, la somme des travaux virtuels des forces Q devrait aussi être nulle pour ce mouvement particulier. Or ceci est impossible puisque, dans ce mouvement, le point d'application de chacune des forces Q se déplace précisément en sens contraire du sens dans lequel la force agit; d'où il suit que les travaux virtuels de ces forces sont tous négatifs.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que, pour qu'un système matériel dans lequel on imagine des liaisons soit en équilibre sous l'action des forces F directement appliquées à ses différents points, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels de ces forces soit nulle, pour tout déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons.

Ainsi se trouve limité dans chaque cas, par les lois mêmes qui régissent la constitution d'un système matériel, le nombre des conditions réellement nécessaires à l'équilibre de ce système. Dans la plupart des machines, d'après ce que nous avons dit, il n'y a qu'un seul mouvement virtuel possible : une seule condition est donc nécessaire et suffisante pour que des forces en nombre quelconque se fassent équilibre par l'intermédiaire de cette machine. Le théorème du travail virtuel donne avec la plus grande facilité cette équation unique, en éliminant

sans qu'on s'en aperçoive tout ce qui se passe dans l'intérieur de la machine.

Considérons par exemple la presse hydraulique (t. Ier, p. 238). On sait que cette machine se compose de deux corps de pompe remplis d'eau ou d'un liquide quelconque, et reliés l'un à l'autre par un tuyau de communication. Un piston qui se trouve en contact avec le liquide se meut dans chacun des deux cylindres. Sur le plus petit de ces pistons agit la puissance P, sur le plus grand s'exerce la résistance R.

Un seul mouvement virtuel est possible : si nous supposons que le premier piston s'enfonce d'une quantité δh, le deuxième se soulevant de $\delta h'$, l'égalité des travaux virtuels de la puissance et de la résistance donne l'équation

$$P\delta h = R\delta h',$$

de laquelle nous allons tirer la condition d'équilibre de la presse hydraulique.

Pour cela nous remarquerons qu'en vertu de l'incompressibilité des liquides, le volume dont a diminué la colonne contenue dans le premier cylindre doit être exactement égal à l'excédant que nous retrouvons dans le deuxième. On a donc, S et S′ désignant les sections des deux pistons,

$$S\delta h = S'\delta h',$$

d'où, en éliminant les vitesses virtuelles,

$$\frac{P}{R} = \frac{S}{S'};$$

Dans l'équilibre de la presse hydraulique, la puissance est à la résistance dans le rapport direct des sections des deux cylindres.

On trouverait de même les conditions d'équilibre des systèmes de poulies, des équipages de roues dentées, etc.

Considérons, par exemple, une série d'arbres tournants dont les vitesses soient en rapport constant. Appelons $\delta\alpha$ la vitesse angulaire virtuelle du premier arbre ; ε_1, ε_2, ε_3,..., les *raisons* (*)

(*) *Voir* CINÉMATIQUE, p. 241.

des arbres auxquels sont appliquées des puissances; η_1, η_2, η_3,..., celles des arbres sur lesquels agissent des résistances. L'équation du travail virtuel est

$$\mathrm{P}p.\delta\alpha + \mathrm{P}_1 p_1.\varepsilon_1\delta\alpha + \mathrm{P}_2 p_2.\varepsilon_2\delta\alpha + \ldots - \mathrm{R}_1 q_1.\eta_1\delta\alpha - \mathrm{R}_2 q_2\eta_2\delta\alpha \ldots = 0.$$

On en conclut l'équation

$$\mathrm{P}p + \sum \mathrm{P}_i p_i \varepsilon_i - \sum \mathrm{R}_i q_i \eta_i = 0.$$

§ X. — Équations générales de l'équilibre d'un système matériel quelconque.

Quelle que soit la constitution d'un système matériel dont on recherche les conditions d'équilibre, il est clair qu'on n'altère pas cet équilibre, supposé établi, en supposant le système invariable de forme. Donc les équations qui répondent aux déplacements virtuels compatibles avec la rigidité du système s'appliquent à tous les systèmes matériels imaginables.

Nous allons montrer que les équations correspondantes à ces déplacements virtuels sont au nombre de *six*. Elles portent le nom d'*équations générales de l'équilibre*, parce qu'elles s'appliquent à un système quelconque. Elles sont les seules qui soient générales, car elles sont suffisantes dans le cas d'un solide invariable. Quant aux autres cas, ces équations toujours nécessaires ne seront pas suffisantes, et il faudra, après s'être assuré qu'elles sont vérifiées, rechercher quelles sont les nouvelles conditions introduites par la nature spéciale du système dont on s'occupe.

Les mouvements compatibles avec la solidité du système sont de trois sortes : 1° un mouvement de translation dans une direction quelconque; 2° un mouvement de rotation autour d'un axe passant par un point quelconque; 3° un mouvement composé des deux précédents, lequel se ramène, si on veut, à celui d'une vis dans son écrou.

1° *Mouvement de translation.* — Considérons d'abord le mouvement de translation. Le travail d'une force F pour un

déplacement δs de son point d'application est

$$F\,\delta s\cos\overline{F\,\delta s};$$

donc nous devons avoir

$$(1)\qquad \sum F\,\delta s\cos\overline{F\,\delta s}=0.$$

Or, δs est le même pour tous les points du système, d'après la définition du mouvement de translation; ce facteur est donc commun à tous les termes de l'équation (1), et en le supprimant il reste

$$(2)\qquad \sum F\cos\overline{F\,\delta s}=0,$$

c'est-à-dire que la somme des projections des forces extérieures dans une direction quelconque est nulle.

2° *Mouvement de rotation.* — Donnons actuellement au corps un déplacement angulaire $\delta\alpha$ autour d'un axe quelconque. Le travail d'une force, dans ce mouvement de rotation, est égal au produit de $\delta\alpha$ par le moment de la force pris par rapport à l'axe. Désignons par la notation MF le moment de la force F par rapport à cet axe; le théorème du travail virtuel pourra s'écrire dans ce cas

$$\sum \delta\alpha.MF=0,$$

ou, en supprimant le facteur commun $\delta\alpha$,

$$(3)\qquad \sum MF=0,$$

c'est-à-dire que la somme des moments des forces extérieures autour d'un axe quelconque est nulle.

3° *Mouvement composé.* — L'application du théorème du travail virtuel au cas d'un mouvement composé ne nous apprendrait rien de nouveau. En effet, le travail de chaque force, pour un mouvement de ce genre, est la somme des travaux qui correspondent aux mouvements composants. Par suite, la quantité qu'on devrait égaler à zéro serait la somme de deux quantités nulles séparément.

Ainsi :

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Quand un système matériel quelconque est en équilibre, sous l'influence de forces extérieures et intérieures quelconques :*

1° *La somme des projections des forces extérieures sur un axe quelconque est égale à zéro ;*

2° *La somme des moments de ces mêmes forces extérieures par rapport à un axe quelconque est égale à zéro.*

Cherchons toutes les équations que peuvent fournir les deux parties de ce théorème.

1° *Équations dérivées du mouvement de translation.* — Il est clair que si l'on écrit que la somme des projections des forces extérieures est nulle séparément sur trois axes rectangulaires, cette somme sera également nulle pour une direction quelconque, définie par les angles α, β, γ, qu'elle fait avec les axes coordonnés. En effet, la projection d'une force du système sur cette direction est, en appelant X, Y, Z, les projections respectives sur les trois axes,

$$F\cos A = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma;$$

donc, la somme des projections des forces du système est, en mettant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ en facteurs,

$$\sum F\cos A = \cos\alpha\sum X + \cos\beta\sum Y + \cos\gamma\sum Z,$$

quantité qui sera toujours nulle si l'on a à la fois

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0. \tag{1}$$

2° *Équations dérivées du mouvement de rotation.* — De même, pour exprimer que la somme des moments des forces par rapport à un axe quelconque, passant en un point donné, est nulle, il suffit d'exprimer que cette somme est nulle pour trois axes rectangulaires qui se croisent sur ce point, ou qu'on a, en prenant nos notations habituelles,

$$\sum L = 0, \quad \sum M = 0, \quad \sum N = 0; \tag{2}$$

car le moment G d'une force par rapport à un axe qui fait avec les axes des angles α, β, γ est

$$G = L\cos\alpha + M\cos\beta + N\cos\gamma.$$

Quant aux axes qui ne passent pas par notre origine, il est facile de voir que la somme des moments des forces par rapport à ces axes est également nulle, nos équations (1) et (2) étant supposées satisfaites. En effet, nous aurons établi cette proposition, si nous prouvons que la somme des travaux des forces est nulle pour un mouvement virtuel de rotation autour d'un pareil axe. Or, un mouvement quelconque d'un solide peut toujours être décomposé en une rotation autour d'un axe passant en un point donné, et une translation dans une certaine direction; et les équations (1) et (2) établissent que la somme des travaux virtuels des forces extérieures est nulle pour chacun de ces deux mouvements élémentaires.

Des six équations de l'équilibre. — On voit qu'en définitive le théorème du travail virtuel, appliqué à tous les déplacements compatibles avec l'hypothèse de la parfaite rigidité du système auquel sont appliquées les forces que l'on considère, fournit six équations distinctes seulement :

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0, \\ \sum F_z = 0; \\ \sum M_{ox} F = 0, \\ \sum M_{oy} F = 0, \\ \sum M_{oz} F = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations portent le nom d'*équations générales de l'équilibre;* vraies pour un système quelconque, elles sont suffisantes pour l'équilibre des solides invariables.

Pour résumer cet important chapitre, nous rappellerons

qu'il faut distinguer avec soin l'équilibre des forces qui sont directement appliquées à un même point matériel, de l'équilibre qui existe entre des forces appliquées à certains points d'un système. Dans ce dernier cas on doit dire que *les forces extérieures se font équilibre en vertu de la constitution physique du corps auquel ces forces sont appliquées* (*). Mais on pourra dire aussi rigoureusement : *Ces six équations de l'équilibre existent entre les forces extérieures seulement;* et cela sans qu'il soit nécessaire de se préoccuper de la constitution du corps soumis à l'action de ces forces.

§ XI. — Cas particuliers des équations de l'équilibre.

Les équations générales de l'équilibre se simplifient dans quelques cas particuliers quand les forces appliquées au système considéré satisfont à certaines conditions spéciales. Il arrive alors qu'un certain nombre des équations qui doivent être vérifiées par ces forces sont satisfaites d'elles-mêmes identiquement, et le nombre de celles dont il y a réellement à s'occuper se trouve diminué d'autant.

Les cas particuliers qu'il est intéressant de considérer sont au nombre de trois seulement.

Forces concourantes.

Il ne s'agit pas ici de forces *appliquées à un même point,* mais bien de forces *dont les directions concourent.* Par le point commun à toutes ces directions, menons trois axes quelconques; les trois équations des moments par rapport à

(*) Les forces extérieures restant les mêmes, l'équilibre serait rompu, si la constitution physique du système venait à changer; c'est ce qui arrive, par exemple, aux tiges métalliques qui se brisent sous un effort beaucoup moindre que celui qu'elles ont longtemps supporté, parce que la texture du métal s'est modifiée.

Quand des forces appliquées à un système quelconque se font équilibre, l'effet de ces forces est de *tendre les liens* du système, de développer des forces intérieures par l'intermédiaire desquelles l'équilibre s'établit, de manière que la résultante de *toutes* les forces appliquées à chaque point soit nulle.

ces axes sont satisfaites d'elles-mêmes ; et il nous reste seulement pour l'équilibre les trois conditions

$$(V)\qquad \begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0, \\ \sum F_z = 0. \end{cases}$$

On sait d'ailleurs par la théorie générale que les six équations de l'équilibre, étant ainsi vérifiées pour un système d'axes particulier, le sont également pour tous les autres systèmes.

Forces situées dans un même plan.

Prenons le plan qui contient toutes les forces pour plan des xy, l'axe des z passant par un point quelconque O de ce plan.

Les équations

$$\sum F_z = 0, \quad \sum M_{ox} F = 0, \quad \sum M_{oy} F = 0$$

sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque les forces sont toutes situées dans un plan perpendiculaire à l'axe des z, et que ce plan contient à la fois l'axe des x et l'axe des y. On a donc seulement trois équations d'équilibre

$$(VI)\qquad \begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0, \\ \sum M_{oz} F = 0. \end{cases}$$

Forces parallèles.

Prenons l'axe des z parallèle à la direction commune des forces ; il est clair que chacune de celles-ci aura une projection

nulle sur les axes Ox et Oy, et un moment nul par rapport à l'axe Oz; il suffira donc pour l'équilibre qu'on ait

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} \sum \mathrm{F}_x = 0, \\ \sum \mathrm{M}_{ox}\mathrm{F} = 0, \\ \sum \mathrm{M}_{oy}\mathrm{F} = 0. \end{cases}$$

CHAPITRE IV.

ÉQUILIBRE DES SOLIDES INVARIABLES.

§ XII. — Des forces équivalentes.

Le caractère des six équations de l'équilibre, ainsi que nous l'avons dit, c'est que ces équations, nécessaires et suffisantes pour le cas hypothétique d'un solide absolument invariable de forme, ont lieu pour un système quelconque; de sorte que, pour se rendre un compte exact des conditions de l'équilibre d'un système matériel, il y a en général deux choses à faire :

1° Vérifier si les six équations générales sont satisfaites;

2° Rechercher les conditions spéciales au cas dont on s'occupe, qui dérivent de la nature physique des corps soumis aux forces considérées, et des liaisons qui existent entre ces corps.

Cela posé, il est évident qu'*au point de vue de la vérification des six équations de l'équilibre*, on aura le droit de remplacer un groupe de forces F par un autre groupe F′, pourvu que les forces F′ jouent, dans les équations (IV), identiquement le même rôle que les forces F. Il faut et il suffit pour cela que les forces F et F′ aient les mêmes sommes de projections sur trois axes rectangulaires, et les mêmes sommes de moments par rapport à ces mêmes axes.

Deux groupes de forces jouissant de cette propriété sont dits *équivalents*; et il résulte de ce qui précède, que les équations nécessaires et suffisantes pour l'équivalence de deux systèmes de forces sont au nombre de six, comme les équations générales de l'équilibre.

Nous écrirons ces équations sous la forme

$$\sum F_x = \sum F'_x,$$

$$\sum F_y = \sum F'_y,$$

$$\sum F_z = \sum F'_z;$$

$$\sum M_{ox} F = \sum M_{ox} F',$$

$$\sum M_{oy} F = \sum M_{oy} F',$$

$$\sum M_{oz} F = \sum M_{oz} F' \ (*).$$

L'échange d'un groupe de forces par un groupe équivalent amène généralement la rupture de l'équilibre, à moins que le corps auquel ces forces sont appliquées ne soit un solide invariable; et, même dans ce cas, cette substitution modifie l'équilibre intérieur du solide, les tensions des liens, de sorte que, pour la détermination de ces quantités, il faudra conserver les forces telles qu'elles sont immédiatement données. Notre définition de l'équivalence est uniquement relative aux six équations de l'équilibre.

La notion de l'équivalence des forces permet de réduire à des systèmes plus simples des forces disposées d'une manière quelconque aux divers points d'un solide invariable. Cette théorie constitue un chapitre très-important de la Statique.

Résultante d'un système de forces concourantes.

Des forces en nombre quelconque, appliquées à un même point matériel, sont équivalentes à leur résultante. Il y a même dans ce cas équivalence physique complète, en même temps qu'équivalence géométrique; et l'on peut, sans altérer

(*) Il résulte de ces équations qu'on obtient l'équilibre, quand à un système de forces on ajoute un système équivalent pris en sens opposé.

en rien l'état d'un corps en équilibre, remplacer par leur résultante des forces appliquées en un même point de ce corps.

Si nous considérons des forces dont les directions concourent en un point O, mais dont les points d'application ne sont pas les mêmes, une force appliquée au point O, ayant pour projections sur trois axes conduits par ce point les sommes des projections des forces concourantes données, est, d'après notre définition, équivalente à celles-ci. On lui donne le nom de *résultante* (*), bien qu'il puisse y avoir absurdité, dans certains cas, à demander de la substituer aux premières, même dans le cas où il s'agit d'un solide invariable, le point O pouvant fort bien être en dehors du solide.

Il suffit pourtant qu'il y ait un point du solide sur la direction de cette force, pour qu'on puisse la substituer à ses composantes sans altérer l'équilibre; et, en général, *une force, appliquée à un point d'un solide invariable en équilibre, peut être supposée appliquée en un point quelconque pris sur sa direction, pourvu que ce point soit invariablement lié au solide* (**).

Cette proposition est évidente par elle-même; et on la pose souvent comme une espèce d'axiome, tout au commencement de la Statique. Cette manière de procéder présente un certain inconvénient, car on s'habitue à faire abstraction du point d'application des forces, et à les considérer comme agissant indifféremment sur un point quelconque de leur direction. Or ceci est physiquement faux, et le déplacement du point d'application d'une force change l'équilibre intérieur du corps.

(*) Toutes les fois qu'il existe une force unique équivalente à un groupe quelconque de forces, on donne à cette force unique le nom de *résultante*. Il est juste de dire que cette acception du mot de *résultante* est la première qui ait été introduite dans la science, et que la signification géométrique que nous donnons à ce mot, dans cet ouvrage, est beaucoup plus récente.

(**) Quand on transporte une force du point A au point B (*fig.* 13), on change l'état du solide, puisqu'on introduit une traction qui s'exerce sur la ligne AB. Il faut donc, pour que la substitution soit physiquement possible, que la nature du corps lui permette de résister à la traction dont nous parlons. C'est ce qui arrivera, par exemple, si les deux points A et B sont liés par un cordon; mais, dans cette hypothèse, on ne pourrait pas transporter de la même manière une force dont le sens serait opposé à celui de la force F.

Quant aux forces fictives telles que les résultantes, etc., il est tout à fait rigoureux de dire qu'un point quelconque de leur direction peut être pris pour leur point d'application, car ces forces n'entrent jamais en ligne de compte, quand il s'agit de l'équilibre intérieur d'un corps.

Résultante d'un système de forces parallèles.

Des forces parallèles disposées d'une manière quelconque sont généralement susceptibles d'être remplacées par une force unique, laquelle reçoit, ainsi que nous l'avons dit, le nom de *résultante*.

Pour établir cette proposition, considérons d'abord (*fig.* 14) deux forces P, Q, de même sens, et appliquées, la première en A, la seconde en B. Proposons-nous de trouver une troisième force qui soit équivalente à leur ensemble. La projection de cette force sur un axe quelconque doit être égale à la somme des projections des deux premières. Or, si l'on prend pour axe de projection un axe perpendiculaire à la direction commune des deux forces, la somme de leurs projections est nulle, et il doit en être de même de celle de leur résultante: donc cette résultante doit être parallèle à ses composantes. Au contraire, la somme des projections sur un axe parallèle à AP est P + Q; donc l'intensité de la résultante est égale à P + Q. Il faut enfin que la somme des moments des composantes, par rapport à un axe perpendiculaire à leur plan, soit égale au moment de la résultante. Faisons passer cet axe par un point O de la résultante inconnue, le moment de la résultante sera nul; donc la somme algébrique des moments des deux composantes doit être nulle également. Il résulte de là que le point O doit être situé entre les forces; et si p et q sont ses distances respectives aux forces P et Q, on doit avoir

$$Pp = Qq.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Deux forces parallèles et de même sens ont une résultante qui leur est parallèle et dirigée dans le même sens. Cette résultante est égale à leur somme et partage la*

ligne qui joint les points d'application de ces forces en parties inversement proportionnelles à leurs grandeurs P *et* Q.

Cette dernière partie est évidente, car on a

$$\frac{CA}{CB} = \frac{p}{q} = \frac{Q}{P}.$$

Le même raisonnement s'applique dans le cas où les forces sont dirigées en sens contraire l'une de l'autre (*fig.* 15).

THÉORÈME. — *Deux forces parallèles et de sens contraires ont une résultante qui leur est parallèle et égale à leur différence. Elle agit dans le sens de la plus grande, et ses distances aux deux composantes sont dans le rapport inverse de ces forces* (*).

COROLLAIRE. — *Un nombre quelconque de forces parallèles disposées comme on voudra, de même sens ou de sens différents, appliquées à différents points d'un solide invariable, admettent toujours une résultante unique.*

Désignant par R la grandeur de cette résultante, par x_1 et y_1 les coordonnées du point où elle perce un plan perpendiculaire à la direction des composantes, plan pris pour celui des xy, on a, pour déterminer ces trois inconnues, les équations

$$\sum F = R,$$

$$\sum Fy = Ry_1,$$

$$\sum Fx = Rx_1.$$

La résultante d'un système de forces parallèles jouit de propriétés fort intéressantes, sur lesquelles nous insisterons plus tard.

(*) Il résulte de ce qui précède que des forces agissant dans un même plan sur un solide invariable sont toujours susceptibles d'être remplacées par une force unique, sauf le cas d'exception qui sera indiqué plus bas.

En effet, deux de ces forces, prises au hasard, sont parallèles ou concourantes : dans les deux cas on sait en trouver la résultante. En opérant ainsi de proche en proche, on obtiendra la résultante définitive du système. Si cette résultante est nulle, les forces données se font équilibre.

Cas d'exception. — Il existe un cas singulier dans lequel les résultats précédents se trouvent en défaut, et où il n'est pas possible de déterminer une force unique capable de remplacer des forces parallèles données.

Distinguons ces forces en deux groupes comprenant : le premier, toutes celles qui agissent dans un certain sens; le deuxième, toutes celles qui agissent dans le sens opposé. Soit P la résultante des forces du premier groupe (*fig.* 15), Q celle des forces du second.

D'après ce que nous avons vu, les deux forces P et Q, qui sont équivalentes à toutes les forces données, admettent elles-mêmes une résultante dont l'intensité est représentée par

$$P - Q,$$

et dont la distance à la force P a pour expression, a étant la distance de P à Q,

$$p = a\frac{Q}{P - Q}.$$

Si la différence P — Q est très-petite, l'intensité de la résultante est elle-même fort petite, et en même temps sa distance à l'une ou à l'autre de ses composantes grandit, et peut même dépasser telle longueur finie que l'on voudra. A la limite, si l'on fait P = Q, on trouve pour cette résultante une force nulle, appliquée à l'infini, ce qui n'a plus de sens.

Ce cas d'exception est tout à fait l'analogue de celui qui s'est déjà présenté en Cinématique, à propos de la composition des rotations. La théorie générale ne nous apprend plus alors qu'une chose, c'est que, dans ce cas singulier, il n'y a plus de résultante unique, c'est-à-dire que deux forces égales parallèles, de sens contraire, mais non directement opposées, constituent un système *sui generis*, qui n'est pas susceptible d'être tenu en équilibre par une simple force. C'est le plus simple des systèmes non réductibles à une force unique.

Un pareil système porte le nom de *couple* (*). La considé-

(*) C'est par analogie avec les couples de forces que nous avons appelé en Cinématique *couple de rotations* l'ensemble de deux rotations qui ne peuvent pas se remplacer par une rotation unique.

ration des couples qui s'introduisent ainsi comme un cas singulier joue un grand rôle dans la théorie de la réduction des forces appliquées à un solide invariable, comme nous allons le montrer d'après Poinsot.

§ XIII. — Théorie des couples.

Définition. — Pour abréger le discours, nous appellerons *couple* l'ensemble de deux forces égales, parallèles et contraires, mais non appliquées au même point.

Nous n'avons pas à nous inquiéter pour le moment de ce que peut être l'action de ces forces sur le corps auquel elles sont appliquées (*); nous savons seulement que, quelle que soit cette action, elle n'est pas de nature à être contre-balancée par celle d'aucune simple force, appliquée comme on voudra au même corps, et que, par conséquent, l'effort d'un couple ne peut être comparé d'aucune manière à celui d'une simple force.

L'idée de couple ne doit pas être séparée (du moins à l'endroit où en est actuellement notre exposition de la Mécanique rationnelle) de celle d'un corps solide en équilibre auquel le couple est appliqué. L'effet d'un couple, si l'on peut s'exprimer ainsi, c'est de tenir une certaine place dans les six équations de l'équilibre.

Considérons donc l'ensemble de deux forces qui constituent ce que nous nommons, pour abréger, *un couple*, et cherchons quels sont les termes qui leur correspondent dans les six équa-

---

(*) On s'expose aux plus grandes erreurs quand on veut chercher à se rendre compte de l'effet d'un couple appliqué à un solide libre. La détermination de cet effet est un problème important de Dynamique, que nous verrons en temps et lieu.

Les commençants sont assez généralement portés à associer, sans trop savoir pourquoi, l'idée de force à celle de translation, et l'idée de couple à celle de rotation, et à se représenter en conséquence l'effet d'un couple comme étant de faire tourner le solide auquel il est appliqué autour d'une perpendiculaire à son plan. Rien n'est plus faux que ces idées. Ainsi tout le monde sait qu'au jeu de billard, une simple force appliquée à une bille produit à la fois un mouvement de translation et un mouvement de rotation.

tions de l'équilibre, écrites par rapport à trois axes rectangulaires quelconques; et supposons d'abord que deux de ces axes aient été pris parallèles au plan du couple, le troisième étant dirigé perpendiculairement au plan.

Il est d'abord évident que la somme des projections des deux forces sur chacun des axes coordonnés est nulle, et que la même chose a lieu relativement à une droite quelconque.

En deuxième lieu, la somme des moments des deux mêmes forces autour d'une droite quelconque, parallèle à leur plan, est également nulle. En effet, le moment d'une force par rapport à une droite s'obtient en projetant la force sur un plan perpendiculaire à la droite, et faisant le produit de la projection ainsi obtenue par sa distance au point suivant lequel se projette tout entière la droite ou axe par rapport auquel on cherche le moment.

Or, pour un axe parallèle au plan d'un couple, le plan de projection dont il est question dans la définition précédente est perpendiculaire au plan du couple; les deux forces de ce couple se projettent donc sur la même droite, et les deux projections occupent sur cette droite des longueurs égales, mais comptées dans un sens différent. Les moments de ces deux forces sont donc égaux en valeur absolue et de signes contraires, c'est-à-dire que leur somme algébrique est identiquement nulle.

Considérons enfin l'axe perpendiculaire au plan du couple, et supposons d'abord que sa projection O sur ce plan (*fig.* 16) laisse les deux forces P, P_1 d'un même côté. Soient p la distance du point O à la force AP, a la distance des droites AP, A_1P_1.

La somme algébrique des moments des deux forces est

$$P_1(a+p) - Pp,$$

c'est-à-dire simplement

$$Pa,$$

puisque P_1 est égal à P. Cette quantité Pa est indépendante de la position du point O dans le plan des deux forces.

Si la projection de l'axe tombait en un point O′, situé entre les deux lignes AP, A_1P_1, on aurait de même pour la somme

des moments des deux forces, en appelant p' la distance du point O′ à la force AP,

$$\mathrm{P}p' + \mathrm{P}(a - p') = \mathrm{P}a;$$

donc :

THÉORÈME I. — *La somme des moments des deux forces d'un couple, par rapport à un axe quelconque perpendiculaire à leur plan, est constante.*

Cette somme constante est représentée numériquement par le produit $\mathrm{P}a$, quantité qu'on désigne, pour abréger, sous le nom de *moment du couple*. La longueur a s'appelle le *bras de levier* du couple, et l'on voit que :

Le moment d'un couple est le produit de sa force par son bras de levier.

Ce produit doit être affecté d'un signe convenable, selon que la somme des moments des deux forces, à laquelle il est équivalent, est positive ou négative. On figure ordinairement (*fig.* 17) un couple en supposant les deux forces appliquées aux extrémités du bras de levier, ce qui est toujours permis; et on trouve facilement le signe du moment du couple, en considérant le bras de levier comme une barre rigide dont le milieu serait fixe; le moment est positif si le couple tend à faire tourner son bras de levier dans le sens positif, il est négatif dans le sens contraire.

J'ai déjà fait observer, dans un grand nombre de cas analogues, qu'aucun des facteurs du produit $\mathrm{P}a$ ne comporte à proprement parler de signe : il faut prendre ces facteurs en valeur absolue, et affecter le produit du signe convenable. Pourtant, si l'une des quantités P ou a dépendait d'une grandeur variable, il pourrait arriver que ce facteur changeât de signe, et fît ainsi changer le signe du moment déterminé pour certains sens de la force P et de la ligne a. L'Algèbre présente beaucoup d'exemples de faits de ce genre.

Équivalence des couples. — Pour que deux couples soient équivalents, il faut et il suffit, d'après ce qui vient d'être établi :

1° Que les plans des deux couples soient parallèles;

2° Que leurs moments soient égaux;

3° Enfin que les deux couples tendent à faire tourner leurs bras de levier respectifs dans le même sens.

On déduit de là la propriété fondamentale des couples de forces, laquelle s'énonce habituellement de la manière suivante :

THÉORÈME II. — *On peut, sans changer l'effet d'un couple appliqué à un corps solide en équilibre, le transporter dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, le tourner comme on voudra dans ces divers plans, et même changer à volonté sa force ou son bras de levier, pourvu que le moment* Pa *conserve toujours la même valeur, et que les couples qu'on substitue ainsi l'un à l'autre soient de même sens.*

Axe d'un couple. — Il suit de là qu'un couple est donné, c'est-à-dire qu'on a tout ce qu'on a besoin de connaître, relativement à l'*énergie* du couple et à sa position dans l'espace, quand on connaît la direction de son plan, la grandeur de son moment, et enfin le sens de ce moment.

En conséquence, on représente un couple par une simple droite, qu'on appelle l'*axe du couple*. On prend cette droite perpendiculaire au plan du couple, on lui donne une longueur proportionnelle à son moment; enfin on est convenu d'affecter à cette longueur un sens tel, qu'un observateur placé suivant cet axe, les pieds à l'origine, voie le couple tendre à faire tourner son bras de levier, supposé fixé par son milieu, dans le sens que nous avons adopté pour sens positif.

On voit que l'axe d'un couple n'occupe pas une position déterminée dans l'espace; on peut toujours le faire passer par un point pris arbitrairement d'une manière quelconque.

Projection des couples. — Il nous reste encore à donner l'expression de la somme des moments des forces d'un couple G (*fig.* 18), par rapport à un axe quelconque Oz. Pour cela, projetons ces forces sur un plan perpendiculaire à cet axe : on obtient ainsi un nouveau couple G', et il est clair que le moment de ce couple représente précisément la somme cherchée.

Cela posé, remarquons que le moment d'un couple peut être représenté par la surface du parallélogramme dont les forces sont les côtés opposés. Or l'aire du parallélogramme qui

donne le moment de G′ est le produit de l'aire du parallélogramme (G) par le cosinus de l'angle i formé par le plan du couple avec le plan de projection ; donc on a

$$G' = G \cos i.$$

Soit Ag l'axe du couple G : on peut aussi prendre pour cet axe la ligne égale et parallèle Og_1, qui passe par un point de Oz, et il résulte de l'équation précédente que l'axe du couple G′ est la projection de Og_1 sur Oz ; donc :

THÉORÈME III. — *La somme des moments des forces d'un couple par rapport à une droite quelconque est la projection de l'axe du couple sur cette droite.*

On voit que les moments des couples se représentent et se projettent absolument comme ceux des simples forces, avec cette différence toutefois que, dans le cas d'un couple, il n'y a qu'à s'inquiéter de la direction de l'axe par rapport auquel on considère les moments, et nullement de sa position dans l'espace.

Composition des couples.

On n'a pu s'empêcher de remarquer dès à présent l'analogie, ou plutôt l'identité parfaite qui existe, au point de vue de la forme mathématique, entre les théorèmes de la Cinématique et ceux de la Statique. Cette identité est d'autant plus curieuse que ces deux sciences se rapportent à deux ordres d'idées absolument et essentiellement différents.

Ainsi les règles relatives à la composition des rotations se retrouvent ici comme présidant à la composition des forces. Les deux théories nous présentent le même cas singulier ; et nous allons voir, pour continuer l'analogie, que les couples de forces se composent comme des couples de rotation, c'est-à-dire comme des translations.

Composition des couples parallèles. — Rien n'empêche de s'arranger de façon que les forces P et Q des deux couples soient parallèles, et que leurs bras de levier soient égaux. Alors, si l'on fait coïncider les deux bras de levier, on a, à

chacune des extrémités de cette ligne, deux forces dont les directions se confondent, et qu'on peut par conséquent remplacer par une force unique dont l'intensité est la somme algébrique des intensités des forces des deux couples. Ces deux résultantes forment un couple équivalent à l'ensemble des deux couples donnés, et le moment

$$a(P+Q)$$

de ce couple est la somme des moments des couples composants. Donc :

THÉORÈME IV. — *Deux couples situés dans deux plans parallèles sont équivalents à un couple unique dont le moment a pour valeur la somme algébrique des moments des couples composants.*

Ce résultat s'énonce plus simplement en disant que *l'axe du couple résultant est la somme des axes des couples composants.*

Composition des couples quelconques. — Soient maintenant à composer deux couples quelconques (*fig.* 19). Soit AG l'intersection des plans de ces couples. Prenons sur cette intersection une longueur AB pour bras de levier commun aux deux couples.

A chacune des deux extrémités du bras de levier, j'ai deux forces P, Q que je compose par la règle du parallélogramme. J'obtiens ainsi deux forces égales et contraires qui constituent un couple équivalent aux deux couples proposés. Donc, *deux couples, situés comme on voudra dans deux plans qui se coupent sous un angle quelconque, se composent toujours en un seul, dont le plan passe par l'intersection des plans des deux premiers couples, et par la diagonale du parallélogramme construit sur les forces qui constituent ces couples.*

Il est très-facile de démontrer que l'axe du couple résultant est la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des couples composants.

En effet, le plan PQ peut être regardé comme étant perpendiculaire à l'intersection AG, puisqu'on a le droit de tourner comme on veut des couples dans leur plan. Faisons une pro-

jection sur ce plan (*fig.* 20). Nous avons un parallélogramme dont les côtés sont P et Q, et dont la diagonale est la résultante R. Pour avoir l'axe du couple P, il faut prendre sur une perpendiculaire à P une longueur AL proportionnelle à P; l'axe du couple Q et l'axe du couple résultant R s'obtiennent de même en portant sur des perpendiculaires à Q et à R des longueurs AM, AN, respectivement proportionnelles aux forces Q et R. Donc la figure ALNM est un parallélogramme dont AN est la diagonale, et par suite :

THÉORÈME V. — *Si deux couples sont représentés pour leurs axes et pour leurs grandeurs par les deux côtés d'un parallélogramme, ces deux couples se composent en un seul, représenté pour son axe et pour sa grandeur par la diagonale de ce parallélogramme.*

Ayant démontré, comme nous venons de le faire, la règle du parallélogramme des axes, on en déduit immédiatement celles du parallélipipède et du polygone des axes pour la composition d'un nombre quelconque de couples, ainsi que la décomposition d'un couple en trois autres ayant pour axes trois directions rectangulaires.

Utilité des couples pour la composition des forces disposées d'une manière quelconque dans l'espace.

De même qu'en Cinématique les couples de rotation nous ont été d'une grande utilité pour la réduction des mouvements à leurs éléments les plus simples, de même en Statique, les couples vont nous permettre de réduire au plus petit nombre possible un système quelconque de forces agissant sur un corps solide. Voici comment la théorie des couples rend cette réduction facile et élégante.

Une force F, étant appliquée en un point A d'un corps ou système solide quelconque (*fig.* 21), si l'on prend un autre point quelconque O dans ce corps (ou au dehors, pourvu qu'on l'y suppose invariablement attaché), et qu'on applique à ce nouveau point deux forces contraires, égales et parallèles à la première, il est clair que l'état du corps ne sera pas

changé. Mais on pourra considérer actuellement, au lieu de la simple force proposée :

1° Une force parfaitement égale, parallèle et de même sens, appliquée au nouveau point O;

2° Un couple formé par les deux forces parallèles restantes. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs, dans un plan quelconque parallèle au sien, ce qui est permis, il ne restera au point dont il s'agit qu'une force parfaitement égale et parallèle à la force primitive, laquelle n'est en quelque sorte que cette même force, qu'on y aurait transportée parallèlement à elle-même.

On peut donc dire :

THÉORÈME VI. — *Une force* F, *appliquée en un point* A *d'un solide invariable, peut être transportée parallèlement à elle-même en un autre point* O *du même solide, pourvu qu'on adjoigne à cette force ainsi transportée un couple situé dans un plan parallèle au plan* FOA *et ayant pour moment le produit de la force* F *par la distance du point* O *à la direction de cette force.*

Considérons maintenant un système quelconque de forces, appliquées à un solide invariable, et transportons toutes ces forces en un même point O. Nous remplacerons ainsi le système des forces données par un système de forces égales et parallèles aux premières, et appliquées en un point du solide pris à volonté, système auquel il faudra joindre un nombre de couples égal au nombre des forces transportées.

Or, toutes les forces appliquées au point O se composent en une seule R; tous les couples peuvent de même être remplacés par un couple unique G; donc :

THÉORÈME VII. — *Un système de forces quelconque, appliqué à un solide invariable, peut toujours être remplacé, et d'une infinité de manières, par une force unique et un couple unique.*

La force R s'appelle la *résultante de translation.* La grandeur, la direction et le sens de cette force restent les mêmes, quel que soit le point pris pour origine. Ses composantes sui-

vant trois axes rectangulaires conduits par cette origine sont :

$$X = \sum F_x,$$

$$Y = \sum F_y,$$

$$Z = \sum F_z;$$

et l'on a, pour déterminer sa grandeur et les angles α, β, γ qu'elle fait avec les trois axes, les relations

$$R\cos\alpha = X, \quad R\cos\beta = Y, \quad R\cos\gamma = Z,$$
$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Quant au couple résultant, il change évidemment avec l'origine. Les moments L, M, N des projections de ce couple sur les trois plans coordonnés, c'est-à-dire la projection de l'axe du couple sur les trois axes, sont, d'après les propriétés des systèmes équivalents, égaux aux sommes des moments des forces par rapport aux mêmes axes. On a donc

$$L = \sum M_{ox} F,$$

$$M = \sum M_{oy} F,$$

$$N = \sum M_{oz} F;$$

d'où, en désignant par G l'axe du couple, par λ, μ, ν les angles de cet axe avec les axes coordonnés,

$$G\cos\lambda = L, \quad G\cos\mu = M, \quad G\cos\nu = N,$$
$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Axe du moment maximum. — Ce couple G, projeté sur un plan qui forme avec le sien un angle θ, est égal à $G\cos\theta$; il suit de là que :

THÉORÈME VIII. — *De tous les axes qui passent par une même origine, l'axe du couple résultant est celui par rapport auquel la somme des moments des forces est la plus grande.*

THÉORÈME IX. — *La somme des moments est la même par rapport à tous les axes qui font un même angle avec celui du plus grand moment, ou qui forment une surface conique décrite autour de lui sous cet angle.*

THÉORÈME X. — *La somme des moments est nulle par rapport à tous ceux qui font avec cet axe un angle droit, ou qui forment un plan perpendiculaire à sa direction.*

Axe central. — Nous avons dit que si l'on change l'origine, la grandeur du couple résultant varie, en même temps que son axe (c'est-à-dire l'axe du moment maximum des forces) s'incline sur sa position primitive.

Cherchons les lois de cette double variation.

Au point où nous en sommes, l'analogie entre les théorèmes de la Cinématique et ceux de la Statique est si parfaite, que l'on peut, presque sans nouvelle démonstration, conclure que parmi toutes les manières dont on peut réduire les forces agissant sur un corps solide à un couple et une force unique, il en est une plus simple que toutes les autres, et dans laquelle l'axe du couple se confond avec la direction de la résultante de translation. C'est ce que nous démontrerons d'ailleurs facilement par une marche toute pareille à celle que nous avons suivie en Cinématique.

En effet, tout étant déjà réduit à la seule force R et au seul couple G, par rapport à un point connu A (*fig.* 22), imaginons qu'on décompose le couple G en deux autres, l'un $G\cos i$, perpendiculaire à la direction de la résultante de translation, l'autre $G\sin i$, dont le plan passe par cette direction AR.

Si dans ce plan, où se trouvent à la fois le couple $G\sin i$ et la force R, on transporte la force parallèlement à elle-même de A en O, d'un tel côté et à une telle distance x que le couple Rx, né de cette translation, soit égal et contraire au couple $G\sin i$ et le détruise, il ne restera plus que la seule force R appliquée au nouveau point O, avec le seul couple $G\cos i$, qui est dans un plan perpendiculaire à la direction de cette force. Donc :

THÉORÈME XI. — *Tant de forces qu'on voudra sont toujours réductibles à une seule force et à un seul couple, dont le plan est perpendiculaire à la direction de la force.*

Le couple qui jouit de cette propriété, d'avoir son axe parallèle à la direction bien déterminée de la résultante de translation, est un minimum par rapport aux couples résultants qui se rapportent à une origine quelconque. En effet, le transport de la résultante, du point O en un point arbitraire A, donnera lieu à un couple dont le plan contiendra la direction OR, et dont l'axe sera par conséquent perpendiculaire à l'axe du couple que nous considérons : or la résultante de deux droites rectangulaires est plus grande que l'une et l'autre de ces droites. Donc le couple dont l'axe est dirigé suivant la ligne OR est un minimum.

Ceci démontre qu'il n'y a qu'une seule manière de réduire les forces à un système tel que celui que nous venons de définir.

Soit g le moment du couple minimum, nous avons trouvé

$$g = \mathrm{G}\cos i,$$

G étant le moment du couple résultant relatif à une origine quelconque, et i l'inclinaison de l'axe de ce couple sur la résultante de translation. Comme la valeur de g est indépendante de l'origine A, de laquelle nous sommes partis pour faire notre démonstration, on voit que :

La projection, sur la direction de la résultante de translation, de l'axe du couple résultant relatif à une origine quelconque, est constante.

On a d'ailleurs, si l'on se reporte aux expressions des cosinus des angles faits avec trois axes fixes quelconques par la résultante de translation et l'axe du couple résultant relatif à l'origine de ces trois axes,

$$\cos i = \frac{\mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ}}{\mathrm{RG}},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{G}\cos i = g = \frac{\mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ}}{\mathrm{R}},$$

quantité constante quelle que soit l'origine choisie.

Il existe donc toujours un axe, dont la direction est celle de la résultante de translation, jouissant, comme on voit, de la

propriété que la somme des moments par rapport à cet axe est à la fois un *maximum* relativement aux axes qui se croisent en l'un quelconque de ses points, et un *minimum* relativement à ceux qui donnent les moments maxima relatifs aux autres points de l'espace. Cet axe s'appelle l'*axe central* des moments du système de forces (Poinsot) : c'est l'analogue de l'*axe spontané glissant* de la Cinématique.

La dénomination d'*axe central* se trouvera pleinement justifiée si l'on observe qu'à des distances égales de cette droite les couples résultants ont des valeurs égales et que leurs axes sont également inclinés sur cet axe OR.

En effet, de quelque côté qu'on transporte la résultante R à une distance x de l'axe central, on trouvera toujours l'axe du couple résultant en composant le couple g avec le couple perpendiculaire Rx, né du transport de la force R. On voit donc qu'en s'éloignant de cet axe on trouvera des couples toujours plus grands et croissant sans limite; mais chacun d'eux, estimé suivant la direction constante de la résultante de translation, donne une projection égale au couple minimum g.

Remarquons pourtant que, quand la résultante de translation est nulle, les couples résultants sont les mêmes pour tous les lieux de l'espace, et que leurs axes sont tous parallèles.

En écartant ce cas, les axes de divers couples résultants se classent autour de l'axe central en diverses surfaces d'hyperboloïdes de révolution, dont cette ligne est l'axe, et qui peuvent chacune occuper diverses positions en glissant le long de cet axe.

Pour tous les axes qui forment la surface d'un même hyperboloïde, ou de tous les hyperboloïdes égaux que nous avons définis, les moments maxima ont la même valeur, et ils varient d'une série à une autre, suivant les lois que nous avons données ci-dessus.

Des conditions de l'équilibre.

Nous avons vu comment on peut, d'une infinité de manières, remplacer par une force et un couple des forces en nombre quelconque, appliquées à un solide invariable. Cela

posé, comme une force ne saurait, dans aucun cas, faire équilibre à un couple, il est nécessaire, et aussi suffisant, pour l'équilibre, qu'en prenant pour origine un point quelconque et y transportant toutes les forces du système, la résultante R de toutes ces forces transportées soit nulle, et que le couple résultant G de tous les couples provenant de ces translations soit aussi nul.

Or, les équations qui expriment que la résultante de translation est nulle sont

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Pour le couple résultant, on a les équations analogues

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

nécessaires et suffisantes pour que le couple résultant soit nul. Nous retombons ainsi sur nos six équations de l'équilibre, et nous les retrouvons sous la forme même qui nous a servi de point de départ.

Réduction des forces à deux équivalentes.

Plaçons-nous à une origine quelconque O (*fig.* 23), transportons-y la résultante de translation R, et arrangeons-nous de manière que l'une des forces P du couple résultant G passe également par le point O, ce qui est toujours possible d'une infinité de façons. Je puis composer les deux forces P et R en une seule R_1, et il nous restera simplement, outre cette force, la deuxième force du couple que je désignerai par R_2. Donc :

Théorème. — *Un système quelconque de forces appliquées à un corps solide peut toujours se réduire à deux forces, dont l'une passe par un point pris à volonté dans le corps.*

Si la résultante de translation n'est pas dans le plan du couple, les forces R_1 et R_2 ne sont pas dans un même plan; car, pour obtenir R_1, on compose la force P, située dans le plan OR_2, avec une force R située dans un plan différent (*).

(*) Il est facile de démontrer que la réduction ne peut pas être poussée plus loin, c'est-à-dire de faire voir que deux forces non situées dans le même plan n'ont pas de résultante unique.

Supposons qu'il y ait une résultante et appliquons au solide une force S égale

La méthode qui consiste à réduire à deux équivalentes toutes les forces qui agissent sur un corps solide, au lieu de les remplacer par une force unique et un couple, a été très-longtemps employée et l'est encore par un très-grand nombre d'auteurs. Quant à nous, nous ferons plus volontiers usage de la réduction à une force et à un couple, parce que cette méthode a l'avantage, très-grand à nos yeux, de mettre bien nettement en évidence *la résultante de translation*, force qui joue un très-grand rôle dans la Dynamique.

Il existe une infinité de manières de réduire des forces quelconques à deux équivalentes. Cette réduction est analogue au mode de représentation du mouvement le plus général d'un corps solide par la combinaison de deux rotations non situées dans un même plan; et les propriétés géométriques des deux systèmes sont identiques.

Cas d'une résultante unique. — Cherchons maintenant dans quels cas nous pourrons avoir une résultante unique. Pour que les forces du système puissent être remplacées par une force unique équivalente, il faut et il suffit qu'en nous plaçant à une origine quelconque, la résultante de translation soit située dans le plan du couple résultant, ou parallèle à ce plan, ce qui est la même chose.

Supposons, en effet, qu'il y ait une résultante unique appliquée en un point O (*fig.* 25). Cette résultante sera nécessairement égale à la résultante de translation. Transportons-nous à un autre point O′. Puisque nous admettons que toutes les forces du système peuvent être remplacées par la force unique R, il suffira de transporter cette force à la nouvelle origine, c'est-à-dire d'appliquer au point O′ deux forces opposés égales et parallèles à R. Nous obtenons ainsi la résultante

---

et opposée à cette résultante (*fig.* 24). Le système des trois forces R_1, R_2, S, est en équilibre, et nous savons que nous ne détruirons pas l'équilibre en introduisant des liaisons dans le système.

Or, nous pouvons, d'une infinité de manières, mener une droite AB qui rencontre R_1 et R_2, sans rencontrer S.

En supposant que cette droite soit fixe, l'effet des forces R_1 et R_2 sera détruit, tandis que celui de la force S ne le sera pas. Donc l'équilibre ne saurait exister entre ces trois forces.

de translation transportée en O', et un couple $(\mathrm{R}, \mathrm{R}_1)$ que nous pouvons déplacer et transformer comme un couple ordinaire. Mais de quelque manière que nous le changions, son plan restera toujours parallèle à la résultante de translation R_2. D'ailleurs, tout autre mode d'opérer la réduction à une force et à un couple en prenant O' pour l'origine ne peut évidemment conduire à un résultat différent; donc cette réduction des forces du système, effectuée par rapport à une origine quelconque, donnera toujours un couple résultant dont le plan contiendra la résultante de translation (*).

Cette condition nécessaire doit en même temps être considérée comme suffisante : il faut toutefois excepter le cas où la résultante de translation serait nulle. Dans ce cas, en effet, tout se réduit à un simple couple qui ne saurait être remplacé par une force unique, à moins qu'on ne voulût considérer une force nulle située à l'infini, ce qui n'a plus aucun sens.

Cherchons analytiquement les conditions nécessaires pour qu'il y ait une résultante unique.

Prenons trois axes rectangulaires. Pour qu'il y ait une résultante unique R appliquée en un certain point, dont les coordonnées soient x_1, y_1, z_1, il faut que les projections de cette résultante soient égales à X, Y, Z, et que ses moments autour des trois axes soient respectivement égaux à L, M, N. Donc on doit avoir, en appelant X_1, Y_1, Z_1 les projections de la résultante, et se reportant aux formules de la page 80,

$$(a)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{X}_1, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1, \quad \mathrm{Z} = \mathrm{Z}_1, \\ \mathrm{L} = \mathrm{Z}_1 y_1 - \mathrm{Y}_1 z_1, \\ \mathrm{M} = \mathrm{X}_1 z_1 - \mathrm{Z}_1 x_1, \\ \mathrm{N} = \mathrm{Y}_1 x_1 - y_1 \mathrm{X}_1. \end{cases}$$

(*) Pour démontrer directement que, si la résultante de translation n'est pas dans le plan du couple, il ne peut y avoir de résultante unique, nous supposerons, en employant un artifice de raisonnement qui nous est déjà connu, l'équilibre établi au moyen d'une force S égale et contraire à la résultante unique (*fig.* 96). Puis, menant dans le plan du couple une droite AB qui rencontre les deux forces du couple et la force S, sans rencontrer R, et considérant cette droite comme un axe fixe, nous mettrons nettement en évidence l'impossibilité de l'équilibre du système de forces que nous considérons.

On a ainsi six équations à six inconnues, mais on sait à l'avance qu'il n'est pas possible que ces équations nous donnent des valeurs déterminées pour x_1, y_1, z_1. En effet, la résultante, si elle existe, peut à volonté être supposée appliquée en un point quelconque de sa direction, de sorte qu'il y a au moins l'une des trois coordonnées x_1, y_1, z_1 qui reste arbitraire. Les équations (a) sont donc forcément absurdes ou indéterminées, au moins quant aux trois inconnues x_1, y_1, z_1. Il est facile d'éliminer à la fois les six inconnues. En effet, multiplions la quatrième équation par la première, la cinquième par la deuxième, la sixième par la troisième, et ajoutons les résultats, nous aurons

$$\mathbf{LX + MY + NZ = 0},$$

équation qui ne contient plus d'inconnue, et qui exprime la relation qui doit avoir lieu entre les résultantes partielles **X**, **Y**, **Z** et les trois moments partiels **L**, **M**, **N**, pour que les trois équations précédentes puissent subsister à la fois, et par conséquent pour que les forces du système aient une résultante.

Si cette équation de condition a lieu, les valeurs des trois coordonnées x_1, y_1, z_1 se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$, parce que, la résultante pouvant être appliquée à tel point de sa direction qu'on voudra, il est impossible que le calcul détermine l'un de ces points plutôt que tout autre. Il ne peut donc donner que leur lieu géométrique; et les trois dernières équations, en remplaçant $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Z_1}$ respectivement par **X**, **Y**, **Z**, ne sont autre chose que les équations des trois projections de la résultante sur les plans coordonnés.

On pourra alors avoir à volonté un point quelconque de cette résultante, en se donnant l'une des coordonnées de ce point et déterminant les deux autres au moyen de deux des équations de la résultante.

Il y a cependant un cas dans lequel, bien que la condition

$$\mathbf{LX + MY + NZ = 0}$$

soit remplie, le calcul ne donnera plus aucun résultat : c'est celui où les trois composantes **X**, **Y**, **Z** sont nulles en même temps, car on trouve dans cette hypothèse une résultante

nulle, située tout entière à l'infini. C'est qu'en effet, dans ce cas, les forces du système seront réduites aux trois couples dont les moments sont représentés par **L**, **M**, **N**, couples qui ne peuvent jamais se réduire qu'à un autre couple. C'est ce que devait nous apprendre et ce que nous apprend en effet le calcul.

§ XIV. — Équilibre d'un solide qui n'est pas absolument libre. — Des machines.

Lorsque des forces réagissent les unes sur les autres par l'intermédiaire d'un corps ou système rigide parfaitement libre, il est impossible qu'elles se fassent équilibre, à moins qu'elles ne remplissent les six conditions que nous avons établies.

Au contraire, par le moyen des machines proprement dites, on peut mettre en équilibre des forces quelconques qui ne satisfont pas à toutes les conditions générales. Pour qu'un pareil résultat soit possible, il est nécessaire que les corps qui constituent les machines ne soient pas entièrement libres, mais qu'ils soient gênés par des obstacles. Ces obstacles, en rendant impossibles certains mouvements virtuels, dispensent par là même les forces du système de vérifier les relations correspondantes à ces mouvements.

En effet, on n'a point oublié que la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre des forces agissant sur un système donné, c'est que la somme des travaux virtuels de ces forces soit nulle, *pour tout déplacement compatible avec les liaisons du système.*

On peut, dans la théorie de l'équilibre des machines, laquelle n'est autre chose que la théorie de l'équilibre des corps gênés par des obstacles, considérer les obstacles comme tenant lieu des forces égales et contraires à celles qu'ils détruisent actuellement; et si l'on conçoit qu'on ait ainsi substitué à la place de ces obstacles insurmontables des forces qui représentent leurs résistances actuelles, ce n'est plus entre les seules forces directement appliquées qu'il y a équilibre, mais entre ces forces et les résistances. Les six équations de l'équilibre doivent alors

avoir lieu entre ces deux groupes de forces, considérés simultanément.

Des machines simples. — Nous réduirons les machines simples à trois principales, qui se distinguent l'une de l'autre par la nature de l'obstacle qui gêne le mouvement du corps; ce sont :

1° Le *levier*,

2° Le *tour* ou *treuil*,

3° Le *plan incliné*.

Dans la première machine, l'obstacle est un point fixe, autour duquel le corps a la liberté de tourner en tous sens.

Dans la deuxième, l'obstacle est une droite fixe, autour de laquelle tous les points du corps n'ont que la liberté de tourner dans des plans parallèles.

Dans la troisième, l'obstacle est un plan inébranlable contre lequel le corps s'appuie et sur lequel il a la liberté de glisser (*).

PREMIER CAS. — *Équilibre du levier.*

S'il y a un point fixe dans le système, les seuls mouvements possibles sont des mouvements de rotation autour des diverses droites qui passent par ce point; et on écrira que la somme des travaux virtuels des forces est nulle pour tout mouvement de ce genre, en posant, relativement à trois axes rectangulaires quelconques menés par le point fixe, les équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

c'est-à-dire que :

Pour l'équilibre du levier, il faut et il suffit que la somme des moments des forces soit nulle autour de trois axes rectangulaires qui se croisent au point d'appui.

(*) Comme on a d'abord considéré cette dernière machine par rapport aux corps pesants qu'on retient en équilibre sur des plans inclinés à l'horizon, on lui a donné, et elle a gardé le nom de *plan incliné*.

Détermination de la charge de l'appui dans le cas d'un levier en équilibre.

On peut raisonner autrement, de manière à déterminer la charge du point fixe, ce qui est très-important dans les applications.

Pour cela, imaginons à la place du point fixe une force unique R, qui remplace la résistance de ce point, et considérons le système comme parfaitement libre dans l'espace. Les six équations de l'équilibre devront avoir lieu, si l'on y introduit la force inconnue qui représente la réaction de l'appui.

Or, cette force, étant appliquée à l'origine, fournira trois nouvelles composantes X_1, Y_1, Z_1 dans la direction des trois axes, et ne fournira aucun couple nouveau dans les trois plans.

Les six équations de l'équilibre sont ainsi :

$$X + X_1 = 0, \quad Y + Y_1 = 0, \quad Z + Z_1 = 0,$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Les trois dernières équations ne renfermant pas d'inconnues sont les trois véritables conditions de l'équilibre.

La charge du point d'appui est, d'après le principe de Newton, égale à la résistance R, prise en sens contraire. Donc les composantes de cette charge sont

$$-X_1, \quad -Y_1, \quad -Z_1,$$

c'est-à-dire précisément

$$X, \quad Y, \quad Z.$$

Dans l'équilibre du levier, la charge du point d'appui est une force égale à la résultante de translation de toutes les forces du système.

Deuxième cas. — *Équilibre du treuil.*

Supposons qu'il y ait deux points fixes dans le système, O, O' (*fig.* 27), c'est-à-dire que le corps n'ait que la liberté de tourner autour de l'axe OO'. Prenons l'un des points fixes, O, pour origine, et la droite OO' pour axe des x. Le seul mou-

vement virtuel compatible avec l'invariabilité de la droite OO′ étant une rotation autour de cette droite, on a, comme unique équation d'équilibre, la condition

$$\mathbf{L} = 0.$$

Pour l'équilibre du treuil, il faut et il suffit que la somme des moments des forces par rapport à l'axe fixe soit nulle.

Charges des appuis. — L'équation $\mathbf{L} = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les forces du système soient réductibles à deux équivalentes, appliquées respectivement aux points O et O′.

Les réactions R_1, R_2 des points d'appui sont égales et opposées à ces deux forces, et les six équations de l'équilibre doivent être satisfaites, si l'on joint aux forces données ces deux réactions inconnues.

Soient (*fig.* 28) X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 les composantes de ces deux forces, à la distance OO′; on a

$$\mathbf{X} + \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = 0,$$
$$\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = 0,$$
$$\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 0;$$

$$\mathbf{L} = 0,$$
$$\mathbf{M} - a\mathbf{Z}_2 = 0,$$
$$\mathbf{N} + a\mathbf{Y}_2 = 0.$$

Parmi ces six équations, la quatrième ne contient pas d'inconnues; c'est l'équation d'équilibre que nous avons déjà établie directement.

Quant à ce qui regarde les réactions, on tire aisément du système précédent les valeurs de Y_2, Y_1, Z_2, Z_1; mais ce même système détermine seulement la somme $X_1 + X_2$ des composantes longitudinales des actions des supports.

Pour comprendre à quoi tient cette indétermination, remarquons que les points O et O′, qu'on peut supposer réunis par une tige rigide, se prêtent un appui réciproque, de manière que chacun d'eux a toujours, ou par lui-même ou par le secours de l'autre, la résistance dont il a besoin pour l'équilibre, pourvu que la somme de ces résistances soit suffisante. On ne

peut donc pas demander, et il est impossible que le calcul détermine des valeurs particulières pour deux résistances qui, passant en tout ou en partie de l'un à l'autre point, se confondent en une seule et même résistance. On comprend donc que nous ne puissions tirer de nos formules que la valeur de la somme ou de la résultante que nous devrons supposer appliquée au point de l'arbre où se trouve placé un obstacle destiné à s'opposer à tout déplacement dans le sens de la longueur de l'arbre (*).

TROISIÈME CAS. — *Équilibre du plan incliné.*

Prenons le plan fixe pour plan des xy. Il n'y a pas à se préoccuper de la composante Z qui tend à faire sortir le corps du plan; mais il faut que l'on ait pour l'équilibre

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Les couples L et M tendraient aussi à faire sortir le corps du plan; donc il faut simplement aux équations précédentes ajouter la condition

$$N = 0.$$

Il y a en tout trois équations d'équilibre. Elles expriment que les forces données sont susceptibles d'être remplacées par une force unique (**), perpendiculaire au plan.

Charges des points d'appui. — Le corps repose sur le plan par un certain nombre de points. Voyons si nous pourrons déterminer les charges de ces divers points.

(*) Rappelons, avant de quitter ce sujet, que la détermination que nous venons de faire des pressions exercées sur des appuis par un corps qui n'a que la liberté de tourner autour d'un axe fixe, suppose essentiellement que nous considérons le cas où ce corps est en équilibre. L'état de mouvement modifie profondément les pressions dont nous venons d'écrire les valeurs statiques. Il se produit alors un grand nombre de phénomènes dont quelques-uns sont de la plus haute importance au point de vue des applications pratiques. Nous aurons plus tard à nous étendre longuement sur cet ordre de questions.

(**) Les équations $X = 0$, $Y = 0$, $N = 0$ entraînent effectivement la vérification de la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une résultante unique, à savoir

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Nous savons que quand un corps repose sur un plan sur lequel il a la liberté de se mouvoir, il se développe en chaque point de contact une réaction normale à la surface, c'est-à-dire parallèle à notre axe des z. Si donc nous appelons x_i, y_i les coordonnées de l'un quelconque des points d'appui, Z_i la réaction de ce point, les équations de l'équilibre seront

$$X = 0,$$
$$Y = 0,$$
$$Z + \sum Z_i = 0,$$
$$L + \sum Z_i y_i = 0,$$
$$M - \sum Z_i x_i = 0,$$
$$N = 0.$$

Nous avons trois équations seulement pour déterminer les charges de tous les points d'appui, et il faut distinguer plusieurs cas.

1° S'il n'y a qu'un point d'appui, et par suite qu'une seule réaction Z_1, on pourra l'éliminer entre les trois équations où elle figure. On aura deux nouvelles équations de l'équilibre, et une autre relation pour déterminer Z_1.

2° S'il y a deux points d'appui, il y a une nouvelle équation d'équilibre, et les charges de ces points sont encore déterminées.

3° S'il y a trois points d'appui, il n'y a plus de nouvelle équation de l'équilibre, les trois équations étant nécessaires pour déterminer les trois réactions.

4° Supposons enfin qu'il y ait un plus grand nombre de points d'appui. Dans ce cas, les charges de chacun de ces points sont indéterminées, puisqu'elles doivent seulement satisfaire aux trois équations

$$Z + \sum Z_i = 0,$$
$$L + \sum Z_i y_i = 0,$$
$$M - \sum Z_i x_i = 0,$$

de sorte qu'on pourra se donner les pressions de tous les points d'appui, hors trois, que les équations précédentes permettront de calculer.

Nous trouvons, d'après les principes établis ci-dessus, que les pressions sont indéterminées lorsqu'il y a plus de trois points d'appui; d'un autre côté, en considérant *à priori* un corps appuyé contre un plan par un nombre quelconque de points, et tenu en équilibre par une force normale à ce plan, il nous *paraît* évident que chaque point de contact doit être actuellement pressé, et que, s'il est pressé, c'est avec une certaine force tout à fait déterminée, ce qui serait absurde autrement; et de là il résulte une espèce de paradoxe assez difficile à expliquer.

L'indétermination est réelle dans le cas idéal où l'on considère un corps parfaitement rigide et inflexible, reposant sur un plan dont la résistance est pareillement indéfinie. Cette indétermination est du même ordre que celle qui règne sur le partage de la réaction longitudinale entre les deux tourillons d'un treuil.

Les choses se passent tout différemment dans la nature. Les réactions des points d'appui ont des valeurs parfaitement déterminées; seulement ces valeurs sont déterminées par autre chose que les équations générales de l'équilibre. Tous les corps sont plus ou moins flexibles et déformables; et, lorsqu'ils sont pressés sur un plan, la distribution de la pression entre les points d'appui a lieu en vertu des trois équations générales fournies par la Statique rationnelle, et des conditions qui, dans chaque cas particulier, résultent des propriétés physiques spéciales du système que l'on étudie.

Considérons une locomotive à six roues, conformément au type le plus répandu. Il est très-important de connaître les charges spéciales de chaque essieu, puisque nous savons que la puissance de la locomotive est en raison seulement de la fraction de son poids supportée par l'essieu moteur, et par les essieux, s'il y en a, dont les roues sont couplées avec les roues motrices. Or ces charges sont parfaitement déterminées, et on peut les mesurer en plaçant la locomotive sur un système de six petites bascules indépendantes, dont chacune supporte une roue et est maintenue en équilibre par un poids spécial.

Ce qu'il y a de curieux, c'est qu'on est le maître de modifier dans une certaine mesure les pressions individuelles qui s'exercent sur chacune des bascules; il suffit de serrer ou de desserrer l'un des écrous des ressorts de suspension. Les réactions pourront ainsi prendre divers systèmes de valeurs; mais :

1° Ces valeurs, dans chaque cas, seront toujours parfaitement déterminées ;

2° Les divers systèmes satisferont toujours aux équations générales de l'équilibre (*).

Des machines composées.

Les machines les plus compliquées peuvent toutes être ramenées aux éléments simples que nous venons d'étudier. En les décomposant en leurs éléments simples, on trouvera dans tous les cas les conditions d'équilibre et les tensions des divers lieux.

Quand on voudra seulement la condition d'équilibre, la

(*) Supposons la condition d'équilibre satisfaite, et toutes les forces agissant sur la locomotive réduites à la force verticale P (*fig.* 29). En vertu de la symétrie, on peut considérer toutes les forces comme agissant dans le plan médian de la machine, et cela posé on a, entre la résultante P et les trois réactions, les deux équations

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 - P = 0,$$
$$aZ_1 - bZ_3 + Pp = 0,$$

en prenant les moments par rapport à l'essieu médian O.

Dans les machines à balancier, la constitution du système est telle, que la répartition des pressions, au lieu d'être livrée au gré du mécanicien, se fait suivant des règles imposées au constructeur.

La machine repose sur ses trois essieux par l'intermédiaire de trois balanciers dont les bras sont inégaux, r_1, r_2, r_3 étant les rapports respectifs des bras.

Soit ξ l'effort qui s'exerce en a; on a en a', et par suite en c, $r_1\xi$; en c' et en b, $r_1 r_2 \xi$; enfin en b', $r_1 r_2 r_3 \xi$. Puis

$$Z_1 = (1 + r_1)\xi, \quad Z_2 = r_1(1 + r_2)\xi, \quad Z_3 = r_1 r_2 (1 + r_3)\xi.$$

Nos équations déterminent ξ et font connaître une relation à laquelle les rapports r_1, r_2, r_3 doivent satisfaire; deux de ces rapports sont encore à notre disposition; et par exemple, s'il s'agit d'une machine à trois essieux couplés, on pourra faire en sorte que les charges des trois essieux soient égales.

méthode la plus simple et la plus directe est fondée sur l'application du théorème du travail virtuel, ainsi que nous l'avons dit.

Nous réservons l'étude des machines les plus usuelles pour la deuxième Section de ce volume, afin d'introduire tout de suite dans la théorie le calcul des *résistances passives*, dont nous n'avons pas encore donné la définition.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DE LA STATIQUE.

§ XV. — Équilibre des corps pesants.

En exposant la Statique générale, nous avons fait abstraction de la pesanteur, ou plutôt nous avons regardé le poids de chaque élément matériel comme une force directement appliquée à cet élément, et devant, au même titre que toutes les autres forces extérieures, figurer par ses projections et ses moments dans les équations générales de l'équilibre.

Dans les applications, il y a lieu de distinguer de toutes les autres cette force particulière qui joue un grand rôle dans toutes les machines, puisque son action s'exerce nécessairement sur toutes les pièces mobiles que l'on peut avoir à considérer.

Ce paragraphe est consacré à l'étude spéciale de la pesanteur.

Définition de la pesanteur ou gravité.

Les corps abandonnés librement à eux-mêmes dans le voisinage de la surface de la terre ne restent pas en repos, comme le voudrait la loi de l'inertie s'ils n'étaient soumis à aucune action. Ils tombent, c'est-à-dire qu'ils se mettent en mouvement dans une certaine direction. Nous en concluons qu'il existe une force agissant sur eux dans cette direction. Cette force a reçu le nom de *pesanteur* ou *gravité*. Sa direction s'appelle la *verticale*.

Nous n'avons pas à nous occuper pour le moment des causes assez compliquées qui produisent la pesanteur; tout ce que nous pouvons faire, c'est d'en étudier expérimentalement les effets, en commençant par faire une étude grossière du phénomène dans ce qu'il a de plus apparent, afin d'en avoir une première idée, et de reconnaître quels sont les

points qui mériteront plus tard des recherches plus approfondies, quand nous tiendrons à nous rendre compte des nuances les plus délicates du phénomène.

L'étude des lois de la pesanteur a été faite pour la première fois par Galilée. On peut regarder comme un fait d'observation que, dans un même lieu, l'accélération imprimée par la pesanteur à un corps est constante, quel que soit le corps soumis à l'expérience, pourvu qu'on ait bien soin de soustraire ce corps, autant que possible, à l'action de toutes les autres forces qui pourraient masquer ou contrarier l'effet que l'on étudie; nous avons désigné cette accélération par g, de sorte que le poids d'un corps, c'est-à-dire l'action de la pesanteur sur ce corps en particulier, est liée à la masse de ce corps par la formule

$$p = mg.$$

Si donc nous considérons un corps solide de dimensions finies, quoique assez petites relativement à celles du globe terrestre, l'effet de la pesanteur sera d'attacher, pour ainsi dire, à chacun des points matériels qui constituent ce corps, une force proportionnelle à la masse de ce point. Ces forces pourront être regardées comme étant toutes parallèles et de même sens; elles ont donc une résultante unique, c'est-à-dire qu'il existera dans chaque position du corps solide une certaine force qui, convenablement appliquée, s'opposerait à tout mouvement qui tendrait à se produire en vertu de l'action de la pesanteur seule sur ce corps.

Nous avons dit qu'une résultante, force essentiellement fictive, n'avait pas, en général, de point d'application déterminé. On peut à volonté la supposer appliquée en un point quelconque du corps solide, situé sur sa propre direction. Cependant, dans le cas où l'on ne considère que des forces parallèles et de même sens, il y a sur la direction de leur résultante un point remarquable connu sous le nom de *centre des forces parallèles*, qui se distingue des autres points d'application fictifs par des propriétés particulières. C'est ce point qu'on a l'habitude de considérer comme le point d'application de la résultante des forces parallèles; chose qui, d'ailleurs, ne présente pas d'inconvénient, puisqu'on doit toujours sous-en-

tendre qu'une force quelconque, appliquée en un point d'un corps solide en équilibre, peut être transportée où l'on voudra sur sa direction, sans que l'équilibre soit rompu. Voici la définition et les propriétés du point dont nous parlons.

Centre des forces parallèles.

Pour composer un système quelconque de forces parallèles, F, F′, F″, F‴ (*fig.* 30), appliquées aux divers points A, B, C, D,... d'un corps solide, on peut procéder de la manière suivante.

Composons d'abord les forces F et F′; elles ont une résultante R_1, qui leur est parallèle, égale à leur somme, et dont la direction passe par un point O_1 de AB, tel qu'on ait

$$\frac{AO_1}{BO_1} = \frac{F'}{F}.$$

Supposons cette résultante R_1 appliquée en O_1, et composons-la avec la force F″, nous aurons la résultante R_2 des trois forces F, F′, F″. En composant R_2 avec F‴, nous aurons la résultante des quatre forces F, F′, F″, F‴, etc.

Les positions des points O_1, O_2....., qu'on peut considérer comme les points d'application des résultantes partielles R_1, R_2,..., et par suite celle du point d'application O de la résultante définitive R, ne dépendent en aucune manière de la direction des forces; la connaissance des points A, B, C,..., auxquels les forces F, F′, F″,.... sont appliquées, et des rapports de grandeur de ces forces, suffit pour déterminer les points O_1, O_2,..., O. On en conclut que si l'on changeait la direction des forces données, en les laissant toujours parallèles à elles-mêmes et leur conservant leurs grandeurs respectives ainsi que leurs points d'application A, B, C, D,..., le point d'application O de la résultante ne changerait pas. Ce point O, par lequel passe constamment la direction de la résultante d'un système de forces parallèles, de quelque manière qu'on incline les composantes par rapport à leur direction primitive, se nomme le *centre du système des forces parallèles*.

Rien n'est plus facile que de trouver les coordonnées de ce point. Prenons un système quelconque d'axes rectangulaires.

Soient x, y, z les coordonnées du point d'application de l'une des forces F du système dont la direction est arbitraire. Soient de même x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point d'application de la résultante R de ces forces.

On a d'abord

$$R = \sum F.$$

Donnons aux forces une direction parallèle à l'axe des z, et exprimons que le moment de la résultante, par rapport à l'axe des y, est égal à la somme des moments des composantes. Le moment de la résultante est Rx_1; le moment de la force F est Fx; donc on a

$$R x_1 = \sum F x,$$

d'où l'on tire

$$x_1 = \frac{\sum F x}{\sum F}.$$

et par analogie

$$y_1 = \frac{\sum F y}{\sum F},$$

$$z_1 = \frac{\sum F z}{\sum F}.$$

Centre de gravité.

Dans le cas où les forces parallèles appliquées au solide invariable sont les actions de la pesanteur sur les différents points matériels qui le composent, le centre des forces parallèles prend le nom de *centre de gravité*. Nous ne pouvons pas, il est vrai, changer à volonté la direction de la pesanteur comme nous avons supposé qu'on le faisait pour arriver à la notion du centre des forces parallèles; mais nous pouvons faire quelque chose d'équivalent, en changeant la position

du corps, ou en le tournant successivement de différentes manières.

Désignons par p le poids d'une molécule quelconque du solide; par x, y, z les coordonnées de cette molécule; par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité; enfin par P le poids total du solide; nous aurons, pour déterminer x_1, y_1, z_1 les relations

$$x_1 = \frac{\sum px}{P}, \quad y_1 = \frac{\sum py}{P}, \quad z_1 = \frac{\sum pz}{P}.$$

Notre définition du centre de gravité est très-vicieuse, car elle semble subordonner l'existence de ce point à celle d'une résultante des actions de la pesanteur, actions qui ne sont parallèles et proportionnelles aux masses que quand le corps est très-petit. En outre, s'il s'agit d'un corps liquide, mou, déformable en un mot, ou même d'un ensemble de corps indépendants l'un de l'autre, comme le sont, par exemple, la Terre et la Lune, la résultante des actions de la pesanteur n'a plus aucun sens; et il n'y a plus de centre de gravité, si l'on donne à ce mot la signification qui résulte de notre définition.

Il est indispensable, au point de vue des applications à la Dynamique, où le centre de gravité (ou, comme dit Euler, le *centre d'inertie*) joue un si grand rôle, de donner une définition plus nette de ce point. Or, si nous représentons par m la masse de la molécule dont le poids est p, par M la masse totale du corps, nous pourrons, si le corps est petit, c'est-à-dire si le centre de gravité, défini comme nous l'avons fait, existe, remplacer p par mg, et P par Mg; en supprimant alors le facteur g commun aux deux termes de chacune des fractions précédentes, nous arriverons aux formules

$$x_1 = \frac{\sum mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\sum my}{M}, \quad z_1 = \frac{\sum mz}{M} (*).$$

(*) On énonce ordinairement ces équations en disant que *la distance du centre de gravité d'un système quelconque de corps, à un plan, est égale à la somme des moments des masses, par rapport au plan, divisée par la somme de toutes les masses*, en entendant par le *moment d'une masse* le produit de cette masse par la distance de son centre de gravité au plan que l'on considère.

Nous observerons que ces dernières formules ne renferment plus de traces de l'action de la pesanteur, que nous avions considérée pour arriver à la notion du centre de gravité. Donc, le point défini par ces nouvelles formules existera toujours ; c'est lui que nous appellerons centre de gravité d'un système solide invariable quelconque. Ce ne sera le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur, que si le corps est suffisamment petit.

En même temps, cette définition s'étend sans difficulté au cas d'un système variable quelconque ou d'un ensemble de masses situées comme on voudra dans l'espace.

Nous ne donnerons dans cet ouvrage aucun détail sur la recherche des centres de gravité. Cette question est tout à fait du domaine de l'Analyse.

Travail de la pesanteur.

Supposons qu'un système matériel pesant quelconque soit en mouvement; la considération du centre de gravité fournit une expression simple du travail dû à l'action de la pesanteur sur les diverses parties de ce système.

Soient p le poids d'une molécule quelconque, z la distance de cette molécule à un plan horizontal supérieur, au commencement du temps pendant lequel on veut évaluer le travail. Soient de même P le poids total du système, et z_1 la distance du centre de gravité au même plan horizontal.

Le travail de la pesanteur sur la molécule que nous considérons est $p\,dz$, soit, pour tout le corps,

$$\sum p\,dz.$$

Or, on a trouvé

$$\sum pz = \mathrm{P}\,z_1,$$

d'où, en différentiant,

$$\sum p\,dz = \mathrm{P}\,dz_1.$$

Donc, le travail de la pesanteur sur le système est égal au

travail que développerait une force égale au poids total P du système, appliquée à son centre de gravité.

De là nous pouvons déduire un théorème important.

Loi générale de l'équilibre des corps pesants.

Supposons un système matériel, formé de corps pesants liés l'un à l'autre d'une manière quelconque, soumis à la seule action de la pesanteur, et reposant sur des appuis fixes quelconques.

D'après le théorème du travail virtuel, pour qu'un pareil système soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels des forces extérieures, en ne tenant compte ni des liaisons, ni des appuis fixes, soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons du système. Or, dans le cas que nous considérons, le travail des forces extérieures se réduit au travail de la pesanteur; donc, il faut pour l'équilibre que l'on ait

$$P\,\delta z_1 = 0,$$

P désignant le poids total du système, δz_1 le déplacement du centre de gravité suivant la verticale. Donc on doit avoir

$$\delta z_1 = 0,$$

et l'on peut énoncer le remarquable théorème que voici :

THÉORÈME. — *Pour qu'un système pesant quelconque soit en équilibre, il faut et il suffit que pour tout mouvement compatible avec les liaisons, le centre de gravité reste dans un même plan horizontal* (*).

On peut satisfaire de trois manières à cette condition. En général, il résulte des liaisons existant dans le système, que le centre de gravité ne peut se mouvoir que sur une certaine courbe ou une certaine surface. Il y aura équilibre, si le cen-

(*) Ce théorème important, conséquence directe du théorème du travail virtuel, ne doit être considéré comme rigoureusement démontré que dans les cas particuliers où nous avons démontré ce théorème fondamental, c'est-à-dire quand les liaisons se réduisent aux genres tout spéciaux que nous avons considérés. Le cas général est en dehors du plan de ce Cours.

tre de gravité se trouve au point le plus haut, ou au point le plus bas de la courbe ou de la surface qu'il peut parcourir, ou s'il est assujetti à rester toujours dans un même plan horizontal.

Nous aurons à revenir plus tard sur ces trois cas d'équilibre essentiellement différents. Dans le premier cas, on dit que l'équilibre est *instable*, parce que le système, écarté de sa position d'équilibre, tendrait à s'en écarter davantage pour tendre vers une autre position; dans le second cas, l'équilibre est dit *stable*, parce que le système, écarté un peu de sa position d'équilibre, tend à y revenir. Enfin, lorsque le centre de gravité se meut sur un plan horizontal, le système est en équilibre dans toutes ses positions. On dit à cause de cela que l'équilibre est *indifférent*. L'équilibre est encore indifférent quand le centre de gravité reste absolument fixe dans toutes les positions du système.

Ponts-levis à flèches. — On trouve une application de ce qui précède dans la construction des ponts-levis à flèches (*fig.* 31). Le tablier AB du pont est mobile autour d'un axe horizontal A; deux chaînes BC partent des deux côtés du tablier, et vont s'attacher aux extrémités de deux flèches CQ, formant un cadre mobile autour d'un axe horizontal E; un contre-poids Q, supporté par les deux flèches, sert à équilibrer le poids du tablier. On prend la distance EC = AB, et on donne aux deux chaînes BC une longueur égale à AE, de sorte que la figure ABCE est un parallélogramme dans toutes les positions que l'on peut donner au système, en faisant tourner les flèches autour de l'axe E et le tablier autour de l'axe A, sans que les chaînes BC cessent d'être tendues. Il en résulte que dans un pareil mouvement, l'angle dont le tablier tourne autour de l'axe A est toujours égal à l'angle dont les flèches tournent en même temps autour de l'axe E. Soit G le centre de gravité du tablier, G′ celui des flèches et du contre-poids. Le poids Q est choisi de manière que EG′ soit parallèle à AG. Il est aisé de voir que l'on peut s'arranger de manière que le centre de gravité de tout le système se trouve toujours en un point O situé sur la droite AE.

Le pont-levis ainsi constitué est en équilibre dans toutes les positions qu'on peut lui donner.

Ponts-levis à sinusoïdes. — Au lieu d'accrocher les chaînes qui supportent le tablier d'un pont-levis à des flèches munies d'un contre-poids, on peut faire passer des chaînes sur des poulies placées au-dessus du tablier, et suspendre à leurs extrémités des contre-poids destinés à équilibrer le poids du tablier (*fig.* 32). On peut, en outre, obliger ce contre-poids à glisser le long de courbes fixes, afin que la tension de chaque chaîne varie suivant que le tablier du pont est plus ou moins relevé. Si l'on détermine ces courbes fixes de telle manière que le centre de gravité du tablier, des chaînes et des contre-poids reste toujours sur un même plan horizontal, le pont-levis sera en équilibre indifférent dans toutes les positions qu'on voudra lui faire prendre.

Nous avons négligé le frottement; il est d'ailleurs évident que si un pont-levis est disposé de manière à être en équilibre indifférent dans toutes les positions qu'on peut lui donner, en supposant qu'il ne se développe de frottement dans aucune de ses parties, il restera à plus forte raison en équilibre dans chacune de ces positions, lorsque les frottements exercent leur action.

§ XVI. — Des cordes et du polygone funiculaire.

Des cordes. — Au point de vue de la Mécanique rationnelle, les cordes, fils ou cordons doivent être considérés comme indéfiniment résistants et flexibles, absolument inextensibles, enfin comme dénués de pesanteur. (Je ne dis pas dénués de masse, car la masse n'a rien à faire dans les questions de Statique proprement dite.)

Tension d'un cordon. — Considérons (*fig.* 35) une portion rectiligne de cordon, de longueur finie ou infiniment petite, en équilibre sous l'action de deux forces qui tirent ses deux extrémités. La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que les deux forces soient égales, contraires, directement opposées, et qu'elles tendent à allonger le cordon. De là les remarques suivantes :

1° Les forces extérieures satisfont d'elles-mêmes aux conditions générales de l'équilibre, absolument comme si elles étaient appliquées à un corps solide.

2° La flexibilité du système impose une deuxième condition, c'est que le cordon soit tendu en ligne droite dans la direction commune des deux forces. On dit alors que les forces se font équilibre par l'intermédiaire de la tension du cordon.

3° Enfin, pratiquement, il y a une dernière condition tout aussi indispensable que les précédentes, c'est que le cordon soit assez solide pour résister à l'effort qui tend à le rompre.

Imaginons le cordon coupé quelque part en C; la portion AC est en équilibre sous l'influence de la force P et de l'action de l'autre partie BC du cordon. Il faut donc que cette partie BC tienne lieu d'une force égale et directement opposée à P. Cette force est ce que l'on appelle la *tension* du cordon. Ici cette tension est constante dans toute l'étendue AB.

En général, on appelle *tension* d'une corde en un point C, la force qu'il faudrait appliquer en ce point pour maintenir l'une des portions de la corde en équilibre, l'autre portion étant censée supprimée. En vertu du principe de Newton, la réaction de AC sur BC est égale et contraire à l'action de BC sur AC. On confond donc, sous le nom de tension du cordon AB au point C, deux forces égales et contraires, qui se détruisent immédiatement au point C, dans l'équilibre de l'ensemble, mais qu'il devient nécessaire de considérer isolément, quand on étudie l'équilibre des deux portions séparées.

On peut mesurer la tension d'une corde en la coupant effectivement en un point, et interposant un dynamomètre entre les deux parties.

Équilibre d'un nœud réunissant plusieurs cordons.

Considérons maintenant un nœud réunissant trois cordons (*fig.* 36).

Il faut, pour l'équilibre de chaque cordon AD, qu'il y ait une force F dirigée dans le sens de la direction du cordon. Cette force fait connaître la tension de ce cordon, et il faut pour l'équilibre, conformément à ce que nous venons de voir, que les actions des deux autres cordons au point A aient une résultante égale et opposée à la force F.

Les forces F, F_1, F_2, c'est-à-dire les tensions t, t_1, t_2, trans-

portées au point A, doivent donc se faire équilibre. Ainsi, la tension t_2 doit être dirigée dans le plan F, F_1 suivant le prolongement de la diagonale du parallélogramme construit sur les tensions t, t_1, et représentée par la longueur de cette diagonale. Le triangle ABE nous donne

$$t = t_2 \frac{\sin BAE}{\sin BEA},$$

$$t_1 = t_2 \frac{\sin ABE}{\sin BEA};$$

les tensions t et t_1 sont d'autant plus grandes que sin BEA est plus petit. Elles deviennent toutes deux infinies pour BEA = 0, ou DAE = 180 degrés.

Quelque petite que soit une force t_2 s'exerçant obliquement sur un cordon CD, il est donc impossible de tendre ce cordon en ligne droite.

Supposons maintenant (*fig.* 37) que nous ayons un cordon unique, et au point A un anneau dans lequel ce cordon puisse librement glisser; le cordon est tiré des deux côtés par des forces F_1, F_2; l'anneau lui-même est soumis à l'action d'une force F. Cherchons les conditions d'équilibre. Fixons deux points quelconques C, D du cordon, l'un à gauche de l'anneau, l'autre à droite. Dans son mouvement virtuel, le point A, d'après les liaisons introduites, ne peut que décrire une ellipse dont les points C et D seront les foyers. Il faut donc, pour l'équilibre, que la force qui agit sur l'anneau soit normale à cette ellipse, c'est-à-dire bissectrice de l'angle CAD.

En appliquant les formules posées précédemment à ce cas particulier, on trouve

$$F_1 = F_2 = \frac{F \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{F}{2 \cos \frac{1}{2} \alpha},$$

α étant l'angle CAD, et F la force exercée sur l'anneau.

Nous concluons de là que si l'anneau est remplacé par un point fixe, la tension du cordon est la même de part et d'autre du point ou de l'anneau fixe, et la réaction de ce point fixe partage en deux parties égales l'angle des deux cordons.

Polygone funiculaire. — Considérons maintenant le cas général de l'équilibre d'un cordon soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces (*fig.* 38).

D'après ce que nous avons vu, le cordon prendra la forme d'un polygone dont les sommets seront les points d'application de ces forces. C'est ce qu'on appelle le *polygone funiculaire.*

Soient A_1, A_2, A_3,... les sommets du polygone funiculaire; F_1, F_2, F_3,... les forces appliquées à ces différents points.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut évidemment qu'il y ait une certaine force F_0 appliquée dans la direction du premier côté du polygone (ou un point fixe remplaçant cette force); la tension T_0 de ce premier côté est égale à la force F. Pour qu'il y ait équilibre au point A_1, il faut que la tension T_1 du second côté soit égale et directement opposée à la diagonale du parallélogramme construit sur la force F_1 et sur la tension T_0 appliquée en A_1. De même, pour que le point A_2 soit en équilibre, il faut que la tension T_2 du côté A_2A_3 soit égale et opposée à la diagonale du parallélogramme construit sur la force F_2, et sur la tension T_1 appliquée en A_2. Enfin, pour que le dernier sommet soit en équilibre, il faut qu'il y ait, appliquée au prolongement du cordon, une force égale et opposée à la diagonale du parallélogramme construit sur la force F_n et la tension T_{n-1} appliquée au point A_n.

Polygone de Varignon (*fig.* 39). — Toutes ces conditions d'équilibre du polygone funiculaire peuvent s'exprimer simplement par une construction géométrique élégante due à Varignon.

Par un point O quelconque de l'espace, menons une ligne OB_0 égale et parallèle à F_0 ou à T_0, par le point B_0 une ligne B_0B_1 égale et parallèle à F_1. La ligne B_1O représente la tension T_1. Si par le point B_1 je mène B_1B_2 égale et parallèle à F_2, en joignant OB_2 j'aurai la tension T_2. En continuant ainsi, j'arriverai à une ligne $B_{n-2}B_{n-1}$ égale et parallèle à F_{n-1}; OB_{n-1} sera égale à T_{n-1} ou à F_n. En opérant ainsi, nous n'avons fait que construire le polygone des forces F_0, F_1, F_n. Il faut donc, pour l'équilibre, que ce polygone soit fermé. On vérifie ainsi la loi en vertu de laquelle les équations de l'équilibre doivent exister entre les forces extérieures seules, quelle que soit la

constitution du système soumis à leur action. Telle est la *première condition* de l'équilibre du polygone funiculaire. Si cette condition n'est pas remplie, il sera impossible de trouver une forme convenable.

Deuxième condition. — En ayant égard aux propriétés des cordons tendus, il faut, pour l'équilibre, que les directions des côtés du polygone soient parallèles respectivement aux droites OB_0, OB_1, OB_2, ..., partant du point O dans le polygone de Varignon.

Troisième condition. — Enfin, il faut que chaque côté puisse résister à la tension qu'il supporte, tension qui est encore donnée par le polygone de Varignon.

Ces trois genres de conditions, également nécessaires pour l'équilibre, se retrouveront dans toutes les questions de Statique appliquée.

Si nous remplaçons les forces F_1, F_2, ... par des anneaux, la tension devra être la même dans toute l'étendue du cordon, et les forces exercées par les anneaux devront bissecter l'angle des deux côtés du polygone, adjacents au sommet où chacune d'elles est appliquée. Ces forces sont données par les formules

$$R = 2T\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

T étant la tension constante, α l'angle de deux côtés adjacents du polygone.

Considérons (*fig.* 40) trois sommets consécutifs A, B, C tels, que l'on ait AB = BC. Par ces trois points faisons passer une circonférence, et menons le diamètre BD. Nous aurons

$$BD = \frac{AB}{\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Donc, si nous avons un polygone funiculaire appuyé sur des points fixes et tels que les cordons soient égaux, la réaction en chaque point pourra être représentée par l'inverse du diamètre BD du cercle passant par ce point et les deux sommets adjacents.

Nous concluons de là que si le polygone est tendu sur une courbe, la réaction peut être représentée en chaque point par l'inverse du rayon du cercle osculateur de la courbe, c'est-à-

dire par la courbure. Si le cordon, au lieu d'être tendu sur une courbe, est tendu sur une surface, c'est-à-dire tiré par ses extrémités, la partie intermédiaire s'appuyant sur une surface fixe, nous aurons encore la condition que la tension du cordon soit la même dans toute son étendue, et par conséquent que les deux forces extérieures appliquées à ses extrémités soient égales et contraires. De plus, considérons deux éléments consécutifs du cordon; ils devront être en équilibre sous l'influence de leur tension et de la réaction de la surface. Or, pour que trois forces soient en équilibre, il faut en premier lieu qu'elles soient dans un même plan. Donc, le plan des deux côtés consécutifs du cordon, ou le plan osculateur de la courbe, doit être normal à la surface. Donc, enfin, le cordon doit s'appuyer sur la surface par une ligne dont le plan osculateur soit constamment normal à la surface. On sait que cette propriété définit la ligne la plus courte qu'il soit possible de tracer sur la surface entre deux quelconques de ses points; c'est la ligne *géodésique*, et la réaction de la surface est en raison inverse du rayon de courbure de cette ligne en chaque point.

La théorie qui précède s'applique à la poulie fixe, à la poulie mobile, aux diverses combinaisons de poulies mobiles dites *moufles* ou *palans*, etc.

Cas d'un polygone chargé de poids.

Étudions spécialement le cas où les forces appliquées aux divers sommets sont parallèles et verticales (à l'exception des deux extrêmes qui sont toujours dirigées suivant les prolongements du premier et du dernier côté du polygone), de façon qu'on puisse considérer ces forces comme autant de poids suspendus au cordon. Supposons qu'il y ait un côté inférieur horizontal, et prenons le milieu de ce côté pour origine d'un axe horizontal et d'un axe vertical (*fig.* 41).

Soient : Q, la tension du côté horizontal, t_1, t_2, ..., t_n les tensions des côtés successifs du polygone, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les poids suspendus aux divers sommets. Il faut, pour l'équilibre du point A_1, que la résultante des tensions Q et t_1 soit égale et opposée à la force verticale p_1; de même, la résultante de t_1 et t_2

doit être égale et opposée à t_2, et ainsi de suite. Enfin, si A_n désigne le dernier sommet, il faut qu'on exerce en ce point, d'une manière ou d'une autre, une force égale à t_{n-1}, et dirigée suivant le prolongement du dernier côté.

Construction du polygone de Varignon. — Soit OB_1 (*fig.* 42) une ligne horizontale égale à Q. Menons par le point B_1 une verticale sur laquelle nous porterons des longueurs B_1B_2, B_2B_3,... respectivement égales aux charges p_1, p_2,.... Les points B_1, B_2, B_3,.... représentent les sommets du polygone de Varignon, et les droites OB_1, OB_2, OB_3,... font connaître à la fois les directions des côtés du polygone funiculaire, et les grandeurs des tensions de ces côtés. On voit immédiatement sur la figure que les composantes horizontales de toutes les tensions sont égales à Q, et que, si P_i représente la composante verticale de la tension du côté qui commence au sommet A_i, on a

$$P_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_i.$$

On a donc les propriétés suivantes :

1° *La composante horizontale de la tension d'un côté quelconque est constante, et égale à la tension du côté horizontal.*

2° *La composante verticale de la même tension est la somme des poids suspendus depuis le point le plus bas du demi-polygone, jusqu'au sommet où commence le côté considéré.*

3° *La tension croît à mesure que l'on s'éloigne du côté horizontal, proportionnellement à la sécante de l'inclinaison du côté à l'horizon.*

Des ponts suspendus.

La théorie des ponts suspendus est une conséquence immédiate des considérations qui précèdent. Le tablier d'un pont suspendu est en effet supporté par un certain nombre de tiges ou de chaînes verticales à un câble en fil de fer dont les extrémités sont fixes.

Ce qui caractérise ces ponts, c'est que la figure du polygone de suspension n'a aucune relation avec la forme du tablier, lequel peut être rigide ou non rigide, et qui présente généralement un profil à peu près horizontal ou légèrement convexe vers le haut.

Dans le calcul des ponts suspendus, on néglige généralement, au moins dans une première approximation, le poids du câble ainsi que celui des tiges de suspension, pour ne s'occuper que du poids supporté par ces tiges. Ce dernier poids se compose du poids du tablier proprement dit, plus d'une surcharge représentant le poids qui peut charger le pont, dans les circonstances les plus défavorables. D'après les règlements français, cette surcharge doit être calculée à raison de 200 kilogrammes par mètre carré de surface.

Pour faire l'épure d'un pont suspendu, on commence par faire le projet du tablier, sans se préoccuper du polygone qui doit le supporter. Le tablier proprement dit repose sur des longrines, qui sont elles-mêmes soutenues par des poutrelles transversales a_1, a_2, ... (*fig.* 43, 45 et 46), auxquelles sont directement appliquées les tiges de suspension. On suppose, dans le calcul des conditions d'équilibre, que le tablier soit coupé à chaque demi-intervalle entre deux poutrelles; l'équilibre subsistera *à fortiori* quand on rétablira la solidarité entre les parties directement supportées par chaque tige. On calcule l'écartement des tiges, connaissant le poids du tablier et de la surcharge, ainsi que le poids qu'on peut faire sans inconvénient supporter à chaque tige.

Rien de plus facile maintenant que de déterminer la direction d'un côté quelconque. Si l'on veut, par exemple, celle du côté $A_3 A_4$, on prendra sur une horizontale quelconque, par exemple sur le prolongement du côté horizontal du polygone, une longueur $DE = Q$, et sur la verticale du point A_3 une longueur DF représentant la somme des poids p_1, p_2, p_3 des parties du tablier suspendues aux points A_1, A_2, A_3; en joignant les points E et F, nous avons la direction du côté $A_3 A_4$. Nous obtiendrons de même la direction de chaque côté, et par suite, connaissant le point A_4, nous pourrons construire le polygone.

Cette épure donne à la fois les tensions des côtés, leurs longueurs respectives, l'inclinaison de chacun d'eux, et l'ordonnée du sommet correspondant du polygone, et par suite la longueur du polygone et celle de chacune des tiges de suspension.

Estimons par le calcul les éléments qui sont utiles.

1° *Calcul des ordonnées.* — Les données sont les projections

horizontales des côtés. Soient h_i la projection horizontale d'un côté, v_i sa projection verticale, et P_i la composante verticale de la tension de ce côté; on a évidemment, d'après la construction précédente,

$$v_i = h_i \frac{P_i}{Q}.$$

Or, l'ordonnée d'un sommet quelconque A_i est égale à la somme des projections des côtés qui précèdent ce sommet; donc, si V_i désigne cette ordonnée, on aura

$$V_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_{i-1},$$

ou

$$V_i = \frac{1}{Q}(P_1 h_1 + P_2 h_2 + \ldots + P_{i-1} h_{i-1});$$

l'abscisse du même sommet est

$$H_i = h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{i-1}.$$

2° *Calcul des longueurs.* — La longueur du côté qui commence à ce sommet est

$$l_i = \sqrt{h_i^2 + v_i^2},$$

et l'on a pour la longueur totale du polygone

$$L_i = l_0 + l_1 + \ldots + l_{i-1}.$$

3° *Calcul des tensions.* — La tension t_i du côté situé entre le $i^{ième}$ sommet et le suivant est

$$t_i = \sqrt{Q^2 + P_i^2}.$$

4° *Calcul des inclinaisons.* — Enfin l'inclinaison α_i du même côté sur l'horizontale est donnée par la formule

$$\operatorname{tang} \alpha_i = \frac{P_i}{Q} (*).$$

(*) *Détermination de la composante horizontale des tensions.* — Toutes les quantités précédentes sont données en fonction de l'élément Q, qui n'est pas une des données immédiates du problème.

Ordinairement, dans l'application, les données desquelles on part pour établir les polygones sont les longueurs de la corde et de la flèche, c'est-à-dire le double de l'abscisse et l'ordonnée du dernier sommet. La tension Q est liée à

Dans la plupart des cas, les formules précédentes se simplifient parce que les projections horizontales des côtés sont constantes, et que les poids supportés par chaque tige de suspension sont égaux.

On a donc

$$P_i = ip,$$

et on conclut de là

$$V_i = \frac{ph}{Q}(1+2+\ldots+i-1) = \frac{ph}{2Q}(i^2-i).$$

Soient π le poids du mètre courant de tablier, on a

$$p = \pi h,$$

d'où

$$V_i = \frac{\pi h^2}{2Q}(i^2-i),$$

de sorte que si n désigne le numéro du dernier sommet, on a

$$V_n = \frac{\pi h^2}{2Q}(n^2-n).$$

Cherchons l'équation d'une courbe passant par tous les sommets du polygone. Pour cela, prenons

$$V_i = y, \quad ih = x,$$

---

ces quantités, quand on adopte les dispositions habituelles, par une équation très-simple.

Dans tous les cas, on peut remarquer que, les espacements des tiges et les poids répartis étant connus, l'équation qui donne la valeur de V_n est de la forme

$$V_n = \frac{C}{Q}.$$

Si donc, ayant attribué arbitrairement à notre inconnue Q une certaine valeur Q′, nous avons appliqué les constructions précédentes, et trouvé pour la dernière ordonnée une valeur V'_n au lieu de V_n, nous devons avoir

$$V'_n = \frac{C}{Q'},$$

d'où

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{V'_n}{V_n},$$

équation qui détermine Q en fonction de Q′.

ce qui revient à prendre pour origine l'extrémité gauche du côté horizontal; nous aurons alors

$$y = \frac{\pi}{2Q}(x^2 - hx).$$

Cette courbe représente une parabole. Si l'on veut reprendre le point A_0 pour origine, il suffit de changer dans l'équation précédente x en $x' + \frac{h}{2}$, et alors on obtient l'équation

$$y = \frac{\pi}{2Q}\left(x'^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

En faisant dans cette équation $y = F$, $x' = \frac{1}{2}O$, F et O étant la flèche et l'ouverture du pont, on trouve la tension Q.

On trouverait immédiatement l'équation de la parabole du câble, en supposant le polygone formé de côtés infiniment petits, chargés chacun d'un poids proportionnel à sa projection horizontale.

Considérons (*fig.* 44) l'arc de la courbe compris entre le point O où la tension est horizontale et égale à Q, et celui où cette tension est égale à T. Les forces extérieures qui doivent se faire équilibre sont la tension T, la tension Q et le poids πx dont la direction passe par le milieu de OP.

Prenons les moments autour du point M, nous devrons avoir pour l'équilibre

$$Qy = \frac{\pi x^2}{2};$$

c'est l'équation de la parabole lieu des points M (*).

Il faut remarquer que les poids du câble et des tiges, que nous avons négligés, augmentent avec les dimensions du pont,

(*) La théorie que nous venons de faire s'applique aux ponts suspendus, à la condition de négliger le poids des tiges de suspension et le poids des câbles. Les formules trouvées précédemment permettent de trouver la longueur de chacune des tiges. Il faut remarquer que ces tiges ne sont pas égales aux ordonnées de la parabole; elles doivent descendre jusqu'à la partie inférieure des poutrelles qu'elles débordent de quelques centimètres pour recevoir les écrous sur lesquels s'appuie la charpente du pont (*fig.* 45). Ordinairement aussi, le

et de plus influent sur la répartition des pressions, qui n'est plus du tout uniforme, comme nous l'avions supposé. La courbe qui porte les tiges n'est plus une parabole, elle se creuse du côté des culées. Il résulte de là que si l'on calculait le câble et les tiges pour la forme parabolique, et que l'on construisit le pont, l'équilibre ne serait pas possible, les articulations joueraient, et il en résulterait pour les diverses parties de la construction des tensions ou pressions complétement différentes de celles sur lesquelles on avait compté. La théorie précédente peut donc s'appliquer aux ponts ordinaires; mais pour les ouvrages plus importants, elle doit être notablement modifiée, et ne peut entrer dans un Cours élémentaire.

De la chaîne.

On peut chercher quelle courbe prendra le câble sous l'influence seule de son poids. La forme qu'il affecte est une courbe étudiée en analyse sous le nom de *chaînette*; nous pouvons trouver très-facilement ici les équations différentielles de cette courbe.

Soit en effet T la tension du cordon en un certain point; les composantes de la tension sont

$$T\frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad T\frac{dy}{ds}.$$

---

plancher affecte une forme parabolique (*fig.* 46), de sorte que les tiges sont composées de trois parties : 1° de l'ordonnée de la parabole de la chaîne,

$$v_i = \frac{\pi h^2}{2Q}(i^2 - i);$$

2° d'une longueur constante, D, qui sépare le point le plus bas de cette parabole du point le plus haut de la parabole inverse;

3° Enfin de l'ordonnée de cette parabole inverse,

$$w_i = a(i^2 - i).$$

On a ainsi, pour la longueur totale des tiges,

$$z_i = D + \left(\frac{\pi h^2}{2Q} + a\right)(i^2 - i).$$

L'abscisse est

$$H_i = \frac{h}{2} + (i-1)h = \left(i - \frac{1}{2}\right)h.$$

D'après ce que nous avons vu, la composante horizontale de $T\frac{dx}{ds}$ doit être constante; donc on a

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

L'accroissement de la composante verticale doit être égal au poids de la chaînette compris entre deux points infiniment voisins; donc on a

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = p\,ds.$$

En éliminant T entre ces deux équations, on aura l'équation de la chaînette. La solution sera achevée dans le Cours d'Analyse.

§ XVII. — Équilibre des systèmes de corps rigides articulés sans frottement.

Imaginons que plusieurs corps solides se touchent par des points qui ne peuvent se séparer; aucun frottement, aucun obstacle ne s'opposant d'ailleurs aux mouvements de rotation compatibles avec cette condition.

On peut se figurer chaque articulation comme produite par l'assemblage *à genou*. Ce mode de liaison se présentera très-souvent dans la pratique; mais il est bien clair que l'équilibre établi dans le cas d'une liberté de mouvement complète subsistera *à fortiori* quand on remplacera le genou par une *charnière*, ou même par un assemblage analogue à ceux des pièces de charpente, assemblage qu'on est obligé de briser pour changer la forme du système. L'équilibre paraîtra encore mieux assuré quand on aura égard aux *frottements*, dont l'effet est, comme nous le verrons, de s'opposer à l'action de petites forces accidentelles tendant à mettre les corps en mouvement dans un sens ou dans l'autre.

D'un autre côté, il convient que la stabilité des constructions en bois ou en fer soit indépendante de la solidité de assemblages et de l'existence des frottements, toutes choses qui viendront ainsi apporter utilement un surcroît de sécu-

rité; il y a donc lieu de considérer exclusivement les articulations comme permettant tous les mouvements qui n'auraient pas pour effet de séparer l'un de l'autre les points des divers corps solides réunis par ces articulations.

Nous avons donc à étudier l'équilibre d'un certain nombre de corps qui, pris isolément, sont rigides (*fig.* 47). Chacun d'eux est réuni par deux articulations à d'autres corps rigides eux-mêmes, et pouvant être indifféremment fixes ou assujettis à des conditions analogues.

Prenons en particulier l'un des corps du système. Il est soumis, indépendamment des réactions que les corps en contact exercent sur lui aux points d'articulation, à un certain nombre de forces extérieures au système, que je représenterai d'une manière générale par la lettre F (*).

Or, il est évident que je puis, sans altérer l'équilibre, regarder dans tous les cas les articulations comme absolument fixes, et si je désigne ces deux points par les lettres A et B, j'aurai pour la condition unique à laquelle les forces F sont assujetties pour l'équilibre

$$\sum \partial \pi_{AB} F = 0.$$

Cette condition étant remplie pour le côté AB veut dire qu'il est possible de remplacer les forces F, et cela d'une infinité de manières, par deux équivalentes R_1, R_2, appliquées respectivement aux points A et B. Je dis *d'une infinité de manières*, parce que nous avons vu, dans le calcul des réactions exercées par deux appuis fixes, qu'il reste une certaine indétermination dans les valeurs des composantes de ces actions.

Considérons donc deux forces équivalentes quelconques R_1, R_2; nous aurons parfaitement le droit de les substituer aux forces F dans l'équilibre du corps rigide AB. Mais il faut bien se garder de considérer ces forces comme les réactions effectives des corps adjacents aux points AB. Nous savons seulement deux choses :

(*) Les réactions des articulations peuvent être, suivant les cas, intérieures ou extérieures à l'ensemble du système; elles sont toujours extérieures à chaque corps isolé; je me contente de renvoyer aux définitions de la page 28.

1° Que ces réactions inconnues S_1, S_2 se trouvent comprises parmi les systèmes équivalents en nombre infini R_1, R_2, qui sont tous possibles et qui sont les seuls possibles;

2° Que si les points A et B étaient absolument fixes, le corps AB étant toujours supposé rigide, on pourrait prendre indifféremment pour S_1, S_2 deux forces équivalentes conjuguées quelconques R_1, R_2.

Mais, dans le cas actuel, les points A et B ne sont pas fixes; ce qui veut dire que les conditions trouvées, en supposant leur fixité, sont toujours nécessaires, mais qu'elles ne sont plus suffisantes.

Il faut tenir compte des conditions nouvelles que nous trouverons en considérant l'ensemble du système en équilibre; nous ferons ainsi disparaître l'indétermination, et nous déterminerons les véritables valeurs des réactions S_1, S_2.

Quoi qu'il en soit, nous avons commencé par étudier le corps AB pris isolément, ce qui nous a donné une condition d'équilibre

$$\sum \partial \mathfrak{M}_{AB} F = 0,$$

et ce qui nous a permis de remplacer les forces F par leurs équivalentes R_1, R_2.

Nous ferons la même chose pour chaque corps séparément, et alors en composant les forces qui sont appliquées à chacune des articulations, et les remplaçant en chacun de ces points par une force unique, nous aurons une sorte de polygone funiculaire dont les côtés sont rigides, et dont les sommets seuls sont soumis à l'action des forces.

L'équilibre du système articulé sera ainsi ramené à l'équilibre du polygone funiculaire, avec cette restriction en moins que les tensions des côtés d'un système articulé pourront être positives ou négatives, tandis que dans le cas du polygone funiculaire elles devraient nécessairement être positives.

En écrivant les conditions d'équilibre du polygone funiculaire, nous aurons :

1° Les nouvelles conditions d'équilibre auxquelles doivent satisfaire les forces R_1, R_2, . . . , et par conséquent les forces données F, F_1, F_2, . . . ;

2° Les tensions ou pressions qui s'exercent sur chacun des côtés du polygone, tractions ou pressions que l'équilibre de chaque côté isolé laissait précisément indéterminées, puisque cet équilibre donnait seulement la somme algébrique $X + X'$ des réactions longitudinales aux points A et B, et que nous pouvions à volonté, en transportant ces réactions d'un côté à l'autre de la barre, remplacer une tension par une pression.

Cette méthode ne donne pas directement l'action de chacun des corps l'un sur l'autre. Or, ces actions sont très-importantes à connaître, beaucoup plus, souvent, que les tractions ou pressions qui s'exercent sur les côtés du polygone. En effet, la statique des solides naturels nous offre deux genres de questions, celles qui ont rapport à la forme d'équilibre proprement dite, et celles dans lesquelles on demande l'état d'équilibre intérieur du solide, c'est-à-dire les forces qui s'exercent entre ses diverses parties. Or, si l'on peut, pour la première étude, remplacer des forces extérieures données par leurs équivalentes, cette substitution n'est plus possible pour la seconde, et il faut appliquer la théorie de la résistance des matériaux, théorie qui n'entre pas dans le programme de l'École Polytechnique. On considérera chaque côté rigide du polygone articulé comme soumis à l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées, et des réactions des corps voisins, qu'on aura calculées préalablement. Les tensions obtenues par la première méthode donneraient une idée absolument fausse des efforts supportés par les éléments des solides, parce qu'on a remplacé des forces par leurs équivalentes, ce qui n'est pas permis.

Mais on peut traiter directement l'équilibre des systèmes articulés, en introduisant les réactions inconnues des différents côtés l'un sur l'autre, ainsi que celles des appuis, et appliquant ensuite les équations générales de l'équilibre à chaque côté séparément et à l'ensemble du système. Il ne faudra pas oublier que l'action du côté I sur le côté II est toujours égale et directement opposée à l'action du côté II sur le côté I. On obtiendra ainsi un certain nombre d'équations qui détermineront les réactions inconnues, et qui, s'il y a lieu, feront connaître, par l'élimination de toutes les quantités dont on

dispose, les conditions auxquelles les forces données devront satisfaire pour l'équilibre.

On s'est borné dans le Cours à ces quelques indications sur ces questions importantes dans la théorie de la charpente. Bien qu'elles soient extrêmement simples, elles exigent cependant une attention très-soutenue si l'on veut bien se rendre compte de toutes les circonstances qui se présentent dans l'emploi des diverses méthodes qui conduisent à la solution (*).

§ XVIII. — Introduction a la théorie de la résistance des matériaux.

L'objet de cette théorie est de donner autant que possible aux constructeurs des règles précises et sûres leur permettant de fixer les proportions et les dimensions des diverses parties qui constituent un édifice, une machine. Ce qui distingue ces problèmes de tous les autres, c'est que, lorsque l'on est en présence d'une construction à élever, et que la question d'en déterminer les proportions se trouve posée, il faut, coûte que coûte, en avoir une solution bonne ou mauvaise. Or, on peut y arriver de deux manières différentes.

La méthode des praticiens consiste à suivre les leçons des maîtres expérimentés, et à étudier les modèles laissés par les anciens constructeurs. Chacun selon sa spécialité connaît les dimensions des constructions importantes du même genre qui sont célèbres par leurs heureuses dispositions et leur longue durée. Accidentellement on a vu périr des édifices, et, en se rendant bien compte des causes de leur destruction, on apprend à se mettre à l'abri de pareilles catastrophes, et l'on arrive assez vite à poser deux limites plus ou moins rapprochées, entre lesquelles on pourra se tenir sans craindre de compromettre la solidité de son œuvre d'une part, et d'autre part sans gaspiller inutilement l'argent, la main-d'œuvre, les matériaux. Par exemple, on veut faire un mur d'escarpe, destiné d'une manière régulière à supporter une certaine charge

(*) On trouvera à la fin de ce Chapitre une Note sur la balance de Roberval et la balance de Quintenz, dont la théorie devrait se placer ici.

de terre, et, à un moment donné, à résister autant que possible au choc des boulets; on a des modèles laissés par Vauban dans les circonstances les plus variées; on les connaît, on les étudie, on cherche quel est celui d'entre eux duquel on se rapproche le plus sous le rapport des terrains, des matériaux de construction, du climat, etc.; c'est celui-là qui servira de modèle, avec les modifications commandées par les circonstances, qui ne sauraient, dans deux cas différents, se retrouver tout à fait identiques. Il faut, pour appliquer ces méthodes, un certain esprit de rapprochement, de combinaison, de calcul, joint à de longues études préparatoires aussi solides que variées; c'est tout cela qu'on appelle de la *pratique*.

Il est clair que ces procédés, qu'on aurait grand tort de flétrir inconsidérément du nom de *routine*, suffiront dans un grand nombre de cas. Si l'on veut, par exemple, construire une maison à Paris, on pourra sans grandes difficultés arriver à faire une maison qui durera plus ou moins; peut-être n'aura-t-on pas apporté dans certains détails toute l'économie possible, toute la perfection désirable, mais ce sont là des considérations un peu secondaires; le but que l'on se proposait est rempli, on a fait une construction stable.

Malheureusement, ces ressources font trop souvent défaut. Quand on se trouve en présence de constructions qui répondent à des besoins inconnus d'une autre époque, ou encore de matériaux nouveaux, comme le fer, la fonte, le zinc, et nombre d'autres éléments qui s'introduisent maintenant dans les constructions, la pratique n'est plus guère d'aucune utilité, et il faut chercher autre chose. On est obligé d'aborder directement la question au moyen de toutes les ressources que peuvent fournir l'expérience et la théorie. Voici quelle est à peu près la marche à suivre. On fait d'abord une étude physique et expérimentale, non pas précisément de la question en elle-même, qui est rarement abordable, mais des éléments simples de cette question. Veut-on, par exemple, faire un pont en fer, on étudiera les propriétés des matériaux qu'on doit employer, au point de vue spécial des conditions où ces matériaux vont se trouver placés; la forme la plus convenable à donner à la construction pour que chaque partie soit dans

les meilleures conditions de résistance et de durée; les précautions à prendre pour se tenir en garde contre certains accidents, ou du moins pour en atténuer les effets, etc. Puis, on posera une hypothèse simple, représentant avec une exactitude suffisante les données de l'observation; et l'on appliquera le calcul en le fondant sur cette hypothèse qu'on aura soin de mettre nettement en évidence sans déguiser son côté faible et plus ou moins douteux. Enfin, il faudra terminer par la vérification expérimentale des résultats du calcul, et ces résultats ne devront être regardés comme vrais que dans les limites pour lesquelles la pratique les aura vérifiés.

Équilibre des solides naturels.

En établissant les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre des corps solides supposés invariables, nous avons dit que les corps communément appelés *solides*, et que nous distinguons des précédents par l'épithète de naturels, doivent être considérés comme susceptibles de céder dans une certaine mesure à l'action des forces auxquelles ils sont soumis; et que même, dans le cas où la déformation produite est invisible à l'œil, elle se révèle à nous par des phénomènes dont la théorie va nous occuper.

Quoi qu'il en soit, les équations de l'équilibre d'un solide invariable s'appliquent aux solides naturels, et si les efforts qui sont en jeu ne sont pas très-considérables, eu égard à la résistance du solide qui les supporte, on pourra indifféremment, pour poser les équations générales auxquelles doivent satisfaire les forces extérieures, prendre le solide qu'on étudie avec la forme qu'il possédait avant qu'il fût soumis à l'action de ces forces, ou bien lui attribuer la forme qu'il a prise sous leur action.

Dans la plupart des cas, on opère de la première manière; c'est-à-dire que, dans la recherche des relations auxquelles doivent satisfaire les forces extérieures appliquées au solide pour qu'il y ait équilibre, on regarde ce solide comme ayant, sous l'action des forces, exactement la même forme qu'il avait avant d'être soumis à cette action. Seulement, après avoir ainsi déterminé toutes les conditions d'équilibre où n'entrent que

les forces extérieures en négligeant la déformation du solide, il faudra se préoccuper des nouvelles conditions qui résultent de la constitution physique du solide, c'est-à-dire calculer les tensions et les pressions qui se développent dans ses diverses parties, afin de voir, comme dans le polygone funiculaire, si ces tensions ou ces pressions sont ce qu'elles doivent être pour l'équilibre. Enfin, il faudra s'assurer que ces tensions ou ces pressions ne sont pas assez fortes pour briser le solide, ou pour lui faire subir une modification essentielle dans son état et ses propriétés.

Le calcul de ces réactions ou forces intérieures est lié intimement à l'étude de la déformation du solide sous des efforts donnés. Ces deux parties constituent la théorie mathématique de la *résistance des matériaux*, théorie qu'il ne nous est pas même permis d'ébaucher dans ce Cours. Nous devons nous borner à donner un exemple d'un cas très-simple d'équilibre, afin d'indiquer l'esprit de la méthode et de signaler les écueils qui se présentent de toutes parts.

Application. — *Équilibre d'un prisme élastique tiré.* — Nous allons considérer le cas le plus simple où la résistance des matériaux soit mise en jeu : c'est celui d'un solide homogène de forme prismatique (tel qu'une pièce de bois de charpente ou une barre de fer), fixé à l'une de ses extrémités d'une manière quelconque, et soumis à son autre extrémité à l'action d'une force tendant à l'allonger.

L'expérience prouve que tous les corps de la nature peuvent céder dans une certaine mesure à l'action d'une pareille force. Vient-on ensuite à supprimer la force, le corps, en vertu de son élasticité, tend plus ou moins à revenir à sa forme primitive, et l'on peut admettre avec une exactitude suffisante que, tant que l'on n'a pas dépassé une certaine limite, dite *limite d'élasticité*, variable avec la nature et l'état du corps, celui-ci reprend exactement sa forme et son état primitifs, sans que les propriétés essentielles aient été altérées d'une manière permanente par l'action de cet effort passager.

Voilà ce que nous apprend une étude superficielle. On la complétera en déterminant expérimentalement la valeur exacte de cette limite d'élasticité pour tous les corps employés dans l'industrie ; car il est extrêmement important de

se tenir dans les applications bien en deçà de cette limite. Une fois qu'on l'a dépassée, le corps a pour ainsi dire changé de nature, et l'on ne peut plus compter sur rien, du moins en général (*).

Résistance à la rupture. — On appelle ainsi le plus grand des efforts que puisse supporter, sans se rompre ou s'écraser complétement, un prisme solide tiré ou comprimé dans le sens de ses arêtes, et l'on admet que ce plus grand effort P demeure proportionnel à l'aire Ω de la section transversale du prisme, de sorte que la résistance R s'exprime en kilogrammes par mètre carré ou millimètre carré, et que l'effort de rupture d'un prisme est représenté par

$$P = R\Omega.$$

On n'a pas tardé à reconnaître, ce qu'on aurait d'ailleurs pu prédire à l'avance, que la limite d'élasticité était quelque chose de très-vague. En réalité les charges les plus minimes produisent toujours un *allongement permanent*, c'est-à-dire qui persiste après que la charge est supprimée. D'un autre côté, la détermination de cette limite exacte, à supposer que cela fût possible, ne présenterait pas, au point de vue des applications, un intérêt bien considérable, car il faut toujours prévoir des efforts accidentels venant s'ajouter aux charges ordinaires, de sorte qu'on doit toujours se tenir assez loin en deçà de la limite d'élasticité, de crainte de la voir dépasser à un moment donné.

Mais en même temps que ces difficultés se sont fait jour, les nouvelles constructions se sont multipliées. On a acquis de la pratique, et l'on est maintenant assez généralement d'accord sur les *charges pratiques* qu'il convient de faire supporter aux matériaux dont l'usage est le plus fréquent.

Reprenons notre solide étiré, et cherchons ses conditions d'équilibre (*fig.* 48).

(*) Certaines opérations industrielles, telles que le martelage, le laminage, l'étirage des métaux ductiles, ont au contraire pour but de dépasser la limite d'élasticité de ces corps, de manière à changer leur forme d'une manière notable. On sait que ces opérations modifient beaucoup la plupart des propriétés physiques des corps qui y sont soumis.

Soit l la longueur primitive du prisme. Sous l'influence de causes quelconques, cette longueur est actuellement devenue $l + x$; enfin, nous savons qu'à l'instant où l'on nous demande si le solide abandonné à lui-même restera en équilibre, une certaine force F agit sur son extrémité dans le sens de la flèche. Il y a trois espèces de conditions d'équilibre :

1° Il doit y avoir équilibre entre les forces extérieures, c'est-à-dire entre la force F et les réactions du support.

2° L'équilibre n'a pas lieu directement entre ces deux forces; il a lieu par l'intermédiaire de la tension T de la barre; de sorte que la tranche extrême ab du solide est en équilibre sous l'action de la force F qui lui est immédiatement appliquée et de la réaction ou force intérieure T, ce qui exige que l'on ait

$$T = F.$$

3° Il faut enfin que cette tension T ne soit pas assez grande pour briser le corps, ou même qu'elle ne dépasse pas la charge que la pratique a désignée comme la plus convenable pour la sécurité.

Occupons-nous de la seconde condition. L'expérience prouve que, tant qu'on n'a pas dépassé une certaine limite, la tension T est proportionnelle à l'allongement x, à la section Ω de la barre, et inversement proportionnelle à sa longueur primitive l; donc on a

$$T = \frac{E\Omega x}{l},$$

E étant un certain coefficient qui dépend de la nature du corps et que l'on appelle *coefficient d'élasticité*. De sorte que notre seconde condition s'exprime par l'équation

$$F = \frac{E\Omega x}{l}.$$

Il y a à peu près coïncidence entre la limite jusqu'à laquelle cette formule est applicable, et la limite d'élasticité dont nous avons parlé plus haut; si cette limite est dépassée, l'allongement, qui croît d'abord plus vite que la tension, peut croître au delà de toute limite, c'est-à-dire qu'il y a finalement rupture.

Le coefficient d'élasticité E dépend de la nature de la substance, de son état physique, etc. On peut donner une idée de ce coefficient. S'il était possible, en effet, d'avoir à la fois

$$x = l, \quad \Omega = 1;$$

la loi de proportionnalité des efforts aux allongements subsistant toujours, on en déduirait

$$T = E.$$

Donc E est la tension qui serait capable de doubler la longueur d'une barre de 1 mètre carré de section. La valeur exacte de ce coefficient a assez peu d'importance dans la pratique, parce que ce nombre est extrêmement grand. Ainsi, pour le fer, c'est 20000000000 de kilogrammes environ. Je renvoie aux Traités et aux Cours de physique pour la description des expériences très-remarquables par lesquelles M. Wertheim a mesuré les coefficients d'élasticité de divers corps, et a déterminé les lois des variations de ces coefficients avec la température. J'y renvoie également pour tous les détails qui n'intéressent pas *directement* les constructeurs.

Résistance à la compression. — Les lois de la compression sont les mêmes que celles de l'extension. On admet, peut-être, sans preuves suffisantes, que le coefficient E conserve sensiblement la même valeur. Seulement la limite d'élasticité est plus rapprochée. La résistance à la rupture et la charge pratique sont ainsi généralement différentes de ce qu'elles sont dans le cas de l'extension. La rupture par compression peut être de trois sortes. Il peut y avoir : 1° rupture par *flexion*; c'est ce qui arrive quand on comprime à ses extrémités une barre de fer ou de bois suffisamment longue (*fig.* 50); 2° la rupture prismatique ou par glissement; c'est le mode de rupture de la fonte et des roches dures (*fig.* 49); enfin, 3° l'écrasement proprement dit; c'est la désagrégation complète d'un corps tendre comprimé. Il est clair que dans chaque cas le mode de rupture qui se produira sera celui qui exigera la plus petite force.

D'après ce que nous venons de dire, les données pratiques sont, pour chacune des substances qui sont employées journel-

lement dans l'industrie, la résistance à la rupture et la charge pratique, cette dernière étant en général pour les bois $\frac{1}{10}$ de l'effort de rupture, $\frac{1}{6}$ pour le fer et la fonte.

La charge de rupture est nécessairement variable pour divers échantillons d'une même substance; mais la charge pratique, déduite d'une valeur moyenne, est, comme je l'ai dit, parfaitement arrêtée. Cette charge pratique est, pour une barre de fer, de 6 kilogrammes par millimètre carré de section. Dans le service du génie, on admet 5 kilogrammes au lieu de 6. Pour les ponts suspendus, les charges par millimètre ont été portées jusqu'à 12 kilogrammes pour les barres et 18 kilogrammes pour les fils, y compris, bien entendu, la surcharge d'épreuve de 200 kilogrammes par mètre carré de tablier.

Le bois de chêne ou de sapin a une résistance 10 fois moindre que celle du fer, soit $0^{kil},6$ par millimètre carré. Le fer résiste assez mal à la compression; aussi évite-t-on en général de lui faire subir une pression directe. Cependant il peut arriver qu'il soit soumis à des efforts mixtes comprenant extension et compression. Si, par exemple (*fig.* 51), on charge en son milieu une barre de fer s'appuyant sur deux supports, cette barre est soumise à la flexion, c'est-à-dire que les fibres telles que *ab* sont étendues et celles telles que *cd* sont comprimées. Dans ce cas où la compression ne s'exerce pas directement, on admet qu'elle peut aller aussi jusqu'à 6 kilogrammes par millimètre carré.

La fonte résiste bien à la compression; sa charge pratique peut aller très-bien jusqu'à 8 ou 10 kilogrammes; au contraire, elle résiste très-mal à l'extension. Quand on ne peut pas faire autrement que de l'y soumettre, ainsi que cela a lieu dans les grands cylindres des presses hydrauliques, la charge ne doit pas dépasser 2 kilogrammes, et encore n'a-t-on pas une sécurité complète, car on a l'exemple d'un cylindre qui s'est brisé sous une charge de $1^{kil},17$, le métal étant d'ailleurs parfaitement sain.

On admet que le bois résiste à la compression comme à l'extension. Seulement, lorsqu'il s'agit d'une pièce de grande longueur, c'est-à-dire quand la grande arête dépasse cinq à six fois la plus petite, il peut y avoir flexion : la résistance diminue alors sensiblement.

§ XIX. — Équilibre et stabilité d'un corps pesant posé sur un plan horizontal et soumis a l'action de forces qui tendent a le renverser.

Considérons un corps pesant, un mur, par exemple, soumis à des forces quelconques et reposant sur un plan horizontal.

Les conditions d'équilibre sont au nombre de trois :

La première, c'est que le corps ne puisse pas glisser. En général, cette condition est remplie d'elle-même. Ce ne sera donc que dans certains cas, par exemple lorsque le sol est glissant et pour ainsi dire savonneux, qu'il faudra vérifier si elle est satisfaite.

La seconde, c'est que le corps ne puisse être renversé autour d'une arête.

Il est facile de vérifier que pour que cette condition soit remplie, il faut que la verticale du centre de gravité tombe dans l'intérieur du polygone convexe qui renferme tous les points d'appui. Car si cette verticale tombait par exemple au point P (*fig.* 52), le poids tendrait à faire tomber le corps autour d'une certaine arête AB: les réactions du point d'appui ne peuvent pas s'opposer à ce mouvement, puisque, au contraire, elles tendraient à faire tourner le corps dans le même sens (*).

Enfin il y a une troisième condition d'équilibre : il ne faut

(*) On considérait autrefois dans l'équilibre d'un corps ce qu'on appelait le *moment de stabilité*. C'est le produit du poids de ce corps par la distance de la direction de ce poids au côté du polygone d'appui dont il est le plus rapproché. Supposons en effet une force F tendant à renverser le corps autour d'une arête. Soit Fh son moment; le moment Pl du poids du corps tendra à le maintenir en place; donc l'équilibre strict, tel que la plus petite force additionnelle produirait le renversement, se traduit par l'équation

$$Fh = Pl.$$

Le produit Pl représente le moment maximum qu'on peut supposer à une force accidentelle sans produire le renversement. En prenant le moment par rapport à l'arête pour lequel il a la plus petite valeur, on a ce qu'on appelle le moment de stabilité.

pas que le mur s'écrase sous la pression qu'il supporte. Si P est la pression *totale*, Ω la surface pressée, $\frac{P}{\Omega}$ est la pression moyenne par unité de surface.

Il y aurait donc certainement écrasement et désagrégation de la matière, si $\frac{P}{\Omega}$ dépassait la résistance des matériaux à l'écrasement. Mais cette condition est loin d'être suffisante, il faut encore qu'en aucun point la pression réelle ne soit supérieure à celle qu'on peut faire supporter à ces matériaux d'une manière permanente.

Il est donc indispensable d'étudier la loi suivant laquelle les pressions se répartissent sur la base d'appui; or, nous avons vu que les règles de la statique générale ne peuvent en aucune façon nous renseigner à cet égard, de sorte que nous sommes réduits à faire des hypothèses.

Considérons donc (*fig.* 53) un parallélipipède droit à base rectangulaire reposant sur un plan horizontal que nous supposerons parfaitement invariable, et soumis à une force verticale P qui s'exerce dans le plan diamétral *mn* de ce prisme à une distance *a* de l'arête B′*b*′.

Nous admettons que le corps se comprime sous l'action de la force P, de telle sorte que les molécules situées avant la déformation dans un plan B′B″ parallèle à la base se trouvent après cette déformation dans un même plan *b*′*b*″, et qu'il est composé de fibres verticales indépendantes pour ainsi dire les unes des autres, de manière que chacune d'elles se comprime comme si elle était seule.

Considérons une de ces fibres AB. Elle a diminué de B*b*; donc, si ω est la section de cette fibre, *p* étant la pression moyenne par unité de surface, la pression peut être représentée par

$$p\omega = kh\omega,$$

en posant

$$\mathrm{B}b = h.$$

La résultante des pressions individuelles telles que $p\omega$ doit être égale à P; donc on a

$$\mathrm{P} = k\Sigma h\omega$$

Or, $h\omega$ est proportionnel au volume du tronc de prisme vertical compris entre les plans $B'B''$ et $b'b''$ et dont la base est ω; la pression totale P est représentée par le volume du prisme $B'b'B''b''$, et sa direction doit passer par le centre de gravité de ce solide. Donc, si h' et h'' désignent les longueurs $B'b'$ et $B''b''$, on aura

$$\mathbf{P} = h\,\Omega\,\frac{h'+h''}{2},$$

d'où

$$h = \frac{\mathbf{P}}{\Omega}\,\frac{2}{h'+h''},$$

en appelant Ω la surface de la base du solide. Les pressions extrêmes sont

$$p' = hh',$$
$$p'' = hh'',$$

d'où

$$p' = \frac{\mathbf{P}}{\Omega}\,\frac{2h'}{h'+h''},$$

$$p'' = \frac{\mathbf{P}}{\Omega}\,\frac{2h''}{h'+h''}.$$

Il suffit, pour avoir achevé, de trouver le rapport $\frac{h'}{h''}$. Pour cela, exprimons que le centre de gravité du solide dont la base est $B'B''b''b'$ est sur la direction de P. Il suffira d'exprimer que le centre de gravité du trapèze $B'b'B''b''$ est à la même distance a du côté $B'b'$ que le poids P, ou que l'on a

$$(h'+h'')\,a = h'\,\frac{l}{3} + h''\,\frac{2}{3}\,l,$$

d'où l'on tire

$$\frac{h'}{h''} = \frac{2-\frac{3a}{l}}{\frac{3a}{l}-1}.$$

Donc

$$\frac{h'}{h'+h''} = 2-\frac{3a}{l}, \qquad \frac{h''}{h'+h''} = \frac{3a}{l}-1;$$

donc, enfin, les pressions p' et p'' sont

$$p' = 2\left(2 - \frac{3a}{l}\right)\frac{P}{\Omega},$$

$$p'' = 2\left(\frac{3a}{l} - 1\right)\frac{P}{\Omega}.$$

En supposant $a < \frac{l}{2}$, la pression p' est plus grande que p''.

Si l'on a

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{3},$$

on a

$$p'' = 0 \quad \text{et} \quad p' = \frac{2P}{\Omega},$$

p' est donc double de la pression moyenne. Cette pression peut encore augmenter en supposant que a diminue. Alors la pression p'' devient négative. Il semble naturel d'interpréter ce résultat en supposant qu'il y a une tranche de mur pour laquelle la pression est nulle; c'est la tranche qui est à une distance $3a$ de l'arête où cette pression est un maximum. A partir de cette tranche, il n'y a plus de pression, de sorte que la pression totale se répartit sur une épaisseur de mur $3a$ et qu'au delà il n'y a plus pression des surfaces en contact; le joint est ouvert. La pression p' devient alors égale à

$$\frac{2P}{3ab}\ (*).$$

Ces considérations trouvent leur application dans la théorie des voûtes (*fig.* 54). Lorsque la pression entre deux voussoirs

---

(*) Étant donnée la distance a, si l'on fait $l = 2a$, la pression est uniformément répartie sur la base $2ab$, et l'on a

$$p' = p'' = \frac{P}{2ab},$$

radis que si l'on augmentait l'épaisseur totale du mur de manière à avoir

se rapproche trop d'une arête B, le joint s'ouvre du côté de l'arête opposée, et il peut y avoir écrasement au point B, bien que la pression moyenne $\frac{P}{\Omega}$ soit bien inférieure à la limite de la résistance des matériaux.

NOTE SUR LA BALANCE DE ROBERVAL ET SUR LA BALANCE DE QUINTENZ.

On n'a retrouvé, dans le texte préparé par M. Bour, rien qui correspondît aux *fig.* 33, 34 et 34 *bis* de la *Pl. XXXII*. La Note que nous donnons ici est destinée à combler cette lacune.

Balance de Quintenz (fig. 33).

La balance de Quintenz, dont la *fig.* 33 représente une coupe longitudinale, comprend un système de deux leviers : l'un, HF, est mobile dans le plan vertical autour du point fixe O; il porte à son extrémité le plateau sur lequel on met les poids Q destinés à effectuer la pesée. L'autre levier, ED, est mobile autour d'un point D fixé dans la caisse de l'appareil; il supporte en B un point de la plate-forme AA', et son extrémité libre, E, est suspendue par une tige verticale au point F du premier levier.

Une seconde tige verticale, GK, attachée au point G du levier FH, porte la traverse K, à laquelle la plate-forme AA' est invariablement liée.

La plate-forme AA' repose donc sur les deux points B et K, rattachés aux points F et G du levier supérieur.

Imprimons au point H un déplacement vertical infiniment petit ε, le seul qui soit compatible avec les liaisons. Il en résulte pour les points G

$l =$ ou $> 3a$, on aurait

$$p'' = 0, \quad \text{mais} \quad p' = \frac{2}{3}\frac{P}{ab}.$$

Ainsi, quoique la base fût augmentée, la pression extrême p' serait augmentée dans le rapport de $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{2}$, ou de 4 à 3.

Il ne faut d'ailleurs pas oublier que tous ces résultats sont fondés sur une hypothèse plus que contestable, et qu'ils ne sont pas directement vérifiables par l'expérience. Ils ne doivent par conséquent être admis que pour ce qu'ils valent, c'est-à-dire comme donnant lieu à des règles qu'il est sage de suivre, dans l'impossibilité où l'on se trouve de jamais savoir ce qui se passe effectivement quand deux faces planes en contact sont pressées l'une contre l'autre avec une force déterminée.

et F du levier supérieur des déplacements verticaux dirigés en sens contraire, et égaux respectivement à

$$\varepsilon \times \frac{OG}{OH} \quad \text{et à} \quad \varepsilon \times \frac{OF}{OH}.$$

Le premier déplacement est transmis intégralement au point K de la plate-forme par l'intermédiaire de la tige GK. Le second, transmis de même au point E du levier inférieur, communique seulement au point B de la plate-forme un déplacement vertical réduit dans le rapport des distances BD, ED, et égal à

$$\varepsilon \times \frac{OF}{OH} \times \frac{BD}{ED}.$$

Les déplacements simultanés des points B et K seront donc égaux, et par suite la plate-forme se déplacera parallèlement à elle-même si l'on a

$$\varepsilon \times \frac{OG}{OH} = \varepsilon \times \frac{OF}{OH} \times \frac{BD}{ED},$$

ou bien si

$$\frac{OG}{OF} = \frac{BD}{ED}.$$

Supposons que la construction de la balance satisfasse à cette condition. Le corps P dont on veut déterminer le poids pourra être placé en un point quelconque de la plate-forme AA'. Le poids Q, qui fait équilibre au poids P, produit, pour un déplacement vertical infiniment petit ε du point H, un travail virtuel égal à $Q\varepsilon$; et le poids P, pour ce même déplacement, produit un travail virtuel de signe contraire, égal au produit de P par le déplacement de la plate-forme, c'est-à-dire égal à

$$P \times \varepsilon \times \frac{OG}{OH}.$$

Le théorème du travail virtuel donne donc pour unique condition d'équilibre l'équation

$$Q\varepsilon = P\varepsilon \times \frac{OG}{OH},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{P}{Q} = \frac{OH}{OG};$$

de sorte que, pour la pesée, tout se passe comme si le poids P était suspendu au seul point G.

La poignée L, mobile autour du point N, sert à fixer le levier supérieur et à empêcher le jeu de l'appareil. On l'abaisse au moment des pesées, pour rendre leur liberté aux pièces mobiles.

Deux petits index saillants, taillés en biseau et reliés l'un au levier HO, l'autre à la partie fixe de la balance, sont placés en regard l'un de l'autre au point I. L'affleurement de ces index indique que l'équilibre est obtenu.

Balance de Roberval (fig. 34).

Les deux côtés AB, CD d'un parallélogramme articulé ABCD sont mobiles autour de deux points fixes E et F, situés sur une droite parallèle aux deux autres côtés AD, BC. La figure est tout entière située dans un plan vertical. La déformation de la figure n'altère pas le parallélisme des côtés AD, BC et de la droite fixe EF: lorsqu'on imprime au système un déplacement quelconque, chacun des côtés latéraux est donc animé d'un mouvement de translation; les vitesses simultanées de chacun d'eux sont parallèles, dirigées en sens contraire et proportionnelles aux distances AE, EB.

Mettons un poids P dans un plateau qui fait corps avec le côté AD, et un poids Q dans un plateau faisant corps avec le côté BC. Il y aura équilibre entre les poids P et Q dans toutes les positions de la figure, pourvu qu'on ait la relation

$$\frac{P}{Q} = \frac{EB}{AE}.$$

En effet, appelons ε la projection sur une verticale du déplacement commun à tous les points du côté AD lorsque le parallélogramme reçoit une déformation infiniment petite. Le travail de la pesanteur sur le poids P sera $P \times \varepsilon$. Mais la même déformation imprime en sens contraire à tous les points du côté BC un déplacement vertical égal à $\varepsilon \times \frac{EB}{AE}$, et le travail de la pesanteur sur le poids Q est par suite égal à $Q\varepsilon \times \frac{EB}{AE}$. Il y a donc équilibre si l'on a

$$P\varepsilon = Q\varepsilon \times \frac{EB}{AE},$$

ou bien

$$\frac{P}{Q} = \frac{EB}{AE}.$$

L'équilibre est indifférent, car il a lieu dans toutes les positions possibles du système. Les poids P et Q peuvent d'ailleurs être appliqués soit en des points des côtés AD et BC, soit en des points P′ et Q′, reliés invariablement à ces côtés et entraînés par leur mouvement de translation. Le changement de place des poids P et Q ne trouble pas l'équilibre, et n'a d'influence que sur les efforts intérieurs développés dans les côtés du parallélogramme et sur les charges des points fixes E et F.

La balance de Roberval est ordinairement disposée de manière que la droite EF soit verticale, et qu'elle divise en deux parties égales les côtés AB, CD. L'équilibre exige alors que les poids P et Q soient égaux.

La *fig.* 34 *bis* représente les articulations de l'appareil aux sommets du parallélogramme et aux centres de rotation E et F. Les dispositions adoptées ont pour objet de réduire le plus possible le travail du frottement développé au contact des pièces mobiles, qui doivent se toucher mutuellement par des arêtes vives.

DEUXIÈME SECTION.

DES MACHINES A L'ÉTAT DE MOUVEMENT UNIFORME.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LE TRAVAIL DES FORCES DANS LES MACHINES.

§ I. — Importance de la notion du travail.

Nous avons défini le travail élémentaire d'une force F dont le point d'application parcourt un espace ds, par l'équation

$$T_e F = F\,ds\cos\overline{F, ds},$$

et nous nous sommes servi de la considération du travail virtuel pour énoncer le théorème dont nous avons fait la base de la Statique.

Le travail proprement dit, correspondant à un déplacement réel, joue un grand rôle dans la Mécanique industrielle. Nous allons commencer la théorie des machines par l'étude de cette quantité, afin de justifier la dénomination de *travail*, empruntée au langage des économistes, et qui, jusqu'ici, n'a eu pour nous d'autre avantage que d'exprimer d'une manière abrégée le produit d'une force par une longueur, ces deux quantités étant considérées comme indépendantes.

Quand on étudie les divers effets mécaniques que les forces en général sont appelées à produire dans les machines, on est tout de suite amené à ranger dans deux classes tout à fait distinctes les services qu'une force quelconque peut rendre à l'industrie.

Tantôt on emploie des forces, des poids par exemple, à s'équilibrer mutuellement, c'est l'état statique : alors la force se présente à nous comme une chose qui subsiste, et dont on use indéfiniment sans la consommer. L'équilibre une fois établi persiste, tant qu'une cause étrangère ne vient pas l'altérer. Dans la Section précédente, nous avons donné de la manière la plus générale les lois de l'équilibre des forces appliquées à une machine quelconque, et nous n'avons pas à revenir là-dessus.

Mais tel n'est pas le cas habituel de l'emploi des forces dans l'industrie ; on les applique à des machines en mouvement, et l'on veut produire un certain effet; par exemple, élever des fardeaux, comprimer ou broyer des corps, tourner, couper, percer le bois ou les métaux.

Quelles sont les lois de l'action des forces appliquées à une machine en mouvement, à une machine *qui travaille*, dans l'acception vulgaire du mot? Quelles sont les forces à développer pour produire un effet donné, et pour le produire d'une manière industrielle, c'est-à-dire avec la plus grande perfection et la plus faible dépense possible? Telles sont les questions en présence desquelles nous nous trouvons actuellement, après avoir complétement et simplement élucidé toutes celles qui se rapportent à l'état statique des machines.

Et d'abord, qu'est-ce qu'une machine? Voici la définition qu'on en donne ordinairement :

Une machine est un système de corps, les uns fixes, les autres mobiles. Ces derniers reçoivent en certains points l'action de forces données, et exercent en d'autres points, sur les corps soumis à l'action de la machine, des forces qui diffèrent généralement des premières par leurs intensités, par leurs directions, et par les vitesses de leurs points d'application.

Nous ajouterons seulement à cette définition que, dans le cas d'une machine en mouvement, il y a nécessairement, non-seulement effort exercé par le moteur, comme lorsque cet agent avait simplement pour mission de faire équilibre à une résistance quelconque; mais il y a de plus déplacement du point auquel est appliqué l'effort moteur: il y a donc *travail* de cet effort, dans le sens géométrique du mot.

Considérons également le point où la résistance est appliquée; nous reconnaîtrons de la même manière que, non-seulement cette résistance est contre-balancée par l'effet des puissances, mais encore qu'elle est vaincue, c'est-à-dire que son point d'application marche en sens contraire du mouvement que cette force tendrait à lui imprimer, si elle agissait seule.

Il y a donc à la fois, comme condition tout à fait nécessaire de la marche de la machine, travail de la puissance et travail de la résistance. Le mot *travail* est ici toujours pris dans son acception géométrique; mais on commence déjà à se rendre compte de la justesse de cette dénomination étrangère au langage de la science pure : en effet, on vient de le voir, sans travail géométrique, point de travail industriel.

Il suit de là qu'un moteur est un corps qui doit avoir la propriété, non-seulement de développer une force sur un autre corps, mais encore de faire décrire en même temps un certain chemin au point d'application de cette force, dans le sens de son action. Cette double condition est indispensable. Or, une remarque qu'on n'a pas tardé à faire, c'est que, dans toutes les machines imaginables, du moment que la machine fonctionne et produit un certain résultat industriel, le moteur, quel qu'il soit, se trouve toujours au bout d'un certain temps, pour une raison ou pour une autre, dans l'impossibilité de continuer à exercer utilement son action.

L'homme et les animaux, qui sont certainement les plus anciens moteurs utilisés, ne tardent pas à réclamer du repos et de la nourriture; l'eau qui fait tourner la roue d'un moulin s'écoule suivant sa pente naturelle; la vapeur de nos machines à feu se condense après avoir rempli son office; et il faut dans tous les cas, à certaines époques plus ou moins rapprochées, remplacer le moteur épuisé par un autre, à moins qu'on n'ait le moyen de replacer celui dont on a fait usage dans des conditions telles, qu'il puisse fournir une nouvelle campagne.

Depuis qu'on est parvenu à substituer à peu près universellement des agents inanimés à l'homme et aux animaux, dont les besoins de réparation sont trop manifestes, le rêve d'un grand nombre d'inventeurs a été, et sera toujours, de trouver un agent naturel qui, appliqué à une machine appro-

priée, entretienne indéfiniment le mouvement de cette machine en surmontant une résistance continue.

Malheureusement, la chimère séduisante du *mouvement perpétuel* cache une absurdité mathématique, et nous démontrerons très-prochainement que, quelle que soit la disposition imaginée, la puissance motrice d'une machine est quelque chose qui se consomme, qui se dépense en raison même de l'usage qu'on en fait. Le problème de la mécanique industrielle est de rechercher quelles sont les dispositions à employer pour effectuer une opération définie *en réduisant la dépense au minimum.*

Ce dernier point est une condition indispensable de l'existence de la grande industrie.

C'est donc ce fait capital de la *dépense* qui distingue d'une manière absolue l'état dynamique d'une machine de son état statique.

Sur quel élément porte d'ailleurs la dépense? Qu'est-ce qui disparaît dans une machine en marche? Comment le moteur finit-il par se trouver incapable de continuer son service? D'après ce que nous avons dit, cela peut arriver de deux manières, soit parce que cet agent ne pourra plus exercer d'effort sur la machine, soit parce que le point d'application de l'effort exercé ne pourra plus se déplacer dans la direction de cet effort. Dans tous les cas le moteur ne pourra plus développer de *travail.*

Étudions quelques cas très-simples.

Par exemple, on monte le ressort d'une pendule, et le ressort ainsi monté est capable d'imprimer en se débandant le mouvement à la pendule, mais à la condition de voir sa tension diminuer à mesure qu'il produit son effet : quand le ressort est revenu à son état primitif, il faut le remonter pour que le mouvement continue (*).

Le ressort qui fait marcher le mouvement d'horlogerie est

(*) Au contraire, les ressorts d'un fauteuil peuvent servir indéfiniment à l'usage auquel on les destine, du moins tant que leur structure physique n'est point altérée, comme elle l'est nécessairement à la longue, aussi bien que celle du ressort du pendule, par des causes dont nous n'avons pas eu ce moment à nous occuper.

souvent remplacé par un poids, et le poids en descendant d'une hauteur déterminée remplit exactement le même office que le ressort en se débandant; il faut aussi le remonter lorsqu'il est arrivé au bas de sa course, si l'on veut qu'il continue de rendre le même service; le poids n'a rien perdu, différant en cela du ressort; mais il se trouve comme celui-ci dans des conditions telles, qu'il ne peut plus continuer à faire marcher la machine.

On pourrait même imaginer, sinon réaliser, des dispositions telles, que l'intensité de la force motrice, non-seulement ne diminuât pas par suite de son action sur la machine, mais qu'elle augmentât au contraire dans une proportion quelconque. Considérons par exemple une molécule, un petit corps attiré par une masse fixe; en cédant à cette force, le corps peut exercer un certain effort sur un piston. Au bout d'un certain temps, la force avec laquelle notre corps presse le piston n'a pas diminué; loin de là, elle a grandi dans le rapport inverse du carré de la distance qui sépare les deux masses agissantes: elle augmentera ainsi jusqu'à devenir théoriquement infinie, précisément au moment où la masse mobile sera venue se précipiter sur le corps attirant, et où la continuation du mouvement sera devenue impossible.

Dans les trois exemples qui précèdent, nous voyons également un certain effet produit, avec cette différence que dans un cas la force motrice a disparu, que dans l'autre elle est restée constante, que dans un troisième enfin elle a grandi. Mais dans tous les cas, pour une raison ou pour une autre, à partir d'un certain instant, la continuation du mouvement est devenue *physiquement* impossible.

C'est donc une chose non-seulement inexacte, mais de plus, absolument vide de sens, que de dire, comme on le fait quelquefois, qu'une machine qui travaille *consomme de la force*.

Une force, c'est un nombre de kilogrammes; or une horloge ne consomme pas le poids qui lui a donné le mouvement, et si nous trouvons dans certains cas, comme dans l'exemple du ressort, disparition de la force après qu'elle a produit son effet, dans d'autres cas, au contraire, la force croît en s'utilisant, elle finit même par devenir infinie, comme dans notre troisième exemple, au moment précis où elle ne peut plus développer

d'effet utile, parce que la continuation du mouvement de son point d'application est devenue impossible.

Il suffit d'ailleurs de se rappeler la théorie de l'équilibre pour reconnaître combien la force proprement dite semble jouer un rôle peu important dans les machines. Celles-ci ont précisément été inventées pour multiplier la force pour ainsi dire à l'infini, et la plus petite force peut faire équilibre à une force quelconque, par l'intermédiaire d'une machine convenable ; seulement, quelle que soit la disposition employée, on sait que si l'équilibre venait à être rompu accidentellement dans un sens ou dans l'autre, le travail de la puissance devrait toujours être rigoureusement égal au travail de la résistance.

Tel est le théorème du travail virtuel, base de toute la science de l'équilibre des machines.

Or, c'est cette même quantité géométrique, que nous appelons le travail d'une force, fonction composée de l'intensité de la force et d'un mouvement toujours plus ou moins indépendant de cette force, c'est cette quantité, dis-je, qui joue également le rôle le plus important dans la théorie des machines en mouvement.

Nous avons vu que lorsqu'une machine travaille, il y a à la fois résistance vaincue et déplacement du point d'application de la résistance en sens contraire de son action.

Nous avons vu aussi que, pour qu'une machine soit capable de vaincre une résistance, c'est-à-dire de faire marcher le point d'application de cette résistance en sens inverse de sa direction, il faut qu'une force mouvante ou une puissance lui soit appliquée; il faut en outre que le point de la machine sur lequel agit la puissance marche dans le sens de cette action ; il faut donc que la puissance développe un certain travail positif. Ce travail, développé par la puissance, fait que la machine soumise à son action peut effectuer le travail correspondant à la résistance qu'elle a à vaincre; et, ce qu'il importe de remarquer, ce travail correspond à quelque chose que le moteur a perdu, à quelque chose qui a disparu, consommé sans retour par la machine. Que la puissance, par suite de son action sur la machine, ait augmenté, diminué, ou qu'elle soit restée constante, c'est là un fait tout à fait secondaire ; l'essentiel, c'est qu'il y a eu du travail dépensé. Un poids P situé à la hauteur H au-

dessus du sol peut développer un travail PH, mais une fois à terre il ne pourra se retrouver en état de produire à nouveau du travail qu'en subissant à son tour l'effet d'une machine élévatoire quelconque. C'est un négociant qui a acheté des marchandises et dépensé de l'argent, il ne peut rentrer dans ses fonds qu'en vendant les marchandises qu'il a achetées, ou d'autres qu'il avait en magasin (*).

Mais après avoir porté ainsi au *passif* de la machine la dépense du travail qu'elle nécessite de la part du moteur, il est juste de porter à son *actif* le travail des résistances qu'elle a vaincues. En effet, il y a de ce côté effet utile produit; il y a *gain*, comme il y a *dépense* aux points où sont appliquées les puissances. Des barres de métal ont été étirées, forgées, limées. Du grain a été réduit en farine, on a lancé du vent dans un fourneau pour produire certaines réactions chimiques, on a élevé des matériaux pesants, etc; et toutes ces opérations se sont accomplies malgré les forces qui s'opposaient aux mouvements que l'outil était obligé de prendre, par suite de sa liaison géométrique avec le récepteur. Le travail de ces forces résistantes a été vaincu, et on a fait une certaine quantité d'*ouvrage* qui représente le bénéfice en vue duquel la machine a été construite.

Pour bien mettre en relief l'importance du rôle que joue dans une machine quelconque, aussi bien le travail moteur dépensé que le travail recueilli, nous dirons, au lieu de considérer une machine comme un intermédiaire chargé de transmettre l'effort du moteur au point où est appliquée la résistance, que la machine a pour effet de transmettre le *travail* du moteur au point où l'on a besoin de produire un *travail* résistant.

Unité de travail.

Quand on considère le travail au point de vue économique, comme *ce qui se paye* dans l'industrie, on est naturellement

(*) Seulement, le négociant réalise d'habitude du bénéfice sur ses opérations, tandis qu'en Mécanique c'est le contraire. Si nous considérons une montre et le travail qu'on dépense à la remonter tous les jours, ce travail est plus grand que celui que le ressort restitue.

conduit à estimer équivalents, d'une part le travail de deux moteurs qui ont fait le même ouvrage, d'autre part les travaux résistants correspondants à deux opérations qui, bien que d'espèce différente, ont été effectuées par une même dépense de travail moteur (*).

Partant de là, on a dû chercher une unité, un étalon commode auquel on pût comparer les quantités d'action développées par divers moteurs, ainsi qu'une mesure du service auquel correspond un effort vaincu quelconque.

On a pris pour terme de comparaison le cas où la force, soit mouvante, soit résistante, est celle qui nous est le mieux connue, celle dont les lois sont les plus simples : la pesanteur.

Rien de plus facile en effet que d'évaluer numériquement le travail développé par un corps qui tombe. En effet, faire tomber un poids de 1 kilogramme d'une hauteur **H**, ou deux poids de 500 grammes de la même hauteur **H**, c'est identiquement la même chose, et c'est deux fois ce qui correspond à la chute d'un seul poids de 500 grammes. Semblablement, qu'un poids **P** tombe d'une hauteur de 2 mètres, c'est deux fois plus d'action dépensée que s'il n'était descendu que de 1 mètre; donc le travail développé par un poids **P** tombant d'une hauteur **H** est proportionnelle au produit **PH**, et ce travail sera représenté numériquement par la quantité

$$PH,$$

si l'on convient de prendre pour unité de travail industriel celui qui correspond au cas où le poids **P** est égal à 1 kilogramme, et la hauteur **H** à 1 mètre.

(*) Quand nous avons défini la force, nous avons dit que les forces les plus différentes, quant aux caractères physiques, doivent, considérées comme causes de mouvement, être traitées comme des quantités de même espèce et comparées à une unité commune, parce qu'on peut les remplacer les unes par les autres dans l'équilibre ou le mouvement d'un point matériel.

Nous retrouvons ici la même équivalence au point de vue du travail. Une machine peut être plus ou moins bien appropriée à l'action d'un moteur plutôt que d'un autre; mais, en définitive, une machine à vapeur fera tourner un moulin, mouvoir une scie, etc., aussi bien qu'une roue hydraulique ou un moulin à vent.

Ceci étant une fois admis pour les travaux développés par la chute d'un poids, on peut mesurer à l'aide de cette unité le travail d'un moteur quelconque, par exemple, celui d'un cheval qui a fait parcourir à une voiture un espace de 5 mètres sur une route donnée, en remplaçant le cheval par un poids, laissant la même chose s'effectuer, et mesurant le travail développé.

La même unité peut encore servir à comparer les travaux qui correspondent à l'exécution de deux ouvrages de nature différente, car, dans l'élévation du poids, on trouvera comme précédemment que le service rendu est proportionnel à PH, ou qu'il est égal à PH, si l'on adopte l'unité que nous venons de définir.

Cette unité de travail industriel porte le nom de *kilogrammètre* (*). Estimer une quantité de travail en kilogrammètres, c'est prendre pour mesure du travail industriel l'*énergie* de la force motrice, ou celle de la résistance vaincue, en employant pour un instant le vieux mot de Jean Bernoulli. Cette dénomination, assez mal choisie d'ailleurs, a disparu du langage scientifique, ou plutôt n'y a jamais été admise, et on dit aujourd'hui le *travail d'une force*, pour désigner la quantité purement géométrique qu'on obtient en faisant le produit de l'intensité de la force par la projection, sur sa direction, de l'espace parcouru par son point d'application. Il est clair qu'à ce point de vue il n'y a pas d'unité de travail, pas plus qu'il n'y a d'unité de masse ou d'unité de vitesse. Le produit de deux facteurs est égal à 1, quand chaque facteur est séparément égal à son unité; c'est là une chose dans laquelle il n'y a rien d'arbitraire, tandis que l'adoption d'une unité implique nécessairement la liberté du choix.

(*) On définit assez souvent le kilogrammètre en disant que c'est le travail nécessaire pour élever 1 kilogramme à 1 mètre de hauteur. En réalité, un moteur quelconque, pour produire ce résultat, développera, dépensera une quantité de travail qui variera selon la manière dont il s'y prendra. Cette quantité, comme nous le verrons, ne saurait descendre au-dessous de 1 kilogrammètre, et, dans tous les cas, le service rendu, ce qu'on doit payer à l'homme qui élève des poids, ou au propriétaire de la machine chargée de cet office, est proportionnel au produit PH. Tant mieux pour l'ouvrier qui exécute cette opération dans des conditions plus avantageuses pour lui que son voisin.

Des sources de travail.

Le temps n'intervient pas dans la définition que nous avons donnée du travail. Faire un ouvrage donné en huit jours ou en quinze jours, ce n'est assurément pas la même chose, mais on comprend qu'on puisse mettre à part la question du temps, et mesurer la quantité d'ouvrage effectué. Le mot de *travail* s'applique donc à une quantité indépendante de l'idée du temps.

Au contraire, le temps intervient nécessairement dans l'appréciation d'une *source* de travail. De même que nous estimons la valeur d'une source d'eau au point de vue de l'utilité publique par le nombre de mètres cubes que la source peut nous fournir en une seconde, de même nous estimerons la valeur d'une machine à vapeur ou d'un moteur quelconque agissant d'une manière continue, par le nombre de kilogrammètres que ce moteur peut mettre à notre disposition dans une seconde.

L'usage établi est de diviser par 75 ce nombre de kilogrammètres, et de dire que le quotient représente la *force de la machine en chevaux*. Cette expression est doublement vicieuse; d'abord parce qu'elle emploie le mot *force* dans une acception qui n'est pas la vraie, ensuite parce qu'un cheval n'est pas réellement capable de développer d'une manière continue 75 kilogrammètres par seconde. Quoi qu'il en soit, l'unité de source de travail est un agent capable de développer cette quantité d'action; on lui donne le nom de *cheval-vapeur*.

§ II. — Principe du travail.

Après avoir essayé de faire comprendre l'importance, dans la théorie des machines, de la quantité géométrique à laquelle nous donnons le nom de *travail*, nous allons préciser algébriquement les considérations qui précèdent, et établir la relation qui existe, dans toute machine en mouvement, entre le travail des puissances appliquées à la machine, et le travail des résistances vaincues.

Considérons d'abord le cas d'un point matériel en mouve-

ment sous l'action d'une force F; on a pour l'accélération totale

$$J = \frac{F}{m}.$$

L'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$ est la projection de J sur la tangente; donc

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}\cos\overline{F,ds},$$

d'où

$$m\,dv = F\,dt\cos\overline{F,ds}.$$

Or, on a

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Multiplions ces équations membre à membre, nous aurons

$$(1) \qquad mv\,dv = F\,ds\cos\overline{F,ds} = T_e F.$$

Ainsi, le *travail* élémentaire de la force F, appliquée à un point matériel en mouvement, est égal à la différentielle de $\frac{1}{2}mv^2$.

Cela posé, il est évident que la projection $F\cos\overline{F,ds}$ a une valeur déterminée en chaque point M de la trajectoire du point mobile, position définie, comme nous l'avons vu en Cinématique, par la grandeur et le signe de l'arc s qui sépare le point M de l'origine des espaces; donc $F\cos\overline{F,ds}$ est une fonction de s, connue ou non; on peut donc concevoir qu'on calcule l'intégrale

$$\int_{s_0}^{s} ds.F\cos\overline{F,ds}$$

entre deux positions du mobile M_0 et M séparées par un intervalle de temps quelconque t. C'est cette intégrale qu'on appelle le travail total de la force F pendant le temps t, ou pour le parcours $s - s_0$. On peut ainsi mettre l'intégrale de l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad TF = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2).$$

Or, le produit mv^2 a reçu le nom de *force vive*. Donc :

THÉORÈME. — *Pendant un temps quelconque, le travail de la résultante des forces qui agissent sur un point matériel (ou la somme des travaux de toutes les forces directement appliquées à ce point) est égal au demi-accroissement de la force vive de ce point matériel.*

En considérant le point dont la masse est m comme faisant partie d'un système matériel quelconque, il y a lieu, comme on sait, de distinguer, parmi les forces appliquées à ce point, les forces F, qui sont extérieures au système, et les forces que nous appelons intérieures. Alors, en faisant la somme des équations telles que (2), nous aurons l'expression analytique générale du théorème du travail pour un système matériel quelconque,

$$(3) \qquad \sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = \sum \mathrm{TF} + \sum \mathrm{T}f.$$

On appelle force vive totale du système la somme des forces vives des divers éléments de ce système, et l'on énonce l'équation (3) de la manière suivante :

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Dans tout système matériel en mouvement, le demi-accroissement de la force vive totale est égal à la somme des travaux des forces, tant intérieures qu'extérieures, appliquées aux différents points de ce système.*

Ce qui fait le grand intérêt de ce théorème, c'est qu'il peut être démontré, comme nous l'avons fait, avant d'avoir abordé la Dynamique. L'équation que l'on trouve ainsi, presque sans calcul, et qui établit une certaine relation entre les forces appliquées à un système quelconque et les vitesses des différents points en mouvement, cette équation, dis-je, est suffisante pour établir la théorie des machines.

Nous allons, en effet, montrer que, quelle que soit la constitution intime d'une machine, quel que soit le moteur qui lui soit appliqué, et l'ouvrage qu'elle est appelée à exécuter, il existe des règles générales, qui sont vraies pour toutes les machines imaginables, et dont la connaissance est absolument indispensable aux mécaniciens de tous les ordres. Ces règles

se déduisent toutes de notre équation (3). Nous n'épuiserons pas d'ailleurs, en ce moment, toutes les conséquences renfermées dans cette équation, et nous exposerons seulement ici les points les plus importants de la théorie des machines, en réservant pour la partie du cours consacrée à la Dynamique proprement dite l'étude des phénomènes les plus délicats.

Quand nous avons étudié les machines en Cinématique, en nous bornant au point de vue purement géométrique, nous avons reconnu dès l'abord une immense variété de mécanismes, différant les uns des autres par la nature des éléments employés (solides, liquides, gaz, cordes ou courroies, etc.), par la disposition des organes, enfin et surtout par la nature de l'effet final, c'est-à-dire du mouvement géométrique produit.

Il est résulté de là un certain embarras pour la classification et l'énumération de tous ces engins. Quant à leur théorie géométrique, nous avons dû nous borner à donner quelques théorèmes plus ou moins généraux, et chaque question particulière doit être traitée d'une manière distincte par le moyen des procédés et des ressources de la Géométrie ordinaire et de la Géométrie analytique.

Au contraire, dès que nous nous proposons de rechercher comment ces organes si différents reçoivent et transmettent l'action des divers moteurs que la nature met si libéralement à notre disposition, tout s'éclaircit, se simplifie, s'unifie. La théorie de toutes les machines se réduit au théorème unique que nous venons de démontrer.

§ III. — Théorie de la transmission du travail dans les machines.

Reprenons notre équation (3), et, parmi les travaux de toutes les forces dont la somme algébrique figure au deuxième membre, désignons par T_m le *travail moteur* reçu par la machine pendant la période que l'on considère, c'est-à-dire la somme de tous les travaux élémentaires positifs, et par T_r le *travail résistant*, c'est-à-dire la somme, prise positivement, de

tous les travaux élémentaires négatifs. Nous écrirons alors

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = T_m - T_r. \qquad (4)$$

La machine étant supposée à liaisons complètes, ce qui est le cas le plus général, les rapports des vitesses de tous les points sont déterminés par des lois purement géométriques, que nous avons établies dans la Cinématique. Par suite, les vitesses des différents points s'expriment en fonction des coordonnées qui fixent la forme et la position du système, et de la vitesse d'un seul point choisi à volonté. L'équation (4) donne cette dernière vitesse à un instant quelconque, si l'on connaît pour cet instant la somme des travaux de toutes les forces, à partir d'un instant initial arbitraire.

Pour étudier au moyen de cette équation les circonstances principales de la marche d'une machine, nous distinguerons les trois périodes suivantes.

Première période. — *Mise en train de la machine.*

Considérons le moment où, la machine étant en repos, on commence à lui appliquer l'action de son moteur.

La machine se met en marche, surmonte les résistances qui lui sont appliquées, accomplit un certain travail, et en même temps, comme condition nécessaire de son fonctionnement, elle fait prendre à ses pièces des vitesses qui généralement doivent être maintenues dans de certaines limites pour que la besogne soit bien faite.

Pour cette première période, l'équation doit s'écrire

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 = T_m - T_r,$$

puisque les vitesses initiales des diverses parties de la machine, représentées d'une manière générale par v_0, sont toutes nulles.

De là nous tirons

$$T_r = T_m - \sum \frac{1}{2} mv^2. \qquad (5)$$

Donc, dans cette première période, le travail résistant vaincu par la machine est plus petit que le travail moteur, et il lui est inférieur d'une quantité

$$\frac{1}{2}\sum mv^2,$$

égale à la demi-somme des forces vives acquises par les différentes pièces de la machine.

Si donc le travail résistant qu'il s'agit de vaincre est constant dans l'unité de temps, il faudra, dans cette première période, développer un travail moteur plus considérable que ce travail résistant.

S'il s'agit d'un moteur animé, il faudra donner un *coup de collier;* s'il s'agit d'une machine hydraulique ou à vapeur, le mécanicien qui la conduit devra donner plus d'eau à la première, plus de vapeur à la seconde, et cela jusqu'au moment où, la machine ayant atteint sa vitesse normale, le travail va devenir régulier.

Deuxième période. — *Travail normal.*

Au point de vue du travail normal, on doit distinguer trois classes principales de machines.

1° Pour celles de la première classe, le mouvement, une fois réglé, est uniforme. Tels sont les moulins à blé, les métiers mus par une roue hydraulique, et un grand nombre d'autres machines, caractérisées en général par cette circonstance, que toutes les pièces, sauf peut-être quelques organes accessoires, possèdent un mouvement de rotation continu et uniforme.

Une fois ces machines arrivées à leur *vitesse de régime,* leur force vive ne varie plus d'une manière sensible, et l'on a pour un intervalle de temps quelconque

$$T_m - T_r = 0.$$

2° Dans les machines de la deuxième classe, le mouvement des diverses pièces, pendant la marche régulière, s'accélère et se ralentit alternativement, mais de telle manière que la vitesse de chacun des points de la machine reste toujours comprise entre certaines limites, et que la vitesse de tout le

système se retrouve identiquement la même, à des intervalles réglés. C'est ce qu'on observe par exemple dans les pompes, les machines à vapeur, les soufflerie, etc.

Considérons des époques correspondantes de ces intervalles successifs, de ces périodes de temps, tours ou révolutions qui se succèdent, et qui sont telles, qu'au commencement et à la fin de chacune d'elles les vitesses des diverses parties sont les mêmes : il est clair que si l'on applique l'équation du travail, qui a lieu pour un intervalle quelconque, depuis le commencement jusqu'à la fin de cette période, le premier membre de l'équation générale est égal à zéro, et par conséquent le second l'est aussi; donc le travail moteur T_m développé pendant une période, ou pendant un nombre quelconque de périodes, est égal au travail résistant vaincu T_r.

Ainsi, quoique T_m et T_r ne soient pas égaux pour chaque élément de temps, l'égalité de ces quantités peut être regardée comme existant en moyenne, pendant toute la durée de la marche régulière de la machine. On peut donc écrire, pendant toute la durée du travail normal de la machine, l'équation

$$T_r = T_m. \qquad (2)$$

3° Cette relation serait encore très-approximative quand même le mouvement de la machine ne présenterait pas une périodicité régulière, comme dans les locomotives, par exemple, et dans beaucoup d'autres machines. En effet, si nous considérons deux instants séparés par un intervalle suffisamment grand, il est bien évident que la force vive ne saurait croître au delà d'une certaine limite, et que par conséquent la quantité

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2,$$

si elle n'est pas nulle, ne peut dépasser une certaine limite positive ou négative, plus ou moins élevée, selon les cas, mais toujours bien déterminée.

Au contraire, la machine ne cesse pas de vaincre des résistances, et par conséquent de consommer du travail moteur; donc, les deux termes T_m et T_r croissent tous les deux et peu-

vent dépasser une grandeur quelconque assignée à l'avance, pourvu que l'on considère un temps suffisamment long.

Or, l'équation du travail nous apprend que la différence entre ces deux termes conserve une valeur toujours assez petite; on a donc, avec une faible erreur relative,

$$T_m = T_r.$$

Donc, en général, on peut dire que, pendant la marche normale d'une machine quelconque, il y a égalité entre le travail moteur développé et le travail résistant vaincu. Ce résultat est indépendant de la vitesse de la machine.

Troisième période. — *Arrêt de la machine.*

Supposons enfin que nous cessions de fournir du travail moteur à la machine. Les résistances continuant à agir, le mouvement se ralentira peu à peu, pour cesser au bout d'un certain temps. Nous avons pour la *période d'arrêt* de la machine l'équation

$$-T_r = -\sum \frac{1}{2} m v^2,$$

les vitesses finales étant toutes nulles, et les vitesses initiales étant précisément celles de la fin de la première période, lesquelles se sont conservées sans altération pendant toute la durée de la seconde, comme il a été expliqué. On déduit de là

$$T_r = \sum \frac{1}{2} m v^2. \tag{3}$$

Le travail résistant qu'on produit ainsi sans dépenser de travail moteur est précisément égal au travail moteur dépensé en trop dans la période de mise en train.

Théorème de la transmission du travail.

Faisons la somme des trois équations obtenues séparément, nous aurons en définitive

$$\sum T_m = \sum T_r.$$

De telle sorte que, quelles que soient les variations du mouvement de la machine, le travail développé par les forces mouvantes qui lui sont appliquées pendant tout le temps qu'elle est en marche est toujours égal au travail développé dans le même temps par les forces résistantes.

Ce théorème remarquable est connu sous le nom de *théorème de la transmission du travail.*

Il consiste essentiellement en ce que, quelles que soient la multiplicité et la disposition des organes d'une machine (toutes choses qui permettent de modifier d'une manière véritablement merveilleuse la direction, la grandeur et le mode d'action d'une force quelconque, en même temps que les vitesses des différents points soumis à cette action), il y a pourtant une chose sur laquelle nous n'avons aucune influence, c'est la quantité de travail à développer; cette quantité doit toujours être rigoureusement égale au travail des résistances à vaincre (*).

(*) C'est ce que le P. Mersenne fait parfaitement sentir dans le petit ouvrage déjà cité à l'occasion de la théorie des machines en équilibre :

« Avant que d'entreprendre la spéculation des instruments de la Méchanique, il faut remarquer en général les commodités et les profits que l'on peut en tirer, afin que les artisans ne croient pas qu'ils puissent servir aux opérations dont ils ne sont pas capables, et que l'on puisse lever de grands fardeaux avec peu de force; car la nature ne peut être trompée ni céder à ses droits, et nulle résistance ne peut être surmontée que par une plus grande force. » Nous dirions aujourd'hui, pour être plus corrects : *que par une force développant un travail plus grand.*

» ..... Il faut donc ici considérer quatre choses, à savoir : le fardeau que l'on veut transporter d'un lieu à un autre, la force qui doit le mouvoir, la distance par laquelle se fait le mouvement, et le temps dudit mouvement, parce qu'il sert pour en déterminer la vitesse; ..... de sorte que si l'on suppose telle résistance, telle force et telle distance déterminée que l'on voudra, il n'y a nul doute que la force requise conduira le fardeau à la distance donnée, quoy que ladite force soit très-petite, pourvu que l'on divise le fardeau en tant de parties que la force puisse en mouvoir une, car elle les transportera toutes les unes après les autres; d'où il s'ensuit que la moindre du monde peut transporter tel poids que l'on voudra.

» Mais l'on ne peut dire à la fin du transport que l'on ayt remué un grand fardeau avec peu de force, puisqu'elle a toujours esté égale à chaque partie du fardeau : de manière que l'on ne gaigne rien avec les instruments, d'autant que si l'on applique une petite force à un grand fardeau, il faut beaucoup de temps, et que si l'on veut le transporter en peu de temps, il faut une grande force.....

» Néanmoins les machines sont utiles pour mouvoir de grands fardeaux tout

Forme définitive de l'équation du travail.

Le théorème fondamental de l'égalité entre le travail moteur et le travail résistant n'est vrai que si l'on a soin de tenir compte, dans l'évaluation de ce dernier élément, des résistances de toute nature qui tendent à s'opposer au mouvement de la machine. Or, au point de vue économique, industriel, il y a lieu de diviser ces résistances en deux catégories bien distinctes, comprenant :

D'une part, les *résistances utiles*, c'est-à-dire celles qui correspondent à l'ouvrage même que la machine est destinée à exécuter.

D'autre part, les résistances qui se développent dans la machine par suite de son mouvement (comme les frottements entre les pièces solides dont la machine est formée), résistances qui n'ont rien de commun avec le travail en vue duquel la machine est employée; elles sont désignées sous le nom de *résistances passives* (*).

Soit T le travail des résistances utiles, T_p celui des résistances passives, on a

$$T_r = T + T_p,$$

---

d'un coup sans les diviser, parce que l'on a souvent beaucoup de temps et peu de force; c'est pourquoy la longueur du temps récompense le peu de force. Mais celuy-là se tromperait qui voudrait abréger le temps en n'usant que d'une petite force, et monstrerait qu'il n'entend pas la nature des machines, ny la raison de leurs effets, etc.

» Or, il faut conclure de tout ce discours que *l'on ne peut rien gaigner en force qu'on ne le perde en temps*, etc. »

(*Les Méchaniques de Galilée*, chap. Ier. *De l'utilité des machines.*)

Il est impossible de mieux faire ressortir l'importance capitale de ce grand principe, que l'observation attentive retrouve dans toutes les machines, et qui constitue tout ce qu'il faut ajouter aux considérations de Géométrie pure pour avoir la théorie complète d'une machine quelconque.

(*) Ces résistances sont doublement nuisibles, d'abord parce qu'elles consomment inutilement du travail moteur, ensuite parce que ce travail absorbé devant toujours se retrouver balancé dans le budget d'une machine par une quantité équivalente de résistances vaincues, et se trouvant complétement perdu pour l'effet utile, est employé uniquement à user les diverses pièces, à échauffer les organes ou à développer des vibrations qui se transmettent aux supports et nuisent à la régularité du travail de l'outil.

et l'on écrit ordinairement l'équation du travail sous la forme

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = T_m - T - T_p,$$

d'où nous tirons

$$T = T_m - T_p - \left(\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 \right),$$

équation qui, si l'on considère un intervalle de temps suffisamment grand, se réduit, comme nous l'avons vu, à

$$T = T_m - T_p.$$

Le travail utilisé par la machine est donc toujours inférieur au travail moteur dépensé, puisqu'il est égal à ce dernier, diminué du travail des résistances passives.

Du rendement d'une machine. — On appelle *effet utile*, ou *rendement* d'une machine, le rapport du travail utilisé au travail dépensé, c'est-à-dire la fraction

$$\frac{T}{T_m} = \frac{T_m - T_p}{T_m} = 1 - \frac{T_p}{T_m} (*).$$

C'est là l'élément le plus important qu'on ait à considérer dans les machines, quoique cependant ce ne soit pas le seul; car d'autres choses, telles que la facilité de déplacement de la machine, la perfection du travail, l'économie de frais de construction et d'entretien doivent entrer en ligne de compte.

Le rendement d'une machine s'exprime par une fraction donnée ordinairement en centièmes, dont la grandeur permettra d'apprécier la bonté de la machine et l'importance des perfectionnements qui restent à faire.

Disons dès maintenant qu'on estime comme excellentes, sous le rapport de l'effet utile, celles qui rendent en travail les 0,50 ou 0,60 de la quantité d'action absolue dépensée par

---

(*) Le rendement est égal à $1 - \frac{T_p}{T_m}$, de sorte que la détermination de cette quantité exige que nous étudiions d'une manière complète les différentes causes des résistances passives qui diminuent ce rendement et le rendent plus ou moins inférieur à l'unité.

le moteur, et qu'il en existe un grand nombre, précisément celles qui se distinguent par la complication et la multiplicité des rouages, qui ne rendent pas même $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{20}$ de cette quantité d'action.

§ IV. — Étude d'un avant-projet de machine.

Les considérations qui précèdent suffisent pour faire comprendre la marche à suivre quand il s'agit d'arrêter sommairement les éléments principaux d'une machine, d'en faire l'*avant-projet*.

Du moteur. — Connaissant la quantité de travail résistant qui doit être vaincue dans l'unité de temps, on connaît par cela même la quantité de travail moteur à développer dans le même temps, c'est-à-dire la force de la machine en chevaux. Le nombre qui correspond au travail des résistances utiles devra être multiplié par un certain coefficient, inverse de celui que nous avons appelé le rendement.

Quant à la nature du moteur, au point de vue mécanique elle est indifférente ; c'est uniquement aux conditions économiques spéciales dans lesquelles on se trouvera placé qu'on devra faire appel pour fixer son choix entre les divers moteurs dont on peut faire usage.

Du récepteur. — Les *récepteurs* sont les premières pièces mobiles qui fassent partie de la machine proprement dite : ils sont en liaison directe avec le moteur d'une part, avec la transmission de l'autre.

Pour chaque moteur en particulier, il faut étudier les divers récepteurs connus. Cette étude se fait dans tous les cours de Mécanique ; elle détermine les appareils qui doivent être condamnés d'une manière absolue, et ceux parmi lesquels on pourra choisir suivant les cas et qui permettent le mieux à l'agent moteur de développer son action en raison de sa nature et de sa qualité.

Ce n'est pas tout : le choix du récepteur une fois arrêté, nous verrons qu'il existe pour chacun de ces organes une vitesse de régime, une allure normale dont il n'est pas possible de s'écarter beaucoup, sans diminuer, en général, notablement

le rendement de la machine. La vitesse du récepteur peut donc être considérée comme connue *à priori*, indépendamment de la machine à mettre en mouvement et de l'ouvrage à faire.

De l'opérateur. — De même l'outil à employer, la vitesse avec laquelle il doit fonctionner sont deux choses déterminées par la considération de l'économie du travail, mais surtout par celle de la bonne exécution de l'ouvrage; dans tous les cas, par des considérations dans lesquelles n'entre pour rien le reste de la machine. L'étude des machines-outils doit être à peu près réservée aux praticiens.

De la transmission. — Nous avons déterminé séparément la vitesse du récepteur et celle de l'outil, le rôle de la transmission est d'établir entre ces deux organes un rapport de vitesses égal au rapport fixé dans l'avant-projet. Les ressources offertes par la Cinématique pour résoudre ce problème peuvent être considérées comme indéfinies, et l'on n'aura pour ainsi dire jamais à se préoccuper de cela dans la fixation des vitesses les plus convenables pour le récepteur et pour l'outil.

C'est dans la transmission de mouvement que réside l'utilité de la machine : on peut, au moyen d'organes convenablement disposés, transformer et modifier de mille manières le travail fourni par un moteur quelconque. Cependant il ne faut jamais abuser de ces organes qui, en même temps qu'ils facilitent la distribution du travail, augmentent les résistances passives, et par conséquent diminuent le travail utilisé.

Du mouvement uniforme (*).

Nous avons vu que, dans la plupart des machines, le travail moteur n'est pas à chaque instant égal au travail résistant correspondant. Tantôt il le surpasse et tantôt il en est surpassé; par suite, la machine s'accélère et se ralentit périodiquement, de manière à gagner ou à perdre dans un temps donné une quantité de force vive précisément égale au double de l'excès positif ou négatif du travail moteur sur le travail résistant pendant le même temps.

(*) Ce paragraphe est extrait, pour la plus grande partie, des Leçons professées par M. Poncelet à l'École d'Application de Metz.

Or, il est généralement important, quand une machine est destinée à marcher pendant un temps un peu long, que son mouvement s'écarte le moins possible de l'uniformité.

En effet, dans les machines qui possèdent le mouvement uniforme, et où les puissances et les résistances agissent d'une manière continue et avec la même intensité d'action, les pièces se conduisent toujours de la même manière et demeurent sans cesse en contact, sans éprouver aucune secousse nuisible, aucun changement brusque de vitesse ; et comme les quantités d'actions élémentaires reçues et transmises par chacune d'elles sont égales et constantes, ou qu'il y a équilibre à chaque instant, de même que pour la machine entière, les chances de destruction sont moindres et l'on peut apprécier dans chaque cas les efforts supportés et la solidité maximum qui convient.

De plus, comme il existe pour chaque moteur une vitesse du point d'application qui rend le travail communiqué à la machine un maximum, et que la qualité et la quantité du travail des outils dépendent aussi de leur vitesse et surtout de la constance de cette vitesse, on voit que le cas le plus avantageux possible sera celui où les vitesses des pièces extérieures de la machine seront telles que le réclame chaque genre de moteur et de travail, et resteront invariables pendant le mouvement aussi bien que celles des pièces intermédiaires.

Dans les machines dont le mouvement est variable d'une manière sensible, le contraire de tout cela a lieu, sans compter les autres inconvénients qui peuvent y être attachés. Ainsi, par exemple, il pourrait arriver que le mouvement ne pût aucunement naître ou s'entretenir, parce que, l'action du moteur étant intermittente, il y aurait des instants où celle-ci ayant toute sa valeur tandis que l'autre a atteint le maximum de la sienne, le mouvement de la machine ne pourrait s'entretenir au passage de ces points *morts*.

Même en supposant que le mouvement puisse naître et s'entretenir, il n'en résulte pas moins de son état variable que la machine ne travaillera pas sous les conditions les plus avantageuses possibles, et que ses différentes pièces éprouveront des secousses, des pressions et des dépressions qui altéreront leur constitution et absorberont inutilement une portion du travail moteur.

D'après ces divers inconvénients du mouvement varié, il semblerait qu'on dût y renoncer dans toutes les applications à l'industrie et se borner uniquement aux moyens qui permettent l'uniformité rigoureuse du mouvement, ce qui réduit à n'employer, même pour le récepteur et l'outil, que des pièces de rotation, des courroies sans fin, et à proscrire toute action intermittente de la part du moteur ou de la résistance. C'est à quoi tendent tous les efforts des bons constructeurs et des mécaniciens instruits; mais, quoiqu'on ait résolu la question pour plusieurs machines importantes d'une manière suffisamment approchée, il n'y a pas d'espoir qu'on puisse le faire pour toutes. La nature du moteur et du travail à faire, souvent même des circonstances de localité, et principalement trop de sujétion dans l'exécution matérielle, trop de dépense, s'opposeront à ce qu'on atteigne le but d'une manière satisfaisante; du moins on doit chercher à s'en approcher le plus possible dans chaque cas particulier.

Pour cela, on doit d'abord chercher à supprimer autant que possible les causes du mouvement variable, c'est-à-dire rendre aussi uniformes que l'on pourra l'action de la puissance et celle de la résistance; et dans le cas où cela ne sera pas possible, faire en sorte que les variations de ces deux quantités soient corrélatives, de manière que, dans un temps donné, il y ait toujours égalité entre le travail moteur et le travail résistant.

Outre les deux causes de mouvement variable que nous venons de signaler, il en existe une troisième correspondant à la distribution dissymétrique des pièces un peu massives qui entrent dans la composition de la machine.

Considérons les roues non centrées, les pièces à mouvement alternatif rectiligne ou circulaire : elles ont un double effet nuisible dans les machines.

1° Le poids de ces pièces produit alternativement un travail positif et négatif, selon que leur centre de gravité s'élève ou s'abaisse, et le terme correspondant, en s'ajoutant ainsi tantôt au travail moteur, tantôt au travail résistant, ajoute un nouvel élément aux causes d'irrégularité inhérentes à la nature même de la puissance et de la résistance.

2° La présence de ces mêmes pièces se manifeste encore

par une autre influence bien plus nuisible, en ce sens qu'elles introduisent dans l'expression de la force vive du système des termes variables dont l'effet perturbateur croît rapidement avec la grandeur des masses mises en jeu, et plus rapidement encore avec la vitesse dont ces masses sont animées.

La science du mécanicien est de faire en sorte que ces diverses causes d'irrégularité se combattent mutuellement et se compensent le plus exactement qu'il est possible. Quand on a épuisé tous ses moyens d'action dans cette voie, il faut du moins faire en sorte que les excès périodiques du travail moteur sur le travail résistant et du travail résistant sur le travail moteur ne se traduisent pas par une trop grande accélération suivie d'un retard du même ordre de grandeur. On arrive à ce résultat par l'emploi des volants.

Des volants.

Un volant est une grande roue fixée à l'un des arbres tournants de la machine, et préférablement à l'un de ceux dont la vitesse est le plus considérable. Pour bien nous rendre compte du mode d'action d'un volant, faisons abstraction des masses des autres pièces de la machine, et supposons que, pendant un intervalle de temps déterminé, il y ait un certain excès du travail moteur sur le travail résistant.

D'après ce que nous savons, la force vive du volant reçoit pendant le même temps un accroissement numériquement et algébriquement égal au double de cet excès. Or, si l'on assimile ce volant à un anneau dont la masse est M et dont le rayon est égal à R, on aura pour la force vive du volant, ω étant la vitesse angulaire de l'arbre,

$$M\omega^2R^2,$$

et pour l'accroissement de cette force vive, pour un accroissement $\omega' - \omega$ de vitesse,

$$MR^2(\omega'^2 - \omega^2) = MR^2(\omega + \omega')(\omega' - \omega).$$

On voit que, la variation de force vive étant donnée, la diffé-

rence $\omega' - \omega$ sera d'autant plus petite que les trois autres facteurs seront plus grands, d'où l'on conclut que :

Un volant est d'autant plus puissant qu'il a une plus grande masse et un plus grand rayon et qu'il tourne avec une vitesse angulaire plus considérable.

La quantité MR^2 s'appelle le *moment d'inertie* du volant.

Nous verrons plus tard la théorie des volants. Dès à présent, on peut observer que ces appareils servent à resserrer entre des limites convenables les variations de vitesse d'une machine. Ce sont, suivant l'expression usuelle, *des réservoirs de force vive ou de travail*, l'emmagasinant quand la force motrice l'emporte, la restituant lorsque la résistance devient prédominante, le tout sans varier beaucoup de vitesse.

Dans tout ceci, nous avons supposé la machine réglée de manière que son mouvement se compose de périodes régulières pendant chacune desquelles le travail moteur soit égal au travail résistant.

Ceci exige évidemment que, du moment que la vitesse normale est atteinte ou que la première période est terminée, on change le mode d'action du moteur de manière à lui faire développer moins de travail dans l'unité de temps (la résistance étant supposée constante) que quand ce moteur avait non-seulement à vaincre la résistance, mais à faire acquérir à la machine sa force vive normale.

Les moteurs animés se règlent d'eux-mêmes; les autres exigent ordinairement l'intervention d'un mécanicien. Cette intervention est aussi indispensable quand il arrive accidentellement un accroissement ou une diminution de travail résistant, distincte des variations qui se produisent régulièrement par suite de la périodicité du mouvement. Dans ce cas, le volant a bien pour effet d'empêcher que cette variation altère trop notablement la vitesse du régime, mais il n'en est pas moins vrai que cette vitesse serait changée pour un temps assez long, jusqu'à une perturbation en sens contraire dont il est impossible de prévoir l'époque, si le mécanicien n'intervenait pas pour rétablir l'égalité troublée entre le travail moteur et le travail résistant.

Nous verrons aussi qu'il existe certains appareils dits *régu-*

lateurs, au moyen desquels une machine quelconque règle d'elle-même la quantité de travail moteur qu'elle doit dépenser, de manière à maintenir sa vitesse dans de bonnes limites.

Impossibilité du mouvement perpétuel.

On reconnaît par là combien est grande l'erreur de ceux qui cherchent le *mouvement perpétuel*, c'est-à-dire qui se proposent de trouver une machine à l'aide de laquelle on puisse produire du travail utile sans dépense de travail moteur, ou au moins produire une quantité de travail utile plus grande que la quantité de travail moteur dépensée. L'étude des solutions proposées est assez curieuse. Beaucoup d'entre elles consistent à fournir à la machine une certaine force vive plus ou moins considérable, en dépensant une certaine quantité de travail moteur. On emploie un volant très-lourd qui peut, en se ralentissant, c'est-à-dire en perdant sa force vive, restituer *une partie* du travail moteur qu'il a reçu et surmonter des résistances tant qu'il lui restera de la force vive.

J'ai dit que le volant ne restitue qu'*une partie* du travail qu'on a dépensé pour le mettre en mouvement. En effet, c'est un banquier toujours disposé à échanger du travail contre de la force vive, et inversement; mais, sous prétexte de résistances passives, il ne manque jamais de retenir tant pour 100 sur chaque opération, de sorte qu'il ne faut jamais recourir à son ministère que quand il est impossible de faire autrement.

Mais, dans tous les cas, le travail que la machine peut vaincre a toujours une limite qu'on ne saurait dépasser, limite marquée par la demi-force vive acquise, c'est-à-dire par le travail moteur primitivement dépensé.

On emploie d'ailleurs avantageusement une disposition de ce genre quand on veut, au moyen d'une puissance médiocre, surmonter une résistance très-considérable, mais qui ne s'exerce que pendant un temps très-court. Exemples : balancier à battre la monnaie, presse à timbre sec, etc.

Dans ce cas, l'addition d'un volant permet d'accumuler dans la machine en mouvement une force vive considérable, sans qu'il se produise en même temps une grande vitesse qui serait nuisible à l'action du moteur; et lorsque la résistance se pré-

sente, la machine la surmonte en vertu de la force vive qu'elle possède.

Le volant fonctionne dans ce cas comme une caisse d'épargne; mais il ne faut pas oublier qu'en général ces appareils sont fort lourds et qu'ils augmentent dans une forte proportion les résistances passives de la machine. La tendance est aujourd'hui de les réduire autant que possible en régularisant séparément l'action de la puissance et celle de la résistance. On a ainsi l'avantage de pouvoir, en cas de danger, arrêter presque instantanément la machine qui n'est pas animée d'une force vive bien considérable.

Mais revenons au mouvement perpétuel.

D'autres machines sont plus ingénieuses; elles mettent en jeu les agents naturels les plus divers, les ressorts, le calorique, l'électricité, le magnétisme; le plus fort peut s'y laisser prendre. Mais dès qu'on s'aperçoit qu'une combinaison quelconque conduit au mouvement perpétuel, si bien déguisé qu'il soit, il faut s'empresser de condamner le tout sans appel.

C'est même une méthode, sinon bien philosophique, du moins parfaitement sûre, suivant moi, que celle qui consiste à démontrer certaines lois physiques assez difficiles à établir expérimentalement, en faisant voir que leur négative conduirait nécessairement au mouvement perpétuel. On peut ainsi partir de l'impossibilité du mouvement perpétuel comme d'un axiome très-commode dans un grand nombre de cas.

CHAPITRE II.

DES RÉSISTANCES PASSIVES.

Les résistances passives sont des résistances qui se rencontrent nécessairement dans toutes les machines en mouvement, comme une conséquence des conditions générales dans lesquelles une machine quelconque se trouve. On peut les rattacher aux deux classes suivantes :

1° Les résistances qui proviennent de la présence de l'air dans lequel se meuvent les diverses pièces, et des supports considérés comme fixes, avec lesquels ces pièces mobiles sont en contact. D'une part, la machine communique au fluide ambiant une certaine quantité de force vive aux dépens de la sienne propre ou du travail moteur qui est obligé de l'entretenir; d'autre part, les supports, qui ne sont jamais absolument inébranlables, détournent aussi à leur profit, ou plutôt à leur détriment, une certaine quantité de force vive sous forme de vibrations qui se propagent de proche en proche et vont se perdre dans la masse de la terre.

2° Dans l'immense majorité des cas, la plus grande partie du travail perdu provient de la résistance spéciale qui a reçu le nom de *frottement*, et de ses congénères.

On comprendrait difficilement l'existence de ces forces si les solides étaient absolument invariables; mais il n'en est point ainsi. Les solides se déforment, même sous l'influence des forces dont ils subissent l'action dans une machine bien conduite; et cette déformation ne peut s'accomplir que si le travail d'un effort moteur quelconque a surmonté le travail des forces intérieures qui agissent sur les molécules du solide dans son état normal.

Nous avons vu que la somme des travaux des forces inté-

rieures, dans un système quelconque, se composait de termes de la forme

$$\int f dr,$$

f représentant l'intensité de la force qui s'exerce entre deux points mobiles, et dr la variation de la distance de ces deux points.

Il y a trois cas limites tout à fait théoriques pour lesquels ce terme est nul : 1° le cas des corps parfaitement solides, parce que $dr = 0$ et par suite $\int f dr = 0$; 2° le cas des corps liquides regardés comme incompressibles et sans cohésion, parce qu'alors s'ils sont comprimés $dr = 0$; s'ils ne le sont pas, $f = 0$, et dans les deux cas, $\int f dr = 0$; 3° le cas des corps parfaitement élastiques. En effet, le travail résistant produit par l'action d'un corps sur un corps élastique est toujours détruit par le travail de signe contraire que produit ce corps en reprenant sa forme primitive. Ces trois cas étant absolument théoriques, nous aurons toujours des résistances passives dont nous devons étudier l'action.

Nous commencerons, dans ce Cours de première année, par le frottement, la résistance au roulement et la roideur des cordes; dans le Cours de la seconde année, nous terminerons cette théorie par l'étude du choc et par celle de la résistance des milieux.

§ V. — Lois du frottement.

L'expérience prouve que, quand un corps est appuyé sur un plan, et qu'on cherche, en exerçant un effort tangentiel, à faire glisser le corps sur le plan, il faut pour cela une force supérieure à une certaine limite déterminée dans chaque cas. De même, lorsque le corps a commencé à glisser sur le plan qui le supporte, on a besoin, pour entretenir son mouvement uniforme, de lui appliquer constamment une certaine force de traction, sans quoi le corps ne tarde pas à s'arrêter.

Considérons le corps au moment où il est équilibré sous

l'influence d'une force qui l'appuie sur le plan P, et d'un effort tangentiel F (*fig.* 56). La réaction du plan doit être égale et opposée à la résultante de ces deux forces. Donc ce plan, outre la réaction normale que nous avons considérée seule jusqu'ici, est susceptible d'exercer sur les corps une réaction tangentielle qui est connue sous le nom de *frottement*.

La cause physique du frottement est probablement la déformation naturelle qui se produit sur les deux corps en contact sous l'influence de la pression normale P. Le contact des deux corps ne s'effectue plus alors suivant une surface plane. L'effet de la force F, tant qu'elle reste au-dessous d'une certaine limite, est de faire varier la déformation de manière à déterminer une certaine inclinaison de la réaction du plan sur la normale. Si l'on augmente progressivement cette force F, l'équilibre ne sera plus possible et le mouvement arrivera à se produire.

L'équilibre d'un solide naturel posé sur un plan, sous l'influence des forces F, P et de la réaction R, est d'un genre tout particulier et diffère essentiellement de l'équilibre tel que nous l'avons considéré jusqu'ici. Il n'y a plus, à proprement parler, d'équations d'équilibre, du moins entre les forces extérieures, puisque nous venons de voir que l'équilibre ayant lieu sous l'action d'une force F suffisamment petite, on peut augmenter cette force jusqu'à une certaine limite sans détruire l'équilibre (*).

Ce qu'il importe de connaître dans chaque cas, ce sont les conditions qui doivent être remplies pour que l'équilibre établi soit sur le point d'être rompu dans un certain sens, c'est-à-dire la limite précise au-dessus de laquelle la force F ne saurait croître, dans des circonstances données, sans déterminer le mouvement du corps dans sa direction.

(*) Hâtons-nous de dire que cela tient à ce que, si nous augmentons la force F, la réaction R prend d'elle-même la valeur convenable pour maintenir l'équilibre dans ce nouveau cas. Ce fait est tout à fait analogue à ce qui se produit quand nous chargeons une poutre ou un plancher. Si nous augmentons la charge, l'équilibre subsiste, la réaction de la poutre augmentant d'une égale quantité, jusqu'à ce que la charge dépassant la limite de la résistance des matériaux, l'équilibre soit détruit par la rupture de l'appui.

Expériences de Coulomb.

La recherche expérimentale des lois qui lient cette limite aux diverses circonstances capables d'influer sur le phénomène a été faite d'abord par Amontons (1696), puis par Coulomb, dont les travaux sur cette question sont restés classiques (*).

Voici quelles sont les lois trouvées par cet illustre expérimentateur :

1° *Lorsque deux corps sont sur le point de glisser l'un sur l'autre, ou qu'ils glissent effectivement d'un mouvement uniforme, chacun d'eux reçoit de l'autre, en chaque élément en contact, une réaction tangentielle ou frottement dont le sens est opposé à celui du mouvement relatif acquis ou sur le point de naître.*

2° *Le frottement est proportionnel à la pression normale et indépendant de l'étendue des surfaces en contact, tant que la nature de ces surfaces et de leurs enduits n'éprouve aucune altération résultant de la pression mutuelle ou de toute autre cause.*

3° *Sous les mêmes conditions et dans les cas ordinaires de la pratique, le frottement est indépendant de la vitesse relative des corps frottants.*

Si P désigne la pression normale, F le frottement, on a, d'après les lois précédentes,

$$F = fP.$$

Le coefficient f porte le nom de *coefficient de frottement*. Il dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact, de l'enduit dont elles peuvent être revêtues, et quelquefois du sens dans lequel a lieu le glissement lorsqu'il s'agit de corps fibreux, comme le bois et certains fers à nerf.

Distinction du frottement au départ et du frottement pendant le mouvement. — Coulomb a reconnu que la force né-

(*) Des expériences plus précises, entreprises depuis par le général Morin, n'ont fait que vérifier les résultats trouvés par Coulomb.

cessaire pour rompre l'équilibre est plus grande que celle qui suffit pour entretenir le mouvement uniforme une fois acquis. C'est ce qu'on énonce en disant que le *frottement au départ* est toujours plus grand que le *frottement pendant le mouvement*. L'excès est d'ailleurs indépendant de la vitesse, puisque l'expérience constate que le mouvement d'un corps, sous l'influence de la force qui a produit le départ, est uniformément accéléré.

Il faudra donc supposer que, dans la formule

$$F = fP,$$

le coefficient f, les corps en contact restant les mêmes, doit être considéré comme ayant deux valeurs légèrement différentes, suivant qu'on étudie les conditions de l'équilibre sur le point d'être rompu, ou celles d'un mouvement uniforme dont la vitesse sera d'ailleurs indifférente.

Toutes choses égales d'ailleurs, le frottement est d'autant moindre que les surfaces sont plus polies; mais, quel que soit le poli donné préalablement, le frottement est toujours plus grand lorsque les deux corps commencent à glisser l'un sur l'autre que lorsqu'ils ont pu se roder par un glissement prolongé. Ainsi, une machine neuve a toujours beaucoup moins de douceur dans sa marche qu'une machine fonctionnant depuis un certain temps.

Ceci suppose toutefois que les surfaces frottantes ont été constamment bien graissées. Sans cette précaution les surfaces se grippent, il s'en détache de petits fragments qui les sillonnent de plus en plus profondément, le frottement augmente avec rapidité, et l'échauffement qui en résulte peut aller jusqu'à faire rougir les corps et à les enflammer s'ils sont combustibles.

Observations relatives aux lois du frottement.

Ces lois ont besoin d'être bien comprises pour être appliquées convenablement.

1° Par exemple, nous avons dit que le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact; mais il faut, pour que cette loi soit vraie, que la surface de l'un des corps

ne devienne pas assez petite ou la pression par unité de surface assez forte pour faire pénétrer l'un des corps dans l'autre, ou seulement pour expulser les enduits. C'est ce qui arrivera nécessairement si l'on diminue par trop les dimensions de l'une des surfaces frottantes, si, par exemple, on va jusqu'à prendre pour cette surface le tranchant de la lame d'un couteau.

2° Le frottement au départ est aussi à peu près indépendant du temps pendant lequel les surfaces ont été maintenues en contact, surtout quand il s'agit des métaux et des corps durs en général.

Pour les bois, cependant, ce frottement paraît augmenter au bout de quelques minutes de repos pour atteindre très-vite un maximum. Ce fait tient probablement à la flexibilité et à l'élasticité des fibres du bois, qui cèdent plus facilement que les molécules métalliques à l'influence d'une pression un peu prolongée. Cette influence serait encore plus saillante si les enduits avaient pu être expulsés ou altérés d'une manière quelconque; elle est évidemment du même ordre que la différence entre le frottement au départ et le frottement pendant le mouvement.

3° Enfin on a annoncé, contrairement aux lois de Coulomb, que le frottement diminue quand la vitesse augmente. Il est facile d'avoir l'explication des faits observés, qui, d'ailleurs, se rapportent tous au cas où il y a un enduit interposé.

Effets des enduits. — Le frottement qui s'exerce par l'intermédiaire d'un enduit dépend de la vitesse des corps en contact et aussi de l'étendue des surfaces; mais l'effet de ces deux éléments est indirect, en ce sens qu'ils influent principalement sur le mode d'action de l'enduit, et par conséquent sur la grandeur du coefficient de frottement.

Dans toutes les expériences relatives au frottement des corps graissés, il faut avoir soin de s'assurer que les enduits ne sont ni altérés ni expulsés. Si l'on veut, par exemple, comparer les divers enduits au point de vue de l'atténuation du frottement, il faut se garder de faire cette comparaison *toutes choses égales d'ailleurs*. On doit au contraire se préoccuper de mettre chaque substance dans les conditions qui lui sont le plus favorables, et ne l'employer dans la pratique que lors-

qu'il sera possible de réaliser ces conditions, au moins dans une certaine mesure.

On peut poser comme principe général que *le meilleur enduit est le plus fluide*, c'est-à-dire qu'il y a avantage, quand on le peut, à remplacer la graisse par l'huile, l'huile par l'eau, enfin l'eau par l'air, ce qui revient à supprimer tout enduit. Mais ceci suppose évidemment la condition que la vitesse soit assez grande dans chaque cas pour ne pas expulser l'enduit expérimenté. Or, il faut une vitesse assez considérable pour que les pièces gardent un enduit fluide comme l'eau, ou même laissent entre elles une gaîne d'air; dans ces conditions, M. Hirn a vu avec étonnement le frottement presque complétement supprimé entre deux pièces frottant sans enduit avec une vitesse énorme. Cette suppression était due à l'action du coussinet d'air interposé, matière parfaitement élastique.

Les expériences récentes faites sur le chemin de fer glissant de M. Girard confirment ces indications relatives à la proportion considérable dans laquelle le frottement se trouve réduit par l'interposition de l'eau.

Les voitures de M. Girard reposent sur des rails en fonte au moyen de 4 patins de $0^m,26$ de largeur sur $0^m,80$ de longueur. Dans ces conditions, le coefficient de frottement est

$$f = 0,52.$$

Au moyen d'une pression suffisante, on force de l'eau à s'interposer entre les deux surfaces glissantes; alors le coefficient est réduit à

$$f' = 0,004.$$

On obtiendrait une atténuation encore plus grande si l'on substituait l'air à l'eau, en s'arrangeant toujours de manière à forcer l'air à s'interposer entre les surfaces en contact.

Ainsi, malgré les avantages de la fluidité, on devra employer un enduit d'autant plus consistant que les surfaces seront soumises à des pressions plus considérables. Et le progrès consistera dans chaque cas à chercher des dispositions qui permettent d'augmenter la fluidité de l'enduit sans tomber dans des inconvénients d'un autre genre.

Ces détails de graissage sont au nombre des questions dont

l'importance pratique est le plus considérable. La substitution de l'huile à la graisse et du graissage continu au graissage intermittent constitue un véritable progrès, soit dans les machines fixes, soit dans les locomotives.

Le tableau suivant est destiné à donner une idée de la grandeur du coefficient f dans les conditions qui se présentent le plus habituellement dans les machines.

I. Coefficients du frottement des surfaces planes lorsqu'elles ont été quelque temps en contact.

Chêne sur chêne	Fibres parallèles	Surfaces sans enduit.	0,62
		Surfaces frottées de savon sec	0,44
	Fibres perpendiculaires	Surfaces sans enduit.	0,54
		Surfaces mouillées d'eau	0,71
	Bois debout sur bois à plat.	Surfaces sans enduit.	0,43
Fer sur chêne	Fibres parallèles au mouvement	Surfaces sans enduit.	0,62
		Surfaces mouillées d'eau	0,65
		Surfaces graissées	0,15
Fonte sur fonte		Surfaces un peu onctueuses	0,16
Fer sur fonte		Surfaces un peu onctueuses	0,19

II. Coefficients du frottement des surfaces planes en mouvement.

Chêne sur chêne	Fibres parallèles	Surfaces sans enduit.	0,48
		Surfaces frottées de savon sec	0,16
	Fibres perpendiculaires	Surfaces sans enduit.	0,34
		Surfaces mouillées d'eau	0,25
	Bois debout sur bois à plat.	Surfaces sans enduit.	0,19
Frêne, sapin, hêtre, poirier sauvage, sorbier : sur chêne	Fibres parallèles	Surfaces sans enduit	0,36 à 0,40
Fer ou chêne	Fibres parallèles en mouvement	Surfaces sans enduit.	0,62
		Surfaces mouillées d'eau	0,26
		Surfaces frottées de savon sec	0,21
Fer sur fonte et sur bronze		Surfaces un peu onctueuses	0,18

Fonte sur bronze		Surfaces un peu onctueuses	0,15
Chêne, orme, charme, fonte, fer, acier, bronze	L'un sur l'autre, ou sur eux-mêmes	Enduit ordinre, suif, saindoux	0,07 à 0,08
		Enduit sans cesse renouvelé	0,04 à 0,05
		Surfaces légèrement onctueuses	0,15

III. Coefficients du frottement des tourillons sur leurs coussinets.

	graissage ordinaire.		graissage continu.	
Fer sur fonte ou sur bronze, graissage d'huile d'olive, de saindoux ou de suif	0,07 à 0,08		0,04 à 0,05	
Fonte sur fonte ou sur bronze, surfaces onctueuses	0,14 à 0,16		"	"
Fer sur bronze, surfaces très-peu onctueuses et commençant à se roder	"	0,25	"	"

Travail du frottement.

Dans l'équation des forces vives, nous avons à considérer le travail du frottement qui devra entrer dans les équations comme s'ajoutant au travail résistant utile pour reproduire l'équivalent du travail moteur dépensé.

Pour un espace ds parcouru par un corps mobile glissant sur un solide fixe dans le sens du plan de contact, le travail élémentaire du frottement est $fN\,ds$.

Si les deux corps sont mobiles, il y aura à considérer les deux forces de frottement qui ont pour valeur commune fN et qui agissent sur chaque corps en sens inverse de son mouvement relativement à l'autre, chacune d'elle produisant du travail (*fig.* 57).

Supposons que les mouvements des deux corps s'effectuent dans le sens des flèches 1, ds et ds' étant les chemins respectivement parcourus dans cette direction, qui sera celle du mouvement relatif du corps A si ds est $> ds'$.

Si nous considérons le mouvement du corps A, le frottement produira un travail égal à $fN\,ds$, qui devra être affecté du signe — puisque la direction de fN est inverse de celle de ds; ce sera donc un travail résistant. Au contraire, le frottement

de B sur A produira sur ce premier corps un travail positif $fN\,ds'$ qui se retranchera du travail résistant $fN\,ds$, de sorte qu'en somme le travail résistant produit par le frottement sera en valeur absolue

$$fN\,(ds - ds'),$$

$ds - ds'$ étant positif d'après l'hypothèse que nous avons faite. Si $ds - ds'$ devient négatif, l'équation n'a plus lieu. Il faudra changer le sens du frottement, et au lieu d'avoir $fN\,(ds - ds')$ on a

$$fN\,(ds' - ds),$$

de sorte que le travail du frottement est encore négatif.

Remarquons ici que le travail développé par le frottement sur l'un des deux corps est positif; le frottement joue donc relativement à ce corps le rôle de force motrice. Les transmissions de mouvement par cylindres, cônes ou plateaux de friction sont fondées sur cette propriété,

§ VI. — Équilibre des machines simples en ayant égard au frottement.

La connaissance des lois qui précèdent nous permet d'introduire la considération du frottement dans l'étude de l'équilibre des principales machines et de leur mouvement uniforme.

Quand nous nous occuperons de l'équilibre, il faudra toujours supposer que l'équilibre est sur le point d'être rompu dans le sens de la puissance, car autrement le problème ne serait pas déterminé.

Connaissant toutes les forces qui agissent sur un solide donné, décomposons toutes ces forces normalement et parallèlement à la face par laquelle le corps dont on cherche les conditions d'équilibre est en contact avec un autre corps sur lequel il est susceptible de glisser.

Soit N la somme des composantes normales, N représentera précisément la réaction normale de l'appui; et s'il n'y avait pas de frottement, il faudrait pour l'équilibre que la somme des composantes tangentielles fût rigoureusement égale à zéro.

Nous savons maintenant que cette condition n'est pas indis-

pensable (*). Du moment que l'appui est soumis à une pression N, il est susceptible de développer une réaction tangentielle dont la limite est représentée par $f\mathrm{N}$. Il suffira donc pour l'équilibre que la somme T des composantes tangentielles soit plus petite que cette limite $f\mathrm{N}$, et en posant l'équation

$$\mathrm{T} = f\mathrm{N},$$

nous aurons l'*équation de l'équilibre sur le point d'être rompu dans la direction de la force* T.

Alors la réaction R de l'appui est la résultante de la réaction normale N et de la réaction tangentielle $f\mathrm{N}$, dont la direction est opposée à celle du mouvement sur le point de naître. Cette réaction, *pour l'équilibre près d'être rompu*, fait donc avec la normale un angle φ déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{f\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = f.$$

Quant à sa grandeur, on l'obtient par les formules ordinaires

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{N}^2(1 + f^2),$$

d'où

$$\mathrm{R} = \mathrm{N}\sqrt{1 + f^2} = \frac{\mathrm{N}}{\cos\varphi},$$

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{1 + f^2}} = \mathrm{R}\cos\varphi,$$

et par suite

$$\mathrm{F} = \frac{f\mathrm{R}}{\sqrt{1 + f^2}} = f_1\mathrm{R} = \mathrm{R}\sin\varphi,$$

(*) On voit que la considération du frottement n'introduit aucune nouvelle condition d'équilibre, puisque, si l'équilibre a déjà lieu sans le frottement, c'est que la composante tangentielle des forces est nulle. Au contraire, le frottement pourra établir un équilibre qui sans lui n'existerait pas, puisqu'il suffit que la force tangentielle soit inférieure à une certaine limite pour que le frottement empêche tout déplacement de se produire. C'est ainsi qu'un système peut être en équilibre sans que les conditions trouvées en statique soient rigoureusement satisfaites, rigueur qu'il serait pour ainsi dire impossible d'obtenir. Pourvu que ces conditions soient à peu près remplies, et que la somme des travaux virtuels des forces soit peu différente de zéro, l'introduction des travaux virtuels des forces de frottement suffira pour rendre cette somme nulle.

en désignant par f_1 le sinus de l'angle φ dont f représente la tangente.

f_1 est généralement peu différent de f, car l'angle φ est toujours assez petit.

Quoi qu'il en soit, on peut donner de la force du frottement les deux expressions suivantes :

$$F = fN, \qquad F = f_1 R,$$

suivant que l'on connaît la pression normale N ou la réaction totale R.

Application au plan incliné.

Supposons un corps A posé sur un plan incliné et soumis à l'action de son poids et d'une force Q qui s'oppose à sa descente (*fig.* 58). Quelles sont les conditions d'équilibre? Ces conditions sont au nombre de trois.

1° Il ne faut pas qu'il y ait écrasement du corps; nous avons dit précédemment tout ce que nous pouvons dire sur cette question, nous n'y reviendrons pas.

2° Il ne faut pas qu'il y ait renversement ou rotation du corps autour de l'une des arêtes du polygone d'appui sur ce plan, ce qui exige, comme nous avons déjà eu occasion de le dire, que la résultante des forces qui agissent sur lui vienne rencontrer le plan incliné dans l'intérieur du polygone des points d'appui.

3° Enfin le glissement du corps le long du plan doit être impossible; de là une dernière condition sur laquelle nous n'avons pas insisté : nous y revenons. Cette condition serait, sans l'existence du frottement, que la résultante de toutes les forces qui s'exercent en dehors du plan fût normale à ce plan et qu'elle tendît à appuyer le corps sur le plan.

Si l'on tient compte du frottement il n'y a plus, à proprement parler, de condition de nature à s'exprimer par des équations entre les forces extérieures indépendamment des réactions; il faut, pour préciser la question, demander que le mouvement soit sur le point de naître dans un sens déterminé.

Supposons, par exemple, que le mouvement soit sur le point de naître dans le sens descendant, c'est-à-dire que la force Q

soit tout juste suffisante pour retenir le corps sur le plan (*fig.* 59).

La réaction totale est, dans ces conditions, une force R faisant avec la normale AN un angle φ dans le sens ascendant. Il faut que les forces P, Q, R se fassent équilibre, c'est-à-dire que chacune d'elles soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Donc, étant donné l'angle φ, l'inclinaison du plan, le poids P, on peut trouver quelle est la force qu'il faut appliquer dans une certaine direction pour retenir le corps sur le plan. Il suffit de décomposer P en deux forces dirigées l'une suivant la direction donnée pour la force Q, l'autre suivant la ligne faisant avec la normale au plan incliné l'angle φ dans le sens convenable. On voit que la force Q est représentée par une ligne partant du point P et terminée à la ligne AR'; elle a sa plus petite valeur possible lorsque sa direction est perpendiculaire à celle de la réaction R, c'est-à-dire lorsqu'elle fait avec le plan incliné et dans l'intérieur de ce plan un angle égal à φ. Si l'on veut que ce minimum soit égal à zéro, il faut que l'inclinaison du plan sur l'horizon soit égale à φ; alors le corps ne tend pas à glisser.

Si l'inclinaison descendait au-dessous de zéro, c'est-à-dire de ce que l'on appelle l'*angle de frottement*, il faudrait appliquer au corps une force descendante indépendamment de son poids pour le faire descendre le long du plan.

Si le corps tend à monter (*fig.* 60), c'est-à-dire si la force Q est telle, qu'une force un peu plus grande fasse monter le corps, il faudra placer la réaction R à gauche de la normale : les conditions d'équilibre sont d'ailleurs les mêmes; le minimum est différent.

En résumé, les conditions auxquelles doivent satisfaire pour l'équilibre les forces appliquées à un corps pressé contre un plan fixe se réduisent aux deux suivantes :

1° La résultante de ces forces doit passer assez loin de toutes les arêtes de contact pour que l'écrasement ne soit pas à craindre, eu égard à la nature des matériaux.

2° Elle doit faire, avec la normale au plan d'appui, un angle inférieur à l'*angle de frottement*.

Application au treuil.

Considérons un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe. Sous l'influence des forces directement appliquées au corps tournant et des réactions de ses appuis, le système est en équilibre, mais le mouvement est sur le point de naître dans un certain sens. Cherchons les conditions qui doivent être remplies pour cet équilibre particulier en tenant compte des frottements de toute espèce qui se manifestent aux points de contact des parties mobiles avec les différents appuis fixes.

Si l'on se reporte aux leçons consacrées à la description des organes de machines, on sait qu'on assure l'invariabilité des axes de rotation de la manière suivante : on tourne exactement deux parties spéciales de l'arbre que l'on appelle des tourillons; ces tourillons frottent sur des coussinets bien graissés contenus dans des espèces de boîtes (paliers ou colliers) qui sont elles-mêmes solidement fixées au bâti général de la machine, et qui s'opposent à tout déplacement transversal de l'axe.

Il faut encore rendre le déplacement longitudinal impossible. Il y a plusieurs procédés que nous avons aussi décrits précédemment. C'est au moyen d'un pivot portant sur une crapaudine que l'on produit cet effet dans le cas d'un arbre vertical, et au moyen d'un épaulement convenablement placé dans le cas d'un arbre horizontal (*fig.* 64 et 65).

Enfin certains arbres, comme les arbres de tour en fer, tournent sur pointes, c'est-à-dire que les tourillons sont remplacés par des pointes coniques tournant dans des trous pratiqués dans des plaques d'acier qui s'opposent en même temps aux déplacements longitudinaux et transversaux.

Frottement des tourillons. — Occupons-nous d'abord du frottement des tourillons sur leurs coussinets, et supposons que les deux forces P et Q, qui agissent sur la machine, soient situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, ce qui supprime toute tendance au mouvement longitudinal (*fig.* 61).

Je puis remplacer les deux forces P et Q chacune par une force et un couple, c'est-à-dire que je puis les supposer appliquées toutes deux à l'axe, en introduisant deux couples dont

les moments seront Pp et Qq, et qui ne presseront pas l'arbre sur ces supports. Cela fait, je décompose la force Q en deux autres mQ, $m'Q$, appliquées aux deux tourillons. J'opère de même pour la force P, et soient nP, $n'P$ ses composantes. On a évidemment

$$m + m' = 1, \quad n + n' = 1.$$

Considérons l'un des tourillons, celui, par exemple, auquel sont appliquées les forces nP et mQ (*fig.* 62) (*). Ce tourillon repose dans l'œil du coussinet qu'il touche en un certain point. Il faut évidemment, pour qu'il y ait équilibre, que la résultante des forces qui lui sont appliquées passe par le point de contact du tourillon sur le coussinet, sans quoi il y aurait roulement et déplacement du point de contact. Il faut en outre que cette résultante soit telle, que si on la décompose en deux, dirigées l'une suivant la normale, l'autre suivant la tangente, cette dernière soit égale à la force normale multipliée par le coefficient de frottement f, ce qu'on peut énoncer encore en disant que la résultante fait avec la normale l'angle de frottement.

Or, si R désigne cette résultante appliquée au point de contact du tourillon, on a

$$R^2 = m^2Q^2 + n^2P^2 + 2mQ.nP\cos\overline{mQ.nP}.$$

Le frottement est égal à f_1R, de sorte que, pour un tour complet du tourillon, il y aura un travail résistant représenté par le produit

$$2\pi f_1 R\rho,$$

ρ étant le rayon du tourillon. On aura à l'autre tourillon un travail analogue dont l'expression sera

$$2\pi f_1 R'\rho,$$

en supposant, ce qui a toujours lieu, que les rayons des deux tourillons soient égaux, R' étant donnée par une équation de même forme que celle qui détermine R,

$$R'^2 = m'^2Q^2 + n'^2P^2 + 2m'Q.n'P\cos\overline{m'Q\,n'P}.$$

(*) La *fig.* 62 montre seulement la résultante R et ses deux composantes, l'une tangentielle au tourillon, l'autre normale.

Donc, enfin, l'équation du travail deviendra, en introduisant ce travail du frottement comme s'ajoutant au travail résistant utile,

$$Pp - Qq - f_1(R + R')\rho = 0 \text{ (*)}.$$

On voit que le travail du frottement diminue quand on diminue le rayon ρ des tourillons. Donc, quand on le peut, il y a avantage à avoir des arbres tournant sur pointes. Cependant la diminution du rayon doit avoir une limite pour deux causes : d'abord, parce que les tourillons doivent pouvoir porter l'arbre, et ensuite parce que, à partir d'une certaine limite, quand on diminue ρ, on augmente en même temps beaucoup le facteur f_1 par suite de l'expulsion des enduits; de sorte qu'on perd plutôt qu'on ne gagne. C'est à la pratique de reconnaître quelle est, dans chaque cas, la solution la plus avantageuse.

L'équation du travail écrite précédemment permet de trouver la puissance P nécessaire pour tenir en équilibre une résistance donnée Q. Il faut, dans cette équation, remplacer R et R′ par leurs valeurs. Or, R et R′ sont deux radicaux sous lesquels P entre au carré. Donc, si l'on voulait faire disparaître les radicaux pour trouver P, on arriverait à une équation du quatrième degré impossible à résoudre par les méthodes élémentaires.

Ce n'est pas la méthode employée habituellement; on peut opérer de deux manières :

1° Par approximations successives, en prenant pour valeur approchée de P celle qu'on obtient en négligeant le frottement, c'est-à-dire en posant

$$Pp = Qq.$$

On se servira ensuite de cette première valeur pour calculer la correction qui représente le travail du frottement et en déduire une seconde valeur plus approchée de P, et ainsi de suite.

2° Par une autre méthode indiquée par le Général Poncelet

(*) Pour appliquer ceci à la poulie, il faut, dans le travail du frottement, prendre le rayon de l'axe de la poulie si cet axe est mobile, et le rayon de l'œil de la poulie si l'axe est fixe.

et qui peut servir dans beaucoup de cas analogues. Elle consiste à trouver une fonction rationnelle équivalente à une fonction radicale. D'abord, tout radical de la forme

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}$$

peut se mettre sous la forme

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

En effet, on a

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta} = \sqrt{(x - y\cos\theta)^2 + y^2\sin^2\theta}.$$

Si l'on cherche ensuite à égaler le radical $\sqrt{a^2 + b^2}$ à une expression de la forme $a\alpha + b\beta$, on arrive à une équation à laquelle il n'est pas possible de satisfaire en laissant a et b quelconques; mais on peut trouver les valeurs les plus convenables des coefficients α et β, de manière que l'équation soit vérifiée avec la plus grande approximation possible.

On trouve ainsi :

1° a et b étant quelconques,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0,83\,(a + b) \text{ à } \frac{1}{6} \text{ près};$$

2° Si l'on sait que $a > b$, on a

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0,96\,a + 0,40\,b \text{ à } \frac{1}{25} \text{ près};$$

3° Si enfin a est $> 4b$, on peut poser

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0,996\,a + 0,123\,b \text{ à } \frac{1}{266} \text{ près}.$$

Frottement des épaulements. — Il nous reste, pour avoir étudié complétement la question des arbres, à examiner le frottement sur les épaulements. Supposons qu'il y ait dans l'axe une force T dirigée dans le sens de la longueur et qui tende à appuyer le corps contre un épaulement (*fig.* 63).

L'aire d'un élément de la surface frottante est

$$r\,d\theta\,dr.$$

Soit S la surface totale, et supposons que la pression T se

répartisse également sur la surface; la pression sur l'élément considéré sera

$$\frac{T}{S} r\,d\theta\,dr,$$

et le frottement particulier correspondant à cet élément sera

$$\frac{T}{S} f r\,d\theta\,dr.$$

Le moment de ce frottement autour de l'axe de l'arbre sera évidemment

$$\frac{T}{S} f r^2\,d\theta\,dr,$$

d'où, pour le moment total, on a la somme des moments élémentaires

$$f\frac{T}{S}\int\int r^2\,d\theta\,dr.$$

Intégrant d'une part de o à 2π, de l'autre entre les limites r_0 et r, il vient

$$2\pi f\frac{T}{S}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r_0^3}{3}\right).$$

Or,

$$S=\pi(r^2-r_0^2),$$

donc le moment est

$$\frac{2T f(r^2+rr_0+r_0^2)}{3(r+r_0)}.$$

En faisant $r_0=0$, on aurait la formule du frottement des pivots (*).

(*) Il arrive quelquefois qu'en vue de diminuer le *travail* du frottement, on termine l'extrémité inférieure du pivot par une surface convexe, ainsi que le fond de la crapaudine (*fig.* 65); il faut alors mettre pour r le rayon du petit cercle de contact, qui a toujours une certaine étendue à cause de la compression et de l'usure.

On diminue ainsi, non le *frottement* lui-même, qui est indépendant de l'étendue des surfaces, mais son *travail*, qui dépend du bras de levier moyen, lequel est proportionnel à r.

Effet d'une force parallèle à l'axe et en dehors de cet axe. — On peut encore avoir une force F agissant parallèlement à l'axe, mais hors de cet axe (*fig.* 66). On la remplacera par une force F_1 agissant dans l'axe et un couple (F_1, F_2) parallèle à cet axe. On pourra tourner ce couple comme on voudra dans son plan, et faire en sorte que ses deux forces passent respectivement par les points d'appui des deux tourillons.

Une pareille force augmentera donc à la fois le frottement sur les tourillons, et le frottement sur les épaulements.

Frottement des excentriques et des boutons de manivelle.

Un bouton de manivelle est un tourillon qui se meut dans un coussinet mobile. Le travail du frottement qui se développe dans son mouvement se détermine, comme pour un tourillon, en considérant le mouvement relatif du bouton dans le coussinet mobile.

L'excentrique n'étant qu'une manivelle dont le bouton a été agrandi de manière que sa surface enveloppe l'axe de rotation de l'arbre, le travail du frottement se détermine pour un excentrique comme pour une manivelle. Il est évident que le travail du frottement dans la manivelle est de beaucoup moins considérable que dans l'excentrique, à cause du facteur qui représente le chemin parcouru; aussi n'emploiera-t-on ce dernier organe que lorsqu'il ne devra être soumis qu'à de petites pressions. Dans le cas d'efforts considérables, on se servira plutôt d'une manivelle.

§ VII. — De l'arc-boutement.

L'introduction du frottement dans la théorie de l'équilibre et du mouvement uniforme d'une machine quelconque se fait en suivant la marche dont nous venons de donner deux exemples. Je veux seulement insister sur les cas où le frottement empêche, d'une manière absolue, certains mouvements géométriques, ce que le calcul nous apprend en nous disant qu'il faudrait, pour les produire, une force infinie. On dit alors qu'il y a *arc-boutement*.

Équilibre du coin.

La presse à coin consiste en un prisme triangulaire, qu'on enfonce entre deux pièces qu'il s'agit d'écarter en exerçant une forte pression sur les matières qui s'opposent à cet écartement (*fig.* 67).

Soit P l'effort exercé sur la tête du coin, c'est-à-dire sur la face horizontale supérieure, on demande quels sont les efforts qui en résultent sur les faces latérales, efforts qui sont égaux et directement opposés aux réactions des corps pressés sur le coin.

Si l'on néglige le frottement, ces réactions sont normales aux faces correspondantes, et il faut pour l'équilibre que les trois forces P, N, N', auxquelles est soumis le coin, se rencontrent en un même point A, et que, de plus, chacune d'elles soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres. De sorte que, si on décompose la force P en deux autres AD, AC dirigées suivant les normales aux faces latérales, les longueurs AD, AC représentent les réactions exercées sur ces faces. Or, le triangle ABC est semblable au triangle section droite du coin; donc on peut énoncer le théorème en disant que *les pressions sont entre elles comme les côtés du triangle section droite du coin.*

Quand on veut tenir compte du frottement, il faut considérer les réactions comme inclinées sur les plans de contact. A l'instant où le coin est sur le point de descendre, ces réactions font avec la normale un angle égal à φ, du côté du haut.

Supposons le coin isocèle (*fig.* 68), et soit 2α l'angle au sommet. Le coin est serré entre deux corps soumis chacun à une force horizontale. Dans l'état d'équilibre, les deux forces latérales ont une valeur commune Q, sans quoi tout le système se déplacerait dans le sens de la plus grande. Cette condition est la seule qui soit fournie par l'équilibre de l'ensemble.

Cela posé, l'équilibre du coin donne l'équation

$$P = 2N \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi},$$

à laquelle il faut ajouter, pour l'équilibre de chacun des solides latéraux,

$$Q = N \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi};$$

on a donc

$$P = 2Q \operatorname{tang}(\alpha + \varphi).$$

Cette relation donne $P = \infty$ pour $\alpha = 90^\circ - \varphi$. Le coin est alors très-obtus et incapable de s'enfoncer (*fig.* 69) (*).

Supposons maintenant le mouvement sur le point de naître dans l'autre sens, c'est-à-dire le coin près de remonter sous l'influence des efforts latéraux. Pour avoir les formules qui conviennent à ce cas, il faut changer les signes des forces tangentielles, ou celui de l'angle φ dans le résultat final. On a

$$P = 2Q \operatorname{tang}(\alpha - \varphi).$$

Pour $\alpha = \varphi$, on a $P = 0$. Si donc l'angle au sommet est plus petit que le double de l'angle de frottement (*fig.* 70), il n'y aura pas besoin de force pour maintenir le coin enfoncé, quels que soient les efforts latéraux. Tel est le principe de la *presse à coin*.

Équilibre de la vis.

Considérons (*fig.* 71) une vis à filets carrés, chargée d'un poids Q, et sur la tête de laquelle est appliqué un couple horizontal, dont le moment est Pp. L'écrou est maintenu fixe, et on suppose que la vis soit sur le point de monter sous l'effort du couple Pp, malgré la résistance Q.

Dans ces conditions, l'équilibre a lieu entre les forces directement appliquées à la vis, et les réactions qu'elle reçoit de l'écrou. Soit r le rayon de l'hélice moyenne, i son inclinaison à l'horizon; nous admettrons que les actions mutuelles R qui s'exercent aux divers points de contact de la vis et de l'écrou sont toutes égales, et disposées symétriquement dans des plans

(*) On fait abstraction ici du frottement entre les blocs A et B et leurs supports.

tangents au cylindre sur lequel est tracée l'hélice moyenne. Ces réactions (*fig.* 72) font un angle φ avec la normale aux surfaces en contact, par suite, un angle égal à $i + \varphi$ avec la génératrice du cylindre; et l'on a pour l'équilibre de la vis les équations

$$Q = \sum R \cos(i + \varphi), \quad Pp = \sum R r \sin(i + \varphi);$$

d'où, en éliminant $\sum R$,

$$Pp = Qr \operatorname{tang}(i + \varphi).$$

Pour

$$i + \varphi = 90^\circ,$$

le moment Pp est infini, ce qui montre qu'il n'est pas possible de vaincre le frottement qu'une charge, aussi faible qu'on le voudra, détermine sur une vis à pas très-allongé.

On passe au cas du mouvement descendant en changeant le signe de φ dans les équations précédentes. Si l'on résout l'équation ainsi obtenue par rapport à Q, qui joue dans le cas actuel le rôle de puissance, on trouve

$$Q = \frac{Pp}{r} \cot(i - \varphi);$$

Q est infini pour $i = \varphi$. Donc, pour une vis à filets peu inclinés, ce qui est le cas des vis de pression, aucune force dirigée dans le sens de l'axe ne pourrait desserrer la vis. Pour $i < \varphi$, la pression Q étant donnée, on trouve pour Pp une valeur négative, ce qui indique que, pour desserrer la vis, il faut lui appliquer un couple agissant dans le même sens que la force Q, seulement l'effort à exercer est assez faible.

On trouverait des résultats du même genre en supposant la vis fixe et l'écrou mobile. Dans les cas ordinaires, il est tout à fait impossible de desserrer un écrou par un effort de traction, tandis qu'un couple assez petit est suffisant.

Quand on craint que des vibrations répétées n'amènent ce résultat à la longue, on emploie un contre-écrou, dont l'effet est d'empêcher l'écrou proprement dit de tourner, ce qui ne pourrait se faire sans soulever le contre-écrou.

Prisons des bocards.

Soit AB (*fig.* 73) une tige de pilon dirigée dans son mouvement par quatre guides. Cette tige est armée d'un mentonnet sur lequel s'exerce l'action de la came. Soit N la pression de la came perpendiculaire au mentonnet, Q le poids du bocard et de la tige. Cherchons les conditions d'équilibre qui conviennent au cas où le mouvement est sur le point de naître dans le sens de la puissance de P (*).

Étudions géométriquement le phénomène. L'effet de la force P sera d'abord d'appuyer la tige aux points a et a' et de lui faire quitter les deux autres guides, au contact desquels il n'y aura aucune pression, partant aucun frottement. Donc l'équilibre a lieu sous l'influence des forces P, Q, des réactions normales et des réactions tangentielles des points a et a', ces dernières étant dirigées vers le bas de la figure.

Projetons sur la verticale, nous aurons

$$P = 2fN + Q;$$

prenons les moments par rapport au point O pris sur l'axe de la tige, nous trouverons

$$Pb = Nl;$$

en éliminant N entre ces équations, nous aurons

$$P = Q + 2f\frac{Pb}{l},$$

d'où

$$P = \frac{Ql}{l - 2fb} = Q + \frac{2fbQ}{l - 2fb}.$$

Le second terme mesure l'influence du frottement; il peut devenir infini si l'on a

$$l = 2fb;$$

alors le glissement est impossible, et l'équilibre a lieu entre la puissance et la résistance par l'intermédiaire de réactions

(*) On fait encore abstraction ici du frottement de la came sur le mentonnet.

qui font avec les normales aux surfaces pressées des angles plus petits que l'angle du frottement. Ce genre d'équilibre particulier s'appelle *arc-boutement*.

PREMIER EXEMPLE. — *Valet de menuisier.* — On connaît cet instrument en fer qui sert au menuisier pour fixer sur son établi le bois qu'il travaille (*fig.* 74).

L'établi est percé d'un trou dans lequel on introduit la pièce en fer V, qu'on enfonce d'un coup de maillet. Le morceau de bois *mn* se trouve alors très-solidement assujetti; c'est-à-dire que, quelque grand que soit l'effort P qu'il exerce pour soulever le valet, tout mouvement de ce genre est impossible. Au contraire, on desserre facilement le tout par un coup frappé en K ou en L dans la direction de la flèche. Cherchons les conditions pour que le mouvement soit sur le point de naître dans le sens ascendant, sous l'influence de la force P et du poids Q appliqué en G.

Nous aurons deux forces extérieures, l'une Q, le poids du valet, l'autre P, la réaction de la pièce de bois pressée. Les forces P et Q ont pour résultante une force S qui leur est parallèle et située du côté de la plus grande P. Il faut pour l'équilibre que les réactions R et R′ se coupent sur la direction de cette force, chose qui n'est pas possible avec les dimensions ordinaires.

Donc le mouvement dans le sens ascendant n'est pas possible. Alors, dans l'équilibre comme il est établi, les réactions ne font plus avec la normale un angle φ. Elles font un angle plus petit et se disposent de manière que leurs directions vont précisément se couper sur la direction de S, et que la résultante de ces réactions est égale et directement opposée à S. Si l'on exerce au point K une force ascendante détruisant l'effet de la force Q et remplaçant cette force par une autre en sens contraire, on déplacera la résultante S et on l'amènera au point H, où se croisent les réactions dont l'inclinaison sur la normale est celle qui convient à la rupture de l'équilibre. Ainsi se trouve desserré le valet.

DEUXIÈME EXEMPLE. — *Encliquetage à frottement.* — Les mêmes principes nous expliqueront comment on exécute, ainsi que nous l'avons dit en Cinématique, des encliquetages fondés sur la propriété de l'arc-boutement.

Soit AB (*fig.* 75) une tige qui ne peut que glisser suivant sa longueur. Une came C, mobile autour du point O, est constamment pressée contre AB par l'action d'un ressort DE dont l'extrémité E est fixe. Si l'on cherche à faire glisser AB dans le sens de la flèche, la came ne s'y opposera pas ou du moins ne fera que développer en F un frottement qu'il sera facile de vaincre. Mais si l'on veut donner à AB un mouvement en sens contraire, la came empêchera ce mouvement de se produire. S'il y avait glissement de AB sur la came dans ce nouveau sens, la came éprouverait en F une action totale dirigée suivant une ligne FH faisant avec la normale FG un angle égal à l'angle de frottement. Mais le point O est choisi de manière à se trouver à l'intérieur de l'angle GFH : la came ne pourrait donc pas rester immobile sous l'action de la force dirigée suivant FH, puisque cette force et le ressort DE tendraient l'un et l'autre à la faire tourner dans le même sens autour du point O.

Cet encliquetage peut être appliqué à un mouvement de rotation. AB est remplacé par un anneau circulaire à l'intérieur duquel agissent plusieurs cames telles que C, disposées régulièrement au centre de cet anneau. C'est l'encliquetage Dobo (voir *Cinématique*, p. 292 et *fig.* 228 *bis*).

§ VIII. — Résistance au roulement.

Lorsqu'un cylindre pesant roule uniformément sur une surface plane et horizontale, les deux corps éprouvent, dans le voisinage du point de contact, des déformations plus ou moins permanentes. De là un travail résistant dû aux actions moléculaires qui se développent entre les deux corps, et par conséquent il faut une force exerçant un certain travail moteur pour entretenir le mouvement uniforme du rouleau. De même, pour rompre l'équilibre supposé établi, il faut une force dont le moment, par rapport à l'arête de contact, axe instantané de la rotation qui doit se produire, soit précisément égal au moment des actions mutuelles dont le siége est, eu égard à la déformation, en dehors de cette arête géométrique. Ces actions portent le nom de *résistance au roulement*. Cette résistance est généralement très-faible; cependant il est utile de con-

naître les lois qui la régissent, pour savoir quelle est son influence dans chacun des cas où elle se trouve mise en jeu (*), et de s'assurer si cette influence est négligeable. Coulomb a le premier déterminé expérimentalement les lois de la résistance au roulement.

Considérons (*fig.* 76) deux madriers horizontaux séparés par un intervalle vide. Sur ces madriers se trouve posé un rouleau en bois de gaïac de rayon $CA = r$. Pour produire sur ce rouleau une pression variable, on faisait passer sur lui une ficelle aux deux extrémités de laquelle étaient suspendus deux poids égaux à la moitié de la charge Q qu'on voulait donner au rouleau. Cela fait, pour déterminer le mouvement dans un certain sens, on ajoutait d'un côté une surcharge q, et l'on observait quelle était dans chaque cas la force q ou plutôt le moment qr nécessaire pour que le mouvement fût sur le point de se produire, ou pour qu'un mouvement très-lent persistât uniformément une fois imprimé.

Considérons l'équilibre sur le point d'être rompu : il est clair que la réaction totale de l'appui est une force verticale et égale à $Q + q$. Donc le mouvement qui tend à se produire ne saurait être un glissement, quelle que soit l'intensité de la force q, bien que rien, dans les conditions géométriques de la question, ne s'oppose à ce que le mouvement soit plutôt un glissement qu'un roulement. Mais nous savons que le premier n'existe que si la réaction de l'appui est inclinée d'un certain angle φ sur la normale. Ici, au contraire, la réaction $Q + q$ de l'appui est verticale; seulement, comme cette réaction doit avoir pour l'équilibre un moment égal et de signe contraire au

(*) Toutes les fois que l'on aura dans une machine deux surfaces (dont l'une au moins doit être mobile) assujetties à être constamment en contact l'une avec l'autre, et en outre à remplir certaines conditions qui résultent de leur liaison géométrique avec d'autres pièces fixes ou mobiles, il faudra commencer par étudier géométriquement la nature du mouvement relatif de l'un des deux corps par rapport à l'autre. La première question qui se trouve posée est donc toujours une question de Cinématique : c'est cette science qui nous apprendra si le mouvement relatif est un roulement, un glissement, un mouvement mixte composé des deux. Quelquefois il arrivera que l'un ou l'autre effet sera possible indifféremment au point de vue géométrique; alors la Dynamique fera connaître quel est le mouvement effectif.

moment qr de la force additionnelle, elle doit s'écarter du point de contact A, dans le sens du mouvement, d'une distance δ déterminée par l'équation

$$qr = \delta\,(Q + q).$$

Coulomb a constaté que le rapport $\frac{q}{Q+q}$ du poids additionnel à la réaction normale ou pression est constant pour un même rayon r et pour les mêmes substances en contact.

Il a cru reconnaître en outre que quand le rayon r varie, le rapport $\frac{q}{Q+q}$ varie en raison inverse de ce rayon r, de sorte que le rapport du moment moteur à la pression, $\frac{qr}{Q+q}$, c'est-à-dire la distance δ, est, d'après l'équation précédente, une longueur constante, quel que soit le rayon r.

Cette loi, comme celles du frottement, a été trouvée par Coulomb dans les limites de la pratique; il serait absurde de vouloir l'appliquer en dehors de ces limites, car la longueur AA′ ou δ doit toujours être beaucoup plus petite que r. M. Morin, par de nouvelles expériences, a vérifié que cette loi est très-suffisamment approchée dans les cas ordinaires.

La longueur δ, dans les expériences de Coulomb relatives à un cylindre de bois de gaïac de $0^m,162$ de diamètre roulant sur des règles en chêne, a été trouvée égale à $0^m,00048$.

Cas d'une réaction inclinée. — On peut encore produire le roulement d'une autre manière. Le cylindre supportant toujours une force Q, on peut lui appliquer une force horizontale q (*fig.* 77). Voyons quelles sont les conditions pour que le roulement soit sur le point de naître.

La réaction du corps, R, qui doit toujours être égale et opposée à la résultante de Q et de q, doit être ici oblique; elle passe par un point A′ situé en avant de A et se décompose en deux, l'une verticale et égale à Q, l'autre horizontale, égale à q et dirigée en sens inverse du mouvement. L'expérience a prouvé que le moment qh de la force parallèle au plan par rapport à A ou à A′ a la même valeur que le moment qr dans le cas précédent, les pressions, dans les deux cas, étant, bien entendu, supposées égales.

Or, si nous remplaçons la réaction R par ses composantes, il faudra pour l'équilibre que le moment $Q\hat{o}$ soit égal à qh; de sorte que la distance $\hat{o}$ du point A' au point A est la même que dans le cas déjà étudié. Cette quantité $\hat{o}$ étant connue, nous aurons pour l'équation de l'équilibre

$$Q\hat{o} = qh,$$

d'où

$$q = Q\frac{\hat{o}}{h}.$$

Mais, dans le cas actuel, il peut y avoir glissement ou roulement, puisque la réaction de l'appui est inclinée sur la normale; le premier cas se produira quand cette inclinaison sera égale à l'angle de frottement.

Il y aurait donc glissement si la force $q = Q\frac{\hat{o}}{h}$, nécessaire au roulement, était plus forte que la force fQ, c'est-à-dire si l'on avait

$$\frac{\hat{o}}{h} > f, \quad h < \frac{\hat{o}}{f}.$$

En résumé, toutes les fois qu'un corps roule sur un autre, la réaction totale de l'appui passe un peu en avant de l'arête de contact géométrique, toujours dans le sens du mouvement.

La distance $\hat{o}$ du point d'application de cette réaction au point de contact ne dépend nullement de la direction de cette réaction qui peut être normale ou inclinée.

Dans ce dernier cas, l'appui exerce une réaction tangentielle qui peut être quelconque, pourvu qu'elle soit inférieure à celle qui correspond au glissement sur le point de naître.

Usage des rouleaux pour le transport horizontal des fardeaux.

Quand on veut transporter horizontalement un madrier très-lourd, ou une pierre de taille, il est presque impossible de les faire glisser sur un sol rugueux dont le coefficient de frottement est considérable. On remplace le glissement par le roulement, le frottement par la résistance au roulement, qui est beaucoup plus faible.

Pour cela, on dispose parallèlement sur le sol deux rouleaux de même rayon r (*fig.* 78), et l'on place dessus le madrier qu'il faut transporter; puis on applique à ce madrier une force de traction Q pour le faire avancer. On demande quelle doit être la valeur de cette force pour que le mouvement soit sur le point de naître, connaissant le poids P du madrier.

Comme dans toutes les questions de ce genre, il faut d'abord étudier comment se fera le mouvement au point de vue géométrique.

Les rouleaux auront un mouvement instantané de rotation autour de leur arête de contact, A pour l'un, A_1 pour l'autre. Le madrier à son tour roulera sur ces rouleaux dont le mouvement relatif par rapport au madrier sera également une rotation instantanée autour du point B dans le sens de la flèche b (*).

Cherchons maintenant les conditions d'équilibre sur le point d'être rompu. Prenons l'un des rouleaux. Il roule à la fois sur le plan et sur le madrier; et, si nous négligeons son poids, les seules forces qui lui sont appliquées sont les réactions des corps en contact.

D'après la théorie du roulement des solides naturels, la réaction totale du point d'appui passe en un point A′ situé en avant du point A, et elle se compose en général d'une réaction normale N et d'une réaction tangentielle F (**) dirigée en sens inverse du mouvement.

(*) D'après cela, on reconnaît d'abord que la vitesse du madrier sera double de celle des centres des rouleaux. En effet, puisque le mouvement du premier rouleau est un mouvement instantané de rotation autour du point A, les vitesses de ses différents points sont entre elles comme leurs distances au point A; donc, la vitesse du point B est double de la vitesse du point O, et, d'un autre côté, la vitesse du point B est la même que celle du point du madrier qui coïncide avec lui pour qu'il n'y ait pas glissement.

Il résulte de là que le corps P, s'avançant deux fois plus vite que les rouleaux, finira par les quitter, de sorte qu'il en faut un troisième qu'on apporte à la partie antérieure du corps P, un peu avant que celui de derrière se trouve dégagé.

(**) On sait que cette dernière réaction est nulle dans certains cas; son existence n'est donc point une conséquence nécessaire du roulement. Dans tous les cas, il est bien évident qu'on sera toujours averti de son absence, parce qu'on trouvera sa valeur égale à zéro.

A la partie supérieure, il y a mouvement relatif du rouleau sur le madrier, et il est bien clair que ce mouvement a lieu en sens inverse du premier. Donc, la réaction sera inclinée, passera par un second point B′ situé à une certaine distance δ' en arrière de B, et elle pourra se décomposer en deux, l'une normale, l'autre tangentielle. La quantité δ' sera généralement différente de δ parce que les substances en contact ne sont pas les mêmes dans les deux cas.

Cela posé, pour l'équilibre de ce rouleau, il faut d'abord que les réactions normales soient égales en bas et en haut; il doit en être de même des réactions tangentielles. Prenons de plus les moments des quatre forces autour du point B, et nous aurons

$$F \times 2r = N(\delta + \delta'),$$

et, pour l'autre rouleau,

$$F_1 \times 2r = N_1(\delta + \delta').$$

Écrivons maintenant les équations qui résultent de l'équilibre du madrier.

Il est soumis à des forces égales et opposées aux réactions N, N_1 et F, F_1, qu'il exerce sur les rouleaux; on aura donc, pour l'équilibre de ce corps solide,

$$F + F_1 = Q, \quad N + N_1 = P.$$

En ajoutant les premières équations membre à membre, et ayant égard à ces dernières, nous aurons

$$Q \times 2r = (\delta + \delta')P,$$

d'où

$$Q = \frac{\delta + \delta'}{2r} P.$$

Comme application numérique, faisons

$$\delta = 0^m,01, \quad \delta' = 0,001, \quad r = 0,1,$$

on aura

$$Q = 0,055P.$$

Ainsi, la résistance est considérablement réduite.

On emploie toujours ces rouleaux pour transporter horizontalement une pierre de taille arrivée au sommet du *tas*, c'est-à-dire à la partie supérieure d'un mur en construction. On a des appareils fixes qui servent à l'élever sur le tas en un point donné, puis, par des rouleaux, on la conduit à la place qu'elle doit occuper. Ces rouleaux n'ont pas la forme cylindrique; ils sont généralement fusoïdes ou renflés au milieu (*fig.* 79), afin qu'on puisse facilement changer quelque peu leur direction, soit que leur axe n'ait pas été à l'origine exactement perpendiculaire aux faces du mur, soit que celui-ci se compose de parties faisant un angle très-obtus.

Galets.

Les galets ne rendent pas le même service que les rouleaux; ils n'ont pas pour effet de supprimer complétement le frottement; seulement ils diminuent le travail inutilement consommé.

Considérons, par exemple, le tourillon à roulettes comme celui qui est employé dans la machine d'Atwood; ce tourillon porte sur les jantes croisées de deux galets, mobiles eux-mêmes sur leurs propres tourillons (*fig.* 80).

Le frottement est complétement remplacé sur le tourillon principal par un roulement dont l'effet nuisible est négligeable. Mais il y a ailleurs des parties fixes dans le système; le frottement n'est donc pas détruit; il ne fait que changer de place, car il se produit maintenant entre les tourillons des galets et leurs coussinets. L'avantage qu'on trouve dans cette position, c'est que le travail du frottement est considérablement réduit.

En effet, si le tourillon avait porté sur un coussinet fixe, le travail pour un tour de la roue aurait été égal au frottement multiplié par la circonférence de ce tourillon, tandis qu'avec cette disposition, pendant que le tourillon fait un tour, le galet ne fait qu'une fraction de tour, de sorte que le travail du frottement, qui est égal au produit de ce frottement par une fraction égale de la circonférence du tourillon des galets, est beaucoup plus petit que dans le premier cas.

Mais, à côté de cet avantage, nous pourrions signaler dans

certains cas un grand nombre d'inconvénients pratiques dont nous avons déjà dit quelques mots ailleurs. Par exemple, quand on se sert de galets pour guider une tige en ligne droite (*fig.* 81), il arrive de deux choses l'une : ou bien la tige tend à dévier dans le sens A, ou bien dans le sens B. Dans le premier cas, le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche F, le galet tournera dans le sens de la flèche *a*; dans le second, le galet tournera dans le sens de la flèche *b*. Il y a un moment d'arrêt quand le sens du mouvement change; un glissement se produit alors, d'où il résulte qu'il se forme dans le galet des méplats qui empêchent bientôt le galet de rouler. On retombe ainsi dans l'inconvénient qu'on avait voulu éviter.

§ IX. — Frottement mixte des engrenages.

Nous avons encore à étudier le cas mixte où deux corps roulent et glissent en même temps l'un sur l'autre, comme cela se présente pour les engrenages (*).

(*) Rappelons-nous d'abord la question cinématique de la transmission du mouvement. Nous avons trouvé qu'au moyen des engrenages le mouvement de l'une des roues se transmet uniformément à l'autre. Or, cela a été démontré géométriquement, indépendamment de la nature des roues, des frottements, etc. Donc cela aura toujours lieu, quels que soient les frottements qui se manifestent et la grandeur des efforts mis en jeu; les résistances passives n'ont donc aucun effet sur la transmission du *mouvement* proprement dit; elles ne font qu'augmenter le *travail* qu'il faut dépenser pour entretenir le mouvement uniforme de la roue motrice. Je signale en passant ce nouvel exemple de l'indépendance parfaite des deux points de vue différents auxquels on peut se placer pour étudier les machines :

1° Considérées comme organes de transmission de mouvement, elles se comportent comme des figures géométriques et sont uniquement soumises aux lois de la Géométrie. Cette première partie détermine les vitesses de tous les divers points en fonction de celle d'un seul pris à volonté.

2° Considérées comme transmettant l'action des forces d'un point et d'une direction à un autre point et à une autre direction, les machines sont régies par le théorème du travail : ce théorème, comme nous l'avons vu, donne en fonction du travail disponible à chaque instant les lois de la vitesse du point régulateur, et par conséquent celles de tous les autres.

Accidentellement, toutes ces vitesses peuvent être nulles, c'est-à-dire le mouvement impossible, ce qui n'est nullement en contradiction avec les lois primordiales de la Cinématique.

Dans ce cas, on néglige généralement la résistance due au roulement, parce que les dents sont assez dures et assez bien polies par le frottement même, pour que cette résistance soit tout à fait négligeable, surtout en présence du frottement, qui est beaucoup plus considérable.

Nous supposerons que le contact commence un pas avant la ligne des centres, et finisse un pas après, ce qui conduit à avoir constamment deux paires de dents en contact. Soit T (*fig.* 82) le point de contact de deux dents sur la ligne des centres : quand les roues auront tourné chacune de l'angle correspondant à un pas, le point de contact T aura parcouru sur chaque circonférence primitive des espaces TM′ et TM. L'arc de glissement est égal à MM′. Le mouvement relatif de la roue C′ par rapport à C comprend un glissement MM′ et un roulement de M′ en T′ ; nous négligerons le travail nuisible résultant de ce roulement.

Supposons le pas a très-petit; alors M′M sera sensiblement égal à sa projection sur la ligne des centres, c'est-à-dire à LL′. Or

$$LL' = TL + TL' = \frac{a^2}{2r} + \frac{a^2}{2r'} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Si l'on désigne par N la valeur moyenne (*), pendant le par-

(*) La pression N n'est pas constante en général; elle ne le serait rigoureusement que dans le cas de l'engrenage à développantes, et encore si l'on négligeait le frottement.

Supposons en effet un engrenage quelconque (*fig.* 83). Soit P la puissance appliquée à l'une des roues, Q la résistance appliquée à l'autre, et soit AB la ligne suivant laquelle s'exerce la pression N à un certain moment, c'est-à-dire la normale aux surfaces de deux dents en contact, normale qui passe toujours au point de contact T des circonférences primitives sur la ligne des centres.

Pour que la roue C soit en équilibre, en négligeant le frottement, il faut qu'on ait

$$PR = Nr, \quad \text{d'où} \quad N = \frac{PR}{r},$$

R et r désignant les bras du levier des forces P et N par rapport au centre C ; or, il n'y a que dans l'engrenage à développantes que r soit constant; donc il n'y a que dans cet engrenage que la pression normale N soit constante, du moins quand on néglige le frottement.

Pour les autres, elle est variable; c'est la valeur moyenne de cette quantité qu'on fait entrer dans l'expression du travail du frottement.

cours d'un pas, de la somme des composantes normales des actions mutuelles des deux paires de dents en contact, le frottement sera égal à $f\mathrm{N}$, et le travail du frottement pendant ce parcours sera égal au produit de $f\mathrm{N}$ par l'arc de glissement; donc le travail du frottement pour le parcours d'un pas est égal à

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)f\mathrm{N}.$$

Admettant cette valeur approximative, représentons par T le travail moteur, par T′ le travail résistant utile, ces quantités de travail étant prises pour un parcours de K fois le pas, on aura

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}'+\frac{\mathrm{K}}{2}f\mathrm{N}a^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right). \tag{1}$$

Pour éliminer N, il faut considérer l'une des roues seule; on remarquera que, le pas étant toujours supposé assez petit, on peut remplacer, avec une approximation suffisante, l'équation de l'équilibre de la roue menée, par la formule

$$\mathrm{T}'=\mathrm{KN}a,$$

formule qui serait rigoureusement exacte si la normale commune aux profils des dents en prises était constamment normale à la ligne des centres. On le peut d'autant plus que la quantité KN se trouve dans l'équation (1) multipliée par f, qui est très-petit; on ne commettra donc qu'une erreur très-faible en remplaçant $\mathrm{KN}a$ par T′; donc nous pourrons écrire avec une exactitude suffisante cette formule donnée pour la première fois par le Général Poncelet :

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}'\left[1+\frac{1}{2}fa\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\right]. \tag{2}$$

On voit, par cette formule, qu'on a intérêt à diminuer le pas autant que possible; mais cette diminution a nécessairement une limite, parce qu'on arrive bientôt à des dents trop minces pour résister aux efforts qu'elles ont à subir.

Si l'engrenage est cylindrique, on peut introduire dans la

formule précédente les nombres de dents des roues. En effet, on a

$$na = 2\pi r,$$

$$n'a = 2\pi r';$$

donc

$$T = T'\left[1 + f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\right]. \tag{3}$$

Exemple :

$$f = 0{,}10, \quad n = 20, \quad n' = 40,$$

$$f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) = 0{,}024 = \frac{1}{42}.$$

Dans le cas des engrenages coniques (*fig.* 84), la formule (2) pourra servir, pourvu qu'on ait soin d'y remplacer r et r' par les longueurs TO, TO′ des génératrices des deux cônes qu'on développe, afin d'avoir les circonférences primitives qui servent au tracé des profils. Cela résulte immédiatement de ce que nous avons dit sur ces engrenages. En effet, les courbes des dents se touchent pendant une courte durée, comme si elles restaient dans le plan OO′ perpendiculaire à AT. Ces engrenages sont plus doux que les engrenages cylindriques d'un même nombre de dents.

Ces formules ont été établies en supposant l'arc d'approche et l'arc de retraite égaux tous deux à un pas. Il n'y aurait rien à changer si le contact n'avait lieu que d'un côté de la ligne des centres, dans l'étendue d'un pas, soit avant, soit après le passage au point T. En effet, il n'y a plus alors à la fois que deux dents en prise; la pression N s'exerce entre les deux dents, au lieu de se partager entre les deux paires de dents, comme dans le cas que nous venons d'étudier, de sorte que le frottement n'est pas changé (*).

Au contraire, s'il n'était pas indispensable de proscrire d'une manière absolue la transmission opérée par le simple contact d'une paire de dents, on pourrait diminuer de moitié le travail

(*) Nous avons dit que la dernière disposition serait extrêmement défectueuse en pratique, parce qu'elle exposerait à des chocs par suite des moindres irrégularités dans la figure des dents.

du frottement en faisant commencer, par exemple, le contact $\frac{1}{2}$ pas avant et finir $\frac{1}{2}$ pas après la ligne des centres.

Dans les formules que nous avons établies jusqu'ici, l'influence du frottement est la même avant la ligne des centres et après. Ce résultat est contraire à toutes les indications de la pratique, qui montrent que le frottement avant le passage à la ligne des centres est beaucoup plus nuisible que le frottement après, et qu'il peut même produire des *arcs-boutements* et empêcher toute espèce de mouvement.

Mais il ne faut pas oublier que nous avons supposé le pas très-petit, et alors nos résultats peuvent être considérés comme suffisamment exacts. Il n'en serait plus de même si le contact avait lieu à une assez grande distance de la ligne des centres, en un point tel que M, par exemple (*fig.* 85). (La figure est faite dans le cas particulier d'un engrenage à flancs et épicycloïdes.)

Soient C et C′ les centres des deux circonférences primitives qui tournent dans le sens indiqué par les flèches. Soient Q et P les forces qui agissent sur ces roues, Q étant la puissance et P la résistance. Avec ces hypothèses, le contact a lieu après la ligne des centres.

Cherchons les conditions de l'équilibre. La roue C′ est en équilibre sous l'influence de la force P, de la réaction normale N′ et d'une réaction tangentielle fN′ dirigée de M en A, dans le sens du mouvement relatif. L'équation d'équilibre sera, en prenant les moments par rapport au point C′,

$$\mathrm{P}r' = \mathrm{N}'x',$$

x' désignant le bras de levier de la réaction N et r' le rayon de la roue C′; le bras de levier du frottement est nul.

Écrivons maintenant les conditions d'équilibre de la roue C. Elle est en équilibre sous l'influence de la force Q, et des réactions N et fN égales et directement opposées aux réactions N′ et fN′. Soit x le bras du levier de la force N, y le bras de levier de fN; nous aurons, en prenant les moments par rapport au point C,

$$\mathrm{Q}r - \mathrm{N}x - f\mathrm{N}y = 0.$$

Éliminons N entre ces deux équations, et nous aurons

$$Qr = (x + fy)\frac{Pr'}{x'}.$$

Or, on a, en vertu des triangles semblables CTE, C'TM,

$$\frac{x}{x'} = \frac{r}{r'};$$

donc

$$Qr = Pr + P\frac{fyr}{x},$$

ou

$$\frac{Q}{P} = 1 + \frac{fy}{x}.$$

On peut encore donner une autre forme à cette expression en introduisant la longueur CD $= z$ de la perpendiculaire à la ligne des centres comprise entre le point C et la ligne C'M prolongée. En effet, les triangles CDA, CTE sont semblables et donnent

$$\frac{r}{x} = \frac{z}{r};$$

donc enfin

$$\frac{Q}{P} = 1 + \frac{fz}{r},$$

de sorte que la fraction du travail moteur absorbée par le frottement est

$$\frac{fz}{r}.$$

Faisons maintenant la supposition inverse. Si P est la puissance et Q la résistance, le mouvement est sur le point de naître dans le sens opposé au précédent, et le contact a lieu avant la ligne des centres. Dans ce nouveau cas, les formules se déduisent des précédentes en changeant simplement le signe de f. On aura donc

$$\frac{Q}{P} = 1 - \frac{fz}{r},$$

et si l'on veut avoir le rapport de la puissance à la résistance,

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{1 - \frac{fz}{r}}.$$

Cette quantité, de même que la précédente, est plus grande que l'unité; mais elle peut devenir beaucoup plus grande si la quantité z augmente suffisamment. En effet, on voit que si l'on a $\frac{fz}{r} = 1$, la puissance P est infinie, c'est-à-dire que le mouvement n'est pas possible (*) : c'est un nouvel exemple de ce que l'on appelle *arc-boutement*.

Cette condition conduit à l'arc-boutement, lors même que les dents sont parfaitement exécutées. Il y a d'autres cas d'arc-boutement qui doivent contribuer encore à faire proscrire de plus en plus les contacts commençant à une trop grande distance en arrière de la ligne des centres. Ils tiennent à certains défauts de construction des engrenages, lorsque, par exemple, dans un flanc de la roue menante se présentent de petites cavités où peut s'engager l'extrémité de la dent de la roue conduite (*fig.* 86). Ces irrégularités ne gênent pas le mouvement dans un sens; elles l'empêchent dans le sens inverse.

§ X. — Frottement dans la vis sans fin.

Avant d'étudier cette question, qui vient naturellement après la recherche du frottement dans les engrenages, com-

---

(*) Il est facile de démontrer que la condition précédente répond au cas où la réaction résultante des forces N et fN (cette dernière ayant maintenant une direction opposée à celle que suppose la figure) passerait par le centre. En effet, cette condition donne

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{r}{z} = \text{tang CDT}.$$

Or, les *triangles* CEN, CDT *sont semblables; donc l'angle*

$$\text{CNT} = \text{CDT} = \varphi.$$

Donc la réaction motrice pour la roue C passe par le centre de cette roue, et ne peut par conséquent déterminer aucun mouvement.

mençons par rappeler quelques notions sur lesquelles nous avons déjà beaucoup insisté en Cinématique.

Prenons trois axes rectangulaires (*fig.* 87), et faisant deux projections rectangulaires, supposons que Oy soit l'axe de la vis sans fin, et que l'axe de la roue soit situé au-dessus parallèlement à Ox. Soit Oy le sens dans lequel on doit porter l'axe de la vis dont la rotation, par conséquent, a lieu dans le sens de la flèche (a) de z vers x. Cherchons dans quel sens nous devons porter l'axe de rotation de la roue. Il y a deux cas à distinguer, selon que le sens de la vis est *dextrorsum* ou *sinistrorsum*. Supposons le premier cas, c'est-à-dire supposons que l'hélice de la vis soit tracée comme le montre la figure, la dent de la roue en contact avec cette hélice vient en avant du plan zOx ; donc, la rotation de la roue se fait dans le sens de la flèche (b) de y vers z ; l'axe de la rotation doit donc être compté dans le sens CA.

Si la vis était *sinistrorsum*, ce serait l'inverse qui aurait lieu.

Désignons par n le nombre des dents de la roue, et par ω sa vitesse angulaire ; $n\omega$ sera la vitesse angulaire de la vis sans fin. Appelons a la distance CO.

Pour avoir le frottement de la roue sur la vis, il faut chercher son mouvement relatif. Pour cela, d'après les règles établies, il faut composer le mouvement de la roue avec un mouvement égal et contraire à celui de la vis, c'est-à-dire une rotation dirigée suivant Cx_1 (*fig.* 88) avec une rotation $n\omega$, dirigée suivant OA, en sens inverse de Oy. Pour cela, nous appliquons au point C deux rotations CA_1, CA', de sens contraires et égales toutes deux à $n\omega$. Nous avons alors au point C trois rotations ; mais l'une d'elles forme avec celle qui est sur le prolongement de Oy un couple de rotation équivalent à une translation $OC \times n\omega$ ou $na\omega$ perpendiculaire au plan du couple, c'est-à-dire parallèle à Ox et dirigée en sens contraire, le moment du couple étant négatif. Soit CB la vitesse de ce mouvement de translation. Les deux autres rotations appliquées au point C se composent en une seule égale à

$$\omega\sqrt{n^2+1}.$$

Nous avons maintenant une rotation autour de CD et une translation dont la vitesse est CB. Nous pouvons décomposer

cette translation en deux dirigées, l'une suivant CF, prolongement de CD, l'autre suivant une perpendiculaire CE à CD. On a, d'après les triangles semblables,

$$CF = \frac{na\omega}{\sqrt{1+n^2}},$$

$$CE = \frac{n^2a\omega}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Or on peut, en transportant l'axe CD parallèlement à lui-même en C_1D_1, faire naître un couple de rotations (CD, C_1D_1) qui détruise précisément cette translation CE.

On aura ainsi l'axe de rotation glissant qui représentera à la fois une rotation $\omega\sqrt{1+n^2}$, et une translation inverse

$$\frac{na\omega}{\sqrt{1+n^2}}.$$

On sait que la position du point C_1 est déterminée par les équations suivantes que l'on retrouve aisément ici :

$$\frac{CC_1}{OC_1} = n^2,$$

d'où

$$OC_1 = \frac{a}{1+n^2}, \quad CC_1 = \frac{n^2a}{1+n^2}.$$

Si l'on prenait OC_1 pour rayon de la circonférence primitive, la direction de C_1D_1 serait précisément celle de la tangente à l'hélice de la vis sans fin, car on a

$$h = \frac{2\pi R}{n},$$

R étant le rayon de la roue, d'où, si $R = n^2r$,

$$\frac{h}{2\pi r} = n = \operatorname{tang} DC\,x'.$$

De la sorte, le mouvement relatif se composerait simplement d'un *glissement* (mouvement de *rosion*) de la dent de la roue sur le plan incliné de la vis, et d'un *roulement* autour d'un axe situé dans le plan tangent aux surfaces en contact, roule-

ment dont l'influence nuisible serait négligeable. Quant à la translation, elle aurait en ce point sa grandeur minima, comme on l'a vu en Cinématique.

Malheureusement, cette disposition est peu pratique, car si $n = 20$, par exemple, le rayon de la vis se trouve réduit à $\frac{1}{401}$ de la distance des deux axes. Il faut augmenter ce rayon. Alors, si nous transportons l'axe C_1D_1 au point de contact des cylindres primitifs, cet axe se trouve oblique par rapport au plan tangent commun, et donne lieu à deux rotations, l'une qui se réduit à un simple *roulement* autour d'un axe situé dans le plan tangent, l'autre qui a lieu autour d'un axe perpendiculaire et qui produit un frottement analogue à celui d'un pivot sur sa crapaudine.

Nous négligerons le frottement qui résulte de cette rotation et nous assimilerons le mouvement à une translation sur un plan incliné, dont l'inclinaison i est celle de l'hélice moyenne.

Cela posé, remplaçons les couples qui sollicitent les deux arbres par des couples équivalents dont les bras de levier respectifs soient les rayons R et r des circonférences primitives. Soit Pr le couple appliqué à la vis, QR celui qui agit sur la roue; nous pouvons supposer que l'une des forces de chaque couple rencontre l'axe correspondant, les deux autres étant appliquées au point de contact des deux corps. La vis étant conductrice, P est la puissance, Q la résistance; le problème est le même que celui de l'équilibre du plan incliné, bien qu'ici les deux corps considérés soient tous les deux mobiles (*fig.* 89). Au moment où la roue est sur le point de céder à la pression de la vis, la réaction K de celle-ci est inclinée à gauche de la normale, et on a pour l'équilibre de la roue

$$Q = K \cos(i + \varphi).$$

Pour l'équilibre de la vis, il faut considérer la réaction K_1, égale et opposée à K, et l'on a

$$P = K \sin(i + \varphi),$$

d'où

$$P = Q \operatorname{tang}(i + \varphi).$$

Si la roue conduisait la vis, on devrait changer le signe de l'angle φ, et l'on aurait pour la puissance Q (P étant maintenant la résistance)

$$Q = P \cot(i - \varphi).$$

Pour que l'engrenage soit réciproque, il faut qu'on ait à la fois

$$i < 90^\circ - \varphi,$$
$$i > \varphi,$$

ou

$$\operatorname{tang} i < \frac{1}{f},$$
$$\operatorname{tang} i > f.$$

Les équations précédentes conviennent également au cas du mouvement uniforme.

Imprimons un déplacement virtuel infiniment petit à la vis, et soit ds l'arc dont la dent de la vis glisse sur la dent de la roue; cet arc, projeté sur les directions des forces P et Q, aura pour composantes $ds\cos i$, $ds\sin i$, et par suite les produits $P\,ds\cos i$, $P\,ds\sin i$, représentent les travaux élémentaires de la force mouvante P et de la force résistante Q.

Multipliant l'équation

$$P = Q\operatorname{tang}(i + \varphi)$$

par $ds\cos i$, il vient

$$P\,ds\cos i = Q\,ds\cos i\operatorname{tang}(i + \varphi)$$
$$= Q\,ds\sin i \times \operatorname{tang}(i + \varphi)\cot i,$$

ou bien

$$T_m = T_r\operatorname{tang}(i + \varphi)\cot i,$$

équation qui convient au cas où la vis conduit la roue.

Si c'est la roue qui conduit la vis, on partira de l'équation

$$Q = P\cot(i - \varphi),$$

et on trouvera entre le travail moteur et le travail résistant la relation

$$T_m = T_r\cot(i - \varphi)\operatorname{tang} i,$$

qui n'est autre chose que la précédente, dans laquelle on aurait changé i en $90^\circ - i$.

Le travail du frottement, dans la vis sans fin, est toujours considérable (*); aussi cet organe est-il surtout employé pour transmettre de faibles quantités de travail, ou bien lorsque, dans une opération accidentelle, il n'importe pas de perdre du travail.

Remarquons enfin que l'obliquité de l'action mutuelle donne naissance sur chacun des deux arbres :

1° A une force longitudinale qui détermine des frottements sur les épaulements ou les pivots;

2° A un couple appliqué sur l'axe, c'est-à-dire à des efforts latéraux sur les coussinets, produisant à la fois une augmentation du frottement des tourillons et une tendance à l'arrachement ou au desserrage des boulons de scellement.

(*) Les formules précédentes ne rendent peut-être pas parfaitement compte des frottements énormes que la pratique signale dans la vis sans fin. Le pivotement, que nous avons négligé, a certainement aussi sa part d'influence sur ce phénomène, ce qu'indique la grande douceur de l'engrenage hyperboloïde, lequel ne diffère de celui-ci que par la suppression du pivotement.

Dans l'engrenage de White, c'est au contraire le frottement de *roulement* qui est supprimé, et le mouvement est encore beaucoup plus doux. Les conséquences relatives à l'obliquité de l'action mutuelle se retrouvent tout entières dans ce dernier système.

CHAPITRE III.

DES CORDES ET COURROIES.

Au point de vue qui nous occupe actuellement, il n'est plus possible de considérer les cordes et courroies comme absolument flexibles et inextensibles. Il importe aussi de se rendre compte du frottement qui se développe entre ces corps et les solides sur lesquels ils s'enroulent.

§ XI. — Roideur des cordes.

Les cordes employées à transmettre des efforts un peu considérables présentent toujours une grande résistance à la flexion. Il suit de là que, si l'on considère une corde passant sur une poulie fixe, et le mouvement uniforme acquis ou sur le point de naître dans le sens de la puissance, la *roideur* de la corde est une nouvelle résistance passive, qui s'ajoute au frottement de l'essieu de la poulie sur ses appuis, une portion du travail de la puissance étant inutilement employée à produire la déformation de la corde.

Il résulte encore de la roideur du câble que celui-ci ne passe pas brusquement de la forme rectiligne à une forme circulaire modelée sur la poulie (*fig.* 90), de sorte que le bras de levier de la résistance Q est un peu plus grand que la somme du rayon de la poulie et de la demi-épaisseur du câble.

D'après Coulomb, en faisant abstraction du frottement de l'essieu, l'excès de la puissance sur la résistance, qui représente la roideur de la corde, est une fonction linéaire de la résistance Q et peut se mettre sous la forme

$$P - Q = \frac{A + BQ}{D},$$

D étant le diamètre de la poulie, augmenté de celui de la corde.

Dans cette formule, A et B sont deux coefficients, indépendants des quantités Q et D, ainsi que de la vitesse du mouvement de la poulie, au moins quand les tensions sont un peu fortes. Ces coefficients varient avec la grosseur et la nature de la corde, blanche ou goudronnée, sa sécheresse ou son humidité, son état de vétusté.

Le tableau suivant, calculé par Navier, donne, pour certaines cordes expérimentées par Coulomb, les valeurs de A et de B qui conviennent quand on prend le kilogramme pour unité de force, et le mètre pour unité linéaire. Les cordes étaient formées de trois *torons* ou cordes moins grosses, et les torons composés d'un certain nombre de brins nommés *fils de caret*.

Tableau pour calculer la roideur de différentes cordes autour d'une poulie de 1 mètre de diamètre.

INDICATION DES CORDES.	DIAMÈTRE.	POIDS par mètre de longueur.	VALEUR de A. — Roideur constante.	VALEUR de B. — Roideur par kilogramme de résistance.
	m	kil	kil	kil
Cordes blanches de 30 fils ...	0,020	0,283	0,222	0,0097
» de 15 fils ...	0,014	0,145	0,064	0,0055
» de 6 fils....	0,009	0,052	0,011	0,0024
Cordes goudronnées de 30 fils.	0,024	0,333	0,350	0,0126
» de 15 fils.	0,017	0,163	0,106	0,0061
» de 6 fils.	0,010	0,069	0,021	0,0026

Les expériences de Coulomb ne permettent pas de tenir compte de la diminution considérable qui se produit dans la roideur d'une corde, au bout d'un certain temps d'usage. La roideur constante doit être doublée, quand il s'agit d'une corde blanche imbibée d'eau. Cette même roideur augmente sensiblement, pour les cordes goudronnées, quand la température descend au-dessous de zéro.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet, qui appelle de nouvelles expériences, surtout au point de vue des câbles en fer.

Les seuls conseils pratiques qu'on puisse donner consistent à recommander d'employer des poulies de grand diamètre, des câbles aussi minces qu'il est possible, eu égard à leur résistance ; et enfin, au point de vue de la durée de la corde, d'éviter de la soumettre à des flexions successives en sens opposé.

§ XII. — Frottement des cordes et courroies.

Nous avons dit que les transmissions de mouvement par courroies sans fin étaient fondées sur l'intensité considérable du frottement qui se développe quand une courroie glisse ou est sur le point de glisser sur un cylindre qu'elle enveloppe en partie (*fig.* 91).

Bien que les phénomènes du frottement des courroies diffèrent essentiellement de tous ceux que nous avons rencontrés jusqu'ici, nous allons voir qu'ils sont des conséquences mathématiques des lois de Coulomb. N'oublions pas toutefois que les déductions d'une loi approximative sont d'autant moins certaines qu'elles sont plus éloignées.

Soit Q la force résistante, P la force mouvante, et supposons le mouvement sur le point de naître dans le sens de cette force.

Faisant abstraction de la roideur, considérons la corde comme composée d'éléments solides articulés glissant sur le cylindre.

Soit T la tension d'un des éléments de la courroie, cette tension, pour l'élément suivant, est devenue

$$T + dT;$$

dT est l'effort tangentiel qui détermine le glissement de la portion infiniment petite de courroie que nous considérons, malgré le frottement déterminé par la pression normale.

Or cette pression est la somme des composantes normales des tensions T et $T + dT$ qui comprennent un angle égal à $d\tau$,

angle de contingence du cylindre. En négligeant les infiniment petits du second ordre, on a pour la pression

$$2\,T \sin \frac{1}{2} d\tau = T\,d\tau,$$

et pour le frottement (*)

$$f\,T\,d\tau.$$

Donc, enfin, l'équation d'équilibre est

$$dT = f\,T\,d\tau,$$

d'où, en intégrant,

$$\log \text{nép. } T = f\tau + C,$$

en appelant τ la somme des angles de contingence, somme qui est égale à l'angle α, formé par les prolongements des deux cordons ou par les perpendiculaires à ces cordons.

L'intégrale générale peut s'écrire

$$T = A\,e^{f\alpha},$$

ou, en intégrant depuis la tension Q jusqu'à la tension P,

$$P = Q\,e^{f\alpha}.$$

Si l'enroulement a lieu sur un cylindre, on pourra remplacer τ par le rapport $\frac{S}{r}$ de l'arc embrassé au rayon du cylindre, et l'on aura

$$P = Q\,e^{f\frac{S}{r}}.$$

(*) Voici, d'après M. Morin, les valeurs du coefficient de frottement des courroies, lequel est indépendant de la largeur :

Courroies ordinaires sur tambours en bois.....	0,47
Courroies neuves.....	0,50
Courroies ordinaires sur poulies en fonte.....	0,28
Courroies humides.....	0,38
Cordes de chanvre sur poulies en bois.....	0,50

Suivant le même auteur, on peut faire supporter sans inconvénient à une courroie une tension de $0^{kil},25$ par millimètre carré de section.

Cette formule présente ceci de remarquable, c'est que le rapport de la puissance à la résistance, représenté par une fonction exponentielle de l'arc embrassé, augmente avec une très-grande rapidité pour de faibles variations de cet arc. On conclut de là qu'il faut une force énorme pour faire glisser une courroie sur un cylindre, pour peu qu'on fasse faire à la courroie deux ou trois tours sur le cylindre. Les applications de cette propriété des courroies sont nombreuses et importantes.

Des freins.

Quand on veut arrêter ou ralentir brusquement une machine, pour un motif de sécurité par exemple, on emploie des appareils nommés *freins*, qui développent d'énergiques résistances passives et produisent l'effet voulu au prix d'une certaine perte de travail.

Le sabot des rouliers servait à retenir une voiture sur une pente trop rapide en substituant le glissement au roulement. Le même principe se retrouve dans le frein de Laignel appliqué aux chemins de fer. Mais le frein le plus habituel des wagons, ainsi que celui des voitures, se compose simplement d'un corps qui vient frotter contre la jante.

Les propriétés du frottement des corps flexibles servent de fondement aux freins les plus énergiques. En voici quelques exemples :

Un homme peut descendre sans danger d'une assez grande hauteur, par exemple en cas d'incendie, en se suspendant à une corde qu'il fait passer sur un cylindre de bois fixe et dont il tient à la main l'autre bout. Il est alors très-facile de modérer la descente ou de s'arrêter en un point quelconque.

Supposons en effet le mouvement sur le point de naître dans le sens descendant; soient T et t la tension des deux brins de la corde; comme la corde fait un demi-tour sur le cylindre, l'arc embrassé est égal à π et l'on a

$$T = te^{f\pi}.$$

Le coefficient du frottement des cordes sur le bois étant

0,50, on a

$$\log \text{nép.} \frac{T}{t} = 1{,}57,$$

d'où

$$\frac{T}{t} = 4{,}80.$$

Or la somme $T + t$ est égale au poids P de l'homme suspendu à la corde; on a donc

$$t = 0{,}17\,P, \quad T = 0{,}83\,P.$$

L'effort t suffisant pour arrêter la descente est donc environ 12 à 15 kilogrammes seulement. Pour s'élever par le même procédé, l'effort devrait être 0,83 P. En remplaçant le cylindre fixe par une poulie, ces deux efforts seraient sensiblement égaux à 0,50 P.

En quadruplant l'arc embrassé, c'est-à-dire en faisant faire deux tours à la corde, le rapport $\frac{T}{t}$ serait élevé à la quatrième puissance, soit à peu près

$$T = 530\,t.$$

On utilise cette propriété, ainsi que nous l'avons dit, pour élever des fardeaux au moyen d'un treuil (*fig.* 92). Au lieu d'arrêter la corde sur le cylindre du treuil, on obtient plus de sécurité en faisant simplement faire deux tours à cette corde; l'extrémité libre aboutit dans la main d'un enfant, et l'on voit qu'un effort de 2 kilogrammes suffit pour soutenir un poids de 1000 kilogrammes et plus. En mollissant la corde, on arrête quand on veut l'ascension.

Les mêmes principes guident dans l'établissement des appareils destinés à arrêter un corps en mouvement en détruisant dans un temps assez court la force vive emmagasinée dans ce corps. Ce problème a une très-grande importance et se trouve aujourd'hui tout à fait à l'ordre du jour, à cause des nombreux accidents de chemins de fer, qui seraient évités pour la plupart si le mécanicien avait la faculté d'arrêter rapidement un train lancé à grande vitesse.

Mais il ne faut pas se faire d'illusions à cet égard. La force

vive ne peut être détruite que par du travail développé, ce qui exige nécessairement un certain espace parcouru, plus ou moins grand suivant la force vive acquise et la grandeur de la résistance, espace qui ne pourra jamais être réduit au-dessous d'une certaine limite, quel que soit l'appareil employé.

Pour arrêter en peu de temps un bateau animé d'une vitesse assez faible, mais dont la masse, et par suite la force vive, est considérable, on emploie une corde attachée par l'une de ses extrémités au bateau, on fait faire à l'autre bout deux tours sur un cylindre de fonte fixé à cet effet sur le quai, et l'on tient l'autre extrémité à la main. Un petit effort suffira pour faire équilibre à une grande tension exercée par le bateau. Étant donné cet effort t, on a pour la tension à laquelle il fait équilibre

$$T = e^{f\alpha} t.$$

T représente la force appliquée à la partie de la corde qui va du bateau au cylindre, c'est-à-dire l'effort résistant appliqué au bateau. Le travail de cette force pour un déplacement du bateau égal à l sera Tl. Or, on connaît la force vive du bateau, donc on n'aura qu'à résoudre l'équation

$$Tl = \frac{1}{2} mv^2,$$

et nous saurons quelle distance parcourra le bateau avant de s'arrêter sous l'influence de la tension T. On calculera d'ailleurs la tension que l'homme devra exercer à l'extrémité de la corde, de manière que la tension qui en résulte à l'autre extrémité ne soit pas assez forte pour la casser.

Freins des arbres tournants.

C'est encore sur le frottement des courroies et des cordes qu'est fondé l'usage des freins ordinaires appliqués aux arbres de rotation.

Un arbre tourne avec une certaine vitesse, très-grande souvent, et l'on veut arrêter cet arbre dans l'espace de temps le plus restreint possible. On emploie pour cela des appareils appelés *freins*.

Ils peuvent consister simplement, comme cela a lieu pour les freins ordinaires, en une mâchoire de bois qu'on appuie contre la roue. Il se développe un frottement proportionnel à la pression P qu'on exerce sur cette mâchoire. Le travail de ce frottement pour n demi-tours décrits par la roue sera

$$nf\,\mathrm{PR}\pi,$$

R désignant le rayon de l'arbre ou de la roue auquel est appliqué le frein. Il suffira d'égaler ce travail à la demi-force vive de la machine pour savoir le nombre n de demi-tours que fera l'arbre avant de s'arrêter. Pour peu que la force vive de la machine soit considérable, ce nombre n sera très-grand parce que le coefficient f est assez petit. Il a donc fallu trouver un autre procédé pour produire facilement des efforts énergiques.

On fixe sur l'arbre tournant une poulie d'un grand diamètre, afin de produire non-seulement l'effort résistant le plus grand possible, mais encore de rendre très-considérable le travail de cet effort.

Le frein se compose d'une lame flexible en fer qui embrasse à peu près les trois quarts de la circonférence (*fig.* 93). L'une des extrémités de cette lame est attachée à un point fixe O; l'autre s'attache à un levier qui s'appuie au point O. En exerçant au point B un effort Q, cet effort se transmet amplifié au point D et il presse la lame contre l'arbre tournant. Il se produit alors le frottement d'un arbre mobile sur une lame fixe, frottement qui est évidemment identique avec celui d'une lame mobile sur un cylindre fixe.

Supposons que l'arbre tourne dans le sens de la flèche; soit T la tension motrice, t la tension résistante; l'équilibre du levier BOD va nous permettre de calculer t. En effet, on a, en appelant a et b les bras de levier des forces Q et t,

$$a\mathrm{Q} = bt,$$

d'où

$$t = \frac{a\mathrm{Q}}{b}.$$

D'un autre côté, on a

$$\mathrm{T} = e^{f\alpha}t,$$

la force $T - t$ agit comme force résistante pour s'opposer au mouvement de l'arbre (*). Si donc R désigne le bras de levier de cette force, son travail pour un nombre x de tours sera représenté par

$$2\pi(T - t)Rx = (e^{f\alpha} - 1)\frac{aQ}{b} \times 2\pi Rx;$$

en égalant cette quantité à la demi-force vive de l'arbre tournant, on déterminera le nombre x de tours que fera l'arbre jusqu'à son arrêt.

Prenons $f = 0{,}20$ (fer sur fonte sans enduit)

$$e^{f\alpha} = 2{,}56,$$

$$e^{f\alpha} - 1 = 1{,}56.$$

Si l'arbre tournait en sens inverse, il faudrait permuter T et t;

(*) Dans ce cas, nous regardons la force $T - t$ comme force résistante, tandis que dans le cas du frein appliqué aux bateaux, la force T tout entière était regardée comme résistante. Il est facile de s'expliquer cette différence. En effet, l'effort qui s'oppose au mouvement de l'arbre est l'effort total développé par le frottement. Or, le frottement sur une surface $d\alpha$ est égal à $fT\,d\alpha$, et

$$dT = fT\,d\alpha.$$

Donc, la force que produit le frottement à chaque point est dT; le moment de cette force est $R\,dT$; donc, le moment total du frottement sera

$$\int R\,dT = R(T - t).$$

Dans le cas du bateau, si nous le considérons seul, il est bien évident que la résistance qui lui est appliquée est T, et que le travail de cette force est Tl.

Si nous voulons au contraire considérer l'ensemble du bateau et du cordon, T devient une force intérieure dont le travail est nul si la corde ne s'allonge pas, et la somme des travaux résistants appliqués au système est :

1° D'une part, le travail total du frottement

$$(T - t)\,l.$$

2° De plus, le travail Tl développé par l'homme qui tire l'extrémité de la corde, ce qui fait en tout, pour le travail résistant,

$$tl.$$

C'est ce qu'on avait trouvé immédiatement en considérant le bateau seul, et en lui appliquant le théorème du travail.

ce serait la plus petite tension qui passerait au point fixe; on aurait

$$T = \frac{aQ}{b} = e^{f\alpha} t,$$

$$T - t = \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} \frac{aQ}{b},$$

et le coefficient numérique

$$e^{f\alpha} - 1 = 1{,}56$$

serait remplacé par

$$\frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} = 0{,}61.$$

La première disposition est donc préférable; mais le plus souvent les freins doivent servir à arrêter le mouvement communiqué à un arbre, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, en sorte que le plus avantageux est d'employer un frein dont les deux extrémités soient fixées à l'extrémité de deux leviers égaux; il faut alors faire en sorte de donner à ces bras de levier la plus petite longueur possible.

Ces freins, employés comme nous venons de le dire, sont très-mauvais, surtout lorsqu'on s'en sert pour donner à une machine toute la sécurité possible. Quand la vie des hommes se trouve mise en jeu, comme dans les roues à chevilles ou à marches, on a besoin de freins très-sûrs et très-puissants. On peut dire la même chose des machines qui servent pour l'extraction des minerais ou de la houille. Les cuveaux chargés, mus par une machine à vapeur, montent avec une très-grande rapidité, et il faut les arrêter très-rapidement aussitôt qu'ils sont arrivés à l'orifice supérieur du puits, sans quoi le cuveau monterait jusqu'aux molettes, briserait les poulies et tous les appareils qu'il rencontrerait sur son chemin, se briserait lui-même, et son chargement retombant dans le puits pourrait occasionner de très-graves accidents. Il faut aussi pouvoir arrêter le cuveau à un moment quelconque de la course dans un cas d'accident. Pour cela, il ne faut pas compter sur la présence d'esprit ou sur le déploiement de la force musculaire d'un homme dans un moment critique. Aussi,

c'est un agent inanimé qui doit être chargé de la manœuvre de force, le rôle de l'agent intelligent étant borné au soin de lâcher une détente pour mettre en jeu l'effort principal. On a pour cela un cylindre à vapeur spécial dans lequel se trouve un piston dont la tige est chargée de produire l'effort Q quand le cylindre reçoit de la vapeur, et il suffit pour cela d'ouvrir à un moment donné le robinet qui laisse arriver la vapeur. Ce robinet peut être facilement ouvert par le mécanicien au moyen d'un certain système de leviers qui se trouve à sa portée. Si le mécanicien, ne faisant pas assez attention, oubliait d'ouvrir le robinet, le receveur placé à l'entrée du puits, assez loin de la machine, l'ouvrirait lui-même au moyen d'une transmission convenable.

Enfin, le cas où tous les deux seraient inattentifs a encore été prévu : le cuveau, en montant, rencontrerait un obstacle sur lequel il presserait, et cette pression même, transmise par un système particulier, ferait ouvrir le robinet par lequel s'introduit la vapeur.

Tout cela est évidemment fondé sur ce que l'effort développé est indépendant de celui qu'on demande du moteur. Ce dernier peut être très-petit, puisqu'il se borne à lâcher une détente, à ouvrir un robinet.

C'est à un rôle analogue que se bornent jusqu'à présent les applications de l'électricité dans l'industrie. Il serait absurde, dans l'état actuel de la science, d'employer cet agent à développer directement de la force; on peut, au contraire, s'en servir avec une grande précision pour mettre en jeu, au moment voulu, la force d'un poids ou d'un ressort.

Des courroies sans fin.

Deux arbres tournant autour des axes A et A′ (*fig.* 94) portent des poulies sur lesquelles s'enroule une corde ou courroie *sans fin* convenablement tendue. Les forces P et Q étant appliquées respectivement à deux poulies ou roues montées sur les mêmes arbres, on demande les conditions d'équilibre à l'instant où le mouvement est sur le point de naître dans le sens de la force mouvante P, eu égard aux frottements des tourillons A et A′, et faisant abstraction de la roideur de la

courroie, laquelle est ordinairement peu sensible. Pour plus de simplicité, on suppose les forces P et Q verticales et la courroie sensiblement horizontale entre les deux poulies.

Si la courroie est suffisamment tendue pour ne glisser sur aucune des poulies, en nommant T et t les tensions des deux portions de la courroie, R et R′ les rayons des poulies, ρ et ρ' les rayons des tourillons, p et q le bras de levier des forces P et Q, on aura, pour l'équilibre de la poulie A,

$$(1) \qquad Pp - (T - t)R - f_1\rho\sqrt{P^2 + (T + t)^2} = 0;$$

pour la poulie A′,

$$(2) \qquad (T - t)R' - Qq - f_1\rho'\sqrt{Q^2 + (T + t)^2} = 0.$$

Pour que la courroie ne glisse sur aucune des deux poulies, il faut que le rapport $\frac{T}{t}$ soit plus petit que la valeur calculée pour le cas où le glissement est sur le point de naître. Ainsi, on devra avoir en même temps

$$\frac{T}{t} < e^{\frac{fs}{R}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{t} < e^{\frac{f's'}{R'}},$$

s et s' étant les arcs embrassés par la courroie sur les poulies A et A′. Dans l'hypothèse de l'énoncé, on a

$$\frac{s}{R} = \frac{s'}{R'} = \pi;$$

mais le coefficient f peut n'être pas le même pour les deux poulies.

Soit m le plus petit des seconds membres des inégalités précédentes; on devra poser

$$(3) \qquad \frac{T}{t} < m, \quad \text{ou bien} \quad T = Kmt,$$

K étant un nombre moindre que l'unité et d'autant plus petit que l'appareil sera exposé à plus de secousses. Si cette circonstance n'existe pas, on fera $K = 0{,}9$ environ.

Les équations (1), (2), (3) fournissent la solution du problème en permettant de calculer les inconnues P, T, t.

Connaissant ainsi les tensions T et t que les deux brins de la courroie prendront dans le mouvement uniforme, on aura la tension que l'on devra donner à la courroie dans l'état d'équilibre, en admettant que la somme $T + t$ reste à très-peu près constante. Soit donc T_0 la tension commune des deux brins quand l'appareil est en équilibre, on aura

$$2T_0 = T + t,$$

ce qui détermine la valeur minima de T_0.

En général, on doit éviter de tendre la courroie beaucoup plus qu'il ne faut, parce que la résultante des deux tensions produit une pression sur chacun des axes et donne par conséquent lieu à un accroissement de frottement.

Indépendamment des variations de tensions qui sont dues au mouvement, la courroie en subit encore d'autres qui dépendent de l'état hygrométrique de l'atmosphère. Pour y remédier, on emploie une poulie de tension appelée aussi *tendeur*.

Une courroie sans fin étant en mouvement sur une poulie motrice et sur une poulie folle, à l'instant où on la fait passer sur une poulie résistante, commence par y glisser; car la partie immobile ne saurait prendre instantanément la vitesse de la courroie. On évite ainsi les chocs, le mouvement de la poulie résistante s'accélérant peu à peu sous l'effort tangentiel $T - t$.

Tant que le glissement dure, on a

$$T = te^{f\alpha}.$$

Mais nous avons admis

$$T + t = 2T_0,$$

d'où

$$T - t = 2\frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha} + 1}T_0.$$

CHAPITRE IV.

APPAREILS SERVANT A MESURER LE TRAVAIL DES FORCES.

L'expression générale du travail d'une force F, correspondant à un certain espace parcouru par son point d'application, étant

$$TF = \int_{s_0}^{s} F\,ds\cos\overline{F,\,ds},$$

les formules de quadrature rigoureuse ou approximative nous permettront de calculer cette quantité toutes les fois que nous connaîtrons la loi qui lie la force tangentielle à l'espace parcouru.

Dans le cas où cette loi n'est pas susceptible d'une expression mathématique, on a des appareils qui donnent la force en chaque point et qui enregistrent leurs indications sous forme graphique. On s'arrange ordinairement de manière à faire décrire à ces instruments une courbe dont les abscisses soient proportionnelles aux chemins parcourus et les ordonnées aux efforts tangentiels; l'aire de cette courbe représente le travail. Enfin, ces mêmes appareils calculent cette aire soit en même temps que la courbe se décrit, soit postérieurement.

Nous allons en donner quelques exemples.

§ XIII. — Travail de la vapeur sur un piston.

On sait que la partie essentielle de la machine à vapeur est un cylindre dans lequel se meut un piston. La force élastique de la vapeur s'exerce à la fois sur les parois fixes du cylindre et sur le piston mobile; elle développe donc un certain travail tant que le piston peut marcher dans le sens de la pression qu'il supporte.

Cherchons d'abord à calculer d'une manière générale le travail developpé par la force élastique d'un gaz renfermé dans une enveloppe quelconque, quand cette enveloppe éprouve un changement de forme quelconque.

Désignons par p la *pression* de la vapeur, c'est-à-dire le nombre de kilogrammes qui ferait équilibre à la force élastique de cette vapeur s'exerçant sur un mètre carré de surface : chaque élément ω de la surface interne de l'enveloppe supporte une charge $p\omega$, et l'on obtient le travail élémentaire de cette force en multipliant $p\omega$ par la projection sur la normale du chemin parcouru.

Donc le travail élémentaire de cette force est $T_e = ph\omega$, h étant la portion de la normale interceptée entre les deux positions de l'enveloppe. Or, la quantité $h\omega$ peut être représentée par le volume du tronc de prisme ayant ω pour base, et terminé aux deux surfaces. Donc le travail élémentaire pour tout le gaz est

$$\sum T_e = p dv.$$

Pour pouvoir intégrer, il faut connaître la loi qui lie p à v. Considérons seulement deux cas :

1° L'enveloppe est en communication avec un réservoir à pression constante. Alors on a

$$T = p \int dv = p (v_1 - v_0).$$

2° L'enveloppe est isolée. On ne sait pas alors la loi qui lie p à v, à moins que la température ne soit constante. Alors, d'après la loi de Mariotte, on a

$$pv = \text{const.} = C;$$

donc

$$\mathfrak{T} = \int \frac{C dv}{v} = C \log v + K.$$

Appliquons ceci au cas le plus ordinaire d'une machine à vapeur à détente.

Pendant que le piston parcourt un chemin v_0 (*fig.* 55), le cylindre communique avec la chaudière, de sorte que le gaz est à une pression constante p_0; le travail du piston pour ce parcours est égal à $p_0 v_0$.

Ensuite la communication est interrompue, et le volume v_0 de vapeur se dilate. Donc le travail est

$$\int_{v_0}^{v_1} p\,dv;$$

or, en supposant la température constante, on a

$$p_0 v_0 = pv,$$

d'où

$$p = \frac{p_0 v_0}{v};$$

donc le travail est

$$p_0 v_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \log \text{nép.} \frac{v_1}{v_0} = p_0 v_0 \log \text{nép.} \frac{p_0}{p_1};$$

donc le travail pour toute la course du piston est égal à

$$p_0 v_0 \left(1 + \log \text{nép.} \frac{p_0}{p_1}\right) (*).$$

Il faut retrancher de cette expression, pour avoir le travail réel du piston, le travail résistant qui résulte de la présence du gaz ou de la vapeur derrière lui, car le corps de pompe communique avec un condenseur ou avec l'atmosphère. Dans les deux cas, la pression est constante et égale à p_2. Le travail produit est donc

$$v_1 p_2 = \frac{p_0 v_0}{p_1} p_2.$$

(*) Si je suppose que p_1 tende vers zéro, c'est-à-dire que le volume du corps de pompe augmente indéfiniment, le travail correspondant est infini. Il semble ainsi qu'une même quantité de vapeur puisse fournir un travail infini. C'est là une de ces absurdités qui montrent combien de précautions sont nécessaires pour l'emploi des formules établies dans certaines hypothèses qu'on est porté à oublier une fois qu'on est en possession du résultat. Ici, nous avons établi la formule en supposant la température constante. Or, si la vapeur se dilate, il y a abaissement de température, à moins qu'on ne restitue de la chaleur au corps de pompe au moyen d'une double enveloppe de vapeur par exemple; de sorte que le travail pourra devenir infini, mais il est clair qu'on devra compter pour quelque chose la chaleur qu'on est obligé de fournir pour maintenir le gaz à une température constante. C'est ainsi que le poids d'une horloge peut servir indéfiniment et développe dans un espace limité une quantité de travail indéfinie, à la condition qu'on le remonte à des intervalles de temps convenables.

Donc enfin, le travail disponible sur le piston est

$$v_0 p_0 \left(1 + \log \frac{p_0}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}\right) (*).$$

Étant donnée une machine à vapeur en marche, il est très-intéressant de mesurer directement le travail réellement développé sur le piston, afin de voir dans quelle mesure les formules précédentes peuvent représenter le phénomène. Ce travail sera loin d'être entièrement utilisé par la machine, à cause des frottements qui existent dans les pièces qui transmettent le mouvement du piston à l'outil.

Voici la description de l'appareil qui donne la solution de cette question.

Indicateur de Watt.

Un petit cylindre AB (*fig.* 100) est disposé de manière à se visser sur l'un des fonds du cylindre de la machine, et communique avec l'intérieur par son extrémité A. Un piston C reçoit l'action de la vapeur, et monte plus ou moins dans le cylindre AB, en comprimant un ressort en hélice qui le surmonte. Un crayon, fixé à la tige du piston, vient s'appuyer par sa pointe sur un cylindre latéral D qui est recouvert d'une bande de papier, et qui reçoit autour de son axe EF un mouvement de rotation alternatif proportionnel au mouvement du piston de la machine à vapeur. Le crayon trace une courbe fermée sur le papier qui enveloppe le cylindre D; l'aire de cette courbe sert de mesure au travail moteur développé par la vapeur pendant que le piston de la machine cède à son action, diminué du travail résistant qu'elle occasionne lorsque ce piston marche en sens contraire.

La forme théorique de la courbe est celle de la *fig.* 101, dans laquelle AB représente la ligne *atmosphérique*, c'est-à-dire la ligne que décrirait le crayon si la vapeur dans le

---

(*) Si N désigne le nombre de simples courses du piston par minute, la force de la machine en chevaux est

$$\frac{N}{60 \times 75} v_0 p_0 \left(1 + \log \frac{p_0}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}\right) \text{ (Poncelet).}$$

cylindre conservait la pression atmosphérique. Je suppose qu'au départ du piston le crayon soit en C; il décrira d'abord une ligne horizontale CD, parce que pendant un certain temps le corps de pompe communique avec la chaudière et que par suite la vapeur y garde une pression constante. Ensuite, la pression diminue, le crayon décrit la courbe DE. Puis le corps de pompe communique avec le condenseur, la pression descend rapidement, ce qui donne une droite EF, le point F correspondant à la pression du condenseur; puis, quand le piston revient à sa première position, la pression ne changeant pas, le crayon décrit l'horizontale FG. Enfin on fait arriver la vapeur, la pression augmente presque instantanément, ce qui donne une verticale GC.

En pratique, on n'obtient que des courbes approchées de celles-là et qui oscillent de part et d'autre d'une certaine position moyenne. C'est l'aire de cette courbe moyenne qu'on prend pour la mesure du travail.

On peut graduer l'indicateur de Watt et chercher à quelle hauteur doit monter le crayon pour une pression déterminée, et par suite, inversement, étant donnée la position du crayon, déterminer la pression. Il suffit de retourner l'indicateur et d'y suspendre successivement des poids qui produiront sur le ressort des charges correspondant aux pressions de 1 atmosphère, 2, 3, etc. Il est facile de déterminer le poids qui correspond à 1 atmosphère quand on connaît la section du cylindre AB. En effet, la pression atmosphérique équivaut à un poids de 10330 kilogrammes par mètre carré; donc, si A est la section du cylindre rapportée au mètre carré,

$$A \times 10330$$

est le poids qui correspond à la pression de 1 atmosphère sur le piston C.

L'indicateur de Watt donnerait exactement à chaque instant la pression de la vapeur dans l'intérieur du cylindre, s'il y avait équilibre entre la force résultant de cette pression et la tension du ressort. Or, il n'en est point ainsi pendant que la pression de la vapeur diminue par l'effet de la détente, et surtout pendant que cette même pression augmente rapidement au commen-

cement de la course du piston, lorsqu'on vient d'ouvrir brusquement la communication du cylindre avec la chaudière.

Aussi le sommet C du diagramme présente-t-il toujours une pointe plus ou moins haute, provenant de ce que le piston est violemment lancé vers le haut, dépasse la position qui conviendrait à l'équilibre, et ne se fixe dans cette position qu'après un certain nombre d'oscillations dont la trace est visible sur la courbe. On atténue cet effet en diminuant la masse du piston, résultat qui a été obtenu par M. Clair en construisant en aluminium le piston ainsi que sa tige.

M. Clair avait aussi imaginé, par une combinaison cinématique extrêmement ingénieuse fondée sur les propriétés de l'encliquetage Dobo, de remplacer le mouvement alternatif du cylindre sur lequel se trouve le papier par un mouvement continu, de manière que les courbes tracées par le crayon pour un certain nombre de coups de piston successifs se placent à la suite les unes des autres au lieu de se superposer. La disposition ancienne est peut-être préférable, en ce sens qu'elle fait mieux ressortir la courbe moyenne au milieu des irrégularités accidentelles qui affectent chaque coup de piston.

§ XIV. — Dynamomètres a bande et a compteur.

Pour mesurer facilement une force considérable, on fait usage de dynamomètres fondés sur les propriétés des lames élastiques fléchies par un effort transversal (*fig.* 95). Deux lames de ressort parallèles sont réunies par leurs extrémités; et s'il s'agit, par exemple, de mesurer l'effort d'un cheval attelé à une voiture, on attachera le milieu de l'une des lames à la voiture, et on fera tirer le cheval sur l'autre lame. L'expérience prouve que l'écartement des points C et D est proportionnel à l'effort exercé, et il est facile de déterminer expérimentalement l'écart correspondant à un effort connu.

Dynamomètre de traction à bande.

On peut enregistrer d'une manière continue les indications fournies par cet appareil, en le combinant avec un système de

bobines à bandes de papier, analogue à celui que représente la *fig.* 99 *bis*.

La force de traction est appliquée suivant la direction AB et détermine un accroissement de la distance des milieux C, D des deux lames. La bande de papier se meut au-dessous du dynamomètre suivant une direction perpendiculaire à AB. Un crayon fixé au point D trace une ligne courbe sur la bande de papier ; un autre crayon porté par une pièce qui est fixée au point C trace en même temps la ligne que tracerait le premier crayon, si le point D ne s'était pas écarté du point C par l'action de la force. La distance *mn* de ces deux lignes (*fig.* 96), prise perpendiculairement à la longueur de la bande de papier, sert de mesure à la force qui agit sur le dynamomètre, au moment où le crayon fixé en D marque le point *m*. Si la bande de papier est animée d'un mouvement uniforme transmis par un mécanisme d'horlogerie, la courbe obtenue fait connaître la loi de la force par rapport au temps ; si le mouvement de la bande est proportionnel à celui du corps auquel est appliquée la force de traction, la courbe tracée sur la bande par le crayon D fait connaître la loi de cette force par rapport au chemin parcouru. Dans ce dernier cas, l'aire *mnpq* fournit la valeur du travail de la force correspondant au temps pendant lequel la bande a marché de la quantité *nq*.

Dynamomètre de traction à compteur.

Un plateau circulaire AB (*fig.* 97) reçoit un mouvement de rotation autour de son axe CD ; ce mouvement est proportionnel à celui du corps auquel la force est appliquée. Une boîte E, fixée au milieu de la lame antérieure d'un dynamomètre, porte une roulette qui est très-mobile autour d'un axe parallèle à la direction de la force, et qui s'appuie en G sur le plateau ; cette roulette touche le plateau en C lorsque aucune force n'écarte les lames du dynamomètre. La force de traction ayant transporté la roulette de C en G, et le plateau ayant un mouvement proportionnel à celui du point d'application de la force, on reconnaît aisément que la quantité dont tourne la roulette par suite de son adhérence avec le plateau est proportionnelle au travail de la force. Le mouvement de la roulette se transmet

par un mécanisme d'horlogerie à un cadran divisé dont les diverses parties passent ainsi sous un point de repère fixe. L'observation des positions initiale et finale de ce cadran fait connaître le nombre de tours dont la roulette a tourné pendant la durée de l'expérience, et, par suite, le travail produit par la force pendant ce temps. On détermine la quantité de travail qui correspond à chaque division du cadran mobile, par une expérience préalable.

Les dynamomètres de traction à bande et à compteur peuvent être employés, par exemple, pour mesurer le travail développé dans le tirage des voitures. Dans ce cas, on transmet à la bande de papier, ou au plateau, un mouvement proportionnel à celui de la voiture, au moyen d'une corde sans fin que l'on fait passer dans la gorge d'une poulie adaptée au moyeu de l'une des roues de la voiture.

Les appareils à bande ont l'avantage de donner la loi de variation de l'effort avec toutes les circonstances.

Manivelle dynamométrique.

Cette manivelle se substitue à une manivelle ordinaire, lorsque l'on veut mesurer le travail nécessaire pour entretenir le mouvement de rotation de l'arbre auquel elle est adaptée. Une lame de ressort A (*fig.* 98), fixée par une de ses extrémités dans la pièce B qui fait corps avec l'arbre, vient passer à son autre extrémité entre deux couteaux d'acier portés par le bras CD de la manivelle. Ce bras CD est évidé de manière à laisser toute liberté au ressort A qui passe à son intérieur; il peut d'ailleurs tourner librement autour du petit cylindre E fixé à la pièce B dans le prolongement de l'axe de rotation de l'arbre. Lorsqu'on agit sur la poignée D pour faire tourner l'arbre, cette action se transmet tout entière à l'arbre par l'intermédiaire du ressort qui fléchit en conséquence. La pièce B porte un appareil à bande de papier disposé en arrière du ressort; la bande se meut proportionnellement au mouvement de rotation de l'arbre et dans la direction du ressort A, lorsqu'il n'est pas tendu. Un crayon porté par le bras CD de la manivelle trace une courbe sur la bande de papier; un second crayon, porté par le support de la bande, trace en même temps

la ligne que le premier crayon tracerait si le ressort A n'était pas tendu pendant le mouvement. Ces deux lignes servent à déterminer le travail développé par la force qui agit sur la manivelle, comme dans le cas du dynamomètre de traction à bande.

Dynamomètre de rotation.

Pour mesurer le travail que développe une machine en produisant le mouvement de rotation d'un arbre soumis à l'action de diverses résistances, on se sert de dynamomètres qui ont une grande analogie avec la manivelle dynamométrique. Trois poulies A, B, C, destinées à recevoir des courroies, sont montées sur un arbre DE (*fig.* 99). La première A est folle sur l'arbre, et peut tourner seule, tandis que le reste de l'appareil est en repos. La seconde poulie B est fixée invariablement à l'arbre DE. La troisième poulie C est folle sur l'arbre, comme la première ; mais elle ne peut pas tourner indépendamment de lui, parce qu'elle lui est reliée par des ressorts. Ces ressorts, analogues à celui de la manivelle dynamométrique, sont implantés dans l'arbre DE, et dirigés suivant des rayons de la poulie C ; il y en a ordinairement deux, opposés l'un à l'autre. Les extrémités de ces ressorts sont engagées entre des couteaux d'acier que porte la poulie C près de sa circonférence (*fig.* 99, détail C'). Lorsque la poulie B tourne, elle entraîne l'arbre DE qui fait corps avec elle ; cet arbre entraîne à son tour la poulie C par l'intermédiaire des ressorts qui fléchissent plus ou moins, suivant que la poulie C éprouve une résistance plus ou moins grande. Pour se servir de cet appareil, on l'emploie comme intermédiaire pour la transmission du mouvement à l'arbre auquel sont appliquées les résistances à vaincre. On enlève, par exemple, un manchon, qui sert à relier ensemble deux portions de cet arbre ; puis on adapte à chacune de ces deux portions ainsi rendues indépendantes l'une de l'autre, deux tambours M, N, destinés à recevoir des courroies qui passent en même temps sur les poulies B, C de l'appareil. La poulie folle A sert à interrompre et à rétablir à volonté la transmission du mouvement, par un transport latéral de la courroie du tambour M. Un appareil à bande de papier ou à compteur est installé à côté de la poulie C (*fig.* 99 *bis*) ; le

mouvement de la bande de papier ou du plateau est proportionnel au mouvement de rotation de l'arbre, et le travail développé pour entretenir ce mouvement est donné absolument de la même manière que dans les dynamomètres de traction.

§ XV. — Frein dynamométrique de Prony.

Depuis longtemps les mécaniciens ont cherché à mesurer par des moyens directs, non pas le travail développé par le moteur, mais bien la quantité de travail transmise aux arbres tournants pendant le travail régulier des machines, parce que c'est là ce qui intéresse surtout l'industriel. Dans le cas d'une machine à vapeur, par exemple, on peut mesurer le travail de la vapeur dans le cylindre au moyen de l'indicateur de Watt. Mais il est possible qu'il y ait dans l'intérieur du cylindre un travail considérable produit, et que, par suite de mauvaises dispositions de la machine, le travail transmis à l'arbre soit de beaucoup diminué et rendu trop faible pour les machines que l'arbre tournant devra mettre en mouvement. On emploie pour mesurer le *travail disponible* le frein de Prony. J'entends par *travail disponible* sur un arbre donné le travail transmis par le moteur à la machine, diminué de celui qui est absorbé par les résistances passives des pièces intermédiaires comprises entre le récepteur et l'arbre que l'on considère.

Le principe de cette machine est très-simple; il consiste à supprimer les résistances ordinaires et à employer tout le travail transmis à l'arbre tournant pour vaincre un travail résistant facile à évaluer. Et comme, dans le mouvement régulier de la machine, le travail moteur est égal au travail résistant, nous aurons ainsi ce que nous cherchions, le travail moteur transmis à l'arbre à la condition que celui-ci se trouve dans l'expérience absolument dans les mêmes conditions de vitesse et autres que dans le travail régulier.

Il faut que l'arbre ait en un point de sa longueur une partie tournée, ou bien que l'on fixe dessus une poulie en fonte à gorge plate, également tournée.

Le frein dynamométrique tel qu'il a été proposé et décrit par M. de Prony consiste en un levier *ab* garni d'un coussinet *e* qui repose sur l'arbre tournant *c*, auquel la direction du levier est perpendiculaire (*fig.* 102). Une autre pièce $a'b'$ placée sur l'arbre est réunie à la première *ab* par deux boulons *d*, *d'*, au moyen desquels on peut serrer à volonté l'arbre entre les pièces *ab*, $a'b'$, qui portent le nom de *mâchoires du frein*. De la compression de l'arbre *c* entre les mâchoires résulte à sa circonférence un frottement qui, pendant le mouvement, tend à entraîner le levier *ab* et à le faire participer à la rotation de l'arbre; mais un poids P, placé dans un plateau fixé au bout du levier s'oppose à son mouvement et fait constamment équilibre au frottement qui se développe sur la circonférence de l'arbre.

Pour faire un essai, on commence par supprimer l'action de toutes les résistances qui agissent sur la machine fonctionnant régulièrement; puis, en augmentant ou diminuant le serrage des écrous, on amène la machine à sa vitesse de régime; en même temps on maintient le levier immobile en plaçant un poids convenable dans le plateau.

Si cette dernière condition est satisfaite et qu'on arrête l'expérience à un instant où la vitesse de la machine soit exactement ce qu'elle était à l'instant initial, il est clair que le travail moteur transmis à l'arbre pendant toute la durée de l'essai est exactement égal au travail résistant développé par le frottement des mâchoires sur la jante de la poulie.

Or, ce dernier travail est facile à obtenir. En effet, soit F une des forces tangentielles provenant de l'action des mâchoires sur la circonférence de la poulie; si nous désignons par *r* le rayon de cette poulie et par ω la vitesse angulaire de l'arbre, nous aurons pour le travail de la force F en une seconde

$$F\omega r,$$

et pour le travail moteur dépensé pendant le même temps,

$$T_m = \omega r \sum F.$$

D'un autre côté, le levier est en équilibre sous l'action du poids P, dont le moment, par rapport à l'axe, est PR, R étant

la distance du poids P à l'axe de rotation, et des forces du frottement dont les moments sont représentés d'une manière générale par Fr; donc on a

$$PR = r\sum F;$$

$$T = PR\omega.$$

On voit qu'on n'a besoin de connaître ni la pression exercée par les mâchoires du frein sur l'arbre, ni le rapport de cette pression au frottement F, et qu'il suffit de la faire varier en serrant ou desserrant les boulons d, d' et augmentant ou diminuant en même temps le poids P jusqu'à ce que l'arbre ait pris la vitesse sur laquelle on veut opérer (*).

La formule précédente a été établie dans l'hypothèse que la vitesse de la machine était exactement la même à la fin de l'essai qu'au commencement, et que, de plus, pendant toute la durée de l'essai le levier du frein reste immobile.

La première condition oblige à donner à l'essai une durée assez longue, dix à quinze minutes au moins, pendant lesquelles on mesurera plusieurs fois la vitesse au moyen d'une montre à secondes. Si la vitesse a diminué, c'est que le poids mis dans le plateau est trop fort, et il faut recommencer l'essai après avoir déchargé le plateau. Suivant le plus ou moins d'habileté de l'opérateur, ces corrections pourront entraîner des tâtonnements pénibles; mais il faut remarquer qu'un très-faible changement de vitesse peut correspondre à une assez grande variation de force vive et, par suite, à une dépense notable de travail, si la machine possède plusieurs pièces faisant fonction de volants. L'erreur provenant de cette source aura d'ailleurs une importance relative d'autant plus faible que l'essai aura duré plus longtemps.

Quant à la deuxième condition, il n'est pas possible de maintenir le levier dans une position invariable pendant la durée que nous avons assignée. Le coefficient du frottement

(*) En mesurant le travail transmis par le moteur pour différentes vitesses de la machine, on déterminera la vitesse qui correspond au maximum d'effet utile, vitesse qui, ainsi que nous l'avons dit, est sans aucun rapport avec la vitesse qu'on veut faire prendre à l'outil.

du frein sur la poulie, malgré toutes les précautions qu'on peut prendre (*), ne reste pas constant, de sorte que l'équilibre se trouve fréquemment rompu; le levier s'élève ou s'abaisse, et, pour le ramener à l'horizontalité, on est obligé de diminuer ou d'augmenter le serrage, en agissant avec une clef sur les écrous.

Il est évident que si, par suite des oscillations du levier, le moment du poids P (ainsi que le moment du poids du frein lui-même, dont il faut tenir compte toutes les fois que l'arbre n'est pas vertical) subit des variations, les résultats obtenus seront nécessairement incertains et conduiront à des quantités de travail différentes, suivant que le levier sera resté plus ou moins longtemps dans telle ou telle position. Il est donc indispensable que ces moments soient bien constants pour toutes les obliquités que le levier a la faculté de prendre.

On obtient la constance du moment de la charge du frein en attachant le plateau au levier à l'aide d'une courroie fixée à l'extrémité supérieure d'un arc en fer centré exactement sur l'arbre (*fig.* 103).

Quant au moment du poids des freins, il ne peut être rigoureusement constant que si l'appareil est équilibré autour de l'axe de rotation, ce qui n'est pas le cas habituel. C'est là une cause d'erreur qui n'a été complétement évitée que dans le frein circulaire de M. Kretz (*fig.* 104), que nous décrirons dans un instant.

Lorsque ces deux conditions sont remplies, les oscillations inévitables du frein ne troublent en rien l'exactitude des résultats obtenus dans l'essai (**).

Le moment du poids, pour les freins ordinaires, doit être

(*) Il faut, pour l'uniformité du frottement, que la jante de la poulie soit tournée et parfaitement centrée sur l'axe de rotation, que les surfaces frottantes soient, pendant toute la durée de l'essai, à la même température et dans le même état de lubrifaction. Il y aurait avantage, pour que l'effort nécessaire au serrage fût réduit au minimum, à ce que le coefficient de frottement fût très-grand, en même temps que régulier.

On obtient la régularité et on évite l'échauffement en arrosant la poulie et les mâchoires d'eau pure. Il est inutile et même mauvais d'employer de l'eau de savon.

(**) Ces indications sont extraites du *Mémoire sur les conditions à remplir dans l'emploi du frein dynamométrique*, par M. Kretz (*Comptes rendus*, 7 mars 1864).

déterminé par une expérience préalable dans laquelle on fait reposer la mâchoire supérieure du frein sur un couteau A (*fig.* 105). Le frein tend à tomber du côté du plateau; on le maintient horizontal à l'aide de cales. Un peu au-dessus du frein est disposé un fléau de balance BD dont l'une des extrémités B est précisément sur la direction de la verticale passant par le centre de gravité du poids placé dans le plateau. On attache une courroie, d'une part à cette extrémité, d'autre part à la partie inférieure de l'arc; on enlève les cales et on détermine le poids H qu'il faut suspendre en D à l'autre bout du fléau pour maintenir le levier horizontal.

Le poids H, qui, ainsi appliqué à la distance R = AE, a précisément le même moment que le poids de l'appareil, se nomme *tare du frein*.

L'inconvénient de cette manière d'opérer est que le levier ainsi placé constitue une espèce de balance, mais une balance paresseuse, de sorte qu'il règne une assez grande incertitude sur le poids qu'on doit mettre pour obtenir l'équilibre. Il est cependant bien important d'avoir ce poids avec une grande exactitude, vu que pour des vitesses assez fortes il faut très-peu de chose pour représenter un cheval de force. Une autre cause d'erreur très-grave provient de ce que, pendant la tare, la rotation ne se fait pas autour du même axe que pendant l'essai, et en vertu de ce que le frein formé de voussoirs se déforme, ce qui modifie la position de son centre de gravité. M. Demondésir a supprimé cet inconvénient en opérant de la manière suivante.

On construit un disque en bois ayant exactement le même diamètre que la poulie et traversé perpendiculairement à son plan par un couteau dont l'arête passe par le centre (*fig.* 106). On monte le frein sur ce disque comme il doit l'être sur la poulie pendant l'expérience; on fait reposer tout le système par le tranchant du couteau sur un appui horizontal. La tare s'obtient alors par rapport au centre de la rotation pendant l'essai, et le degré de sensibilité de la balance ainsi constitué donne la mesure de l'approximation que l'on peut obtenir avec le système du frein employé.

En général, il sera bon de refaire la tare immédiatement après le dernier essai, car le frein est toujours fortement

mouillé dans l'expérience, et l'eau absorbée par les mâchoires et le levier peut apporter à la tare des modifications notables.

Du serrage. — Ces précautions étant prises, il faut rendre la manœuvre des écrous aussi facile que possible, et s'arranger de manière que les efforts exercés pour cela aient un moment nul par rapport à l'axe, car le contraire fausserait évidemment les résultats de l'essai. Enfin il importe d'arrêter les oscillations le plus vite possible, sans quoi le levier pourrait être emporté dans un sens ou dans un autre avant que le serrage convenable ait pu être établi.

Pour éviter ces accidents, il est indispensable de limiter les excursions que peut faire le frein de part et d'autre de l'horizontale. On arrive à ce résultat en installant deux arrêts solides G et H (*fig.* 105 et *fig.* 102), tels que de fortes traverses en charpente, contre lesquelles le levier vient buter à la hauteur des plus grandes oscillations qu'on veut lui permettre. Seulement, dès que, dans un essai normal, le levier a touché l'un ou l'autre de ces arrêts, l'opération a manqué, car le choc a perdu une certaine quantité de travail.

Le serrage est rendu facile et les efforts à exercer sont transmis dans l'aplomb de l'axe en faisant agir une clef double sur le système de roues et de pignons indiqué dans la *fig.* 103 (*); mais, quelque facile que soit cette manœuvre, elle exige toujours un certain temps, et il convient, afin de ralentir les oscillations, de donner une valeur suffisamment grande au moment d'inertie de l'appareil, c'est-à-dire d'avoir une poulie de très-grand diamètre, et d'éloigner le plateau de l'axe le plus possible.

Stabilité du frein. — On peut s'arranger de manière que, s'il y a augmentation ou diminution du moment des frottements, les variations du moment de la charge et des poids rétablissent l'équilibre; c'est ce qui arrive quand le levier est placé au-dessous sans arc de cercle. On obtient ainsi une grande stabilité, mais, par cela même, on s'expose à des erreurs, car le levier peut prendre une nouvelle position d'équilibre sans que l'opérateur soit obligé de manœuvrer les écrous et, par suite,

(*) L'idée de cette disposition est de M. de Saint-Léger.

de remettre le système dans sa position normale. Avec l'autre disposition, l'opérateur est obligé de corriger immédiatement les moindres variations, sous peine de laisser manquer l'essai.

Diverses dispositions données au frein.

La disposition la plus habituelle est celle de la *fig.* 102, dans laquelle la mâchoire inférieure est souvent remplacée par une série de voussoirs maintenus par une bande en fer (*fig.* 106).

La *fig.* 103 représente le frein employé par M. Rolland et construit par M. Farcot (*) pour l'essai des machines de la manufacture des tabacs de Strasbourg.

Le frein est monté sur une poulie en fonte tournée sur sa gorge et composée de deux parties qui se rapprochent pour embrasser l'arbre, et qui se réunissent au moyen de boulons. La poulie est creuse, et ses joues sont percées de trous par lesquels on peut introduire dans l'intérieur de la couronne un courant d'eau dans le but de prévenir l'échauffement de la jante et d'uniformiser le frottement. Un deuxième courant arrose, dans le même but, la partie extérieure de la couronne; l'eau est amenée au moyen de deux tuyaux en plomb qui communiquent avec un réservoir supérieur dont le niveau est maintenu constant au moyen d'une pompe élevant l'eau d'un puits. On voit que de cette sorte les surfaces frottantes sont maintenues à une température constante et toujours dans le même degré d'humidité, et que, par suite, les conditions nécessaires à l'uniformité du frottement se trouvent remplies. On emploie quelquefois l'eau de savon; mais, si le frottement devient un peu plus régulier, il devient aussi beaucoup plus doux, ce qui a l'inconvénient d'exiger un trop grand effort pour le serrage.

La mâchoire supérieure du frein est une pièce de bois entaillée circulairement. La mâchoire inférieure se compose d'une série de voussoirs en bois juxtaposés et retenus par une bande de fer plat qui les maintient appuyés contre la gorge.

(*) Les dispositions principales de ce frein avaient été indiquées antérieurement par M. de Saint-Léger. (*Annales des Mines*, t. XII, 1837.)

Cette bande de fer se termine par deux tiges rondes filetées à leur extrémité pour recevoir un écrou au moyen duquel on produit le serrage.

Frein circulaire. — Enfin la disposition circulaire (*fig.* 104) imaginée par M. Kretz et employée pour la première fois par cet ingénieur en 1862 permet d'équilibrer parfaitement tout l'appareil et paraît réaliser de la manière la plus satisfaisante les conditions d'exactitude et de facilité dans la manœuvre.

Le frein est monté sur le volant ou sur une roue de grand diamètre. Il se compose d'une série de voussoirs en bois fixés sur une bande de fer et symétriquement disposés par rapport à l'arbre. Aux deux extrémités de la bande sont deux vis de sens inverse qui s'engagent dans un écrou double A. La facilité avec laquelle cet écrou se manœuvre au moyen de quatre bras de levier est un premier avantage de la disposition que nous étudions; le frottement des écrous contre les embases fixes est entièrement supprimé; de plus, le moment des efforts qu'il faut exercer est toujours nul par rapport à l'axe. La courroie est fixée à un secteur centré sur l'arbre, et on s'arrange de manière que le centre de gravité de l'ensemble du frein, moins la courroie et le plateau, soit exactement sur l'axe, ce qui donne une grande sensibilité à l'appareil et enlève les incertitudes provenant des variations du moment du poids pendant l'essai. S'il était au-dessus, la balance serait folle; au-dessous, elle serait paresseuse.

Il n'y a donc pas à s'occuper de la tare du frein, ou plutôt cette opération consiste simplement à faire coïncider le centre de gravité avec le centre de rotation, résultat auquel on arrive facilement par l'addition de lames de plomb sur les parties trop légères.

La tare de ce frein reste très-sensiblement constante pendant l'essai, parce que l'eau qui vient imprégner les voussoirs se répartit régulièrement autour de l'axe; on peut du reste la rendre invariable en saturant tous les voussoirs d'eau avant l'expérience.

FIN DU DEUXIÈME FASCICULE.