Jos Mathey

COURS

DE

MATHÉMATIQUES.

L'**Auteur** et l'**Éditeur** de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon, soit du texte, soit des gravures, ou toute traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage (tome Ier) a été fait à Paris dans le mois de Mai 1860, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Mallet-Bachelier

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

ET DE TOUS LES ÉLÈVES QUI SE DESTINENT AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT.

PAR CHARLES DE COMBEROUSSE,

INGÉNIEUR CIVIL,

Examinateur d'Admission à l'École Centrale des Arts et Manufactures, Répétiteur de Mécanique appliquée à la même École, Professeur de Mathématiques et de Mécanique au Collège Chaptal.

TOME PREMIER.

ARITHMÉTIQUE. — ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

Quai des Augustins, 55.

1860

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.

PRÉFACE.

Notre but, en publiant ce *Cours*, a été surtout de venir en aide aux nombreux Candidats qui se destinent à l'École Centrale. Pour eux, en effet, une instruction mathématique trop superficielle est souvent une cause d'insuccès dès leur première année d'études.

Nous n'avons pas voulu faire un Manuel : ce titre oblige à une concision nuisible à la fois à l'auteur et aux lecteurs. Nous avons cherché, en nous conformant au cadre propre à l'institution de l'École Centrale et au nouveau Programme d'admission, à faire entrer dans notre livre toutes les théories générales qu'un Ingénieur doit posséder, et que toute personne distinguée devrait au moins comprendre. Nous avons donc tenté à la fois d'écrire un livre spécial et un ouvrage qui s'adressât à un plus grand nombre de lecteurs.

Nous croyons qu'il est mauvais de se renfermer par trop strictement dans les limites d'un Programme. C'est là le devoir des Examinateurs, et, en le remplissant, ils peuvent tenir la balance plus égale entre les concurrents; mais ce ne saurait être celui des Professeurs, dont la mission, avant de préparer à tel ou tel examen, est d'éclairer et de fortifier l'esprit. N'est-ce pas d'ailleurs assurer la possession durable des connaissances élémentaires, que d'y joindre aussitôt que possible, avec moins de détails mais avec autant de soin, des connaissances plus élevées et dont les applications soient plus étendues?

Le premier volume du Cours que nous offrons au public renferme l'*Arithmétique* et l'*Algèbre élémentaire*.

Nous avons cherché à ne rien négliger de ce qui pouvait

faciliter aux Élèves l'étude de l'Arithmétique; mais nous nous sommes efforcé en même temps de leur donner à ce sujet les idées les plus générales et les plus complètes. Au point de vue pratique, toutes les questions aboutissent au Calcul numérique, et l'on rencontre souvent des Élèves qui, faute d'avoir consacré quelques mois à approfondir cette première et importante partie des Mathématiques, se trouvent arrêtés par les plus simples transformations.

Nous avons cru devoir répéter en Algèbre, sous une autre forme, certaines théories qu'on ne donne en Arithmétique qu'à la condition de déguiser sans utilité la marche algébrique. Nous appelons l'attention des Élèves sur la Théorie des grandeurs proportionnelles ou inversement proportionnelles, d'ordinaire si mal comprise et si mal appliquée par eux. Les phénomènes naturels ramènent sans cesse à ces sortes de grandeurs, et il est indispensable d'être familiarisé de bonne heure avec les relations correspondantes.

Ce premier volume contient toute la partie de l'Algèbre exigée pour l'admission à l'Ecole Centrale.

Le second volume renferme la *Géométrie élémentaire*, la *Trigonométrie*, un *Complément de Géométrie*, un *Complément d'Algèbre*.

Nous avons donné avec soin tout ce qui constitue la Géométrie élémentaire proprement dite. Nous avons exposé la Théorie complète des Angles trièdres, et nous en avons déduit plus tard celle des Triangles sphériques. Cette marche, qui est la plus simple, est aussi celle qui grave le mieux dans la mémoire des Élèves les propositions relatives à la Sphère. L'importance de l'étude de la Sphère n'a pas besoin d'être démontrée, et il est inutile sans doute de la faire ressortir en citant les sciences où cette étude est indispensable.

Nous avons suivi pour la Trigonométrie la marche inaugurée à l'École Centrale, il y a plus de vingt ans, par M. Belanger. Cette marche a l'avantage de simplifier et d'abréger : nous devions la préférer. Elle familiarise d'ailleurs les Élèves avec la Théorie des Projections, si

féconde en résultats importants. L'esprit qui a présidé à la rédaction de ce Cours nous commandait de ne rien tronquer. Nous avons donc (bien que le Programme d'admission ne l'exige pas) terminé cette section par la *Trigonométrie sphérique*.

D'ordinaire les Élèves ne savent comment s'y prendre pour résoudre un problème de Géométrie. Nous avons cherché, par des exemples, à leur faire sentir dans quelle direction leurs efforts devaient s'exercer. En même temps, nous avons voulu leur faire connaître certaines théories modernes qui jouent, précisément dans la résolution des problèmes, un rôle très-remarquable. Nous voulons parler des Théories des Transversales et des Polaires. Nous croyons que notre *Complément de Géométrie* en donne une idée juste, quoique nécessairement succincte.

Enfin, bien que le Programme d'admission se taise encore sur ce point, nous avons cru devoir exposer en détail la seconde partie de l'Algèbre, c'est-à-dire celle qui constitue (en ce qu'elle a de plus élémentaire et de plus directement utile) la Théorie générale des Équations. Des notions sur les Dérivées et sur les Séries ouvrent cette section, et seront plus tard extrêmement précieuses aux Élèves, une fois qu'ils auront été admis. Nous donnons ensuite les Propriétés générales des Équations, le Calcul des Racines commensurables, et la Théorie des Différences, si utile dans les applications. Nous appelons l'attention des Élèves sur la Méthode des Substitutions successives.

Le troisième volume renferme la *Géométrie analytique*, la *Géométrie descriptive*, et des *Notions de Physique*, considérées comme devant servir à la fois d'Introduction à l'étude de la Physique proprement dite et à celle de la Mécanique rationnelle.

C'est à un point de vue de généralisation que nous nous sommes placé en traitant de la Géométrie analytique. Nous l'avons fait avec d'autant moins de scrupules, que le Programme nous y engageait par son élasticité même. Nous n'avons pas oublié que nous nous adressions

à de futurs Ingénieurs, et nous avons insisté sur les applications pratiques de la Géométrie analytique. Nous nous sommes étendu sur la Géométrie à trois dimensions, et l'élève qui possédera cette section pourra suivre avec plus de fruit le Cours de Géométrie descriptive professé à l'École.

Nous avons en Géométrie descriptive adopté la Méthode connue sous le nom de *Transformation des Projections* et due à l'éminent et regrettable professeur Th. Olivier. Il ne faut pas l'appliquer sans raison, elle conduit dans certains cas à des constructions moins simples que les théorèmes de la Géométrie dans l'espace, mis directement en œuvre; mais elle est complétement générale, et sans elle, à nos yeux, la Géométrie descriptive manque de lien et n'est plus qu'un recueil d'exercices. Nous n'avons pas donné toute la Géométrie descriptive; mais nous pensons que le lecteur ne se trouvera embarrassé par aucune question nouvelle, et qu'il aura une idée exacte de tous les procédés de la science créée par Monge.

Nous avions d'abord l'intention de terminer ce troisième volume par des *Éléments de Calcul infinitésimal.* Mais M. Belanger ayant fait paraître la seconde édition du *Résumé de ses leçons* sur ce sujet (*), nous avons dû modifier notre plan. Nous prions donc les Élèves de regarder le livre de M. Belanger comme le complément naturel de notre *Cours*. Ils y trouveront ce qu'on trouve dans tous les ouvrages du même auteur : une lucidité remarquable et le talent si rare de dire juste ce qu'il faut. Son but constant a été de simplifier l'étude des Sciences, sans leur rien ôter en profondeur et en rigueur, et ses beaux travaux en Mécanique, dignement appréciés des Savants et des Ingénieurs, en sont une preuve. Qu'il me soit per-

---

(*) *Résumé de Leçons de Géométrie analytique et de Calcul infinitésimal, comprenant l'exposition des connaissances nécessaires aux Ingénieurs pour l'intelligence de la Mécanique rationnelle, de l'Hydraulique et de la Théorie dynamique des Machines;* par J.-B. Belanger, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur de mécanique à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Centrale. — Chez Mallet-Bachelier, 1850. Prix : 6 francs.

mis de lui témoigner ici, comme ancien élève et respectueux disciple, toute ma gratitude pour ses conseils éclairés et sa bienveillance inépuisable.

Ce changement nécessaire et tout dans l'intérêt des Élèves nous a conduit à terminer l'ouvrage par l'examen des *Notions de Physique* exigées pour l'admission. Ces Notions renferment les premiers éléments de la Mécanique rationnelle, éléments que les Élèves comprennent généralement fort mal. Nous avons remarqué que ces premières difficultés dégoûtaient parfois de la Physique des Élèves fort laborieux d'ailleurs ou, du moins, leur coûtaient des efforts et un temps beaucoup trop considérables. Nous avons donc cru leur rendre service en sortant des Mathématiques pures et en en faisant directement avec eux cette nouvelle et si importante application.

Si notre *Cours* pouvait, dans son ensemble, convenir à la fois aux Candidats à l'École Centrale et aux Candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, nous aurions atteint notre but qui a été d'éviter une trop grande spécialisation.

Et si l'on trouvait que nous avons été trop loin, puisque nous nous adressions surtout aux Candidats à l'École Centrale, voici quelle serait notre réponse.

L'École Centrale a besoin de parcourir, dans la première année d'études, un ensemble fort vaste, pour pouvoir passer aux applications qui absorbent les deux années suivantes. L'élève non préparé ou mal préparé a donc toutes les chances contre lui : il s'épuise en efforts pour se maintenir dans un rang médiocre et souvent succombe à la peine. Il est donc dans l'intérêt de tout candidat sérieux de voir plus que le Programme. Il en a le temps, puisque, la limite d'âge ayant été élevée à dix-huit ans, on n'est pas tenté de se présenter trop hâtivement au Concours. En outre, certaines parties ne devant plus figurer désormais dans les Cours de l'École, si les élèves les possèdent incomplètement, ils ne peuvent avoir aucun espoir de réussite. Guidé par ces considérations, nous n'avons pas craint d'ajouter telle théorie ou tel développement important : nous croyons avoir bien fait.

Être clair a été notre préoccupation constante. Nous avons cherché à élucider chaque théorie par des exemples appropriés, et nous n'avons rien négligé de ce qui, en intéressant le lecteur, doit lui faire prendre goût aux Mathématiques et, dès lors, assurer son succès.

Nous serions ingrat envers nos Collègues et envers nos Maîtres si nous ne disions pas, en terminant, que les ouvrages remarquables publiés depuis plusieurs années sur toutes les branches de l'enseignement nous ont souvent aidé dans notre travail, en appelant notre attention sur tel point délicat ou en précisant davantage notre manière de voir. Si nous avons été assez heureux pour indiquer parfois une amélioration de détail, on le reconnaîtra sans que nous ayons besoin d'en parler. Nous espérons que notre livre sera utile; et pour un livre tel que celui-ci, où l'Auteur ne peut avoir d'autres prétentions que l'ordre, la netteté des idées et la simplicité des démonstrations, c'est le seul vœu que nous puissions former.

TABLE DES MATIÈRES.

ARITHMÉTIQUE.

LIVRE PREMIER.

LA NUMÉRATION ET LES QUATRE OPÉRATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES ENTIERS.

CHAPITRE PREMIER. — Numération.

Notions préliminaires, page 1. — Numération parlée, 3. — Numération écrite, 4. — Lecture et écriture des nombres, 5.

CHAPITRE II. — Addition et Soustraction.

Addition, 6. — Soustraction, 8. — Notions sur les compléments, 9.

CHAPITRE III. — Multiplication.

Multiplication de deux nombres d'un seul chiffre, 11. — Multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, 12. — Multiplication de deux nombres de plusieurs chiffres, 13. — Remarques sur la multiplication, 14. — *Exercices*, 16.

CHAPITRE IV. — Division.

Définitions, 16. — Cas où le quotient n'a qu'un chiffre, 17. — Cas où le quotient a plusieurs chiffres, 19. — Remarques sur la division, 21. — *Exercices*, 23.

CHAPITRE V. — Théorèmes relatifs aux quatre opérations. — Des Puissances.

Notations, 24. — Théorème relatif à la soustraction, 25. — Théorèmes relatifs à la multiplication, 26. — Théorèmes relatifs à la division, 29. — Des puissances, 31. — Remarque sur les six opérations considérées en Arithmétique, 33.

LIVRE DEUXIÈME.

LES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES NOMBRES.

CHAPITRE PREMIER. — Théorie de la Divisibilité.

Théorèmes sur les diviseurs, 34. — Conditions de divisibilité par 2, 5, 3, 9, 11, page 36. — Preuves des quatre opérations fondamentales, au moyen des caractères de divisibilité, 39.

CHAPITRE II. — Théorie du plus grand commun diviseur.

Plus grand commun diviseur de deux nombres, 41. — Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, 42 (en note). — Théorèmes relatifs au plus grand commun diviseur, 43.

CHAPITRE III. — Théorie des nombres premiers.

Définitions, formation d'une table de nombres premiers, 45. — Théorèmes sur les nombres premiers, 47. — Décomposition d'un nombre en facteurs premiers, 49. — *Exercices*, 52.

CHAPITRE IV. — Applications de la théorie des nombres premiers.

Recherche des diviseurs d'un nombre, 52. — Théorème sur leur quotité, 53. — Composition du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de plusieurs nombres, 54. — Seconde méthode générale pour trouver le plus petit commun multiple de plusieurs nombres, 55 (en note). — *Table des diviseurs premiers des nombres non divisibles par* 2, 3, 5, 7, *depuis* 1 *jusqu'à* 3000, page 56.

LIVRE TROISIÈME.

LES FRACTIONS ET LES NOMBRES DÉCIMAUX.

CHAPITRE PREMIER. — Propriétés des Fractions.

Définition et notation, propriétés fondamentales, 59. — Théorie des fractions irréductibles, 61. — Réduction des fractions au même dénominateur et au plus petit dénominateur commun, 63. — Théorèmes sur les fractions, 65. — *Exercices*, 69.

CHAPITRE II. — Opérations sur les Fractions.

Addition, 69. — Soustraction, 70. — Multiplication, 71. — Division, 74. Puissances, 76. — Généralisation des théorèmes relatifs aux opérations, 77. — Des rapports, 78. — *Exercices*, 80.

CHAPITRE III. — DES NOMBRES DÉCIMAUX.

Définitions, 81. — Lecture et écriture des nombres décimaux, 82. — Addition et soustraction, 84. — Multiplication, 85. — Multiplication abrégée, 86. — Division, 89. — Division abrégée, 91. — *Exercices*, 96.

CHAPITRE IV. — CONVERSION DES FRACTIONS ORDINAIRES EN DÉCIMALES.

Règle générale à suivre, 97. — Condition pour que la conversion soit exacte, 98. — Fractions décimales périodiques, 99. — Retour à la fraction ordinaire génératrice, 101. — Théorèmes relatifs aux puissances entières d'un nombre plus grand ou plus petit que 1, page 101 (en note). — *Exercices*, 106.

LIVRE QUATRIÈME.

LES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

CHAPITRE PREMIER. — THÉORIE DE LA RACINE CARRÉE.

Définitions. On peut obtenir un nombre incommensurable avec une approximation quelconque, 107. — Composition du carré d'une somme de deux parties et remarques sur les carrés, 109. — Extraction de la racine carrée d'un nombre à l'unité près, 111. — Remarques relatives au reste de l'opération, 115. — Racine carrée des fractions et des nombres décimaux, 116. — Simplification qu'on peut apporter à l'extraction de la racine carrée, 118.

CHAPITRE II. — THÉORIE DE LA RACINE CUBIQUE.

Composition du cube d'une somme de deux parties et remarques sur les cubes, 121. — Extraction de la racine cubique d'un nombre à l'unité près, 122. — Racine cubique des fractions et des nombres décimaux, 126.

CHAPITRE III. — THÉORIE DES APPROXIMATIONS DÉCIMALES.

Relation entre l'erreur absolue et l'erreur relative, 129. — Relation entre l'erreur relative et la quotité des chiffres exacts du nombre considéré, 130. — Addition et soustraction, 133. — Multiplication, 134. — Division, 138. — Racine carrée ou cubique, 141. — *Table des carrés des* 1000 *premiers nombres*, 143. — *Table des racines carrée et cubique des* 100 *premiers nombres, avec sept décimales*, 149.

LIVRE CINQUIÈME.

LES MESURES ET LES APPLICATIONS.

CHAPITRE PREMIER. — SYSTÈME MÉTRIQUE.

Notions historiques, 150. — Mesures de longueur, 151. — Mesures de surface, 153. — Mesures de volume et de capacité, 154. — Mesures de poids, 156. — Monnaies, 158. — Résumé, 161. — *Exercices*, 162.

CHAPITRE II. — DES ANCIENNES MESURES DE FRANCE.

Mesures de longueur, 162. — Mesures de superficie, 163. — Mesures de volume et de capacité, 164. — Mesures de poids, 164. — Monnaies, 165. Mesures de temps, calcul des nombres complexes, 165. — *Exercices*, 167.

CHAPITRE III. — DES GRANDEURS PROPORTIONNELLES OU INVERSEMENT PROPORTIONNELLES.

Définitions, théorèmes généraux, 168. — Règles de trois simples, méthode de réduction à l'unité, 170. — Grandeurs proportionnelles ou inversement proportionnelles à plusieurs autres grandeurs, 171. — Règles de trois composées, 173. — *Exercices*, 173.

CHAPITRE IV. — PROBLÈMES.

Règles d'intérêt simple, 174. — Questions sur les rentes, 176. — Des assurances, 177. — Règles d'escompte, escompte en dehors, escompte en dedans, 178. — Partages proportionnels, règles de société, 179. — Questions sur les mélanges et les alliages, 181. — Règle conjointe, 184. — Questions diverses, 184.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

LIVRE PREMIER.

LE CALCUL ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Comparaison de l'Algèbre et de l'Arithmétique; exemples simples faisant ressortir les avantages de l'Algèbre, 187. — Des signes et des expressions algébriques, 191. — Réduction des termes semblables, 193. — Fonctions implicites et explicites, 194.

CHAPITRE II. — Addition et Soustraction.

Addition, 195. — Soustraction, 197. — Généralisation des règles obtenues, 196, 197.

CHAPITRE III. — Multiplication.

Multiplication des monômes, 198. — Multiplication d'un polynôme par une quantité quelconque, 198. — Multiplication de deux polynômes, 199. — Généralisation de la règle obtenue, 200. — Multiplication des polynômes ordonnés, 201. — Théorèmes démontrés par la multiplication algébrique, 205.

CHAPITRE IV. — Division.

Division des monômes, 207. — Division d'un polynôme par un monôme, 209. — Division des polynômes ordonnés, 209. — Caractères auxquels on peut reconnaître l'impossibilité d'une division, 213. — Des divisions inexactes, 214. — Condition de divisibilité d'un polynôme entier par rapport à x, par un binôme de la forme $x - a$, extension du théorème, 215. — Applications, 216.

CHAPITRE V. — Des Rapports algébriques.

Propriétés des rapports algébriques, 219. — Théorèmes de calcul, 222. — Théorie des proportions, 224. — Des grandeurs proportionnelles ou inversement proportionnelles, 228. — Partages proportionnels, 233.

CHAPITRE VI. — Carré et Racine carrée des quantités algébriques.

Carré d'un monôme, carré d'un polynôme, 234. — Racine carrée d'un monôme, racine carrée d'un polynôme, 235.

CHAPITRE VII. — Calcul des valeurs arithmétiques des radicaux. — Exposants fractionnaires et négatifs.

Calcul des radicaux, 238. — Des exposants fractionnaires, 242. — Des exposants négatifs, 245.

CHAPITRE VIII. — Théorie des Progressions.

Des progressions par différence, 247. — Des progressions par quotient, 251. — Ce qu'on entend par série, 256.

Questions proposées, 256.

LIVRE DEUXIÈME.

LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER. — Résolution des équations du premier degré à une inconnue.

Définitions, 259. — Principes généraux applicables à la transformation des équations, 261. — Résolution des équations du premier degré à une seule inconnue, 265. — Exemples, 267. — Problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue, 268. — Formule générale des intérêts simples, 268. — Formules générales de la valeur actuelle d'un billet et de l'escompte en dedans, 269.

CHAPITRE II. — Discussion de la formule générale de résolution de l'équation du premier degré à une inconnue.

Formule générale, 273. — Symbole $\frac{m}{0}$, 275. — Symbole $\frac{0}{0}$, 276. — Indétermination apparente, 276. — Autres symboles d'indétermination, 277. — Cas où l'inconnue entre en dénominateur dans l'équation proposée, 278.

CHAPITRE III. — Résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré, en nombre égal à celui des inconnues.

Théorèmes généraux concernant les systèmes équivalents, 280. — Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues, 282. — Résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré, 286. — Exemples, 287. — Emploi d'une inconnue auxiliaire, 292. — Permutation circulaire, 293. — Problèmes conduisant à plusieurs équations du premier degré, en nombre égal à celui des inconnues, 294. — Cas où le nombre des équations considérées n'est pas égal à celui des inconnues : indétermination, équations de condition, 301.

CHAPITRE IV. — Formation et discussion des formules générales de résolution des équations du premier degré.

Cas de deux équations à deux inconnues, 303. — Cas de trois équations à trois inconnues, méthode des indéterminées, 309.

CHAPITRE V. — Discussion des problèmes. — Interprétation des valeurs négatives.

Théorème général sur les systèmes qui admettent les mêmes valeurs des inconnues, changées de signe, 312. — Interprétation des valeurs négatives dans deux cas très-étendus, 313, 315. — Cas où une solution né-

gative correspond à une impossibilité absolue, 317. — Discussion générale d'un problème choisi, 318. — Lorsque les cas particuliers d'un même problème ne diffèrent que par le changement de sens de certaines données, il suffit de résoudre un seul d'entre eux, 320. — Note sur le symbole $\frac{m}{0}$, 322.

CHAPITRE VI. — THÉORIE DES INÉGALITÉS.

Principes généraux relatifs aux inégalités, 323. — Théorème de calcul, 326. — Inégalités du premier degré à une ou deux inconnues, 327.

Questions proposées, 329.

LIVRE TROISIÈME.

LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

Rappel des propriétés des radicaux du second degré, 331. — Transformation des expressions irrationnelles du second degré, 332. — Formules générales de résolution des équations du second degré à une inconnue, 333. — Remarques sur la nature des racines de l'équation du second degré et sur la forme correspondante du premier membre de l'équation, 337. — Exemples, 340.

CHAPITRE II. — PROPRIÉTÉS DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ. — INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ. — PROBLÈMES.

Relations entre les coefficients et les racines de l'équation du second degré, 344. — Théorème de calcul qu'on en déduit, 345. — Indiquer la nature des racines d'une équation du second degré, sans la résoudre, 346. — Décomposition d'un trinôme du second degré en facteurs du premier degré, 348. — Inégalités du second degré, 351. — Problèmes du second degré, 353. — Cas où l'une des racines devient infinie, 360.

CHAPITRE III. — ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR DONT LA RÉSOLUTION SE RAMÈNE AU SECOND DEGRÉ.

Équations trinômes, 361. — Équations bi-carrées, 362. — Discussion de la formule générale de résolution des équations bi-carrées, 363. — Exemples, 364. — Transformation des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, 365. — Lorsqu'une équation a lieu entre quantités rationnelles et quantités irrationnelles, ou entre quantités réelles et quantités imaginaires, elle se partage immédiatement en deux autres équations qu'on obtient en

égalant à part les quantités de même nature dans les deux membres, 366, 368. — Systèmes d'équations à plusieurs inconnues, renfermant au moins une équation de degré supérieur au premier, 368. — Artifices de calcul, 373. — Problèmes, 379.

CHAPITRE IV. — QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

Définitions, 388. — Théorèmes de calcul, applications géométriques, 389. — Variations du trinôme du second degré ax^2+bx+c, 396. — Maximum et minimum de l'expression générale $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, 397. — Exemples, 399.

Questions proposées, 401.

LIVRE QUATRIÈME.

(Suite du Calcul algébrique.)

LA FORMULE DU BINOME ET LA THÉORIE DES LOGARITHMES.

CHAPITRE PREMIER. — FORMULE DU BINOME.

Théorie des combinaisons, 403. — Nombre des arrangements, formule générale, 405. — Nombre des permutations, 405. — Nombre des combinaisons, formule générale, 405, 406. — Théorèmes relatifs aux combinaisons, 406. — Ce qu'on entend par probabilité, 407. — Formule du binôme, 408. — Loi de formation des termes successifs, 411. — Remarques sur les coefficients du développement, 411.

CHAPITRE II. — THÉORIE DES LOGARITHMES.

Étude de l'expression a^x, 414. — x variant d'une manière continue, la fonction a^x varie d'une manière continue, 416. — Définition et propriétés des logarithmes, 418. — Passage d'un système de logarithmes à un autre, module, logarithmes népériens, 420. — Des logarithmes vulgaires, 422. — Usage des tables de logarithmes, 423. — Remarque sur la proportionnalité admise en se servant des tables, 428. — Calculs par logarithmes, usage des logarithmes à caractéristiques négatives, 429.

CHAPITRE III. — APPLICATIONS DES LOGARITHMES.

Équations exponentielles, 433. — Questions d'intérêt composé, 434. — Extension de la formule générale au cas où le nombre d'années est fractionnaire (en note), 436. — Questions d'annuités et d'amortissement, 440.

Questions proposées, 445.

NOTES.

NOTE I. — Remarque sur la division, 447.

NOTE II. — Emploi de l'algèbre en chimie, 447.

NOTE III. — Sur un autre mode d'exposition de la théorie des logarithmes, 450.

NOTE IV. — Théorie et usage de la règle à calcul, 454.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

ERRATA.

Page 121, ligne 6, *au lieu de* composition d'un cube, *lisez* composition du cube.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES.

ARITHMÉTIQUE.

LIVRE PREMIER.

LA NUMÉRATION ET LES QUATRE OPÉRATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES ENTIERS.

CHAPITRE PREMIER.

NUMÉRATION.

Notions préliminaires.

1. On appelle *grandeur* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Les mathématiques sont la science des grandeurs. Au point de vue indiqué, tout serait du domaine des mathématiques, car tout est susceptible d'augmentation ou de diminution; mais les mathématiques ne traitent que des grandeurs *mesurables*. On peut dire qu'une distance est deux fois plus longue qu'une autre; on ne peut pas dire que le génie de Newton soit deux fois plus grand que celui d'Euler.

2. *Mesurer* une grandeur, c'est la comparer à une grandeur de même espèce prise pour *unité*, c'est chercher combien de fois elle contient cette unité.

Quand on a ainsi mesuré plusieurs grandeurs de même espèce, on peut les comparer entre elles d'une manière précise en rapprochant les résultats obtenus.

Le choix de l'unité, c'est-à-dire de la *commune mesure* des

grandeurs proposées, est arbitraire ; il faut seulement que cette unité soit parfaitement définie.

3. Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'appelle *rapport*. On représente le rapport au moyen du *nombre*.

Nous ne nous occuperons d'abord que du cas où la grandeur à mesurer contient exactement son unité : on dit alors que le rapport et le nombre qui le représente sont *entiers*.

Quand on remplace ainsi la considération des grandeurs par celle des nombres correspondants, elles prennent le nom de *quantités*.

4. L'idée de nombre a son origine naturelle dans la réunion de plusieurs objets distincts, mais semblables. Si l'on pose cette question : Combien ce régiment renferme-t-il d'hommes? le choix de l'unité est alors forcé, et, cette unité étant nécessairement indiquée, le nombre obtenu s'appelle nombre *concret*. Mais ici l'idée de pluralité domine celle de mesure : ce n'est pas une grandeur qu'on mesure, c'est une quantité.

Si l'on cherche au contraire à exprimer la capacité d'un réservoir, le choix de l'unité deviendra arbitraire : on pourra dire qu'il contient 200 litres ou 2 hectolitres; mais il faudra encore indiquer l'unité employée, le nombre obtenu sera toujours concret.

5. Si, au lieu de mesurer *isolément* une grandeur, on en mesure plusieurs pour pouvoir ensuite les comparer facilement, il n'est pas nécessaire d'indiquer l'unité choisie; car si une grandeur est deux fois plus grande qu'une autre, les nombres qui représenteront ces deux grandeurs seront toujours dans le rapport de 2 à 1, quelle que soit cette unité. Les nombres obtenus ainsi, sans désignation de l'unité correspondante, sont appelés *abstraits*.

A proprement parler et en nous reportant à l'exemple précédent (4), les nombres concrets ne sont pas des nombres : deux cents est un nombre, deux cents litres est une capacité renfermant deux cents fois l'unité appelée litre.

L'Arithmétique comprend l'étude des opérations à effectuer sur les nombres abstraits et celle de leurs propriétés élémentaires.

6. Il y a une infinité de grandeurs, une infinité de manières de les comparer; par suite, une infinité de rapports et une infinité de nombres.

Il faut pouvoir nommer et écrire tous ces nombres. L'ensemble des procédés employés pour le faire le plus simple-

ment possible constitue ce qu'on appelle un système de *numération*.

On distingue entre eux les différents systèmes de numération par leur *base*, c'est-à-dire par le nombre de caractères qu'on y emploie.

Numération parlée.

7. Nous ne traiterons que de la numération décimale, et nous commencerons par exposer les règles de la numération parlée.

Les premiers nombres ont reçu des noms indépendants les uns des autres; ce sont :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.

Le nombre suivant, qui est la base du système, a été appelé *dix* ou une *dizaine*.

8. On ne donne ensuite de nouveaux noms qu'à des collections d'unités de dix en dix fois plus grandes.

Ainsi, on forme une collection de *dix* dizaines, et on l'appelle *cent* ou *centaine;*

Une collection de *dix* centaines, et on l'appelle *mille* ou *unité de mille;*

Une collection de *dix* unités de mille, et on l'appelle *dix mille* ou *dizaine de mille;*

Une collection de *dix* dizaines de mille, et on l'appelle *cent mille* ou *centaine de mille;*

Une collection de *dix* centaines de mille, et on l'appelle *million* ou *unité de million;*

Une collection de *dix* millions, et on l'appelle *dix millions* ou *dizaine de millions;*

Une collection de *dix* dizaines de millions, et on l'appelle *cent millions* ou *centaine de millions;*

Une collection de *dix* centaines de millions, et on l'appelle *billion* ou *unité de billion,* etc.

Ces collections successives, formées de nombres de dix en dix fois plus grands, portent le nom d'*unités des différents ordres.* Un est l'unité du *premier ordre,* dix l'unité du *second ordre*, cent l'unité du *troisième ordre,* mille l'unité du *quatrième ordre,* dix mille l'unité du *cinquième ordre,* cent mille l'unité du *sixième ordre,* un million l'unité du *septième ordre,* etc.

Cette création des unités des différents ordres constitue en réalité toute la numération parlée et, par suite, la numération elle-même.

Il faut remarquer que les mots *unité, dix, cent,* se répètent constamment de trois ordres en trois ordres ou de trois rangs

en trois rangs; et qu'un nouveau mot n'apparaît que lorsqu'il s'agit des unités du quatrième, du septième, du dizième ordre, etc.

9. Nous pouvons maintenant énoncer un nombre quelconque; car *un nombre quelconque peut être décomposé en ses unités de différents ordres, le nombre de ces unités étant, pour chaque collection particulière, inférieur à dix.*

Supposons qu'on veuille compter combien un sac contient de billes.

On rangera ces billes dix par dix, et l'on finira par trouver une dernière collection inférieure à dix, qui comprendra par exemple *sept* billes.

On rangera ensuite les collections de dix billes en les réunissant dix par dix à leur tour, et l'on finira par trouver une collection inférieure à dix dizaines de billes, qui comprendra par exemple *neuf dizaines* de billes.

On rangera ensuite les collections de cent billes en les réunissant dix par dix, et l'on finira par trouver une collection inférieure à dix centaines de billes, qui comprendra par exemple *trois centaines* de billes.

Supposons qu'il reste alors seulement cinq collections de dix centaines de billes; le nombre de billes contenu dans le sac pourra s'énoncer :

cinq mille trois centaines neuf dizaines sept unités.

10. Si des unités d'un certain ordre venaient à manquer, on l'exprimerait en disant qu'elles sont en nombre *zéro*. Si le nombre précédemment énoncé ne contenait pas de centaines par exemple, on pourrait dire qu'il est égal à

cinq mille zéro centaines neuf dizaines sept unités.

Numération écrite.

11. Les neufs premiers nombres sont représentés par les caractères ou *chiffres*

1 2 3 4 5 6 7 8 9

qu'on appelle chiffres *significatifs*, pour les distinguer du dizième caractère o qui représente le zéro.

12. Puisque pour énoncer un nombre il suffit d'énoncer combien il renferme d'unités des différents ordres (9), pour l'écrire il suffira aussi d'écrire les chiffres correspondants aux collections qui le composent.

Il faut seulement pouvoir représenter par l'écriture adoptée la succession établie entre ces collections.

La convention suivante résulte immédiatement du principe fondamental de la numération parlée :

Tout chiffre placé à la droite d'un autre vaut dix fois moins que s'il était à la place de cet autre, ou, en d'autres termes, *exprime des unités de l'ordre immédiatement inférieur.*

D'après cette convention, pour écrire le nombre *cinq mille trois centaines neuf dizaines sept unités*, nous écrirons un 5 pour représenter les mille, un 3 à la droite du 5 pour représenter les centaines, un 9 à la droite du 3 pour représenter les dizaines, un 7 à la droite du 9 pour représenter les unités; et nous obtiendrons le nombre 5397.

S'il n'y avait pas eu de centaines, on aurait écrit 5097.

On voit que le zéro sert seulement à donner aux différents chiffres significatifs la *valeur relative* convenable.

13. Les unités des différents ordres sont représentées par

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, etc.

Lecture et écriture des nombres.

14. Pour lire un nombre écrit, lorsqu'il ne contient pas plus de quatre chiffres, on lit chaque chiffre significatif en commençant par la gauche et en indiquant l'espèce d'unités qu'il représente.

L'usage a prévalu de dire *onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize*, au lieu de *dix un, dix deux, dix trois, dix quatre, dix cinq, dix six.*

De même, au lieu de dire *deux dix, trois dix, quatre dix, cinq dix, six dix, sept dix, huit dix, neuf dix*, on dit : *vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix.*

D'après ce qui précède, le nombre 8412 s'énoncera : *huit mille quatre cent douze.* De même, le nombre 6325 s'énoncera : *six mille trois cent vingt-cinq.*

15. Lorsque le nombre considéré a plus de quatre chiffres, on le partage en tranches de trois chiffres, à partir de la droite et en remontant vers la gauche, de sorte que la dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un ou deux chiffres. La première tranche, qui renferme les unités, dizaines et centaines, est la *tranche des unités;* la seconde tranche, qui renferme les unités de mille, les dizaines de mille et les centaines de mille, est la *tranche des mille ;* la troisième tranche, qui renferme les unités de millions, les dizaines de millions et les centaines de millions, est la *tranche des millions;* la quatrième tranche est la *tranche des billions ;* la cinquième *celle des trillions,* et ainsi de suite.

Ceci posé, on lit chaque tranche comme si elle était seule en commençant par la dernière à gauche, et en faisant suivre cet énoncé du nom qui convient à la tranche considérée.

Ainsi, on lira le nombre 3 578 009 217 305

trois trillions, cinq cent soixante-dix-huit billions, neuf millions, deux cent dix-sept mille, trois cent cinq.

16. Pour écrire un nombre énoncé, on n'a qu'à écrire chaque tranche énoncée au rang qui lui convient, en ayant soin de remplacer par des zéros les tranches ou parties de tranche qui manquent.

Ainsi, s'il s'agit du nombre

sept billions, trois millions, deux cent trente-neuf,

on écrira

7 003 000 239.

17. Les principes sur lesquels la numération est fondée (8, 12) sont très-importants. Tout l'art du calcul repose sur cette décomposition d'un nombre en unités de différents ordres, décomposition qui peut s'opérer d'une infinité de manières. On peut partager, par exemple, un nombre en deux groupes : ses centaines d'une part, et de l'autre le nombre formé par ses dizaines et ses unités.

CHAPITRE II.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

Addition.

18. *L'addition a pour but de réunir plusieurs nombres en un seul, c'est-à-dire de trouver un nombre qui contienne à lui seul autant d'unités que plusieurs nombres donnés.*

Le résultat de l'opération s'appelle *somme* ou *total.*

19. L'addition repose sur ce principe fondamental : *Pour ajouter plusieurs nombres ou les réunir en un seul, on peut les concevoir décomposés en unités, dizaines, centaines, etc.; ajouter alors les unités avec les unités, les dizaines avec les dizaines, les centaines avec les centaines, etc., et réunir tous ces résultats partiels.*

20. Nous ne nous arrêterons pas aux cas simples de l'addition : nous supposerons que l'habitude a appris à additionner

immédiatement deux nombres d'un seul chiffre ou un nombre de plusieurs chiffres avec un nombre d'un seul.

21. Supposons qu'on cherche la somme des trois nombres

8432, 927, 15803.

Le principe énoncé (19) conduit immédiatement à écrire ces trois nombres, l'un au-dessous de l'autre, de manière que les unités de même ordre se correspondent dans une même colonne verticale :

$$\begin{array}{r} 8432 \\ 927 \\ 15803 \\ \hline 25162 \end{array}$$

On additionne alors colonne par colonne, en commençant par celle des unités. Il résulte de la numération que, si le résultat donné par une colonne ne surpasse pas 9, *on doit l'écrire tel qu'on le trouve sous la colonne correspondante, en séparant par un trait horizontal les chiffres du total de ceux des nombres à ajouter. Si le résultat trouvé surpasse* 9, *on doit n'écrire sous la colonne considérée que les unités de ce résultat, en ayant soin d'ajouter avec la colonne suivante autant d'unités que ce résultat contient de dizaines : ces unités forment ce qu'on appelle la retenue.*

Ainsi, dans l'exemple proposé, la colonne des unités donnant 12 pour somme partielle, je pose 2 sous cette colonne, et je *retiens* 1 pour l'ajouter avec la colonne des dizaines.

La colonne des dizaines donnant alors 6 pour somme partielle, je pose 6 sous cette colonne.

La colonne des centaines donnant 21 pour somme partielle, je pose 1 sous cette colonne, et je retiens 2 pour l'ajouter aux mille de la colonne suivante.

La colonne des mille donnant alors 15, je pose 5 sous cette colonne, et je retiens 1 pour l'ajouter aux dizaines de mille de la colonne suivante : je pose donc 2 sous cette dernière colonne, et j'obtiens pour somme des nombres proposés 25162.

22. On doit commencer l'opération par la droite ; en effet, si on la commençait par la gauche et si quelques-unes des colonnes ajoutées fournissaient des retenues, on serait obligé, pour en tenir compte, d'effacer ou de modifier des chiffres déjà écrits.

23. On appelle *preuve* d'une opération, une seconde opération ayant pour but de contrôler l'exactitude de la première.

Lorsque la preuve d'une opération réussit, l'exactitude du résultat est *probable*, elle n'est pas *certaine*.

L'addition étant la plus simple de toutes les opérations, sa preuve consiste en une autre addition. Si l'on a par exemple additionné en descendant, c'est-à-dire en allant de haut en bas, on recommence le calcul en montant, c'est-à-dire en allant de bas en haut (*).

Soustraction.

24. *La soustraction a pour but de chercher combien la différence de deux nombres donnés renferme d'unités.*

Cette *différence* s'appelle encore *excès* du plus grand nombre sur le plus petit ou *reste* de la soustraction.

La définition adoptée prouve que le plus petit nombre augmenté du reste trouvé doit reproduire le plus grand nombre.

On peut donc dire encore que *la soustraction a pour but, étant donnés la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre.*

25. De même que pour ajouter plusieurs nombres, on peut ajouter leurs différentes parties, pour soustraire deux nombres, on peut aussi retrancher successivement les unités, dizaines, centaines, etc., du second nombre, des unités, dizaines, centaines, etc., du premier, et grouper ensuite les résultats partiels obtenus.

26. Nous ne nous arrêterons pas aux cas simples de la soustraction, et nous admettrons que l'habitude a appris à soustraire immédiatement un nombre d'un seul chiffre d'un nombre d'un seul chiffre ou d'un nombre de plusieurs chiffres.

27. Passons au cas général, et supposons qu'on ait à soustraire 357816 de 910549.

Nous nous appuierons ici sur ce principe évident :

La différence de deux nombres ne change pas, quand on les augmente tous les deux d'une même quantité.

La remarque faite plus haut (25) conduit à écrire le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent dans une même colonne verticale.

$$\begin{array}{r} 910549 \\ 357816 \\ \hline 552733 \end{array}$$

(*) Quand on recommence de la même manière une addition fautive, il est assez ordinaire de refaire la même faute : si l'on a dit 37 et 9 font 45, il a été remarqué qu'on était sujet à le répéter. En recommençant l'addition en sens inverse, on rompt la consonnance, et l'on ne commet plus d'erreur parce qu'on n'a plus à ajouter 37 et 9.

On retranche alors colonne par colonne en commençant par celle des unités. Si le chiffre inférieur est plus faible que le chiffre supérieur qui lui correspond, on écrit immédiatement le résultat trouvé sous la colonne considérée, en séparant par un trait horizontal les chiffres du reste de ceux des nombres à soustraire. Si le chiffre inférieur l'emporte au contraire sur le chiffre supérieur, on augmente ce dernier de dix, de manière que la soustraction soit toujours possible, mais par compensation on augmente d'une unité le chiffre inférieur de la colonne suivante.

De cette manière, les deux nombres croissant d'une même quantité, leur différence ne change pas, et la soustraction peut se poursuivre jusqu'à la fin comme dans le cas particulier où tous les chiffres du plus petit nombre tombent au-dessous de ceux qui leur correspondent dans le plus grand nombre.

Ainsi, dans l'exemple proposé, on dira 6 de 9 reste 3, qu'on pose sous la colonne des unités ; 1 de 4 reste 3, qu'on pose sous celle des dizaines.

Arrivé à la colonne des centaines, on ne peut retrancher 8 de 5. On dira alors 8 de 15, reste 7, en augmentant le chiffre supérieur de 10, c'est-à-dire le nombre supérieur de dix centaines ou d'un mille, et l'on écrira 7 sous la colonne des centaines.

Arrivé à la colonne des mille, on augmente par compensation le chiffre inférieur 7 d'une unité, ce qui revient à augmenter d'un mille le nombre inférieur, et l'on dit, en employant le même procédé, 8 de 10 reste 2, qu'on écrit sous la colonne des mille.

On continue en disant 6 de 11 reste 5, 4 de 9 reste 5, et le reste demandé est 552733.

28. Il faut commencer la soustraction par la droite ; en effet, si on la commençait par la gauche et si l'on rencontrait dans le plus petit nombre quelques chiffres qui l'emportassent sur ceux qui leur correspondent dans le plus grand nombre, on serait obligé, pour faire croître les deux nombres donnés d'une même quantité, de modifier ou d'effacer les chiffres déjà écrits au résultat.

29. La preuve de la soustraction s'effectue en ajoutant le reste trouvé au plus petit nombre : on doit ainsi reproduire le plus grand.

Notions sur les compléments.

30. *On appelle complément arithmétique d'un nombre ce qu'il faut ajouter à ce nombre pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui de ses plus hautes unités, en*

d'autres termes, ce qu'il faut ajouter à ce nombre pour obtenir l'unité suivie d'autant de zéros qu'il contient de chiffres.

Pour avoir le complément d'un nombre, on le retranchera donc de l'unité suivie d'autant de zéros qu'il a de chiffres. D'après cela, le complément de 682817 sera 317183.

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ 682817 \\ \hline 317183 \end{array}$$

Pour faire cette soustraction, on peut regarder 1000000 comme égal à 999990 plus 10 unités, c'est-à-dire retrancher de 9 tous les chiffres de 682817, sauf le dernier que l'on retranchera de 10.

S'il y a des zéros à droite du nombre proposé, ils se retrouvent en nombre égal à droite de son complément : le complément de 5670 est 4330.

$$\begin{array}{r} 10000 \\ 5680 \\ \hline 4330 \end{array}$$

En résumé, la règle sera *de retrancher de 9 tous les chiffres du nombre donné, excepté le dernier chiffre significatif à droite qu'on retranchera de 10, en ayant soin d'écrire à la droite du complément tous les zéros qui, à partir de ce chiffre, peuvent se trouver à la droite du nombre donné.*

31. On peut transformer la soustraction en véritable addition au moyen des compléments. En effet, puisqu'on ne change pas la différence de deux nombres en les augmentant d'une même quantité, on pourra ajouter à ces deux nombres le complément du plus petit ; mais le plus petit nombre augmenté de son complément donnera une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui de ses plus hautes unités. La soustraction sera donc ramenée à retrancher cette unité de la somme obtenue en ajoutant au plus grand nombre le complément du plus petit.

Soit à soustraire 578190 de 1417813. On ajoutera 1417813 et 421810, complément de 578190, et arrivé à la colonne des millions, on aura soin de diminuer d'une unité le résultat fourni par cette colonne :

$$\begin{array}{r} 1417813 \\ 578190 \\ \hline 839623 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1417813 \\ 421810 \\ \hline 839623 \end{array}$$

32. Quand il s'agit seulement de la soustraction de deux

nombres, l'usage des compléments n'offre aucun avantage; mais si l'on doit ajouter et retrancher successivement plusieurs nombres, il est bon de les employer. Nous verrons plus loin comment on simplifie les calculs par logarihmes, en s'appuyant sur ce qui précède.

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION.

33. *La multiplication a pour but de répéter ou d'ajouter un nombre appelé multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre appelé multiplicateur.*

Le résultat de l'opération s'appelle *produit*. Le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit.

Multiplier 5 par 3, c'est répéter 5 trois fois.

La multiplication est une addition où tous les nombres à ajouter sont égaux.

Multiplication de deux nombres d'un seul chiffre.

34. Supposons d'abord qu'on ait à multiplier l'un par l'autre deux nombres d'un seul chiffre. On arrivera facilement au produit, en suivant la règle donnée pour l'addition. Mais comme on ramène à ce premier cas tous les autres, il est essentiel de savoir par cœur les produits des nombres d'un seul chiffre par les nombres d'un seul chiffre. Ces produits sont renfermés dans une table appelée *table de multiplication*, qu'on forme de la manière suivante.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

On écrit sur une ligne horizontale les neuf premiers nombres;

en les ajoutant à eux-mêmes, on obtient une seconde ligne qui renferme les produits des neuf premiers nombres par 2; en ajoutant les nombres correspondants de ces deux premières lignes, on obtient une troisième ligne qui renferme les produits des neuf premiers nombres par 3; en ajoutant les nombres de la première ligne à ceux qui leur correspondent dans la troisième ligne, on obtient une quatrième ligne qui contient les produits des neuf premiers nombres par 4; on continue ainsi jusqu'à la neuvième ligne, en ajoutant toujours la première ligne avec la dernière formée.

Il suit de la formation de la table que chaque ligne horizontale renferme les produits des neuf premiers nombres par le nombre qui la commence, et que chaque ligne verticale renferme les produits du nombre qui la commence par les neuf premiers nombres.

Ceci posé, soit demandé le produit de 6 par 8 : ce produit devra se trouver à la fois dans la ligne horizontale commencée par 8 et dans la ligne verticale commencée par 6; il se trouvera à la rencontre de ces deux lignes et sera 48.

Multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre.

35. Soit à multiplier 4837 par 5. On a pour but de répéter 4837 autant de fois qu'il y a d'unités dans 5, c'est-à-dire d'ajouter 5 nombres égaux à 4837. On sera donc conduit à répéter 5 fois chacun des chiffres du multiplicande. Mais puisqu'on connaît les produits partiels correspondants d'après la table de multiplication, on pourra se dispenser d'indiquer l'addition, et écrire immédiatement les différents résultats en tenant compte des retenues comme pour l'addition.

$$\begin{array}{r} 4837 \\ 4837 \\ 4837 \\ 4837 \\ 4837 \\ \hline 24185 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4837 \\ 5 \\ \hline 24185 \end{array}$$

Ainsi, disposant le calcul comme il est indiqué, on dira : 5 fois 7 font 35, je pose 5 unités et je retiens 3 dizaines ; 5 fois 3 font 15 et 3 de retenue font 18, je pose 8 dizaines et je retiens 1 centaine ; 5 fois 8 font 40 et 1 de retenue font 41, je pose 1 centaine et je retiens 4 mille; 5 fois 4 font 20 et 4 de retenue font 24, je pose 24 mille, c'est-à-dire 4 mille et 2 dizaines de mille.

Il est nécessaire de commencer l'opération par la droite, puisqu'elle n'est autre chose qu'une addition abrégée.

Multiplication de deux nombres de plusieurs chiffres.

36. Passons au cas général de la multiplication; il repose sur le principe suivant.

Pour multiplier un nombre par un chiffre significatif suivi d'un ou plusieurs zéros, il suffit de multiplier ce nombre par le chiffre significatif et d'ajouter à la droite du résultat autant de zéros qu'il y en a à la droite de ce chiffre.

Si le chiffre significatif est l'unité, si l'on a par exemple 584 à multiplier par 100, le produit de 584 par 1 étant 584, le résultat sera égal à 58400. En effet, chacun des chiffres de 584 se trouve ainsi placé deux rangs plus loin vers la gauche, c'est-à-dire exprime des unités cent fois plus grandes et acquiert par conséquent une valeur centuple. La valeur d'un nombre se composant de la somme des valeurs relatives des chiffres qui le forment, 584 aura bien été multiplié par 100.

Soit maintenant à multiplier 584 par 300. Il faudra additionner 300 nombres égaux à 584. Mais on peut partager une addition en plusieurs additions partielles, et les sommes partielles ajoutées donnent le total demandé. Or, 300 étant égal à 3 multiplié par 100 d'après ce qui précède, on pourra additionner trois nombres égaux à 584et répéter 100 fois la somme trouvée : ce qui se fera en écrivant deux zéros à la droite de cette somme; on obtiendra ainsi le même résultat qu'en effectuant l'addition de 300 nombres égaux à 584. Donc, pour multiplier 584 par 300, il suffit de multiplier 584 par 3 et d'ajouter deux zéros à la droite du résultat; c'est ce que nous voulions établir.

37. Ceci posé, proposons-nous de multiplier deux nombres quelconques l'un par l'autre : 9752 par 846, par exemple. Nous avons pour but de répéter le multiplicande 9752 autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, c'est-à-dire 846 fois, ou encore, 6 fois, plus 40 fois, plus 800 fois. Nous sommes donc conduits à multiplier 9752 successivement par 6, par 40 et par 800, puis à ajouter les produits partiels obtenus.

```
     9752
      846
    -----
    58512
   39008
  78016
  -------
  8250162
```

Nous savons multiplier 9752 par 6, et le produit correspondant sera 58512. Pour multiplier 9752 par 40, nous multiplie-

rons 9752 par 4 et nous ajouterons un zéro à la droite du résultat : nous obtiendrons ainsi 390080. Mais il est inutile d'ajouter ce zéro à la droite du produit de 9752 par 4. En effet, nous devons, pour préparer l'addition des différents produits partiels, les écrire l'un au-dessous de l'autre, en faisant correspondre les unités de même ordre. Le zéro ne comptant pas dans l'addition, il suffira dès lors d'écrire le produit 39008 sous le produit précédent, de manière que le chiffre de ses unités soit au rang des dizaines, c'est-à-dire corresponde au chiffre du multiplicateur employé pour le former. De même, pour multiplier 9752 par 800, on multipliera 9752 par 8, et on écrira le produit trouvé 78016 sous les produits précédents, de manière que le chiffre 6 de ses unités soit au rang des centaines : ce sera le reculer d'un rang vers la gauche par rapport au produit précédent, comme celui-ci l'a déjà été par rapport au premier produit.

On ajoutera les trois produits partiels, et l'on obtiendra pour produit total le nombre 8250192 qu'on séparera des produits partiels qui ont concouru à le former par un trait horizontal : un autre trait doit séparer le multiplicande et le multiplicateur, de ces mêmes produits partiels.

Pour multiplier deux nombres quelconques l'un par l'autre, la règle générale sera donc celle-ci : *Multiplier successivement le multiplicande par tous les chiffres du multiplicateur en commençant par le premier à droite, écrire les produits obtenus les uns au-dessous des autres en reculant chacun d'eux d'un rang vers la gauche par rapport au précédent, ajouter tous ces produits.*

38. Il est essentiel (35) d'opérer les multiplications partielles en commençant par la droite du multiplicande ; mais on peut employer les chiffres du multiplicateur dans un ordre quelconque : la seule précaution à prendre étant de faire exprimer à chaque produit partiel des unités de même ordre que le chiffre correspondant du multiplicateur.

Remarques sur la multiplication.

39. Remarque I.— *Si les deux facteurs sont terminés par des zéros, il suffit de les multiplier, abstraction faite de ces zéros, puis d'en écrire un pareil nombre à la droite du résultat.*

Ainsi, pour multiplier 327000 par 4200, on multipliera 327 par 42, et l'on écrira cinq zéros à la droite du résultat.

En effet, multiplier par 4200 revient (36) à multiplier par 42, puis à ajouter deux zéros à la droite du produit obtenu ; multiplier 327000 par 42 revient à multiplier 327 unités de mille par 42, et ce produit contiendra autant d'unités de mille que

le produit de 327 par 42 contiendra d'unités. Il faudra donc à la droite du produit de 327 par 42, écrire d'abord trois zéros parce que le multiplicande représente des unités de mille, et ensuite deux autres zéros parce que le multiplicateur représente des centaines.

40. Remarque II. — *Le nombre des chiffres du produit est au plus égal au nombre des chiffres des deux facteurs réunis et, au moins, à ce nombre diminué de* 1.

Soit 2345 à multiplier par 839. 839 étant compris entre 100 et 1000, le produit sera compris entre 234500 et 2345000 : il aura donc au moins six chiffres et, au plus, sept chiffres.

La démonstration est générale, car l'unité de même ordre que les plus hautes unités du multiplicateur renferme toujours un zéro de moins que ce multiplicateur ne contient de chiffres, et l'unité immédiatement supérieure renferme le même nombre de zéros.

On n'a souvent besoin que de connaître les plus hautes unités d'un produit : on y parvient en s'appuyant sur ce qui précède, et en considérant les chiffres des plus hautes unités des deux facteurs.

Dans l'exemple indiqué plus haut, le produit des deux chiffres représentant les plus hautes unités des deux facteurs étant égal à 16, le produit partiel correspondant au dernier chiffre à gauche du multiplicateur contiendra 5 chiffres et, comme il doit être reculé de deux rangs vers la gauche, le produit total renfermera 7 chiffres : ce produit est égal à 1967455.

Si l'on a 2345 à multiplier par 239, le produit des chiffres extrêmes des deux facteurs étant égal à 4, on peut affirmer que le produit total n'aura que 6 chiffres : ce produit est égal à 560455 (*).

41. Remarque III. — *On ne change pas un produit de deux facteurs, en renversant l'ordre de ces facteurs.*

Soit 5 à multiplier par 3; je dis que ce produit est égal à celui de 3 par 5. En effet, multiplier 5 par 3, c'est répéter 5 unités 3 fois. Écrivons trois lignes horizontales renfermant chacune 5 unités : ce tableau représentera le nombre d'unités contenues dans le produit de 5 par 3.

I I I I I
I I I I I
I I I I I

(*) Il est évident que si, au lieu de deux facteurs, on en a un nombre quelconque, le nombre des chiffres du produit sera au plus égal au nombre des chiffres de tous ces facteurs réunis et, au moins, à ce même nombre diminué de celui des facteurs.

Si, au lieu de considérer les lignes horizontales, on considère les lignes verticales, on verra que ce tableau représente aussi 3 unités répétées 5 fois, c'est-à-dire le produit de 3 par 5. Les deux produits sont donc identiques.

42. De même que pour faire la preuve de l'addition, il faut la recommencer d'une autre manière; pour faire la preuve de la multiplication, il faut la recommencer d'une autre manière. D'après ce qui précède, on renversera l'ordre des facteurs, et l'on devra trouver le même produit.

EXERCICES.

I. Il y a 24 heures dans un jour, 60 minutes dans une heure, 60 secondes dans une minute. Chercher combien un jour contient de minutes et de secondes?

II. On a fondu une cloche, en alliant 330 kilogrammes d'étain, 1170 kilogrammes de cuivre, 15 kilogrammes de zinc et 12 kilogrammes de plomb. En supposant que le kilogramme d'étain vaut $2^{fr},50$, le kilogramme de cuivre $2^{fr},70$, le kilogramme de zinc $0^{fr},60$, le kilogramme de plomb $0^{fr},70$; on demande le prix de la cloche?

III. En supposant le rayon terrestre égal à 1450 lieues et la distance de la terre au soleil de 24000 rayons terrestres, quelle est en lieues la distance de la terre au soleil?

CHAPITRE IV.

DIVISION.

43. *La division a pour but de chercher combien de fois un nombre appelé dividende contient un nombre appelé diviseur : ce nombre de fois s'appelle quotient.*

Sous ce point de vue, la division peut s'effectuer au moyen de la soustraction.

Soit à diviser 23 par 5. Retranchons 5 de 23, nous trouverons 18; 5 de 18, nous trouverons 13; 5 de 13, nous trouverons 8; 5 de 8, nous trouverons 3, quantité plus petite que 5. Nous avons dû faire 4 soustractions pour arriver à ce résultat. 23 contient donc 4 fois 5, et un *reste* 3 plus petit que 5.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 5 \\ \hline 18 \\ 5 \\ \hline 13 \\ 5 \\ \hline 8 \\ 5 \\ \hline 3 \end{array}$$

4, ou le nombre des soustractions effectuées, est donc le quotient cherché.

Le reste 3 s'appelle le *reste de la division* de 23 par 5 : *le reste d'une division est toujours plus petit que le diviseur.* On voit que c'est la quantité qu'il faut

ajouter au produit du diviseur par le quotient pour reproduire le dividende. Ainsi, dans toute division, *le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste.*

44. Il peut se faire que le reste soit nul. Dans ce cas, le dividende est simplement égal au produit du diviseur par le quotient. On peut dire alors que *la division a pour but, étant donnés un produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, de trouver l'autre.* Nous généraliserons plus tard cette définition. On dit souvent dans ce cas que la division est *exacte.*

Pour qu'un nombre soit le quotient d'une division exacte, il suffira donc que, multipliant le diviseur, il reproduise le dividende.

Si, dans le cas indiqué, on regarde le diviseur comme tenant la place du multiplicateur, on pourra dire encore, en se reportant à la définition de la multiplication, qu'*on veut partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur : l'une de ces parties est le quotient qui joue alors le rôle de multiplicande.* Cette remarque justifie les dénominations de *dividende* et de *diviseur.*

45. On comprend sans peine que le procédé indiqué (43) est en général tout à fait impraticable. Nous allons donc chercher une autre méthode. Nous distinguerons deux cas, suivant que le quotient aura *un* ou *plusieurs* chiffres.

Cas où le quotient n'a qu'un chiffre.

46. Supposons que le quotient et le diviseur n'aient qu'un chiffre. Le dividende ne pourra avoir qu'un ou deux chiffres, et l'on obtiendra le quotient en se servant de la table de multiplication.

Soit 39 à diviser par 5. En descendant dans la ligne verticale commencée par 5, on verra que 39 tombe entre les produits de 5 par 7 et par 8.

39 contient donc 7 fois le diviseur 5, plus un reste 4, différence entre 39 et le produit 35 qui en approche le plus par défaut : 7 est donc le quotient demandé, et 4 est le reste de la division.

47. Supposons maintenant que le diviseur ait plusieurs chiffres, le quotient n'en ayant toujours qu'un seul.

Soit 6843 à diviser par 839. On voit immédiatement que le quotient n'a qu'un chiffre, parce que le dividende étant plus petit que 10 fois le diviseur ou 8390, ne contient pas 10 fois ce diviseur.

Ceci posé, au lieu de diviser 6843 par 839, divisons 6843 par 800. Puisque nous employons un diviseur plus petit que

le diviseur donné, nous *pourrons* trouver un quotient plus grand que le quotient cherché, mais *seulement plus grand.*

Diviser 6843 par 800 revient à diviser 6800 par 800. En effet, si l'on divise 68 centaines par 8 centaines, on trouvera pour reste un nombre de centaines inférieur à 8 centaines au moins d'une centaine; dès lors, pour que le dividende contînt une fois de plus le diviseur, il faudrait l'augmenter au moins d'une centaine, et non pas seulement de 43 unités.

Enfin, diviser 6800 par 800 revient à diviser 68 par 8; car 68 unités de centaines renferment autant de fois 8 unités de centaines, que 68 unités renferment 8 unités.

On est donc conduit à diviser, par les plus hautes unités du diviseur, les unités de même ordre du dividende; et l'on obtient ainsi ou le quotient exact ou un quotient supérieur au quotient exact.

Il faut donc vérifier l'exactitude du chiffre trouvé : il faut l'*essayer.*

Pour cela, on multiplie le diviseur par ce chiffre, et, selon que le produit trouvé est plus petit ou plus grand que le dividende, le quotient obtenu est exact ou trop fort.

Si le quotient obtenu est trop fort, on le diminue d'une unité et l'on recommence l'essai jusqu'à ce qu'il réussisse (*).

Dans l'exemple proposé, en divisant 68 par 8,

$$\begin{array}{r|l} 6843 & 839 \\ \underline{6712} & \overline{8} \\ 131 & \end{array}$$

on trouve 8 pour quotient (46). Le produit du diviseur 839 par 8 est égal à 6712; ce produit peut se retrancher du dividende 6843, et l'on obtient 131 pour reste. Le quotient demandé est donc 8, et le reste de l'opération est égal à 131 (**).

(*) Si l'on obtenait pour quotient un nombre plus grand que 9, on ne devrait évidemment commencer les essais qu'au chiffre 9.

(**) De même qu'on a divisé en réalité 6800 par 800, on aurait pu diviser 6800 par 900 ou 68 par 9. On augmente ainsi le diviseur, on *peut* donc trouver un quotient plus petit que le quotient cherché, mais *seulement plus petit.* On essaye le chiffre trouvé comme il est dit plus haut et, suivant que la soustraction donne un reste plus petit ou plus grand que le diviseur, on en conclut que le quotient obtenu est exact ou trop faible. On a intérêt à augmenter ou à *forcer* ainsi d'une unité le chiffre des plus hautes unités du diviseur, lorsque le chiffre qui vient après surpasse 5. Soit, par exemple,

$$\begin{array}{r|l} 1509 & 275 \\ \underline{1375} & \overline{5} \\ 134 & \end{array}$$

à diviser 1509 par 275. En divisant 15 par 2, on trouve 7; en divisant 15 par 3, on obtient immédiatement le véritable quotient qui est 5. Ici le diviseur est bien plus près de 300 que de 200.

48. On peut effectuer à la fois la multiplication et la soustraction que l'essai du chiffre 8 exige. On y parvient en augmentant chaque chiffre du dividende d'autant de fois dix qu'il est nécessaire pour qu'on puisse en retrancher immédiatement le produit partiel correspondant, et en augmentant d'autant d'unités le produit partiel suivant.

Multiplions le diviseur 839 par 8. On aura d'abord 8 fois 9, 72. Il faudra alors augmenter le chiffre 3 des unités du dividende de 70, et dire 72 de 73, reste 1 et je retiens 7. En passant au produit partiel suivant qui représentera des dizaines, il faudra par compensation l'augmenter de 7 unités, et dire 8 fois 3 font 24 et 7 de retenue font 31. On continuera de la même manière, en disant 31 de 34, reste 3 et je retiens 3; 8 fois 8 font 64 et 3 de retenue 67; 67 de 68, reste 1.

L'opération présentera alors une forme plus simple.

$$\begin{array}{r|l} 6843 & 839 \\ \cline{2-2} 131 & 8 \end{array}$$

En suivant la marche qu'on vient d'indiquer, on pourra faire l'essai d'un chiffre sans rien écrire (*).

Cas où le quotient a plusieurs chiffres.

49. Nous commencerons par déterminer les plus hautes unités du quotient.

Soit 425782 à diviser par 785. En multipliant le diviseur par 100, on obtient 78500, nombre inférieur au dividende; en le multipliant par 1000, on obtient 785000, nombre supérieur au dividende. Le dividende étant compris entre 100 fois et 1000 fois le diviseur, le quotient sera compris entre 100, qui est le plus petit nombre de trois chiffres, et 1000, qui est le plus petit nombre de quatre chiffres : le quotient aura donc trois chiffres, et ses plus hautes unités seront des centaines.

Séparons alors les 4257 centaines du dividende. Ce nombre de centaines sera nécessairement plus grand qu'une fois le diviseur et plus petit que dix fois le diviseur. En effet, si 4257 ne surpassait pas 785, 425700 ne surpasserait pas 100 fois 785, et le dividende 425782 ne serait pas plus grand que 100 fois le diviseur. De même, si 4257 surpassait dix fois 785, 425700 surpasserait cent fois 7850 ou mille fois 785, et le dividende 425782 ne serait pas plus petit que 1000 fois le diviseur.

(*) La vérification sera souvent plus rapide, si l'on commence la soustraction par la gauche. Ainsi, en disant dans l'exemple précédent, 8 fois 8, 64; 64 de 68, reste 4 centaines; on est immédiatement *sûr* du chiffre 8, car le chiffre suivant du diviseur étant 3, le produit partiel suivant ne contiendra pas plus de 3 centaines.

Si l'on sépare sur la gauche du dividende les unités de même ordre que les plus hautes unités du quotient, on obtient donc un nombre compris entre une fois et dix fois le diviseur. Et réciproquement, si l'on sépare un pareil nombre sur la gauche du dividende, les unités séparées marquent l'ordre des plus hautes unités du quotient.

50. Ceci posé, *si l'on divise les* 4257 *centaines du dividende par le diviseur* 785, *le chiffre* 5 *obtenu est le chiffre exact des centaines du quotient.*

En effet, 4257 contenant 5 fois le diviseur 785, 425700 contient 500 fois le diviseur, et le dividende 425782 contient au moins 500 fois ce même diviseur.

De plus, 4257 étant inférieur à 6 fois le diviseur 785 au moins d'une unité, 425700 diffère de 600 fois ce diviseur au moins d'une centaine, et par suite le dividende 425782 ne contient pas 600 fois 785.

Le dividende tombant entre 500 fois et 600 fois le diviseur, le quotient tombe entre 500 et 600, c'est-à-dire contient 5 centaines et un certain nombre de dizaines et d'unités, qu'il s'agit de déterminer.

```
425782 | 785
3925   |-----
------ | 542
 33282
 3140
 ----
  1882
  1570
  ----
   312
```

En retranchant 5 fois 785 de 4257, il reste 332. Donc, en retranchant 500 fois 785 de 4257 centaines, il restera 332 centaines; et en retranchant 500 fois le diviseur du dividende tout entier, on obtiendra pour reste 33282.

Il faut donc chercher maintenant combien de fois ce reste contient le diviseur, c'est-à-dire il faut effectuer une nouvelle division en prenant pour nouveau dividende le reste 33282 et en conservant le même diviseur 785.

D'après la remarque faite précédemment (49), on séparera sur la gauche de ce reste assez de chiffres pour former un nombre compris entre une fois et dix fois le diviseur. *Si l'on est conduit ainsi à séparer les dizaines du reste, c'est que le quotient contient des dizaines; si l'on est forcé d'aller jusqu'aux unités, c'est que le quotient ne contient que des unités, et il faut alors mettre un zéro au quotient pour tenir la place des dizaines manquantes.*

Dans l'exemple proposé, les 3328 dizaines du reste 33282 contenant 4 fois le diviseur, le chiffre des dizaines du quo-

tient est 4. En retranchant 4 fois 785 de 3328, on trouve pour reste 188. Donc en retranchant 40 fois 785 de 33282, on trouvera pour reste 1882.

Ainsi, le nouveau dividende 33282 contient 40 fois le diviseur 785, plus un reste 1882. Il faut donc chercher combien de fois ce reste 1882 contient le diviseur 785, en regardant à son tour 1882 comme un nouveau dividende.

1882 contient 2 fois le diviseur 785, plus un reste 312.

Le dividende 425782 renferme donc 500 fois, plus 40 fois, plus 2 fois, le diviseur 785, avec un reste égal à 312. Le quotient demandé est donc 542, et le reste de l'opération est 312.

51. En relisant attentivement la démonstration précédente, on est conduit à cette règle pratique pour la division de deux nombres quelconques : *Il faut séparer le dividende du diviseur par un trait vertical, le diviseur du quotient par un trait horizontal; marquer ensuite sur la gauche du dividende un nombre compris entre une fois et dix fois le diviseur, diviser ce nombre par le diviseur : le quotient obtenu est le chiffre des plus hautes unités du quotient. On multiplie le diviseur par ce chiffre, on retranche le produit obtenu de la partie séparée à gauche du dividende, qu'on appelle premier dividende partiel; et on forme un second dividende partiel en abaissant à côté du reste trouvé le chiffre suivant du dividende. En divisant le second dividende partiel par le diviseur, on trouve le second chiffre du quotient. On multiplie le diviseur par ce second chiffre, et l'on retranche le produit correspondant du second dividende partiel. On obtient un second reste à côté duquel on abaisse un nouveau chiffre du dividende, et l'on opère sur le troisième dividende partiel ainsi formé comme sur les précédents. On continue jusqu'à ce qu'on ait abaissé le dernier chiffre à droite du dividende.*

Si quelques-uns des dividendes partiels obtenus sont inférieurs au diviseur, on met pour chacun d'eux un zéro au quotient et l'on abaisse le chiffre suivant du dividende.

En employant la simplification déjà indiquée (48), on dispose l'opération comme il suit.— Dans le second exemple, le quotient présente plusieurs zéros.

$$\begin{array}{r|l} 425782 & 785 \\ \cline{2-2} 3328 & 542 \\ 1882 & \\ 312 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1919022 & 927 \\ \cline{2-2} 6502 & 2070 \\ 132 & \end{array}$$

Remarques sur la division.

52. Remarque I. Lorsque le diviseur n'a qu'un chiffre, l'opération se simplifie, parce que les dividendes partiels suc-

cessifs n'ayant qu'un ou deux chiffres (49), on peut se dispenser de les écrire. On note seulement les chiffres du quotient, qu'on écrit sous le dividende à mesure qu'on les trouve, et le dernier reste.

Soit, par exemple, 45839 à diviser par 7.

$$\begin{array}{r|l} 45839 & \underline{7} \\ 6548 & \\ 3 & \end{array}$$

On dira : en 45, 7 est contenu 6 fois pour 42, et il reste 3; en 38, 7 est contenu 5 fois pour 35, et il reste 3; en 33, 7 est contenu 4 fois pour 28, et il reste 5; en 59, 7 est contenu 8 fois pour 56, et il reste 3. Le quotient est donc 6548 et le reste est 3.

53. Remarque II. Quand le quotient doit avoir un très-grand nombre de chiffres, on a intérêt à former d'avance les produits du diviseur par les neuf premiers nombres. En comparant ensuite ces produits aux dividendes partiels successifs, on trouve immédiatement les différents chiffres du quotient et les restes qui leur correspondent.

$$\begin{array}{r|l} 105702350981347263 & \underline{576} \\ 4810 & 183511026009283 \\ 2022 & \\ 2943 & \\ 635 & \\ 590 & \\ 1498 & \\ 3461 & \\ 5347 & \\ 1632 & \\ 4806 & \\ 1983 & \\ 255 & \end{array}$$

1 fois 576..	576
2.....	1152
3.....	1728
4.....	2304
5.....	2880
6.....	3456
7.....	4032
8.....	4608
9.....	5184

54. Remarque III. Il suit des démonstrations précédentes que diviser 54817 par 2700 par exemple, revient à diviser 548 par 27.

En effet, diviser 54817 par 2700 revient d'abord à diviser 54800 par 2700 : car quand on divise deux nombres de centaines l'un par l'autre, il faut au moins ajouter une centaine au dividende pour faire varier le quotient d'une unité (47); et diviser 548 unités de centaines par 27 unités de centaines revient évidemment à diviser 548 par 27.

$$\begin{array}{r|l} 54817 & \underline{2700} \\ 817 & 20 \end{array}$$

On trouve alors pour quotient 20 et pour reste 8. En divisant 548 centaines plus 17 unités par 27 centaines, on trouvera pour quotient 20 et pour reste 8 centaines et 17 unités ou 817.

Donc, *quand le diviseur est terminé par des zéros, on les néglige en même temps qu'un pareil nombre de chiffres sur la droite du dividende, on ne modifie pas le quotient en opérant ainsi ; seulement, à côté du reste trouvé, il faut abaisser les chiffres négligés à droite du dividende.*

55. Remarque IV. *Le nombre des chiffres du quotient est égal à la différence des nombres de chiffres du dividende et du diviseur ou à cette différence augmentée de* 1.

En effet, le premier dividende partiel renferme autant de chiffres que le diviseur ou autant plus 1, puisque le produit du diviseur par un nombre d'un seul chiffre doit être contenu dans ce dividende partiel (51, 40). Si le premier cas a lieu, le nombre des chiffres à abaisser au dividende étant égal à la différence qui existe entre les nombres de chiffres du dividende et du diviseur, et chacun d'eux devant fournir un chiffre au quotient, ce quotient contient un nombre de chiffres égal à la différence indiquée plus 1, puisque le premier dividende partiel fournit aussi un chiffre au quotient.

Si le premier dividende partiel contient un chiffre de plus que le diviseur, le nombre des chiffres à abaisser au dividende étant diminué de 1, il en est de même du nombre de chiffres du quotient, qui est alors juste égal à la différence indiquée.

56. Pour faire la preuve de la division, il suffit de vérifier la relation fondamentale : le dividende égale le produit du diviseur par le quotient, plus le reste.

57. On peut faire la preuve de la multiplication au moyen de la division. En divisant le produit, considéré comme dividende, par l'un des facteurs, considéré comme diviseur, on doit trouver pour quotient le second facteur avec un reste zéro (44).

EXERCICES.

I. La circonférence d'une roue de voiture étant de 4 mètres, combien cette roue fera-t-elle de tours par lieue commune de 4444 mètres?

II. Combien y a-t-il d'heures, de minutes et de secondes, dans 37845 secondes?

III. La lumière parvient du soleil à la terre en 8 minutes 13 secondes, combien de lieues parcourt-elle par seconde, la distance des deux astres étant supposée égale à 34800000 lieues?

IV. La distance de la lune à la terre étant supposée égale à 38199000 mètres, on demande de calculer en combien de jours, heures, minutes et

secondes, le son qui parcourt 340 mètres par seconde, serait transmis de la lune à la terre, s'il existait une atmosphère pour le transmettre.

V. La consommation annuelle de la France en blé étant supposée s'élever à 5716439726 litres, calculer la consommation par habitant, en supposant le nombre des habitants égal à 34230178.

VI. En supposant que la circonférence de la terre contienne 40000000 de mètres, et sachant que cette circonférence est divisée en 360 degrés, chaque degré en 60 minutes, et chaque minute en 60 secondes, on demande la valeur en mètres d'un degré, d'une minute, d'une seconde.

CHAPITRE V.

THÉORÈMES RELATIFS AUX QUATRE OPÉRATIONS. — DES PUISSANCES.

58. Les quatre opérations que nous venons d'étudier ont chacune leur signe représentatif.

L'addition s'indique au moyen du signe $+$; l'expression $5+3$ signifie 5 *plus* 3.

La soustraction s'indique au moyen du signe $-$; l'expression $7-2$ signifie 7 *moins* 2.

La multiplication s'indique au moyen du signe $\times$; l'expression 15×9 signifie 15 *multiplié par* 9.

La division s'indique au moyen du signe : ; l'expression $12:3$ signifie 12 *divisé par* 3.

59. Quand on veut soumettre à une certaine opération le résultat d'une opération qui n'est elle-même qu'indiquée, il faut employer un signe particulier : on met alors *entre parenthèses* l'indication de la première opération, et le signe de la seconde opération porte sur toute la parenthèse.

Soit la somme $5+3$ à multiplier par 7; il faudra mettre $5+3$ entre parenthèses et écrire $(5+3)\times 7$. Si l'on ne prenait pas cette précaution, et si l'on écrivait simplement $5+3\times 7$, au lieu d'indiquer le produit de la somme $5+3$ par 7, on indiquerait la somme de 5 et du produit 7×3.

De même, si l'on veut indiquer la division de la différence $15-3$ par la somme $2+7$, on écrira $(15-3):(2+7)$.

60. Quand deux expressions sont égales ou doivent donner des résultats égaux lorsqu'on exécute les calculs qui y sont indiqués, on emploie le signe $=$; ainsi $14\times 2=4\times 7$ veut dire que le produit de 14 par 2 est égal au produit de 4 par 7.

14×2 est le premier membre, 4×7 est le second membre de l'égalité $14 \times 2 = 4 \times 7$.

Quand deux expressions sont inégales, on l'indique en les séparant par le signe $>$, l'ouverture du signe devant être tournée du côté de la plus grande quantité. Ainsi, on écrira $15 \times 2 > 3 \times 9$, pour indiquer que le produit de 15 par 2 surpasse celui de 3 par 9, ou $3 \times 9 < 15 \times 2$ pour indiquer que le premier produit est plus petit que le second. Dans le premier cas, on dit 15×2 *plus grand* que 3×9; et dans le second, 3×9 *plus petit* que 15×2.

61. On remplace quelquefois en arithmétique les nombres par des lettres quelconques, pour rendre le raisonnement plus rapide ou l'expression d'une vérité plus facile à retenir.

Le produit de deux nombres représentés par les lettres a et b s'indique alors en écrivant ces deux lettres à côté l'une de l'autre. Ainsi $a \times b = ab$; de même $a \times 5 = 5a$.

Si l'on représente, par exemple, par D le dividende d'une division quelle qu'elle soit, par d le diviseur, par Q le quotient, par R le reste de l'opération, on se rendra très-nettement compte de la composition du dividende en écrivant :

$$D = dQ + R.$$

Lorsque plusieurs nombres ont une propriété commune ou un mode de formation analogue, on les représente souvent par la même lettre, et on les distingue entre eux en accentuant successivement cette lettre d'un, ou deux, ou trois accents. Ainsi, pour représenter une série de quotients se déduisant les uns des autres, on écrira q, q', q'', et l'on énoncera les lettres affectées d'accents, en disant *q prime, q seconde,* etc.

On peut démontrer, sur les opérations, plusieurs *théorèmes* (*) qui facilitent beaucoup les calculs et qui sont essentiels à connaître : nous allons les parcourir.

Théorème relatif à la soustraction.

62. *Pour retrancher d'un nombre la différence de deux autres, il faut lui ajouter le plus petit de ces deux nombres, et retrancher le plus grand du résultat.*

Soit 8 dont on veut retrancher $15 - 10$: on ne changera rien à la différence demandée en augmentant 8 et $15 - 10$ d'une même quantité 10; mais alors, il reste 15 à retrancher de la somme $8 + 10$. On exprime ce théorème par l'égalité :

$$8 - (15 - 10) = 8 + 10 - 15.$$

(*) On entend par théorème l'énoncé d'une vérité qui a besoin de démonstration; *corollaire* signifie : conséquence d'un théorème.

Théorèmes relatifs à la multiplication.

63. I. *Pour multiplier une somme par un nombre, il faut multiplier chaque partie de la somme par ce nombre, et ajouter les produits partiels obtenus.*

Soit $(4+5+7)\times 3$. Il faudra répéter 3 fois la somme $4+5+7$, et le résultat renfermera 3 fois chaque partie de cette somme. On aura donc bien :

$$(4+5+7)\times 3 = 4\times 3 + 5\times 3 + 7\times 3.$$

Il est évident que, *pour multiplier un nombre par une somme, il faudra de même multiplier ce nombre par chaque partie de la somme, et ajouter les résultats partiels obtenus*; car

$$3\times(4+5+7) = (4+5+7)\times 3,$$

et dans chacun des résultats 4×3, 5×3, 7×3, on peut renverser l'ordre des deux facteurs (41).

Il résulte aussi de ce qui précède que, *pour diviser une somme par un nombre, il faut diviser chaque partie de la somme par ce nombre.* En effet, puisque

$$(4+5+7)\times 3 = 4\times 3 + 5\times 3 + 7\times 3,$$

$4+5+7$ est bien le quotient de $4\times 3+5\times 3+7\times 3$ ou de la somme $12+15+21$ divisée par 3 (44).

Enfin, *pour multiplier deux sommes l'une par l'autre, il faut multiplier chaque partie de la première somme par chaque partie de la seconde, et ajouter les résultats partiels obtenus.* Soit $(4+5+7)\times(2+9)$. On pourra regarder le premier produit comme effectué : le résultat sera alors égal à

$$(4+5+7)\times 2 + (4+5+7)\times 9,$$

c'est-à-dire en réalité à la somme obtenue en multipliant chaque partie de la première somme par chaque partie de la seconde.

64. II. *Pour multiplier une différence par un nombre, il faut multiplier chaque partie de la différence par ce nombre et retrancher le plus petit produit du plus grand.*

Soit $(15-10)\times 2$. La différence $15-10$ étant égale à 5, on a

$$15 = 10+5 \text{ (24)}, \quad \text{d'où} \quad 15\times 2 = 10\times 2 + 5\times 2 \text{ (63)}.$$

Puisque 15×2 est la somme des deux produits 10×2 et 5×2, le produit 5×2 ou $(15-10)\times 2$ est bien égal à son tour à la différence des deux produits 15×2 et 10×2.

Il est évident que, *pour multiplier un nombre par une dif-*

férence, il faut multiplier ce nombre par chaque partie de la différence et retrancher le plus petit produit du plus grand. Soit en effet, $2 \times (15 - 10)$. Ce produit est égal à $(15 - 10) \times 2$, et dans chacun des résultats 15×2 et 10×2, on peut renverser l'ordre des deux facteurs.

Il résulte aussi de ce qui précède que, *pour diviser une différence par un nombre, il faut diviser chaque partie de la différence par ce nombre.* En effet, puisque $(15 - 10) \times 2$ est égal à $15 \times 2 - 10 \times 2$, $15 - 10$ est bien le quotient de la division de $15 \times 2 - 10 \times 2$ ou de la différence $30 - 20$ divisée par 2.

65. Soit l'expression $5 \times 3 \times 7 \times 2 \times 9$. Elle signifie qu'il faut effectuer le produit de 5 par 3, puis multiplier ce résultat par 7, le nouveau résultat obtenu par 2, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé tous les nombres 5, 3, 7, 2, etc., qu'on appelle les facteurs du produit définitif.

66. III. *Étant donné un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir leur ordre de toutes les manières possibles, sans que le produit varie.*

Ce théorème est fondamental, nous partagerons sa démonstration en trois parties.

1°. *Dans un produit de trois facteurs, on ne change pas le produit en changeant l'ordre des deux derniers.*

Soit $6 \times 3 \times 5$. Je dis qu'on peut poser

$$6 \times 3 \times 5 = 6 \times 5 \times 3.$$

En effet,

$$6 \times 3 = 6 + 6 + 6$$

et

$$6 \times 3 \times 5 = (6 + 6 + 6) \times 5 = 6 \times 5 + 6 \times 5 + 6 \times 5,$$

d'où

$$6 \times 3 \times 5 = 6 \times 5 \times 3.$$

On en déduit immédiatement que, *dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs, on peut changer l'ordre des deux derniers sans changer le produit.*

Je dis qu'on aura, par exemple,

$$2 \times 7 \times 9 \times 3 \times 8 = 2 \times 7 \times 9 \times 8 \times 3.$$

En effet, pour former ces deux produits, il faudra toujours commencer par multiplier entre eux les trois premiers facteurs qui sont identiques de part et d'autre, et la question sera ramenée à prouver que $216 \times 3 \times 8 = 216 \times 8 \times 3$.

2°. *Dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs, on peut changer l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques sans changer le produit.*

Je dis qu'on aura, par exemple,

$$3 \times 5 \times 2 \times 8 \times 6 \times 9 = 3 \times 5 \times 8 \times 2 \times 6 \times 9.$$

En effet, puisqu'on a, d'après ce qui précède,

$$3 \times 5 \times 2 \times 8 = 3 \times 5 \times 8 \times 2,$$

on obtiendra encore des produits égaux, en multipliant successivement ces deux produits égaux par les mêmes facteurs 6 et 9.

3°. *On peut faire passer un facteur quelconque à tous les rangs, sans changer le produit.*

Dans le produit $2 \times 9 \times 7 \times 4 \times 5$, je puis, par exemple, sans modifier le produit, échanger le facteur 7 d'abord avec le facteur 9, puis ensuite avec le facteur 2, ou bien l'échanger avec le facteur 4, et ensuite avec le facteur 5. On peut répéter pour tout autre facteur ce qu'on vient de dire pour le facteur 7 : il en résulte que l'ordre des facteurs n'influe en rien sur le produit.

67. On déduit du théorème fondamental que nous venons d'établir les remarques suivantes.

Remarque I. *Pour multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs, il suffit de former un produit unique avec ce nombre et tous les facteurs du produit.*

Soit $35 \times (2 \times 3 \times 4)$. Je dis que ce produit est égal à

$$35 \times 2 \times 3 \times 4.$$

En effet, on peut écrire

$$35 \times (2 \times 3 \times 4) = (2 \times 3 \times 4) \times 35.$$

Qu'on laisse ou qu'on enlève les parenthèses dans le second membre de cette égalité, rien ne sera changé au résultat, puisqu'il faudra toujours former le produit 24 des trois premiers facteurs, et le multiplier ensuite par 35. On aura donc

$$35 \times (2 \times 3 \times 4) = 2 \times 3 \times 4 \times 35 = 35 \times 2 \times 3 \times 4.$$

Remarque II. *Pour multiplier deux produits de plusieurs facteurs, il suffit de former un produit unique avec tous les facteurs de ces deux produits.*

Je dis que $(3 \times 4 \times 7) \times (5 \times 9) = 3 \times 4 \times 7 \times 5 \times 9$; car, en regardant le premier produit comme effectué et en s'appuyant sur la remarque précédente, le premier membre de l'égalité revient d'abord à $(3 \times 4 \times 7) \times 5 \times 9$; et cette dernière expression donnera toujours le même résultat, qu'on conserve ou qu'on enlève les parenthèses.

Remarque III. *Dans un produit de plusieurs facteurs, on*

peut en remplacer un nombre quelconque par leur produit effectué.

Soit $2 \times 7 \times 5 \times 4 \times 9$. On pourra remplacer les facteurs 7 et 4 par leur produit 28 et écrire

$$2 \times 7 \times 5 \times 4 \times 9 = 2 \times 28 \times 5 \times 9.$$

En effet, on a

$$2 \times 7 \times 5 \times 4 \times 9 = 7 \times 4 \times 2 \times 5 \times 9 = 28 \times 2 \times 5 \times 9$$
$$= 2 \times 28 \times 5 \times 9.$$

Remarque IV. *Pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit de multiplier l'un des facteurs du produit par ce nombre.*

Soit $(2 \times 3 \times 7) \times 5$. Je dis qu'on pourra écrire

$$(2 \times 3 \times 7) \times 5 = 2 \times 15 \times 7.$$

On a, en effet, d'après la remarque III :

$$(2 \times 3 \times 7) \times 5 = 2 \times 3 \times 7 \times 5 = 2 \times 15 \times 7.$$

Théorèmes relatifs à la division.

68. I. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur d'une division par un même nombre, le quotient ne change pas et le reste est multiplié ou divisé par le même nombre.*

Soit 38 à diviser par 5. On trouve pour quotient 7 et pour reste 3. On peut donc écrire (61) :

$$(1) \qquad 38 = 5 \times 7 + 3.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par 2, par exemple. Il viendra :

$$38 \times 2 = (5 \times 7) \times 2 + 3 \times 2.$$

Pour multiplier le produit 5×7 par 2, on peut multiplier le facteur 5 par 2 (67, IV), et écrire

$$(2) \qquad 38 \times 2 = (5 \times 2) \times 7 + 3 \times 2.$$

De plus, le reste 3 étant plus petit que le diviseur 5, on aura nécessairement $3 \times 2 < 5 \times 2$. L'égalité (2) signifie alors que le produit 5×2 est contenu 7 fois dans le produit 38×2, avec un reste 3×2 ; c'est ce qu'il fallait établir.

Si l'on a au contraire

$$38 \times 2 = (5 \times 2) \times 7 + 3 \times 2, \quad \text{ou} \quad 76 = 10 \times 7 + 6,$$

on en déduit immédiatement (63)

$$38 = 5 \times 7 + 3 :$$

les deux parties du théorème sont donc vérifiées.

Remarque. Il est évident que le reste étant supposé nul, si l'on multiplie ou si l'on divise le dividende seulement, le quotient est multiplié ou divisé par le même nombre; et si l'on multiplie ou si l'on divise le diviseur seulement, le quotient est divisé ou multiplié par le même nombre (44).

69. II. *Pour diviser un produit de plusieurs facteurs par l'un de ses facteurs, il suffit de supprimer ce facteur.*

Soit $(3 \times 5 \times 7) : 5$. Le quotient sera bien égal à 3×7; car le dividende $3 \times 5 \times 7$ contient le diviseur 5 un nombre de fois représenté par 3×7, puisqu'on peut écrire

$$3 \times 5 \times 7 = 5 \times (3 \times 7).$$

Il suit de là que, *pour diviser un produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit de diviser l'un des facteurs du produit par ce nombre, lorsque cette division est possible exactement.*

Soit $(17 \times 28 \times 5) : 4$. De même qu'on peut remplacer deux facteurs 4 et 7 par leur produit effectué 28 (67, III), on peut remplacer 28 par les deux facteurs 4 et 7. On a alors

$$(17 \times 4 \times 7 \times 5) : 4 = 17 \times 7 \times 5,$$

ce qu'il fallait établir.

70. III. *Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, la division étant supposée exacte, on peut diviser ce nombre par le premier facteur, le résultat obtenu par le second facteur, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs.*

Soit $380 : 38$. Le quotient sera égal à 10, et l'on aura

$$380 = 38 \times 10.$$

38 étant égal à 2×19, on pourra écrire

$$380 = 2 \times 19 \times 10.$$

Si l'on divise les deux membres de cette égalité par 2, on aura

$$380 : 2 = 19 \times 10,$$

car 2 étant facteur du second membre, pour diviser ce second membre par 2, il suffira de supprimer 2 (69). Divisons par 19 les deux membres de la nouvelle égalité, nous aurons

$$(380 : 2) : 19 = 10.$$

Le quotient reste donc le même, qu'on divise par 38 ou, *successivement*, par les facteurs de 38; l'ordre des divisions partielles est d'ailleurs indifférent (*).

Des puissances.

71. On appelle *puissance* d'un nombre, le produit qu'on obtient en prenant ce nombre plusieurs fois comme facteur.

On dit que la puissance est une puissance $m^{ième}$, lorsque le nombre est pris m fois comme facteur : m est alors le *degré* de la puissance.

On appelle, en particulier, *carré* la seconde puissance et *cube* la troisième puissance d'un nombre.

72. On indique le degré de la puissance au moyen de l'*exposant :* l'exposant est un nombre égal au degré de la puissance, qu'on écrit sur la droite et un peu au-dessus du nombre élevé à la puissance.

Ainsi, on indiquera que 5 est élevé à la puissance 13, en écrivant 5^{13}.

(*) Si la division ne s'effectuait pas exactement, les deux procédés conduiraient encore au même quotient, mais les restes définitifs ne seraient pas les mêmes. Si l'on divise 385 par 38, le quotient est 10 et le reste 5. Si l'on divise 385 par 2, le quotient est 192 et le reste 1 ; si l'on divise ce quotient par 19, le quotient définitif est encore 10, mais le dernier reste est égal à 2.

Désignons en effet, d'une manière générale, par D le dividende, par d le diviseur, par a et b les facteurs qui le constituent. Si l'on divise directement D par d, on obtiendra un certain quotient Q et un reste R. On pourra donc écrire

$$D = dQ + R.$$

Si l'on divise au contraire D par a, puis le quotient q obtenu par b, on obtiendra un dernier quotient q' : il faut prouver que $q' = Q$. Désignons par r et r' les restes des deux divisions successives, on pourra poser les deux égalités

$$D = aq + r, \quad q = bq' + r'.$$

Si l'on substitue à q sa valeur, il vient

$$D = a(bq' + r') + r \quad \text{ou} \quad D = abq' + ar' + r.$$

ar' est au plus égal à $ab - a$, puisque r' est au plus égal à $b - 1$ et r est plus petit que a; la somme $ar' + r$ est donc inférieure à ab. Ceci posé, l'égalité

$$D = abq' + ar' + r$$

prouve que le plus grand nombre de fois que D contient $ab = d$ est q' ; l'égalité

$$D = dQ + R$$

prouve que ce plus grand nombre de fois est Q; on a donc bien $q' = Q$. On voit en même temps que, puisqu'on a nécessairement

$$R = ar' + r,$$

le dernier reste r' est toujours inférieur au reste R.

La notion de l'exposant est extrêmement importante, et son emploi facilite beaucoup les calculs.

Par analogie, on dit que 5 est la première puissance de 5 : on n'écrit pas l'exposant 1.

Les opérations sur les puissances se ramènent à des opérations plus simples sur les exposants de ces puissances.

73. I. *Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter leurs exposants.*

Soit $7^3 \times 7^2$. Je dis que le résultat cherché est égal à 7^{3+2} ou 7^5. En effet, 7^3 représentant le produit de trois facteurs égaux à 7 et 7^2 le produit de deux facteurs égaux à 7, le produit $7^3 \times 7^2$ renfermera 5 facteurs égaux à 7.

74. II. Il suit de là que, *pour élever une puissance à une autre puissance, il suffit de multiplier les exposants des deux puissances.*

Soit 7^2 à élever au cube, ce qu'on indiquera ainsi : $(7^2)^3$. Il faudra faire le produit de trois facteurs égaux à 7^2, ce qui reviendra à ajouter trois fois l'exposant 2. On aura donc

$$(7^2)^3 = 7^{2+2+2} = 7^{2\times 3} = 7^6.$$

75. III. Il suit de là encore que, *pour diviser deux puissances d'un même nombre, il suffit de retrancher leurs exposants.*

Soit $7^5 : 7^2$. Puisqu'on a

$$5 = 2 + 3,$$

on aura aussi

$$7^5 = 7^2 \times 7^3,$$

d'où

$$7^5 : 7^2 = 7^3 = 7^{5-2}.$$

76. IV. Enfin, *pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever tous ses facteurs à cette puissance.*

Soit le produit $5 \times 7^2 \times 4$ à élever au cube. On aura

$$(5 \times 7^2 \times 4)^3 = (5 \times 7^2 \times 4) \times (5 \times 7^2 \times 4) \times (5 \times 7^2 \times 4).$$

On peut enlever les parenthèses (**67, II**) et remplacer autant de facteurs qu'on voudra par leur produit effectué (**67, III**). En réunissant les facteurs 5, les facteurs 7^2 et les facteurs 4, on pourra donc écrire

$$(5 \times 7^2 \times 4)^3 = 5^3 \times (7^2)^3 \times 4^3.$$

77. Extraire la *racine $m^{ième}$* d'un nombre, c'est chercher un nombre qui, élevé à la puissance $m^{ième}$, reproduise le nombre donné.

Pour terminer ce qui a rapport au calcul proprement dit, il faudrait exposer l'opération inverse de l'élévation aux puis-

sances, au moins dans ses deux cas les plus simples. Mais, pour ne pas trop nous écarter des habitudes de l'enseignement, nous renverrons l'étude de l'extraction des racines carrée et cubique au livre IV.

Nous ferons seulement remarquer que nous avons été successivement conduits à la considération de six opérations particulières sur les nombres, opérations qui n'ont jamais pour but que la composition et la décomposition de ces nombres. Les nombres se composent au moyen de l'addition, de la multiplication et de l'élévation aux puissances. Dans la multiplication les nombres à ajouter sont égaux; dans l'élévation aux puissances, les facteurs employés sont égaux. Les nombres se décomposent au moyen de la soustraction, de la division, de l'extraction des racines. Dans la division, les nombres à soustraire sont égaux; dans l'extraction des racines, les facteurs qui, par leur produit, doivent reconstituer le nombre donné sont égaux. Les trois premières opérations ont pour *inverses* les trois dernières.

78. Nous devons maintenant nous occuper des propriétés des nombres, mais seulement sous le point de vue du *calcul*. L'ensemble de ces propriétés constitue une branche très-étendue des mathématiques, qui porte le nom de *théorie des nombres :* le livre suivant aura pour objet l'étude de ses principes les plus élémentaires.

LIVRE DEUXIÈME.

LES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES NOMBRES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DE LA DIVISIBILITÉ.

79. Lorsqu'un nombre en divise un autre sans reste, on l'appelle *diviseur exact* ou simplement *diviseur* de cet autre.

Lorsqu'un nombre admet un diviseur exact, on dit qu'il est *divisible* par ce diviseur ou qu'il en est un multiple (*) : le diviseur, à son tour, est un *sous-multiple* ou un *facteur* de ce nombre.

Il est utile de pouvoir juger rapidement, à certains caractères particuliers, si un nombre est diviseur exact d'un autre nombre, au moins dans les cas où le diviseur est très-petit et la condition correspondante très-facile à vérifier. On ramène la question à la recherche des restes fournis par un nombre quelconque, lorsqu'on essaye les diviseurs dont il s'agit. En effet, si un nombre, divisé par 9 par exemple, donne un reste nul, ce nombre sera un multiple de 9.

Avant d'indiquer les conditions de divisibilité, nécessaires à connaître dans la pratique, nous démontrerons plusieurs théorèmes essentiels sur les diviseurs.

80. I. *Lorsqu'un nombre est diviseur de toutes les parties d'une somme, il est diviseur de cette somme.*

En effet, puisqu'il est contenu exactement dans chaque partie de la somme, cette somme en sera nécessairement un multiple.

Par la même raison, *tout diviseur d'un nombre divise les multiples de ce nombre.*

81. II. *Lorsqu'un nombre en divise deux autres, il divise leur différence.*

En effet, puisqu'il est contenu exactement dans chaque par-

(*) On peut dire, d'après cela, que la division a pour but de chercher le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende.

tie de la différence, cette différence en sera nécessairement un multiple.

Il suit de là que *tout diviseur de deux nombres divise le reste de leur division.* En effet, ce reste est la différence du dividende et du produit du diviseur par le quotient, c'est-à-dire la différence de deux multiples du diviseur considéré.

82. III. *On ne change pas le reste d'une division en faisant varier le dividende d'un multiple du diviseur,* ce qui revient à dire que, *lorsque deux dividendes ne diffèrent que d'un multiple d'un certain diviseur, divisés par ce diviseur, ils donnent des restes égaux.*

En effet, le reste d'une division représentant l'*excès* du dividende sur le plus grand multiple du diviseur qui y est contenu, ne dépend en rien de ce plus grand multiple qu'on peut augmenter ou diminuer à volonté sans influer sur le reste.

83. IV. Réciproquement, *si deux nombres divisés par un troisième donnent des restes égaux, leur différence est un multiple de ce troisième nombre.*

Soit 38 et 23, divisés par 5. On aura

$$38 = 5 \times 7 + 3 \quad \text{et} \quad 23 = 5 \times 4 + 3.$$

Il en résultera évidemment

$$38 - 23 = 5 \times 7 - 5 \times 4 = \text{un mult. de } 5.$$

84. V. *Si l'on divise un produit de deux facteurs par un certain nombre, on obtient un certain reste; si l'on divise chacun de ces facteurs par le même nombre, si l'on multiplie entre eux les deux restes obtenus et si l'on divise encore leur produit par le même nombre, on trouve le reste déjà fourni par le produit des deux facteurs.*

On énonce plus rapidement, mais moins clairement ce théorème, en disant : *Le reste d'un produit est égal au reste du produit des restes des deux facteurs, le diviseur employé restant le même.*

Soit 43×21. Prenons 9 pour diviseur. On aura

$$43 = 9 \times 4 + 7 \quad \text{et} \quad 21 = 9 \times 2 + 3,$$

d'où

$$43 \times 21 = (9 \times 4 + 7)(9 \times 2 + 3),$$

c'est-à-dire (63)

$$\begin{aligned} 43 \times 21 &= 9 \times 4 \times 9 \times 2 + 7 \times 9 \times 2 + 9 \times 4 \times 3 + 7 \times 3 \\ &= \text{un mult. de } 9 + 7 \times 3. \end{aligned}$$

Par suite,

$$43 \times 21 - 7 \times 3 = \text{un mult. de } 9.$$

Puisque les deux produits 43×21 et 7×3 diffèrent exactement d'un multiple de 9, on en conclut (**82**) que, divisés par le diviseur 9, ils donneront des restes égaux.

C'est sur ce théorème, qu'on peut facilement généraliser et étendre à un nombre quelconque de facteurs, que repose la preuve de la multiplication au moyen des caractères de divisibilité.

Caractères de divisibilité par 2, 5, 3, 9, 11.

85. I. *Pour qu'un nombre soit divisible par 2^n ou 5^n, il faut et il suffit que le nombre formé par ses n derniers chiffres à droite soit divisible par 2^n ou 5^n.*

En effet, tout nombre peut se décomposer en ses unités du $(n+1)^{ième}$ ordre, plus le nombre formé par ses n derniers chiffres à droite. Les unités du $(n+1)^{ième}$ ordre sont suivies de n zéros, c'est-à-dire qu'elles sont toujours un multiple de 10^n ou de $2^n \times 5^n$, puisque $10 = 2 \times 5$. Il en résulte que la première partie du nombre donné sera toujours divisible par 2^n ou 5^n, et que le reste de sa division par 2^n ou 5^n ne pourra provenir que du nombre formé par ses n derniers chiffres à droite (**82**).

En particulier, supposons d'abord $n = 1$. Nous en déduirons la règle suivante : *Pour qu'un nombre soit divisible par 2 ou par 5, il faut que son dernier chiffre à droite, c'est-à-dire le chiffre de ses unités, soit divisible par 2 ou par 5.*

Quand un nombre est divisible par 2, on dit qu'il est *pair* : il est *impair* dans le cas contraire. Donc *un nombre est divisible par 2, quand le chiffre de ses unités est pair; il est divisible par 5, quand le chiffre de ses unités est 0 ou 5.*

Supposons encore $n = 2$. Nous en déduirons cette seconde règle : *Pour qu'un nombre soit divisible par 2^2 ou par 5^2, c'est-à-dire par 4 ou par 25, il faut que le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite soit divisible par 4 ou par 25.*

86. II. *Pour qu'un nombre soit divisible par 9 ou par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit divisible par 9 ou par 3.*

Nous partagerons la démonstration en trois parties.

1°. *L'unité, suivie d'un nombre quelconque de zéros, est un multiple de 9 ou de 3, plus 1.*

En effet, un nombre formé seulement de 9 est un multiple de 9 ou de 3, car, divisé par 9 ou par 3, il donne au quotient autant de 1 ou de 3 qu'il renferme de 9 (**52**). De plus, si l'on ajoute 1 à ce nombre, on obtient l'unité suivie d'autant de zéros qu'il contient de 9.

2°. *Un chiffre significatif, autre que l'unité, suivi d'un nombre quelconque de zéros, est un multiple de* 9 *ou de* 3, *plus ce chiffre.*

On a, par exemple,

$$5000 = 1000 \times 5,$$

d'où

$$\begin{aligned} 5000 &= (\text{un mult. de } 9 \text{ ou de } 3 + 1) \times 5 \\ &= \text{un mult. de } 9 \text{ ou de } 3 + 5. \end{aligned}$$

3°. Soit maintenant un nombre quelconque 82643. On peut le décomposer en ses unités des différents ordres et poser

$$82643 = 80000 + 2000 + 600 + 40 + 3.$$

On pourra écrire alors, d'après ce qui précède, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 80000 &= \text{un mult. de } 9 \text{ ou de } 3 + 8 \\ 2000 &= \text{un mult. de } 9 \text{ ou de } 3 + 2 \\ 600 &= \text{un mult. de } 9 \text{ ou de } 3 + 6 \\ 40 &= \text{un mult. de } 9 \text{ ou de } 3 + 4 \\ 3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3 \end{aligned}$$

Si on les ajoute membre à membre on trouvera

$$82643 = \text{un mult. de } 9 \text{ ou de } 3 + (8 + 2 + 6 + 4 + 3).$$

Le reste de la division de ce nombre par 9 ou par 3 ne pourra donc provenir que de la somme de ses chiffres : le théorème est, par suite, établi.

Dans la pratique, on fait la somme des chiffres en supprimant 9 successivement, et l'on dit : 8 et 2, 10 ; 1 et 6, 7 ; 7 et 4, 11 ; 2 et 3, 5. 5 est le reste de la division du nombre considéré par 9. Si l'on essaye le diviseur 3, on fait la somme des chiffres, et on la divise directement par 3. On dit : 8 et 2, 10 ; 10 et 6, 16 ; 16 et 4, 20 et 3, 23. 23 divisé par 3 donne 2 pour reste. 2 est le reste de la division du nombre considéré par 3.

87. III. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 11, *il faut et il suffit que l'excès de la somme de ses chiffres de rang impair à partir de la droite, sur la somme de ses chiffres de rang pair, soit divisible par* 11.

Nous partagerons la démonstration en trois parties.

1°. *L'unité suivie d'un nombre impair de zéros est un multiple de* 11 *moins* 1, *et l'unité suivie d'un nombre pair de zéros est un multiple de* 11 *plus* 1.

On a

$$10 = 11 - 1.$$

Il en résulte

$$100 = 10 \times 10 = (11 - 1) \times 10 = \text{un mult. de } 11 - 10$$

ou

$$100 = \text{un mult. de } 11 - (11 - 1),$$

ce qui peut s'écrire (62):

$$100 = \text{un mult. de } 11 - 11 + 1$$

ou

$$100 = \text{un mult. de } 11 + 1.$$

De même, $1000 = 100 \times 10 = (\text{un mult. de } 11 + 1) \times 10$ ou $1000 = \text{un mult. de } 11 + 10 = \text{un mult. de } 11 + 11 - 1$, c'est-à-dire

$$1000 = \text{un mult. de } 11 - 1.$$

Soit encore $10000 = 1000 \times 10$, on aura

$$10000 = (\text{un mult. de } 11 - 1) \times 10 = \text{un mult. de } 11 - 10$$
$$= \text{un mult. de } 11 - 11 + 1,$$

c'est-à-dire

$$10000 = \text{un mult. de } 11 + 1.$$

En continuant toujours de la même manière, on démontre la première partie du théorème.

2°. *Un chiffre significatif, autre que l'unité, suivi d'un nombre impair de zéros, est un multiple de* 11 *moins ce chiffre; et un chiffre significatif, autre que l'unité, suivi d'un nombre pair de zéros, est un multiple de* 11, *plus ce chiffre.*

Soit 500000. On aura

$$500000 = 100000 \times 5 = (\text{un mult. de } 11 - 1) \times 5,$$

c'est-à-dire

$$500000 = \text{un mult. de } 11 - 5.$$

Soit 8000000. On aura

$$8000000 = 1000000 \times 8 = (\text{un mult. de } 11 + 1) \times 8,$$

c'est-à-dire

$$8000000 = \text{un mult. de } 11 + 8.$$

3°. Soit maintenant le nombre 487569. On pourra le décomposer en ses unités des différents ordres et poser

$$487569 = 400000 + 80000 + 7000 + 500 + 60 + 9.$$

On pourra alors écrire, d'après ce qui précède, les égalités

suivantes :

$$400000 = \text{un mult. de } 11 - 4$$
$$80000 = \text{un mult. de } 11 + 8$$
$$7000 = \text{un mult. de } 11 - 7$$
$$500 = \text{un mult. de } 11 + 5$$
$$60 = \text{un mult. de } 11 - 6$$
$$9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 9$$

Si on les ajoute membre à membre, on trouvera

$$487569 = \text{un mult. de } 11 - 4 + 8 - 7 + 5 - 6 + 9$$

ou

$$487569 = \text{un mult. de } 11 + (9 + 5 + 8) - (6 + 7 + 4);$$

ce qui démontre le théorème.

Le reste de la division du nombre proposé par 11 ne peut provenir que de l'excès de la somme $9 + 5 + 8$ sur la somme $6 + 7 + 4$; il est donc, dans l'exemple considéré, égal à 5.

Il peut arriver que la somme des chiffres de rang pair l'emporte sur la somme des chiffres de rang impair. Dans ce cas, on augmente la somme des chiffres de rang impair d'autant de fois 11 qu'il est nécessaire pour que la soustraction soit possible. En effet, on peut toujours détacher ce nombre de fois 11 du multiple de 11 qui forme la première partie du nombre donné. Soit 35291. On aura

$$35291 = \text{un mult. de } 11 + 6 - 14.$$

Si l'on détache une fois 11 du multiple de 11, on aura

$$35291 = \text{un mult. de } 11 + 11 + 6 - 14$$
$$= \text{un mult. de } 11 + 17 - 14 = \text{un mult. de } 11 + 3.$$

Preuves des quatre opérations, au moyen des caractères de divisibilité.

88. Pour faire ces preuves, il vaut mieux employer un diviseur tel que 9, parce que tous les chiffres du résultat concourent à la preuve (86), ce qui n'aurait pas lieu pour les diviseurs qui sont des puissances de 2 ou de 5 (85).

89. Addition et soustraction. — Soit à additionner les nombres 8457, 2392, 1547; leur somme sera égale à 12396. On aura les égalités suivantes (85) :

$$8457 = \text{un mult. de } 9 + 6,$$
$$2392 = \text{un mult. de } 9 + 7,$$
$$1547 = \text{un mult. de } 9 + 8,$$
$$12396 = \text{un mult. de } 9 + 3.$$

En comparant les trois premières égalités et la dernière, on voit que la somme des restes partiels $6+7+8$ ne doit différer du reste 3 que d'un multiple de 9; ce qui a lieu en effet.

Soit à soustraire les nombres 82357 et 19853 : leur différence sera 62504. Il faudra, d'après ce qu'on vient de dire pour l'addition, que la somme des restes fournis par le plus petit nombre 19853 et la différence 62504 ne diffère du reste donné par le plus grand nombre 82357 que d'un multiple de 9. Le reste de la division de 82357 par 9 est 7, celui de la division de 62504 est 8, comme celui de la division de 19853. La somme $8+8$ ou 16 diffère bien de 7 d'un multiple de 9.

90. Multiplication. — La preuve de la multiplication par 9 résulte immédiatement du théorème démontré au n° 84. Nous indiquerons donc seulement la marche à suivre sur un exemple. Soit 4832 à multiplier par 627. Le produit est 3029664. Le reste de la division de ce produit par 9 est 3. Les restes de la division du multiplicande et du multiplicateur par 9 sont 8 et 6. Le produit de ces deux restes est 48, le reste de la division de ce produit par 9 est 3, comme on l'a déjà trouvé pour le produit 3029664 : l'exactitude de la multiplication est donc probable.

91. Division. — S'il s'agit de vérifier une division, on n'a qu'à appliquer ce qu'on vient de dire pour l'addition et la multiplication, puisque le dividende doit être égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste. Soit à diviser 3031991 par 4832 ; on trouvera pour quotient 627 et pour reste 2327. Le dividende divisé par 9 donnera pour reste 8. Le produit du diviseur par le quotient donnera, d'après ce qui précède, le même reste que le produit 8×6 des restes obtenus en divisant séparément par 9 le diviseur et le quotient : ce reste sera donc 3. Enfin, le reste 2327 de l'opération, divisé par 9, donnera pour reste 5. Il faut donc que la somme des deux derniers restes $3+5$ soit égale au premier reste trouvé 8 ou n'en diffère que d'un multiple de 9.

92. Si l'erreur commise dans une opération était juste égale à un multiple du diviseur employé, la marche indiquée ne pourrait la faire découvrir.

CHAPITRE II.

THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

93. Deux nombres peuvent admettre un diviseur commun, ils peuvent en admettre plusieurs : le plus grand de tous ces diviseurs s'appelle leur *plus grand commun diviseur*. Ainsi 36 et 24 ont pour diviseurs communs 2, 3, 4, 6 et 12 : 12 est leur plus grand commun diviseur.

94. I. *Le plus grand commun diviseur de deux nombres divisibles l'un par l'autre est le plus petit d'entre eux.*

Si 36 divise exactement 180, il est le plus grand commun diviseur de 36 et de 180 ; car le plus grand nombre qui puisse diviser 36 est 36.

On sera donc conduit, pour chercher le plus grand commun diviseur de deux nombres, à essayer leur division. Si la division réussit, la recherche du plus grand commun diviseur est terminée ; sinon, on s'appuie pour la continuer sur le théorème suivant.

95. II. *Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui du plus petit d'entre eux et du reste de leur division.*

Soit à chercher le plus grand commun diviseur des nombres 672 et 276. J'effectue leur division, je trouve 2 pour quotient et 120 pour reste. Je remarque alors que tous les diviseurs communs à 672 et à 276 divisent 120, reste de leur division, c'est-à-dire sont diviseurs communs de 276 et de 120.

Je remarque ensuite que $672 = 276 \times 2 + 120$ et que, par conséquent, tous les diviseurs communs à 276 et à 120, divisant 276×2, divisent aussi la somme $276 \times 2 + 120$ ou 672, c'est-à-dire sont diviseurs communs de 672 et de 276.

J'en conclus que les deux groupes : 672 et 276 d'une part, 276 et 120 de l'autre, admettant la même série de diviseurs communs, ont en particulier le même plus grand commun diviseur.

96. Reprenons l'exemple proposé. On est conduit à diviser 276 par 120 : on trouve 2 pour quotient et 36 pour reste. La recherche est ramenée à celle du plus grand commun diviseur des nombres 120 et 36. On divise 120 par 36, on trouve 3 pour quotient et 12 pour reste. Enfin, on cherche le plus grand commun diviseur des nombres 36 et 12, on trouve 3 pour quo-

tient et 0 pour reste : 12 est donc le plus grand commun diviseur demandé.

	2	2	3	3
672	276	120	36	12
120	36	12	0	

On remarquera que les quotients successifs doivent être écrits au-dessus des diviseurs correspondants.

On voit qu'*il faut diviser le plus grand nombre par le plus petit, le plus petit par le reste trouvé, ce premier reste par le second, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve un reste qui, divisant exactement le reste précédent, est le plus grand commun diviseur cherché.*

97. L'opération se terminera nécessairement; car, puisqu'il s'agit de nombres entiers et que tout reste doit être plus petit que le diviseur correspondant, les restes iront toujours en diminuant ; il faudra donc qu'on arrive au moins au reste 1 qui divise tous les nombres.

Lorsque deux nombres ont pour plus grand commun diviseur l'unité, on dit qu'ils sont *premiers entre eux*.

Si, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, on arrive à deux restes premiers entre eux, le plus grand commun diviseur des deux nombres proposés est aussi 1, puisque ce plus grand commun diviseur est celui de deux restes consécutifs quelconques (96).

98. *Tout commun diviseur de deux nombres divise leur plus grand commun diviseur.*

En effet, tout commun diviseur de deux nombres divise le reste de leur division.

Reportons-nous à l'exemple proposé (96), et prenons 4, par exemple, qui divise 672 et 276. 4 divisant 672 et 276, divisera 120; divisant 276 et 120, il divisera 36; divisant 120 et 36, il divisera 12 (*).

(*) *Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.* Soient les nombres 672, 276, 204 et 108. Cherchons le plus grand commun diviseur de 204 et de 108 : nous trouverons 12. Je dis que le plus grand commun diviseur des quatre nombres 672, 276, 204 et 108, est le même que celui des trois nombres 672, 276 et 12. En effet, tout commun diviseur des nombres 204 et 108 divise leur plus grand commun diviseur 12 (98) et, par suite, tout commun diviseur des quatre nombres proposés est commun diviseur de 672, 276 et 12. Réciproquement, tout diviseur de 12 est diviseur commun des nombres 204 et 108 qui sont des multiples de leur plus grand commun diviseur et, par suite, tout commun diviseur des nombres 672, 276 et 12, est commun diviseur des quatre nombres proposés. [illegible] de divi

Théorèmes relatifs au plus grand commun diviseur.

99. I. *En multipliant ou en divisant deux nombres par un troisième nombre, on multiplie ou l'on divise leur plus grand commun diviseur par ce troisième nombre.*

En effet, en multipliant ou en divisant deux nombres par un troisième nombre, on multiplie ou l'on divise le reste de leur division par ce troisième nombre.

Reprenons l'exemple du n° 96. En multipliant ou en divisant 672 et 276 par 3, par exemple, on multipliera ou l'on divisera le reste 120 par 3. Le dividende 276 et le diviseur 120 étant multipliés ou divisés par 3, le reste 36 sera lui-même multiplié ou divisé par 3. Enfin, le dividende 120 et le diviseur 36 étant multipliés ou divisés par 3, le reste 12 sera lui-même multiplié ou divisé par 3. Le dividende 36 et le diviseur 12 donnaient 0 pour reste : il en sera de même de ces deux nombres multipliés ou divisés par 3, c'est-à-dire que le plus grand commun diviseur sera 12 multiplié ou divisé par 3.

100. Ce qui précède permet de simplifier dans certains cas la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. Si l'on demande, par exemple, le plus grand commun diviseur des nombres 36800 et 24000, on pourra diviser ces deux nombres par 100 et chercher le plus grand commun diviseur 16 des quotients 368 et 240. Pour avoir ensuite le plus grand commun diviseur des nombres proposés, il suffira de multiplier 16 par 100.

101. II. *Les quotients de deux nombres divisés par leur plus grand commun diviseur sont premiers entre eux.*

En effet, en divisant deux nombres par leur plus grand commun diviseur, on divise ce plus grand commun diviseur par

---

seurs communs ont, en particulier, le même plus grand commun diviseur. On pourra donc simplifier la question de proche en proche, et elle sera ramenée finalement à chercher le plus grand commun diviseur de deux nombres. Ainsi, dans l'exemple donné, on cherchera le plus grand commun diviseur des nombres 276 et 12, qui sera 12; et enfin, le plus grand commun diviseur des nombres 672 et 12, qui sera encore 12 : 12 sera le plus grand commun diviseur des nombres donnés.

On a intérêt à commencer le calcul en opérant sur les plus petits nombres, car il pourrait arriver que le plus grand commun diviseur fût égal au plus petit des nombres donnés. En prenant cette précaution, on diminue généralement le nombre des divisions à effectuer.

Il est évident que tout commun diviseur de plusieurs nombres divise leur plus grand commun diviseur.

lui-même (96), de sorte que le plus grand commun diviseur des deux quotients obtenus est l'unité.

La réciproque de ce théorème est évidente (*).

102. En Arithmétique, l'utilité de la théorie que nous venons d'exposer est bornée à la recherche des quotients de deux nombres par leur plus grand commun diviseur. Il est donc utile d'indiquer une règle pour trouver rapidement ces quotients, au moyen de l'opération même qui fournit le plus grand commun diviseur.

Reprenons encore l'exemple du n° 96. 12 se contient lui-même 1 fois : j'écris 1 au-dessous de 12. 36 contient 3 fois 12, j'écris 3 au-dessous de 36. 120 contient 3 fois $36+12$, c'est-à-dire un nombre de fois 12 représenté par $3\times 3+1$ ou 10 : j'écris 10 au-dessous de 120. On voit qu'il faut, pour obtenir ce résultat, multiplier le résultat précédent 3 par le quotient qui est placé au-dessus, et ajouter à ce produit le nombre 1 placé à droite de 3. 276 contient 2 fois 120 plus 36, c'est-à-dire un nombre de fois 12 représenté par $10\times 2+3$ ou 23 : j'écris 23 au-dessous de 276. Ce résultat s'obtient encore en multipliant le précédent par le quotient 2 placé au-dessus, et en ajoutant au produit le résultat anté-précédent. Enfin, 672 contient 2 fois 276 plus 120, c'est-à-dire un nombre de fois 12 représenté par $23\times 2+10$ ou 56 : j'écris 56 au-dessous de 672. Les quotients cherchés sont 56 et 23.

	2	2	3	3
672	276	120	36	12
120	36	12	0	
56	23	10	3	1

On voit sans peine la règle à suivre. *Après avoir écrit* 1 *sous le plus grand commun diviseur, et le quotient qui lui correspond, à gauche de* 1, *il faut multiplier successivement le der-*

(*) Dans l'énoncé d'un théorème, il y a toujours une hypothèse et une conclusion; la démonstration a pour but de passer de l'hypothèse à la conclusion, à l'aide d'une série de déductions évidentes. Le théorème réciproque s'obtient en prenant la conclusion du théorème direct pour hypothèse, et l'hypothèse de ce théorème pour conclusion. Dans le cas considéré, l'hypothèse du théorème direct est que l'on divise deux nombres par leur plus grand commun diviseur, la conclusion est que les quotients obtenus sont premiers entre eux. Le théorème réciproque s'énoncera en disant : Si l'on divise deux nombres par un troisième nombre et que les quotients obtenus soient premiers entre eux, le troisième nombre est le plus grand commun diviseur des deux premiers. Les réciproques ne sont pas toutes vraies, parce que l'hypothèse et la conclusion n'ont pas toujours le même degré de généralité : nous en verrons des exemples en Géométrie.

nier résultat obtenu par le quotient qui est au-dessus et ajouter au produit l'avant dernier résultat. On trouve ainsi la série des quotients des restes consécutifs et des deux nombres proposés par leur plus grand commun diviseur.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS.

103. Un nombre est *premier*, lorsqu'il n'a pas d'autres diviseurs que lui-même et l'unité.

Lorsqu'un nombre *premier* ne divise pas un autre nombre, il est *premier avec lui;* car il ne peut plus avoir avec lui que l'unité pour diviseur commun.

5, 11, 23 sont des nombres premiers.

104. *Tout nombre qui n'est pas premier admet un diviseur premier.*

En effet, le nombre proposé n'étant pas premier, admet un diviseur. Ce diviseur, à son tour, s'il n'est pas premier, admet lui-même un diviseur dont le nombre proposé est nécessairement un multiple. Ce second diviseur, ou bien est premier, ou bien admet lui-même un diviseur qui divise le nombre proposé. En continuant toujours le même raisonnement, comme les diviseurs considérés sont entiers et vont toujours en diminuant, on finira par arriver au moins à l'unité comme dernier diviseur; ce qui prouvera que l'avant-dernier diviseur est un nombre premier.

Il en résulte que : *Deux nombres qui ne sont pas premiers entre eux, admettent un diviseur premier commun.*

En effet, ces nombres ont un plus grand commun diviseur qui, s'il n'est pas premier, admet lui-même un diviseur premier.

105. *Formation d'une table de nombres premiers* (*).

Pour former une table des nombres premiers, depuis 1 jus-

(*) *La suite des nombres premiers est illimitée.* Soit en effet un nombre premier quelconque p : je vais démontrer qu'il existe un nombre premier supérieur à p. Formons le produit des nombres premiers jusqu'à p : ce produit sera $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \ldots \times p$. Ajoutons 1 à ce produit, nous formerons le nombre $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times p + 1$. Ce nombre, supérieur à p, est premier ou admet un diviseur premier; et, dans ce dernier cas, ce diviseur premier doit être supérieur à p, car il ne peut se trouver dans la suite $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times p$, sans quoi il diviserait la première partie du nombre considéré sans diviser la seconde

qu'à une limite donnée, on écrit tous les nombres depuis 1 jusqu'à cette limite :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	.....						

On *barre* alors les nombres de cette suite de 2 en 2, à partir de 2, comme multiples de 2 : on conserve 1 et 2, qui sont évidemment des nombres premiers.

Le premier nombre *non barré* après 2 étant 3, 3 est un nombre premier, puisqu'il n'est pas divisible par les nombres plus petits que lui, sauf l'unité.

On barre les nombres de la suite de 3 en 3, à partir de 3, comme multiples de 3. Le premier nombre non barré après 3 étant 5, 5 est un nombre premier.

On barre les nombres de la suite de 5 en 5, à partir de 5, comme multiples de 5. Le premier nombre non barré après 5 étant 7, 7 est un nombre premier.

On barre les nombres de la suite de 7 en 7, à partir de 7, comme multiples de 7. Le premier nombre non barré après 7 étant 11, 11 est un nombre premier.

On continuera en suivant toujours la même marche.

Il faut remarquer qu'on doit s'arrêter dès qu'on est parvenu à un nombre premier dont le carré surpasse la limite de la table, tous les nombres conservés dans la table étant alors nécessairement premiers.

Supposons, par exemple, que la limite de la table soit 260, et qu'on soit arrivé au nombre premier 17 dont le carré est 289, je dis que tous les nombres non barrés sont des nombres premiers. En effet, si un seul de ces nombres n'était pas premier, il admettrait un diviseur premier plus grand que 13, puisque tous les multiples de 13 ont dû être barrés. Supposons que ce diviseur premier soit 17 ou plus grand que 17. Puisque le nombre dont il s'agit est compris dans la table, il est inférieur à 289 et contient par suite 17 ou un diviseur plus grand que 17 moins de 17 fois; donc, ou le quotient de sa division par ce diviseur est un nombre premier inférieur à 17, ou ce quotient admet lui-même un diviseur premier plus petit que 17. Le nombre considéré étant nécessairement multiple de ce dernier diviseur, a donc déjà été effacé; et tous les nombres non barrés sont bien des nombres premiers.

106. Ce que nous venons de dire prouve évidemment qu'*un nombre est premier, lorsqu'il n'est divisible par aucun*

des nombres premiers dont les carrés sont plus petits que lui; car il ne peut dès lors être divisible par aucun des nombres premiers dont les carrés le surpassent (104).

Théorèmes sur les nombres premiers.

107. I. *Lorsqu'un nombre quelconque divise un produit de deux facteurs et qu'il est premier avec l'un de ces facteurs, il divise nécessairement l'autre.*

Soit le produit 100×36 qui est divisible par 9; 9 étant premier avec 100 divisera 36. En effet, 100 et 9 étant premiers entre eux ont pour plus grand commun diviseur l'unité. Multiplions 100 et 9 par 36, nous multiplierons leur plus grand commun diviseur par 36 (99), de sorte que le plus grand commun diviseur des nombres 100×36 et 9×36 sera 1×36 ou 36. Tout nombre qui en divise deux autres, divise leur plus grand commun diviseur (98); 9 divisant 100×36 par hypothèse, et 9×36 parce qu'il est un facteur de ce produit (69), divisera donc 36.

Il faut remarquer que le théorème n'aurait plus de sens, si le diviseur considéré n'était pas premier avec l'un des facteurs du produit, c'est-à-dire qu'un nombre quelconque peut diviser un produit de deux facteurs sans diviser l'un d'eux. Ainsi 22×15 est divisible par 10, et 10 ne divise ni 22 ni 15. Mais les facteurs 2 et 5 qui composent 10 se retrouvant, l'un dans 22, l'autre dans 15, 10 n'est premier avec aucun des facteurs du produit proposé.

108. II. *Lorsqu'un nombre premier divise un produit de plusieurs facteurs, il divise au moins l'un d'eux.*

Soit le produit $39 \times 42 \times 25$ qui est divisible par le nombre premier 13, 13 devra diviser l'un des facteurs du produit. En effet, on peut considérer ce produit comme composé des deux facteurs (39×42) d'une part, 25 de l'autre. Si 13 divise 25, le théorème est démontré; sinon, 13 étant premier, sera premier avec 25 (**103**) : divisant le produit $(39 \times 42) \times 25$ et étant premier avec 25, il devra diviser le facteur (39×42) [**107**]. Mais (39×42) peut être regardé comme le produit des deux facteurs 39 et 42. Si 13 divise 42, le théorème est démontré; sinon 13 sera premier avec 42, et, divisant le produit 39×42, il devra diviser 39; ce qui a lieu en effet.

On peut déduire de ce théorème les deux conséquences suivantes :

1° *Lorsqu'un nombre premier divise une puissance, il divise le nombre élevé à la puissance.* Si 7 divise 35^3, il divise 35. En effet, 7, nombre premier divisant le produit de 3 facteurs égaux à 35, devra diviser l'un d'eux, c'est-à-dire 35.

2°. *Lorsque deux nombres sont premiers entre eux, leurs puissances quelconques sont premières entre elles.* Soient les nombres 22 et 15 qui sont premiers entre eux, les puissances 22^3 et 15^2 seront aussi premières entre elles. En effet, s'il n'en était pas ainsi, 22^3 et 15^2 admettraient un diviseur premier commun (**104**) qui diviserait dès lors à la fois 22 et 15.

109. III. *Tout nombre premier avec les facteurs d'un produit est premier avec ce produit; réciproquement, tout nombre premier avec un produit, est premier avec les facteurs de ce produit.*

Soit un produit $P = ABC$. Si N est premier avec les facteurs A, B, C, il sera premier avec leur produit P; car s'il admettait avec lui un diviseur premier commun, ce diviseur devrait diviser au moins l'un des facteurs A, B, C (**108**), qui dès lors ne seraient plus tous premiers avec N.

Réciproquement, si N est premier avec le produit P, il le sera avec tous les facteurs A, B, C; car s'il admettait avec A, par exemple, un diviseur premier commun, ce diviseur diviserait P qui est un multiple de A; P ne serait donc plus premier avec N.

110. IV. *Lorsqu'un nombre est divisible séparément par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.*

Soit le nombre N, divisible séparément par les nombres a, b, c, premiers entre eux deux à deux. Si l'on effectue la division de N par a, on trouve un quotient exact q, et l'on peut poser $N = aq$. N est divisible par b, le produit aq doit donc l'être; mais b est premier avec a, il devra donc diviser q. Si l'on effectue la division de q par b, on trouve un quotient exact q' et l'on peut poser $q = bq'$, c'est-à-dire $N = abq'$. N est divisible par c, le produit abq' doit donc l'être; mais c étant premier avec a et avec b, le sera avec leur produit ab (**109**); c divisant le produit abq' ou $ab \times q'$ et étant premier avec le facteur ab, devra diviser q'. Si l'on effectue la division de q' par c, on trouve un quotient exact q'', et l'on peut poser $q' = cq''$, c'est-à-dire $N = abcq''$. N est donc un multiple du produit abc.

111. Le théorème qui précède permet de combiner entre eux les caractères de divisibilité déjà obtenus. Supposons qu'on cherche quelles conditions doit remplir un nombre divisible par 66. On remarquera que $66 = 2 \times 3 \times 11$. Les nombres 2, 3 et 11 étant premiers entre eux, tout nombre divisible séparément par ces trois nombres sera divisible par 66. Donc, pour

qu'un nombre soit divisible par 66, il faut et il suffit qu'il réunisse les caractères de divisibilité par 2, 3 et 11.

Décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

112. I. *Tout nombre qui n'est pas premier, est un produit de nombres premiers.*

En effet, soit le nombre N qu'on suppose n'être pas premier : il admettra un diviseur premier a (104). Désignons par N′ le quotient de N par a : on aura $N = aN'$. Si N′ est premier, le théorème est démontré ; sinon, N′ admettra un diviseur premier b. Désignons par N″ le quotient de N′ par b : on aura $N' = bN''$, c'est-à-dire $N = abN''$. On répétera pour N″ ce qu'on vient de dire pour N′. Si l'on remarque alors que la suite des quotients N′, N″, etc., va toujours en diminuant, on voit qu'on finira par arriver à un quotient au moins égal à 1, auquel cas le quotient précédent sera un nombre premier puisqu'il ne sera divisible que par lui-même.

On en conclut que tout nombre non premier est un produit de nombres premiers.

Remarquons que ces nombres premiers peuvent se trouver répétés dans le produit considéré un nombre quelconque de fois.

Si un nombre contient 3 fois le facteur 2, 2 fois le facteur 3, une fois le facteur 5, comme 360, on écrira : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, en se servant de la notation des exposants.

Quand on cherche les nombres premiers dont le produit constitue un nombre donné, on dit qu'on veut *décomposer ce nombre en ses facteurs premiers.*

Avant d'indiquer la marche à suivre pour arriver à cette décomposition dans un cas quelconque, il est nécessaire de prouver qu'elle n'est possible que d'une seule manière ; en d'autres termes, il faut démontrer qu'un nombre n'admet qu'un seul système de facteurs premiers.

113. II. *Un nombre quelconque n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers.*

Supposons que le nombre N soit égal à la fois aux deux systèmes de facteurs premiers $abcd$ et $a'b'c'd'$. Nous allons prouver que ces deux systèmes sont forcément identiques. En effet, on aura

$$abcd = a'b'c'd'.$$

a divisant le premier membre, devra diviser le second ; mais a étant un nombre premier devra diviser au moins l'un des facteurs du produit $a'b'c'd'$, et comme tous ces facteurs sont premiers, il ne pourra diviser l'un d'eux que si ce dernier lui est égal (108).

Supposons $a = a'$. On pourra diviser le premier membre de l'égalité considérée par a et le second par a' : il restera

$$bcd = b'c'd'.$$

On pourra répéter pour b ce qu'on vient de dire pour a, et l'on prouvera qu'on a, par exemple, $b = b'$. En continuant le même raisonnement, on démontrera que tous les facteurs du premier système se retrouvent parmi ceux du second, et réciproquement.

Remarquons que le raisonnement indiqué n'exclut pas le cas où quelques-uns des facteurs du premier système sont égaux entre eux ; mais alors ils se répètent en même nombre dans l'autre système.

Les deux systèmes considérés sont donc identiques, non-seulement quant aux facteurs qui les composent, mais encore quant aux exposants de ces facteurs.

114. III. *Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers.* Ceci posé, prenons pour exemple le nombre 54252.

Nous commencerons par essayer la division de ce nombre par le plus petit nombre premier après 1, c'est-à-dire par 2. Elle réussira, puisque le nombre proposé est pair. On obtient pour quotient 27126, et l'on a

$$54252 = 2 \times 27126.$$

Les facteurs premiers de 54252 sont donc 2 et les facteurs premiers de 27126. Essayons de nouveau la division de 27126 par 2. On trouve pour quotient 13563, et l'on a

$$27126 = 2 \times 13563,$$

c'est-à-dire

$$54252 = 2 \times 2 \times 13563.$$

La question est donc ramenée à chercher les facteurs premiers de 13563. La division par 2 ne pouvant réussir, il faut essayer la division par le nombre premier suivant, c'est-à-dire par 3 : elle réussira, puisque la somme des chiffres de 13563 est divisible par 3. On trouve pour quotient 4521, et l'on a

$$13563 = 3 \times 4521,$$

c'est-à-dire

$$54252 = 2 \times 2 \times 3 \times 4521.$$

La question est ramenée à chercher les facteurs premiers de 4521. Lorsqu'on a cessé d'employer un diviseur, on n'a plus besoin d'y revenir. Ainsi 4521 ne saurait être divisible par 2, puisque, sans cela, son multiple 13563 l'aurait été. 4521 est encore divisible par 3, et l'on trouve pour quotient 1507. On a

donc

$$4521 = 3 \times 1507,$$

c'est-à-dire

$$54252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 1507.$$

La question est ramenée à chercher les facteurs premiers de 1507. 1507 n'est plus divisible par 3, ni par 5 puisqu'il est terminé par un 7, ni par 7. Il faut essayer la division par 11 : elle réussira, puisque l'excès de la somme des chiffres de rang impair sur la somme des chiffres de rang pair est égal à 11. On trouve pour quotient 137, et l'on a

$$1507 = 11 \times 137,$$

c'est-à-dire

$$54252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 137.$$

La question est ramenée à chercher les facteurs premiers de 137. 137 n'étant plus divisible par 11, il n'est pas nécessaire d'essayer la division par 13. Le carré de 13 ou 169 étant supérieur à 137, on peut affirmer que 137 est un nombre premier. En effet, 137 n'étant divisible par aucun des nombres premiers dont les carrés sont plus petits que 137, ne sera divisible par aucun des nombres premiers dont les carrés sont plus grands (**106**).

La décomposition se trouve donc terminée et l'on a

$$54252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 137 \quad \text{ou} \quad 54252 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 137.$$

Voici comment on indique habituellement le calcul :

54252	2
27126	2
13563	3
4521	3
1507	11
137	137
1	

115. Lorsqu'un nombre est le produit de nombres connus, on abrége l'opération en cherchant les facteurs premiers de ces nombres et en les réunissant ensuite. Ainsi, si l'on a le nombre 26800, on cherche séparément les facteurs premiers de 268 et de 100. On a

$$268 = 2^2 \times 67 \quad \text{et} \quad 100 = 2^2 \times 5^2,$$

par suite

$$26800 = 2^4 \times 5^2 \times 67.$$

116. IV. *Lorsqu'un nombre est une puissance exacte, les exposants de ses facteurs premiers sont divisibles par le degré de la puissance.*

Si l'on a $N = N'^2$, et si $N' = 2^2 \times 3 \times 7$, on a

$$N = (2^2 \times 3 \times 7)^2,$$

c'est-à-dire

$$N = 2^{2\times 2} \times 3^2 \times 7^2. \quad (76)$$

La réciproque est évidente. Si l'on a

$$N = 2^{2\times 2} \times 3^2 \times 7^2,$$

on a aussi

$$N = (2^2 \times 3 \times 7)^2.$$

EXERCICES.

I. Démontrer que tout nombre premier est de la forme $6x \pm 1$.

II. Démontrer qu'il n'existe aucun nombre qui, divisé par 18, donne 6 pour reste, et qui, divisé par 14, donne 5 pour reste.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS.

Recherche des diviseurs d'un nombre.

117. I. *Pour que deux nombres soient divisibles l'un par l'autre, il faut et il suffit que tous les facteurs premiers du diviseur se retrouvent parmi ceux du dividende, au moins avec leurs exposants.*

En effet, lorsque la division est possible, cette condition se trouve remplie, puisque le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient. Et lorsque cette condition se trouve remplie, la division est possible, puisque les facteurs qui restent lorsqu'on a supprimé dans le dividende ceux du diviseur, forment précisément le quotient.

D'après cela, puisque les diviseurs d'un nombre ne peuvent contenir d'autres facteurs premiers que ceux de ce nombre, pour les avoir tous, il suffit de décomposer le nombre proposé en ses facteurs premiers et de les combiner entre eux de toutes les manières possibles. La seule précaution à prendre sera de suivre une marche telle, qu'on ne puisse oublier aucune de ces combinaisons.

118. II. *Calcul des diviseurs d'un nombre.*

Soit le nombre 360 qui est égal à $2^3 \times 3^2 \times 5$.

Dans une première colonne verticale, j'écrirai 1 qui divise tous les nombres, et ensuite les diverses puissances du facteur 2, c'est-à-dire les diviseurs qui contiennent seulement ce facteur. Je formerai une seconde colonne verticale en multipliant les nombres de la première colonne par les diverses puissances du facteur 3. En multipliant 1 par ces puissances, j'aurai les diviseurs qui contiennent seulement le facteur 3; en multipliant les diverses puissances de 2 par les diverses puissances de 3, j'aurai les diviseurs qui contiennent à la fois les facteurs 2 et 3. Je formerai une troisième colonne en multipliant les nombres contenus dans les deux premières, par les diverses puissances du facteur suivant, puissances qui se réduisent ici à la première du facteur 5. En multipliant 1 par ces puissances, j'aurai les diviseurs qui contiennent seulement le troisième facteur premier. En multipliant les puissances de 2 par 5, j'aurai les diviseurs qui contiennent à la fois les facteurs 2 et 5. En multipliant la seconde colonne par 5, j'aurai d'abord les diviseurs qui contiennent les facteurs 3 et 5, et ensuite les diviseurs qui contiennent à la fois les facteurs 2, 3 et 5. Aucune combinaison n'aura donc été oubliée.

1	3	5
2	9	10
4	6	20
8	12	40
	24	15
	18	45
	36	30
	72	60
		120
		90
		180
		360

119. III. *Nombre des diviseurs d'un nombre.*

Il est facile de déduire de l'ordre adopté le nombre des diviseurs qu'on doit obtenir.

La première colonne renferme un nombre de diviseurs marqué par l'exposant du facteur premier 2, plus l'unité, c'est-à-dire $(3+1)$ diviseurs.

La seconde colonne, obtenue en multipliant la première par les diverses puissances de 3, en contiendra 2 fois autant, puisque le facteur 3 est affecté de l'exposant 2, c'est-à-dire $(3\times 1)\times 2$.

Les deux premières colonnes réunies renfermeront donc $[(3+1)+(3+1)\times 2]$ diviseurs, c'est-à-dire $(3+1)\times(2+1)$.

La troisième colonne, obtenue en multipliant les deux premières par les diverses puissances du troisième facteur, en contiendra une fois, deux fois, trois fois autant que ces deux colonnes, suivant que l'exposant du troisième facteur considéré sera 1, 2 ou 3. Dans l'exemple choisi, la troisième colonne renfermera donc $(3+1)\times(2+1)$ diviseurs.

Les trois colonnes réunies renfermeront donc un nombre de diviseurs représenté par $(3+1)\times(2+1)+(3+1)\times(2+1)$,

c'est-à-dire que le nombre total des diviseurs devra être égal à $(3+1)\times(2+1)\times(1+1)$.

La loi est évidente. *Pour avoir le nombre des diviseurs d'un nombre, il faut ajouter* 1 *aux exposants de ses différents facteurs premiers, et multiplier entre eux les résultats obtenus.* Le nombre 360 doit avoir 24 diviseurs.

Remarque. — Pour avoir les diviseurs communs à plusieurs nombres, il suffit de chercher les diviseurs de leur plus grand commun diviseur (98, note).

Composition du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

120. I. *Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est le produit des facteurs premiers communs à ces nombres, pris avec leur plus faible exposant* (*).

Soient les nombres :

$$N = 2^3\times 3^2\times 5,$$
$$N' = 2^2\times 3\times 7,$$
$$N'' = 2^3\times 3^3\times 5^2\times 11.$$

Je dis que leur plus grand commun diviseur sera formé des facteurs premiers 2 et 3, pris avec les exposants 2 et 1. En effet, tout diviseur commun aux nombres proposés ne peut contenir que des facteurs premiers communs à ces nombres (**117**), c'est-à-dire les facteurs 2 et 3; et il peut les contenir *au plus* avec les exposants les plus faibles qui les affectent dans les nombres proposés, sans quoi il cesserait d'être diviseur *commun*. Le plus grand commun diviseur cherché sera donc $2^2\times 3$.

121. II. *Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres ou le plus petit nombre divisible à la fois par ces nombres, est le produit des facteurs premiers différents contenus dans ces nombres, pris avec leur exposant le plus élevé.*

Soient les nombres :

$$N = 2^3\times 3^2\times 5,$$
$$N' = 2^2\times 3\times 7,$$
$$N'' = 2^3\times 3^3\times 5^2\times 11.$$

Je dis que leur plus petit commun multiple sera formé des facteurs premiers 2, 3, 5, 7 et 11, pris respectivement avec les

(*) Il résulte de ce théorème que si l'on cherche le p.g.c. diviseur de deux nombres en opérant par voie de division, on peut supprimer dans l'un des nombres tout facteur premier qui n'entre pas dans l'autre nombre, sans changer le plus grand commun diviseur cherché.

exposants 3, 3, 2, 1 et 1. En effet, tout multiple commun des nombres donnés doit contenir tous les facteurs premiers contenus dans ces nombres (117); et il doit les contenir *au moins* avec les exposants les plus élevés qui les affectent dans les nombres proposés, sans quoi il cesserait d'être multiple *commun*. Le plus petit commun multiple cherché sera donc $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$.

Remarque. — Si, parmi les nombres donnés, il en est qui se divisent exactement, on doit négliger les plus petits de ces nombres dans la recherche du plus petit commun multiple. Si l'on cherche, par exemple, le plus petit commun multiple des nombres 5160, 180 et 36, il est inutile de considérer 36 qui est un diviseur exact de 180, c'est-à-dire dont tous les facteurs premiers font partie des facteurs premiers de 180.

122. III. *Quand on considère seulement deux nombres, leur produit est égal au produit de leur plus grand commun diviseur par leur plus petit commun multiple.*

En effet, les facteurs premiers communs aux deux nombres entrent dans le plus grand commun diviseur avec leur plus faible exposant et, dans le plus petit commun multiple, avec leur exposant le plus élevé; le plus petit commun multiple contient en outre les facteurs non communs aux deux nombres. Le produit du plus grand commun diviseur par le plus petit commun multiple, contient donc tous les facteurs des nombres proposés (*).

(*) Cette remarque pourrait conduire à une seconde méthode générale pour trouver le plus petit commun multiple de plusieurs nombres. On voit que, dans le cas de deux nombres A et B, on devrait chercher leur plus grand commun diviseur D et diviser le produit AB par D; en désignant par M le plus petit commun multiple, on a en effet

$$AB = DM,$$

d'où

$$AB : D = M.$$

Dans la pratique, on n'effectuerait pas le produit AB, on diviserait B par D, et l'on multiplierait A par le quotient Q obtenu, de sorte qu'on aurait

$$AQ = M. \quad (69)$$

Pour appliquer cette méthode à la recherche du plus petit multiple commun de plusieurs nombres, il faut commencer par démontrer le théorème suivant : *Chercher le plus petit multiple commun des quatre nombres α, β, γ, δ, par exemple, revient à chercher celui des trois nombres M, γ, δ (M représentant le plus petit multiple commun des deux premiers nombres α et β).*

Il est évident d'abord que, pour avoir tous les communs multiples de plusieurs nombres, il suffit de multiplier leur plus petit multiple commun par la suite des nombres entiers 1, 2, 3, etc. Ceci posé, tout commun multiple des quatre nombres α, β, γ, δ, l'est des trois nombres M, γ, δ. Réciproquement, tout multiple de M l'étant des nombres α et β, tout commun multiple des trois nombres M, γ, δ, l'est aussi des quatre nombres α, β, γ, δ. Les deux séries con-

Nous donnons ici une table des nombres qui, depuis 1 jusqu'à 3000, ne sont pas divisibles par les facteurs premiers 2, 3, 5, 7, qu'on découvre facilement; et nous écrivons en regard leur décomposition en facteurs premiers. Si un nombre plus petit que 3000 et non divisible par 2, 3, 5, 7, n'est pas dans cette table, il est premier.

121	11^2	583	11×53	943	23×41
143	11×13	589	19×31	949	13×73
169	13^2	611	13×47	961	31^2
187	11×17	629	17×37	979	11×89
209	11×19	649	11×59	989	23×43
221	13×17	667	23×29	1003	17×59
247	13×19	671	11×61	1007	19×53
253	11×23	689	13×53	1027	13×79
289	17^2	697	17×41	1037	17×61
299	13×23	703	19×37	1067	11×97
319	11×29	713	23×31	1073	29×37
323	17×19	731	17×43	1079	13×83
341	11×31	737	11×67	1081	23×47
361	19^2	767	13×59	1111	11×101
377	13×29	779	19×41	1121	19×59
391	17×23	781	11×71	1133	11×103
403	13×31	793	13×61	1139	17×67
407	11×37	799	17×47	1147	31×37
437	19×23	803	11×73	1157	13×89
451	11×41	817	19×43	1159	19×61
473	11×43	841	29^2	1177	11×107
481	13×37	851	23×37	1189	29×41
493	17×29	869	11×79	1199	11×109
517	11×47	871	13×67	1207	17×71
527	17×31	893	19×47	1219	23×53
529	23^2	899	29×31	1241	17×73
533	13×41	901	17×53	1243	11×113
551	19×29	913	11×83	1247	29×43
559	13×43	923	13×71	1261	13×97

---

sidérées admettant les mêmes multiples communs, admettent en particulier le même plus petit multiple commun. Ce raisonnement étant général, le calcul s'effectuera dans tous les cas de la manière suivante.

Si D représente le plus grand commun diviseur des nombres α et β, on aura, en désignant par Q le quotient de β par D,

$$M = \alpha Q.$$

On cherchera alors le plus grand commun diviseur D′ des nombres M et γ. Soient Q′ le quotient de γ par D′ et M′ le plus petit multiple commun des nombres M et γ, c'est-à-dire des nombres α, β, γ; on aura

$$M' = MQ' = \alpha QQ'.$$

Enfin, on déterminera le plus grand commun diviseur D″ des nombres M′ et δ On cherchera le quotient Q″ de δ par D″ et, en appelant M″ le plus petit multiple commun des nombres M′ et δ, c'est-à-dire des quatre nombres proposés, on aura

$$M'' = M'Q'' = \alpha QQ'Q''.$$

1271	31×41
1273	19×67
1313	13×101
1331	11^3
1333	31×43
1339	13×103
1343	17×79
1349	19×71
1357	23×59
1363	29×47
1369	37^2
1387	19×73
1391	13×107
1397	11×127
1403	23×61
1411	17×83
1417	13×109
1441	11×131
1457	31×47
1469	13×113
1501	19×79
1507	11×137
1513	17×89
1517	37×41
1529	11×139
1537	29×53
1541	23×67
1573	$11^2 \times 13$
1577	19×83
1591	37×43
1633	23×71
1639	11×149
1643	31×53
1649	17×97
1651	13×127
1661	11×151
1679	23×73
1681	41^2
1691	19×89
1703	13×131
1711	29×59
1717	17×101
1727	11×157
1739	37×47
1751	17×103
1763	41×43
1769	29×61
1781	13×137
1793	11×163
1807	13×139
1817	23×79
1819	17×107
1829	31×59
1837	11×167
1843	19×97
1849	43^2
1853	17×109
1859	11×13^2

1891	31×61
1903	11×173
1909	23×83
1919	19×101
1921	17×113
1927	41×47
1937	13×149
1943	29×67
1957	19×103
1961	37×53
1963	13×151
1969	11×179
1991	11×181
2021	43×47
2033	19×107
2041	13×157
2047	23×89
2057	$11^2 \times 17$
2059	29×71
2071	19×109
2077	31×67
2101	11×191
2117	29×73
2119	13×163
2123	11×193
2147	19×113
2159	17×127
2167	11×197
2171	13×167
2173	41×53
2183	37×59
2189	11×199
2197	13^3
2201	31×71
2209	47^2
2227	17×131
2231	23×97
2249	13×173
2257	37×61
2263	31×73
2279	43×53
2291	29×79
2299	$11^2 \times 19$
2321	11×211
2323	23×101
2327	13×179
2329	17×137
2353	13×181
2363	17×139
2369	23×103
2407	29×83
2413	19×127
2419	41×59
2431	$11 \times 13 \times 17$
2449	31×79
2453	11×223
2461	23×107
2479	37×67

2483	13×191
2489	19×131
2491	47×53
2497	11×227
2501	41×61
2507	23×109
2509	13×193
2519	11×229
2533	17×149
2537	43×59
2561	13×197
2563	11×233
2567	17×151
2573	31×83
2581	29×89
2587	13×199
2599	23×113
2603	19×137
2623	43×61
2627	37×71
2629	11×239
2641	19×139
2651	11×241
2669	17×157
2701	37×73
2717	$11 \times 13 \times 19$
2743	13×211
2747	41×67
2759	31×89
2761	11×251
2771	17×163
2773	47×59
2783	$11^2 \times 23$
2809	53^2
2813	29×97
2827	11×257
2831	19×149
2839	17×167
2867	47×61
2869	19×151
2873	$13^2 \times 17$
2881	43×67
2893	11×263
2899	13×223
2911	41×71
2921	23×127
2923	37×79
2929	29×101
2941	17×173
2951	13×227
2959	11×269
2977	13×229
2981	11×271
2983	19×157
2987	29×103
2993	41×73

On demande de décomposer 1859, 2063, 12030, en leurs facteurs premiers.

La table donne immédiatement : $1859 = 11 \times 13^2$.

2063 ne se trouvant pas dans la table est un nombre premier.

12030 est divisible par 2, 3 et 5, et le quotient 401 de 12030 par 30 est un nombre premier. On a donc

$$12030 = 2 \times 3 \times 5 \times 401.$$

LIVRE TROISIÈME.

LES FRACTIONS ET LES NOMBRES DÉCIMAUX.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS.

123. Jusqu'ici nous avons considéré les nombres *entiers*, c'est-à-dire le cas où l'unité choisie est contenue exactement dans la grandeur à mesurer (2).

Si cette condition n'est plus remplie, il peut arriver qu'une certaine partie *aliquote* de l'unité (c'est-à-dire contenue exactement dans l'unité) soit elle-même comprise exactement dans la grandeur qu'on veut évaluer. On dit alors que le rapport de la grandeur à son unité, ainsi que le nombre qui représente ce rapport, sont *fractionnaires*.

Si la *septième* partie de l'unité est renfermée 23 fois dans la grandeur à mesurer, on dit que cette grandeur est égale aux 23 septièmes de l'unité : 23 septièmes, surpassant l'unité qui vaut 7 septièmes, est un *nombre fractionnaire*.

Si la septième partie de l'unité est renfermée 5 fois dans la grandeur à mesurer, on dit que cette grandeur est égale aux 5 septièmes de l'unité : 5 septièmes, tombant au-dessous de l'unité, est une *fraction proprement dite*.

Les mêmes règles de calcul s'étendent d'ailleurs aux nombres fractionnaires et aux fractions, et l'on ne doit établir entre eux aucune distinction.

On peut définir une fraction, *une ou plusieurs parties égales de l'unité*.

124. Pour exprimer une fraction, il faut deux nombres, qui sont *les termes* de la fraction : l'un, appelé *dénominateur*, indique en combien de parties égales il a fallu diviser l'unité ; l'autre, appelé *numérateur*, indique combien on a dû prendre de ces parties.

Pour écrire une fraction, on écrit le dénominateur au dessous du numérateur, et on les sépare par un trait horizontal : 23 septièmes, 5 septièmes, s'écrivent $\frac{23}{7}$, $\frac{5}{7}$.

On énonce une fraction en énonçant successivement ses

deux termes, et en faisant suivre l'énoncé du dénominateur de la terminaison *ième*, excepté lorsque ce dénominateur est 2, 3 ou 4. On énonce les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, en disant : *un demi, deux tiers, trois quarts.*

Une fraction est plus grande ou plus petite que 1, c'est-à-dire qu'elle est un nombre fractionnaire ou une fraction proprement dite, suivant que son numérateur est plus grand ou plus petit que son dénominateur. Elle représente l'unité, lorsque son numérateur et son dénominateur sont égaux.

125. *On peut convertir un entier en fraction de dénominateur donné.*

Soit 3 à convertir en septièmes. Chaque unité valant 7 septièmes, 3 unités vaudront 21 septièmes et l'on aura $3 = \frac{3 \times 7}{7}$. *On doit donc multiplier l'entier par le dénominateur donné, et donner au produit ce dénominateur.*

Il en résulte que *tout nombre entier peut être regardé comme une fraction dont il est le numérateur et qui a pour dénominateur l'unité.* On a

$$5 = \frac{5 \times 1}{1} \quad \text{ou} \quad 5 = \frac{5}{1}.$$

Cette remarque est importante, parce qu'elle permet d'étendre immédiatement les théorèmes concernant les fractions au cas où quelques-unes de ces fractions seraient remplacées par des nombres entiers.

126. *Une expression fractionnaire étant donnée, on peut extraire les entiers qu'elle contient.*

Soit $\frac{43}{9}$. Autant de fois cette expression renferme 9 neuvièmes, c'est-à-dire autant de fois 43 contient 9, autant elle renferme d'entiers. 43 contenant 4 fois 9 avec un reste 7, on peut écrire $\frac{43}{9} = 4 + \frac{7}{9}$. *On doit donc diviser le numérateur par le dénominateur : le quotient représente les entiers demandés, et le reste est le numérateur de la fraction complémentaire.*

Réciproquement, si l'on donne une expression telle que $4 + \frac{7}{9}$, on peut réduire les entiers en fraction ayant aussi 9 pour dénominateur et écrire

$$4 + \frac{7}{9} = \frac{4 \times 9}{9} + \frac{7}{9} = \frac{36}{9} + \frac{7}{9} = \frac{43}{9}.$$

127. *De deux fractions ayant même dénominateur, la plus*

grande est celle qui a le plus grand numérateur, puisqu'elle contient *plus* des mêmes parties de l'unité.

De deux fractions ayant même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur, puisqu'elle contient le même nombre de parties *plus grandes* de l'unité.

128. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le numérateur d'une fraction par un certain nombre, on multiplie ou l'on divise la valeur de la fraction par ce nombre.*

$\frac{5 \times 3}{7}$ est une fraction 3 fois plus grande que $\frac{5}{7}$, puisqu'elle renferme 3 fois plus de septièmes. A son tour, $\frac{5}{7}$ ou $\frac{15 : 3}{7}$ est une fraction 3 fois plus petite que $\frac{15}{7}$.

129. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dénominateur d'une fraction par un certain nombre, on divise ou l'on multiplie la valeur de la fraction par ce nombre.*

$\frac{5}{7 \times 2}$ est une fraction 2 fois plus petite que $\frac{5}{7}$. En effet, si l'on divise l'unité en 7 parties, puis en 14 parties égales, chaque septième contiendra 2 quatorzièmes ; en d'autres termes, les quatorzièmes sont 2 fois plus petits que les septièmes.

A son tour, $\frac{5}{7}$ ou $\frac{5}{14 : 2}$ est une fraction 2 fois plus grande que $\frac{5}{14}$.

130. *On ne change pas la valeur d'une fraction lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre.*

Soit la fraction $\frac{5}{7}$. Les deux fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{5 \times 3}{7 \times 3}$ seront toutes les deux 3 fois plus petites que la fraction $\frac{5 \times 3}{7}$, c'est-à-dire qu'elles seront égales.

Il résulte de là qu'une valeur fractionnaire donnée est susceptible d'une infinité d'expressions. On a

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{16}{24}, \text{ etc.}$$

Théorie des fractions irréductibles.

131. Une fraction est *irréductible,* lorsque sa valeur ne peut pas être exprimée en termes plus simples : on dit alors qu'elle est *réduite à sa plus simple expression.*

Il est évident qu'une fraction irréductible doit avoir ses deux termes premiers entre eux; car, sans cela, on pourrait diviser ses deux termes par leur plus grand commun diviseur, sa valeur ne changerait pas, et elle serait exprimée en termes plus simples.

Mais il n'est pas évident qu'une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux, soit irréductible; car on ne sait pas à priori si, en *diminuant* les deux termes de cette fraction dans un certain rapport, on ne pourra pas obtenir une fraction égale et plus simple. Il faut donc démontrer le théorème suivant.

132. *Toutes les fractions égales à une fraction dont les termes sont premiers entre eux, s'obtiennent en multipliant les deux termes de cette fraction par un même nombre.*

Soit la fraction $\frac{5}{7}$ dont les termes sont premiers entre eux, et soit la fraction $\frac{a}{b}$ qui lui est égale. Multiplions les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre; elles resteront égales, et l'on aura

$$\frac{5\times b}{7\times b}=\frac{a\times 7}{b\times 7}.$$

Les dénominateurs étant égaux, les numérateurs le seront (**127**), et l'on aura

$$5\times b=a\times 7.$$

5 divisant le premier membre de cette égalité, divisera le second; de plus, 5 étant premier avec 7, devra diviser a (**107**). Si q est le quotient de cette division, on aura

$$a=5\times q.$$

Il en résulte

$$5\times b=5\times q\times 7,$$

c'est-à-dire, en divisant les deux membres de l'égalité par 5,

$$b=7\times q.$$

On a donc bien

$$\frac{a}{b}=\frac{5\times q}{7\times q}.$$

$\frac{a}{b}$ représentant la valeur $\frac{5}{7}$ moins simplement que $\frac{5}{7}$, cette fraction est, par suite, réduite à sa plus simple expression, elle est irréductible.

Ainsi, *pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il faut rendre et il suffit de rendre ses deux termes premiers*

entre eux. On y arrivera, en divisant les deux termes de la fraction par leur plus grand commun diviseur (**101**).

133. Soit, par exemple, à réduire la fraction $\frac{799}{2961}$. On cherchera le plus grand commun diviseur des nombres 799 et 2961;

	3	1	2	2	2
2961	799	564	235	94	47
564	235	94	47	0	
63	17	12	5	2	1

et en employant l'algorithme indiqué (**102**), on trouvera que la plus simple expression de la fraction $\frac{799}{2961}$ est $\frac{17}{63}$.

Souvent, dans la pratique, on évite la recherche du plus grand commun diviseur, en supprimant dans les deux termes de la fraction proposée tous les facteurs communs qu'on y aperçoit. Soit la fraction $\frac{1540}{1980}$. Si l'on divise haut et bas par 10, il vient $\frac{154}{198}$. Si l'on divise haut et bas par 2, il vient $\frac{77}{99}$. Enfin, en divisant haut et bas par 11, on trouve la fraction irréductible $\frac{7}{9}$.

La réduction des fractions à leur plus simple expression a une grande importance. On simplifie les calculs, en opérant sur des fractions irréductibles, et l'on juge mieux de la valeur des quantités considérées.

134. *Deux fractions irréductibles égales sont identiques;* car chacune doit être obtenue en multipliant les deux termes de l'autre par un même nombre (**132**), qui ne peut, dans ce cas, être que l'unité.

Réduction des fractions au même dénominateur et au plus petit dénominateur commun.

135. Pour pouvoir comparer des fractions, il faut qu'elles aient même dénominateur ou même numérateur (**127**). L'usage est de les réduire au même dénominateur.

Si l'on opère sur deux fractions, il suffit de *multiplier les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre :* elles ont alors toutes deux pour dénominateur le produit des dénominateurs primitifs. Soient les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{7}$;

réduites au même dénominateur, elles deviendront

$$\frac{3\times 7}{4\times 7} \quad \text{et} \quad \frac{5\times 4}{7\times 4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{21}{28} \quad \text{et} \quad \frac{20}{28}.$$

Si l'on opère sur plus de deux fractions, il suffit de *multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres :* elles ont alors pour dénominateur commun le produit de tous les dénominateurs primitifs. Soient les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{11}$. Réduites au même dénominateur, elles deviendront :

$$\frac{2\times 5\times 7\times 11}{3\times 5\times 7\times 11}, \quad \frac{4\times 3\times 7\times 11}{5\times 3\times 7\times 11}, \quad \frac{6\times 3\times 5\times 11}{7\times 3\times 5\times 11}, \quad \frac{8\times 3\times 5\times 7}{11\times 3\times 5\times 7},$$

c'est-à-dire

$$\frac{770}{1155}, \quad \frac{924}{1155}, \quad \frac{990}{1155}, \quad \frac{840}{1155}.$$

136. Lorsque les dénominateurs des fractions proposées sont premiers entre eux, on ne peut pas suivre une autre marche; dans le cas contraire, on peut réduire ces fractions *à leur plus petit dénominateur commun.*

Il faut d'abord supposer ces fractions *irréductibles.* On ne pourra alors transformer chacune d'elles sans changer sa valeur, qu'en la multipliant haut et bas par un certain nombre (**132**). Dès lors le dénominateur commun qu'on leur donnera à toutes, quel qu'il soit, sera divisible par tous les dénominateurs primitifs, puisqu'il les contiendra comme facteurs, c'est-à-dire qu'il en sera un *commun multiple.* Si l'on veut avoir le plus petit dénominateur commun, il faut donc chercher *le plus petit commun multiple* des dénominateurs des fractions proposées. Il est évident qu'on pourra bien donner ce plus petit commun multiple comme dénominateur à toutes les fractions considérées ; car il suffira pour cela *de multiplier les deux termes de chacune d'elles par le quotient obtenu en divisant par son dénominateur le plus petit commun multiple* (*).

(*). Si les fractions données n'étaient pas préalablement réduites à leur plus simple expression, la règle indiquée ne conduirait pas toujours au plus petit dénominateur commun. En effet, tous les termes des fractions proposées pourraient alors admettre un facteur commun que la réduction au même dénominateur ne ferait pas disparaître; ce facteur commun supprimé, les fractions conserveraient un même dénominateur, plus petit que le précédent.

Proposons-nous, par exemple, de réduire au plus petit dénominateur commun les fractions $\frac{189}{1215}$, $\frac{10}{504}$, $\frac{45}{875}$. Ces fractions, réduites à leur plus simple expression, deviendront $\frac{7}{45}$, $\frac{5}{252}$, $\frac{9}{175}$. Je décompose les dénominateurs en leurs facteurs premiers, et j'obtiens :

$$45 = 3^2 \times 5, \quad 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7, \quad 175 = 5^2 \times 7.$$

Leur plus petit commun multiple sera $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ ou 6300. Je divise maintenant le plus petit commun multiple par les dénominateurs : ce qu'on doit faire en supprimant parmi les facteurs de ce plus petit commun multiple ceux qui appartiennent au dénominateur considéré. Ici on aura pour quotients successifs 140, 25, 36. Il faudra donc multiplier haut et bas la première fraction par 140, la seconde par 25, la troisième par 36. On obtiendra

$$\frac{980}{6300}, \quad \frac{125}{6300}, \quad \frac{324}{6300}.$$

On dispose ordinairement le calcul comme ci-dessous.

Fractions proposées,	Quotients du P. P. C. M. par les différents dénominateurs.	Fractions réduites.	Décomposition des dénominateurs en facteurs premiers.
$\frac{7}{45}$	140	$\frac{980}{6300}$	$45 = 3^2 \times 5$
$\frac{5}{252}$	25	$\frac{125}{6300}$	$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
$\frac{9}{175}$	36	$\frac{324}{6300}$	$175 = 5^2 \times 7$

$$\text{P. P. C. M.} = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 6300.$$

Théorèmes sur les fractions.

137. I. *Lorsque plusieurs fractions sont égales, en les ajoutant terme à terme, on obtient une fraction égale à chacune des fractions proposées.*

Soient les fractions $\frac{25}{35}$, $\frac{45}{63}$, $\frac{55}{77}$, qui sont égales. Réduites à leur plus simple expression, elles conduiront à la même fraction irréductible ; car des fractions irréductibles égales sont identiques (134). Dès lors, chacune représentera cette fraction irréductible $\frac{5}{7}$ multipliée haut et bas par un certain nom-

bre (**132**), et l'on pourra écrire :

$$\frac{25}{35}=\frac{5\times 5}{7\times 5},\quad \frac{45}{63}=\frac{5\times 9}{7\times 9},\quad \frac{55}{77}=\frac{5\times 11}{7\times 11}.$$

On aura donc

$$\frac{25+45+55}{35+63+77}=\frac{5\times 5+5\times 9+5\times 11}{7\times 5+7\times 9+7\times 11}=\frac{5\times(5+9+11)}{7\times(5+9+11)}=\frac{5}{7}.$$

C'est-à-dire que la fraction obtenue en ajoutant toutes les fractions données terme à terme, conduit à la même fraction irréductible que ces fractions, lorsqu'on la réduit aussi à sa plus simple expression : elle est donc égale à chacune des proposées.

On démontrerait de même que *si deux fractions sont égales et qu'on les retranche terme à terme, on obtient une fraction égale à chacune d'elles.*

138. II. *Lorsqu'on ajoute terme à terme deux fractions inégales, la fraction obtenue tombe entre les deux fractions proposées.*

Soient les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{11}{7}$: je dis que la fraction $\frac{3+11}{4+7}$ tombera entre ces deux fractions. Il faut prouver d'abord que l'on a

$$\frac{3}{4}<\frac{3+11}{4+7},$$

ce qui revient à prouver que si l'on réduit ces deux fractions au même dénominateur, le numérateur de la première sera le plus petit, et qu'on aura

$$3\times(4+7)<(3+11)\times 4$$

ou

$$3\times 4+3\times 7<3\times 4+11\times 4.$$

Si l'on néglige la partie commune 3×4, il faut montrer qu'on a

$$3\times 7<11\times 4$$

ou, en donnant à ces deux produits le même dénominateur 4×7, qu'on a

$$\frac{3\times 7}{4\times 7}<\frac{11\times 4}{4\times 7},$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$\frac{3}{4}<\frac{11}{7},$$

condition que suppose précisément l'énoncé.

On prouvera absolument de la même manière que l'on a au contraire

$$\frac{3+11}{4+7} < \frac{11}{7}.$$

Il résulte immédiatement de là que, *si l'on a plusieurs fractions inégales et qu'on les ajoute terme à terme, la fraction obtenue sera comprise entre la plus grande et la plus petite des fractions données.*

Soient les fractions inégales $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{11}{7}$, rangées par ordre de grandeur. D'après ce qui précède, la fraction $\frac{3+8}{4+9}$ tombera entre les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{8}{9}$, et les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{3+8}{4+9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{11}{7}$, seront rangées par ordre de grandeur. Si l'on ajoute terme à terme les fractions $\frac{3+8}{4+9}$ et $\frac{11}{7}$, la fraction $\frac{3+8+11}{4+9+7}$ sera comprise entre elles deux : elle sera donc plus grande que la fraction $\frac{3}{4}$ et plus petite que la fraction $\frac{11}{7}$.

139. III. *Lorsqu'on ajoute une même quantité aux deux termes d'une fraction, elle augmente ou diminue suivant qu'elle est plus petite ou plus grande que* 1; *dans les deux cas, elle se rapproche de l'unité.*

Lorsqu'on retranche une même quantité aux deux termes d'une fraction, elle diminue ou augmente suivant qu'elle est plus petite ou plus grande que 1; *dans les deux cas, elle s'éloigne de l'unité.*

Soit la fraction $\frac{5}{7}$. Ajoutons à ses deux termes une quantité quelconque m. Nous aurons la fraction $\frac{5+m}{7+m}$. Remarquons qu'on peut mettre l'unité sous la forme d'une fraction dont les deux termes sont égaux (124) et poser $1 = \frac{m}{m}$. Dès lors, on peut regarder la fraction $\frac{5+m}{7+m}$ comme ayant été obtenue en ajoutant terme à terme les fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{m}{m}$: cette fraction, toujours plus petite que 1, est donc plus grande que la fraction $\frac{5}{7}$ (138).

Réciproquement, la fraction $\frac{5}{7}$ est plus petite que la fraction $\frac{5+m}{7+m}$.

Soit la fraction $\frac{7}{5}$ plus grande que 1. On pourra regarder la fraction $\frac{7+m}{5+m}$ comme ayant été obtenue en ajoutant terme à terme les fractions $\frac{7}{5}$ et $\frac{m}{m}$; cette fraction, toujours plus grande que 1, est donc plus petite que la fraction $\frac{7}{5}$ (138).

Réciproquement, la fraction $\frac{7}{5}$ est plus grande que la fraction $\frac{7+m}{5+m}$.

Remarque. — Il est utile de remarquer qu'à mesure que la quantité ajoutée aux deux termes de la fraction augmente, cette fraction approche de plus en plus de l'unité sans jamais pouvoir l'atteindre, puisque les deux termes de la fraction résultante ne peuvent jamais devenir égaux.

Quand une quantité variable d'une manière continue converge ainsi vers une quantité fixe, la quantité fixe s'appelle *la limite* de la quantité variable. L'unité est ici la limite commune des séries croissantes qu'on obtient en partant d'une fraction quelconque plus petite que 1, et des séries décroissantes qu'on obtient en partant d'une fraction quelconque plus grande que 1.

La considération des limites est extrêmement importante en mathématiques; nous en verrons beaucoup d'autres exemples.

140. IV. *Moyenne arithmétique.* On appelle en général *moyenne* de plusieurs quantités une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités données, et formée à l'aide de ces quantités.

Si l'on a plusieurs nombres 57, 72, 93, on peut les considérer comme des fractions ayant pour dénominateur l'unité. Si l'on ajoute terme à terme ces fractions $\frac{57}{1}$, $\frac{72}{1}$, $\frac{93}{1}$, la fraction obtenue $\frac{57+72+93}{3}$ sera comprise entre les fractions extrêmes $\frac{57}{1}$ et $\frac{93}{1}$, c'est-à-dire entre les nombres 57 et 93 (138). Cette moyenne, qu'on trouve en ajoutant les quantités données et en divisant leur somme par leur nombre, s'appelle la *moyenne arithmétique* des quantités considérées.

EXERCICES.

I. Deux fractions irréductibles ne peuvent avoir pour somme un nombre entier que si elles ont même dénominateur.

II. La somme de trois fractions irréductibles ne peut être un nombre entier, que si chaque dénominateur divise le produit des deux autres.

CHAPITRE II.

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS.

Addition.

141. *L'addition a pour but de trouver un nombre qui contienne à lui seul autant d'unités et de parties d'unité que plusieurs nombres donnés. Le résultat de l'opération s'appelle* somme.

Cette définition est générale; elle s'applique, que les nombres considérés soient entiers ou fractionnaires, que ces nombres soient des fractions proprement dites.

142. *Pour ajouter plusieurs fractions qui ont même dénominateur, il suffit d'ajouter leurs numérateurs.*

La somme des fractions $\frac{3}{7}+\frac{8}{7}+\frac{15}{7}$ est évidemment égale à $\frac{3+8+15}{7}$ ou à $\frac{26}{7}$.

143. Si les fractions proposées n'ont pas le même dénominateur, on commence par les y réduire; car on ne peut additionner que des quantités de même espèce.

Soient les fractions $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}$. Réduites au même dénominateur, elles deviendront $\frac{135}{180}, \frac{72}{180}, \frac{80}{180}$, et leur somme sera

$$\frac{135+72+80}{180}=\frac{287}{180}.$$

144. Lorsqu'on a à additionner des nombres entiers suivis de fractions, on fait à part la somme des entiers et celle des fractions suivant les règles connues; on a soin de commencer par additionner les fractions : leur somme en effet peut renferme des entiers qu'on devra ajouter aux entiers proposés.

Soit demandé d'additionner les nombres fractionnaires $7+\frac{8}{9}$, $4+\frac{2}{11}$, $15+\frac{7}{33}$. On disposera le calcul comme il est indiqué, en n'écrivant que les numérateurs des fractions réduites à leur plus petit dénominateur commun, et en en divisant la somme par ce plus petit dénominateur pour extraire les entiers.

7	$\frac{8}{9}$	11	88	$9 = 3^2$
4	$\frac{2}{11}$	9	18	$11 = 11$
15	$\frac{7}{33}$	3	21	$33 = 3 \times 11$
			127 | 99	
1			28 | 1	

$$27 + \frac{28}{99}$$

$$\text{P.P.C.M} = 3^2 \times 11 = 99.$$

Soustraction.

145. *La soustraction a pour but de retrancher d'un nombre donné toutes les unités et parties d'unité renfermées dans un autre nombre donné. Le résultat de l'opération s'appelle* reste, excès *ou* différence.

Cette définition est générale.

On peut dire encore que *la soustraction a pour but, étant données une somme de deux parties et l'une de ses parties, de trouver l'autre.* En effet, le plus petit nombre plus le reste doit reproduire le plus grand nombre.

146. *Pour retrancher deux fractions, si elles n'ont pas le même dénominateur, on les y réduit ; puis on retranche leurs numérateurs, et on donne à la différence obtenue le dénominateur commun.*

Soient les fractions $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{11}$. Réduites au même dénominateur, elles deviendront $\frac{44}{77}$ et $\frac{21}{77}$: leur différence sera donc égale à $\frac{44-21}{77}$ ou à $\frac{23}{77}$.

147. Si l'on doit retrancher l'un de l'autre des entiers suivis de fractions, on retranche à part les entiers et les fractions, en commençant par soustraire les fractions.

Il peut arriver en effet que le plus grand entier soit joint à la plus petite fraction. Dans ce cas, on augmente le plus petit numérateur du dénominateur commun des fractions, ce qui re-

vient à augmenter d'une unité la plus petite fraction; par compensation, on ajoute aussi une unité au plus petit entier.

Soit à soustraire $4+\frac{19}{28}$ de $12+\frac{5}{42}$. Les deux fractions réduites au plus petit dénominateur commun deviendront $\frac{10}{84}$ et $\frac{57}{84}$. On augmentera alors la fraction $\frac{10}{84}$ d'une unité ou de $\frac{84}{84}$, ce qui reviendra à ajouter 84 au numérateur 10. On dispose le calcul comme il est indiqué, en ajoutant en même temps 10 et 84 et en retranchant 57 de leur somme.

$$\begin{array}{lll} 12 & \frac{5}{42} & 2 \quad \left\{\begin{array}{l}10\\84\end{array}\right\} 42=2\times3\times7 \\ 4 & \frac{19}{28} & 3 \quad 57 \quad 28=2^2\times7 \\ \hline 7 & + & \frac{37}{84} \end{array} \qquad \text{P.P.C.M}=2^2\times3\times7=84.$$

Multiplication.

148. *Si le multiplicateur est un entier, la multiplication a pour but de répéter le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités.*

Si le multiplicateur est une fraction, la multiplication a pour but de partager le multiplicande en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le dénominateur de la fraction multiplicateur, et de prendre autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur de cette fraction.

Le résultat de l'opération s'appelle produit.

Si l'on voulait réunir ces deux énoncés en un seul on pourrait dire que, *pour obtenir le produit, il faut opérer sur le multiplicande comme on a opéré sur l'unité pour obtenir le multiplicateur.*

Multiplier 10 par 4, c'est répéter 10, 4 fois; multiplier 10 par $\frac{2}{7}$, c'est répéter 2 fois la septième partie de 10, c'est en prendre les $\frac{2}{7}$.

Le produit est supérieur, inférieur ou égal au multiplicande, suivant que le multiplicateur est supérieur, inférieur ou égal à l'unité.

149. *Pour multiplier deux fractions l'une par l'autre, il suffit de les multiplier terme à terme.*

Soient les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{7}$. On a pour but de prendre les $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$. Le septième de $\frac{3}{4}$ sera égal à $\frac{3}{4 \times 7}$ (**129**); pour répéter 5 fois ce septième ou pour multiplier la fraction $\frac{3}{4 \times 7}$ par 5, il suffira de multiplier son numérateur par 5 (**128**). Le résultat cherché sera donc bien égal à $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$.

Ainsi

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7}.$$

Si l'on avait eu $\frac{5}{7}$ à multiplier par $\frac{3}{4}$, on aurait trouvé

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4}.$$

Nous savons (**41**) que $3 \times 5 = 5 \times 3$ et que $4 \times 7 = 7 \times 4$. Par suite, on peut écrire $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$, ce qui démontre qu'*on ne change pas le produit de deux facteurs fractionnaires en renversant leur ordre.*

150. *Pour multiplier un entier par une fraction ou une fraction par un entier, on multiplie le numérateur de la fraction par l'entier et l'on donne au produit le dénominateur de la fraction.*

Soit $\frac{3}{5} \times 4$. On peut (**125**) regarder 4 comme une fraction ayant pour dénominateur l'unité. On a donc

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{3 \times 4}{5 \times 1} \quad \text{ou} \quad \frac{3 \times 4}{5}.$$

Ce dernier résultat correspond à celui déjà trouvé (**128**).

De même

$$4 \times \frac{3}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{1 \times 5} = \frac{4 \times 3}{5}.$$

On a évidemment

$$\frac{3}{5} \times 4 = 4 \times \frac{3}{5}.$$

Le théorème relatif au changement d'ordre de deux facteurs est donc vrai, que ces facteurs soient tous les deux entiers, tous les deux fractionnaires, ou l'un entier et l'autre fractionnaire.

151. Soit *le produit de plusieurs fractions* $\frac{4}{9}\times\frac{5}{7}\times\frac{42}{35}\times\frac{11}{8}$. Cette expression signifie qu'il faut multiplier la première fraction par la seconde, le résultat obtenu par la troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les fractions. Il est évident (**149**) qu'on obtiendra le résultat définitif *en multipliant terme à terme toutes les fractions proposées.*

Il faut avoir soin d'*indiquer* le résultat avant d'*effectuer* les calculs, afin de pouvoir supprimer tous les facteurs communs que peut présenter haut et bas la fraction résultante. Reprenons l'exemple donné, on aura

$$\frac{4}{9}\times\frac{5}{7}\times\frac{42}{35}\times\frac{11}{8}=\frac{\overset{}{4}\times 5\times \overset{6}{42}\times 11}{\underset{3}{9}\times \underset{7}{7}\times 35\times \underset{2}{8}}.$$

On peut diviser haut et bas par 4, en supprimant le facteur 4 au numérateur et en remplaçant par 2 le facteur 8 du dénominateur. On peut diviser haut et bas par 5, en supprimant le facteur 5 au numérateur et en remplaçant par 7 le facteur 35 du dénominateur. On peut diviser haut et bas par 7, en remplaçant par 6 le facteur 42 du numérateur et en supprimant l'un des facteurs 7 du dénominateur. Enfin, on peut diviser haut et bas par 6 en supprimant ce facteur au numérateur; au dénominateur, on remplace par compensation le facteur 9 par 3, et l'on supprime le facteur 2. Il reste alors, pour le produit cherché, la fraction $\frac{11}{3\times 7}$ ou $\frac{11}{21}$.

152. Puisque le produit de plusieurs fractions est une fraction qui a pour numérateur le produit de tous les numérateurs, et pour dénominateur le produit de tous les dénominateurs des fractions proposées, il en résulte que ce produit ne change pas, quel que soit l'ordre des facteurs fractionnaires. En effet, le produit des numérateurs reste le même quel que soit leur ordre, et il en est de même du produit des dénominateurs (**66**).

Le théorème général du changement d'ordre des facteurs est donc vrai, que les facteurs considérés soient tous entiers ou tous fractionnaires, que les uns soient entiers et les autres fractionnaires; car, dans ce dernier cas, on pourra regarder les facteurs entiers comme des facteurs ayant pour dénominateur l'unité (**125**).

153. Pour multiplier des entiers suivis de fractions, on réduit respectivement chaque entier en fraction de même espèce que celle qui le suit, et l'on applique les règles précédentes aux résultats obtenus.

Soit $8+\frac{11}{9}$ à multiplier par $5+\frac{7}{12}$. On réduit 8 en neuvièmes et l'on remplace le multiplicande par la fraction $\frac{83}{9}$. On réduit 5 en douzièmes, et l'on remplace le multiplicateur par la fraction $\frac{67}{12}$. On a alors

$$\left(8+\frac{11}{9}\right)\times\left(5+\frac{7}{12}\right)=\frac{83}{9}\times\frac{67}{12}=\frac{83\times67}{9\times12}=\frac{5561}{108}=51+\frac{53}{108}.$$

Division.

134. *La division a pour but, étant donnés un produit appelé* dividende *et l'un de ses facteurs appelé* diviseur, *de trouver l'autre facteur appelé* quotient.

Cette définition est générale. Elle s'applique aux nombres entiers, lorsque la division s'effectue sans reste; nous allons prouver qu'elle s'étend aussi au cas d'un reste. Soit 38 à diviser par 5. On trouve pour quotient 7 et pour reste 3. 38 est donc compris entre les produits du diviseur 5 par les entiers consécutifs 7 et 8. Dès lors, si la définition peut s'étendre à ce cas, il faut que 38 soit le produit exact du diviseur 5 par un nombre fractionnaire plus grand que 7 et plus petit que 8.

Je dis, en effet, que *le quotient de la division de deux nombres quelconques est une fraction ayant pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur.* Pour le prouver, reprenons l'exemple proposé et soit 38 à diviser par 5. Si l'on multiplie le diviseur 5 par la fraction $\frac{38}{5}$ on obtient $\frac{5\times38}{5}$ (130), c'est-à-dire le dividende 38 : cette fraction $\frac{38}{5}$ est donc bien le quotient cherché.

Si l'on extrait les entiers contenus dans l'expression $\frac{38}{5}$, c'est-à-dire si l'on effectue la division de 38 par 5 suivant la règle donnée pour les nombres entiers, on aura

$$\frac{38}{5}=7+\frac{3}{5}.$$

La partie entière 7 du quotient complet s'appelle *quotient entier* des deux nombres 38 et 5; le quotient complet $\frac{38}{5}$ ou $7+\frac{3}{5}$ s'appelle simplement *quotient* de ces deux nombres. On voit que, pour compléter le quotient entier, il suffit de lui ajouter une fraction ayant pour numérateur le reste de

la division effectuée suivant la méthode ordinaire, et pour dénominateur le diviseur.

155. Jusqu'à présent nous avons indiqué la division de deux nombres, au moyen du signe :. Le quotient de cette division étant une fraction ayant pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur, le signe : pourra être désormais remplacé par une barre de fraction entre les deux nombres. Ainsi nous regarderons les deux expressions 38 : 5 et $\frac{38}{5}$ comme équivalentes.

156. Soit maintenant à diviser l'une par l'autre les deux fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{7}$. Le dividende $\frac{3}{4}$ doit être égal au diviseur $\frac{5}{7}$ multiplié par le quotient ou à ce quotient multiplié par $\frac{5}{7}$ (**150**); en d'autres termes, le dividende $\frac{3}{4}$ représente les $\frac{5}{7}$ du quotient (**148**). Dès lors la cinquième partie du dividende, c'est-à-dire $\frac{3}{4\times5}$ (**129**), représentera $\frac{1}{7}$ du quotient; et, par suite, le quotient tout entier sera égal à la fraction $\frac{3}{4\times5}$ multipliée par 7 ou à $\frac{3\times7}{4\times5}$ (**128**). On aura donc

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{3\times7}{4\times5}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}.$$

Si l'on compare la fraction $\frac{7}{5}$ au diviseur $\frac{5}{7}$, on voit qu'elle n'est que ce diviseur renversé. On arrive donc à cette règle : *Pour diviser deux fractions, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

157. Cette règle est la règle générale, toujours applicable; mais il est bon, au point de vue théorique, de l'indiquer encore sous une autre forme. En reprenant le même exemple, on voit qu'il a fallu d'abord diviser par 5 la fraction $\frac{3}{4}$ pour obtenir la septième partie du quotient, et ce premier résultat peut être mis sous la forme $\frac{3:5}{4}$ (**128**); il faut ensuite le multiplier par 7 pour obtenir le quotient qui pourra alors être représenté par l'expression $\frac{3:5}{4:7}$ (**129**). On peut donc dire aussi : *Pour diviser deux fractions, il suffit de les diviser terme à terme* (**149**).

158. Soit à diviser un entier par une fraction ou une fraction par un entier. On pourra regarder l'entier comme une fraction ayant pour dénominateur l'unité, et la règle sera toujours, pour obtenir le quotient, de multiplier le dividende par la fraction diviseur renversée.

Soit 4 à diviser par $\frac{5}{7}$. On aura

$$4 : \frac{5}{7} = \frac{4}{1} : \frac{5}{7} = \frac{4}{1} \times \frac{7}{5} = 4 \times \frac{7}{5}.$$

Soit $\frac{3}{4}$ à diviser par 7. On aura

$$\frac{3}{4} : 7 = \frac{3}{4} : \frac{7}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{4 \times 7}.$$

Ce dernier résultat correspond à celui déjà trouvé (**129**).

159. Pour diviser l'un par l'autre des entiers suivis de fractions, on convertit chaque entier en fraction de même espèce que celle qui le suit, et l'on applique les règles précédentes aux résultats obtenus.

Soit $37 + \frac{11}{8}$ à diviser par $9 + \frac{5}{12}$. On réduit 37 en huitièmes, et l'on remplace le dividende par la fraction $\frac{307}{8}$. On réduit 9 en douzièmes, et l'on remplace le diviseur par la fraction $\frac{113}{12}$. On a alors

$$\left(37 + \frac{11}{8}\right) : \left(9 + \frac{5}{12}\right) = \frac{307}{8} : \frac{113}{12} = \frac{307}{8} \times \frac{12}{113} = \frac{307 \times 12}{8 \times 113}$$
$$= \frac{307 \times 3}{2 \times 113} = \frac{921}{226} = 4 + \frac{17}{226}.$$

Puissances.

160. *Élever une fraction à la puissance $m^{ième}$, c'est la prendre m fois comme facteur.* Par conséquent, pour élever une fraction à la puissance $m^{ième}$, *il faudra élever ses deux termes à cette puissance* (**151**). Ainsi l'on aura

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}.$$

161. *Lorsqu'une fraction est irréductible, toutes ses puissances sont des fractions irréductibles.* Car nous avons démontré que lorsque deux nombres sont premiers entre eux, leurs puissances sont premières entre elles (**108**, 1°).

Par conséquent, 1° *Aucun nombre entier ne peut être égal à une puissance quelconque d'une fraction irréductible;* 2° de plus, *Lorsqu'une fraction irréductible est une puissance exacte d'un certain degré, ses deux termes sont des puissances exactes du même degré.* Si l'on a la fraction irréductible $\frac{125}{343}$ qui est un cube parfait, elle ne peut l'être, d'après ce qui précède, que d'une certaine fraction qu'on peut toujours supposer irréductible : cette fraction est ici $\frac{5}{7}$. On a donc

$$\frac{125}{343} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}.$$

La dernière fraction étant irréductible et deux fractions irréductibles égales étant identiques (**134**), on a

$$125 = 5^3 \quad \text{et} \quad 343 = 7^3.$$

Généralisation des théorèmes relatifs aux opérations.

162. Nous avons déduit précédemment du théorème fondamental sur le changement d'ordre des facteurs, une série de théorèmes très-importants au point de vue du calcul (**67** et suivants). Ayant étendu ce même théorème fondamental au cas des facteurs fractionnaires, nous pouvons regarder tous les autres théorèmes comme démontrés aussi pour ce dernier cas. Nous nous contenterons donc d'en rappeler les énoncés.

Que les nombres considérés soient entiers ou fractionnaires, on pourra dire que :

1°. *Pour multiplier ou diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, on peut multiplier ou diviser ce nombre par le premier facteur, le résultat obtenu par le second facteur, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs* (**67**, **I** et **70**);

2°. *Pour multiplier deux produits de plusieurs facteurs, on forme un produit unique avec les facteurs du multiplicande et ceux du multiplicateur* (**67**, **II**);

3°. *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut en remplacer un nombre quelconque par leur produit effectué* (**67**, **III**);

4°. *Pour diviser un produit par l'un de ses facteurs, il suffit de supprimer ce facteur* (**69**);

5°. *Pour multiplier ou diviser un produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit de multiplier ou de diviser l'un des facteurs du produit par ce nombre* (**67**, **IV** et **69**);

6°. *Pour multiplier ou diviser deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter ou de retrancher les exposants de ces puissances* (**73**, **75**);

7°. *Pour élever une puissance à une autre puissance, il suffit de multiplier les exposants de ces puissances* (74);

8°. *Pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever ses facteurs à cette puissance* (76).

Des rapports.

163. De même que *le rapport de deux grandeurs est le nombre qui mesure la première grandeur lorsque la seconde est prise pour unité* (3 et 123), de même *le rapport de deux nombres est le quotient de ces deux nombres* (155).

Deux rapports sont dits inverses l'un de l'autre, lorsque leur produit est égal à l'unité. On obtient donc le rapport inverse d'un rapport donné, en divisant l'unité par ce rapport ou en renversant le rapport donné. Le rapport $\frac{2}{3}$ a pour inverse le rapport $\frac{3}{2}$, 7 ou le rapport $\frac{7}{1}$ a pour inverse le rapport $\frac{1}{7}$.

164. *Il est très-important de remarquer que le rapport de deux grandeurs est toujours égal au rapport des nombres qui les mesurent respectivement, l'unité choisie n'étant plus l'une des deux grandeurs, mais une troisième grandeur quelconque.*

Soient deux grandeurs représentées, eu égard à l'unité choisie, par les nombres $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{7}$. Cherchons le rapport de ces deux grandeurs, c'est-à-dire le nombre qui mesure la première grandeur lorsque la seconde est prise pour unité. Remarquons que la seconde grandeur étant égale au $\frac{5}{7}$ de l'unité quelconque, cette unité à son tour est égale aux $\frac{7}{5}$ de cette seconde grandeur. Dès lors la première grandeur, qui est égale aux $\frac{3}{4}$ de la même unité, est égale aussi aux $\frac{3}{4}$ des $\frac{7}{5}$ de la seconde grandeur. Cette seconde grandeur devenant l'unité adoptée, la première grandeur sera donc mesurée par le nombre $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$ (148), c'est-à-dire par le rapport $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$ (156).

Lorsqu'on aura à *comparer* des grandeurs, à chercher leur *rapport*, il suffira par conséquent de comparer les nombres qui les mesurent, de chercher le rapport de ces nombres.

165. *On peut toujours mettre le rapport de deux nombres fractionnaires sous la forme d'une fraction proprement dite, c'est-à-dire à termes entiers.*

Soit, par exemple, le rapport $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$; par extension, on dit que $\frac{3}{4}$ est le numérateur et que $\frac{5}{7}$ est le dénominateur de ce rapport (154).

Nous savons que, pour diviser deux fractions l'une par l'autre, il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée (156); on aura donc

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}.$$

S'il s'agissait du rapport $\frac{8+\frac{2}{5}}{3+\frac{6}{7}}$, on convertirait 8 en cinquièmes et 3 en septièmes. On aurait alors

$$\frac{8+\frac{2}{5}}{3+\frac{6}{7}} = \frac{\frac{42}{5}}{\frac{27}{7}} = \frac{42}{5} \times \frac{7}{27} = \frac{14 \times 7}{5 \times 9} = \frac{98}{45}.$$

Il résulte de cette remarque que *toutes les propriétés des fractions et les règles qui résument leur calcul, s'étendent aux rapports quelconques, c'est-à-dire aux fractions à termes fractionnaires.* Nous ne donnerons qu'un seul exemple du mode de démonstration à employer.

Prouvons qu'on ne change pas un rapport en multipliant ses deux termes par une même quantité. Soit le rapport $\frac{a}{b}$, a et b étant deux fractions. Désignons par q le quotient de ces deux fractions. On aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ou} \quad a = b \times q.$$

Multiplions par m les deux membres de cette égalité, m étant une quantité quelconque entière ou fractionnaire; on aura

$$a \times m = b \times m \times q, \quad \text{d'où} \quad \frac{a \times m}{b \times m} = q = \frac{a}{b}.$$

Nous rappellerons les principaux théorèmes démontrés sur les fractions, en les appliquant aux rapports.

1°. *On ne change pas la valeur d'un rapport en le multipliant ou en le divisant haut et bas par un même nombre* (**130**);

2°. *Si l'on a une suite de rapports égaux, et qu'on les ajoute terme à terme, on obtient un rapport égal à chacun des rapports proposés* (**137**);

3°. *Pour multiplier ou diviser un rapport par un nombre, on multiplie le numérateur ou le dénominateur du rapport par ce nombre* (**128, 129**);

4°. *Pour multiplier plusieurs rapports, on les multiplie terme à terme* (**151**);

5°. *Pour diviser deux rapports l'un par l'autre, on multiplie le premier rapport par l'inverse du second rapport* (**156**);

6°. *Pour élever un rapport à une puissance, on élève ses deux termes à cette puissance* (**160**).

EXERCICES.

I. Des deux quantités $\frac{2}{15}+\frac{11}{12}$ et $\frac{3}{14}+\frac{9}{10}$, chercher quelle est la plus grande.

II. Calculer l'expression $x=\dfrac{\left(2+\frac{5}{7}\right)\left(3-\frac{4}{9}\right)}{\left(10-\frac{3}{4}\right)\left(7+\frac{11}{12}\right)}:\dfrac{\frac{23}{11}}{\frac{13}{33}}$.

III. Évaluer $\frac{5}{8}$ d'heure en minutes et secondes.

IV. Évaluer 37 minutes, 30 secondes, en fraction d'heure.

V. Une balle élastisque rebondit à une hauteur qui est les $\frac{2}{9}$ de celle d'où elle est tombée. Après avoir rebondi 3 fois, elle s'élève à $\frac{8}{11}$ de mètre : trouver de quelle hauteur on l'avait laissée tomber d'abord.

VI. 100 parties de poudre de guerre renferment 75 parties d'azotate de potasse ou salpêtre, 12 parties et demie de charbon, 12 parties et demie de soufre. Trouver la composition de 32 kilogrammes de poudre.

VII. Lorsqu'un liquide, après avoir dissous une certaine quantité d'un sel à une température donnée, *refuse* d'en dissoudre davantage, on dit qu'il est *saturé*. Ceci posé, sachant qu'une dissolution saturée de sel marin renferme 27 parties de sel sur 100 parties, à la température ordinaire, et étant donnés 1200 kilogrammes d'eau salée renfermant 4 parties de sel sur 100 parties, on demande la quantité d'eau qu'il faut faire évaporer pour obtenir une dissolution saturée.

VIII. L'usure annuelle est sur les grandes routes de $\frac{255}{1000}$ de mètre cube par kilomètre parcouru et par tonne transportée. On demande la circulation *moyenne* journalière qui nécessite l'emploi annuel de 1800 mètres cubes de pierres cassées pour entretenir une route de 1500 mètres. Il

faudra remarquer que le mètre cube de *pierres cassées* ne renferme en réalité, à cause des vides, que $\frac{6}{11}$ de mètre cube de *pierre*.

IX. La houille en *morceaux* pèse 810 kilogrammes par mètre cube, et le mètre cube de houille en morceaux ne représente, à cause des vides, que $\frac{6}{11}$ de mètre cube de houille en *roche*. Un chemin de fer a brûlé une certaine année 42341050 kilogrammes de coke. On demande le volume occupé dans la mine par la houille qui a produit ce coke, sachant que la houille en se transformant en coke perd le tiers de son poids.

CHAPITRE III.

DES NOMBRES DÉCIMAUX.

166. Nous avons vu (**12**) que la numération écrite reposait sur ce principe : que *tout chiffre placé à la droite d'un autre vaut dix fois moins que s'il était à la place de cet autre*. Nous nous sommes arrêté, pour l'application de cette convention, au chiffre des unités; mais rien n'empêche de la poursuivre à droite de ce chiffre.

Si une grandeur renferme 5 unités, plus un certain reste, on pourra chercher combien ce reste renferme de *dixièmes* de l'unité, puis combien le nouveau reste obtenu renferme de dixièmes de dixièmes ou de *centièmes* de l'unité, et ainsi de suite.

Le nombre qui exprime combien une grandeur contient d'unités et de parties de dix en dix fois plus petites de l'unité, s'appelle *nombre décimal;* ces parties de dix en dix fois plus petites de l'unité sont *les unités des divers ordres décimaux*.

Les chiffres qui représentent les *dixièmes*, les *centièmes*, les *millièmes* d'unité s'appellent *chiffres décimaux* ou *décimales*, et leur ensemble constitue la *partie décimale* du nombre proposé, par opposition à sa partie entière. Pour qu'on ne confonde pas dans l'écriture des nombres décimaux la partie entière et la partie décimale, on les sépare par une virgule.

Si un nombre décimal doit représenter 5 unités, 7 dixièmes, 9 centièmes, 0 millièmes, 4 dix-millièmes, on placera une virgule après le chiffre 5, et à droite de cette virgule, d'après la convention générale rappelée précédemment, on écrira successivement les chiffres 7, 9, 0, 4. Il viendra alors 5,7904.

167. Il est important de remarquer que les nombres décimaux ne sont en réalité que des expressions fractionnaires

ayant pour dénominateur une puissance quelconque de dix. Ainsi le nombre décimal 9,527 revient à $9 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{1000}$ ou à $\frac{9000}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{7}{1000}$, c'est-à-dire à $\frac{9527}{1000}$.

On voit que *pour obtenir la fraction qui correspond à un nombre décimal donné, il faut prendre pour numérateur le nombre décimal lui-même, abstraction faite de la virgule, et pour dénominateur l'unité suivie d'autant de zéros que le nombre proposé contient de chiffres décimaux.*

Réciproquement, *toute fraction ayant pour dénominateur une puissance de* 10, *représente un nombre décimal qui est formé des mêmes chiffres que le numérateur de la fraction et qui contient autant de décimales qu'il y a de zéros au dénominateur de cette fraction.* Ces sortes de fractions s'appellent *fractions décimales* et se confondent entièrement avec les nombres décimaux.

Lecture et écriture des nombres décimaux.

168. On peut d'abord remarquer que, dans un nombre décimal, les chiffres placés dans la partie entière et dans la partie décimale à égale distance du chiffre des unités, se correspondent en ce sens que si le chiffre placé trois rangs plus loin *vers la gauche* représente des *mille*, le chiffre placé trois rangs plus loin *vers la droite* représente des *millièmes*. Les mêmes noms se répètent donc à gauche et à droite du chiffre des unités, sauf la terminaison *ième* qui caractérise les fractions.

Ceci posé, *si le nombre des chiffres décimaux n'est pas trop grand, on énoncera à part la partie entière et à part la partie décimale, en regardant le dernier chiffre décimal comme représentant les unités simples de cette partie décimale.*

Ainsi, les nombres 4,6258 et 10,307052 s'énonceront 4 unités, 6258 dix-millièmes, et 10 unités, 307052 millionièmes. En effet, 6 dixièmes valent 60 centièmes ou 600 millièmes ou 6000 dix-millièmes; 2 centièmes valent 20 millièmes ou 200 dix-millièmes; 5 millièmes valent 50 dix-millièmes, etc.

Quelquefois on réunit dans l'énoncé la partie entière et la partie décimale. Ainsi le nombre 37,017 peut s'énoncer 37017 millièmes. En effet, 1 unité vaut 1000 millièmes.

Si le nombre des chiffres décimaux est considérable, comme un *dixième* vaut dix *centièmes* ou cent *millièmes* et qu'un *centième* vaut dix *millièmes*, comme un *dix-millième* vaut dix *cent-millièmes* ou cent *millionièmes* et qu'un *cent-millième* vaut dix *millionièmes*, on pourra former la tranche des *millièmes*, celle des *millionièmes*, celle des *billionièmes*, etc.,

comme on a formé la tranche des *mille*, celle des *millions*, celle des *billions*, etc. De sorte que, *pour lire la partie décimale, on la partagera en tranches de trois chiffres à partir de la virgule* (la dernière tranche à droite pourra n'avoir qu'un ou deux chiffres) *et l'on énoncera chacune de ces tranches en désignant l'espèce d'unité représentée par son dernier chiffre à droite.* On verra mieux, en opérant de cette manière, quelle importance on doit accorder aux différents chiffres décimaux.

D'après ce que nous venons de dire, le nombre

4278,607 812 704 781 02

s'énoncera : 4278 unités, 607 millièmes, 812 millionièmes, 704 billionièmes, 781 trillionièmes, 2 cent-trillionièmes.

169. *Pour écrire un nombre décimal, il suffit d'écrire la partie entière et la partie décimale telles qu'elles sont énoncées, en ayant soin de remplacer par des zéros les tranches ou parties de tranches qui peuvent manquer soit dans la partie entière, soit dans la partie décimale.*

Ainsi les nombres 57 unités, 325 millièmes, et 10 unités, 307052 millionièmes, s'écriront :

57,325 et 10,307 052.

De même, on écrira le nombre : 82625 unités, 32 millièmes, 512 millionièmes, 3 dix-billionièmes :

82625,032 512 000 3 (*).

Lorsque le nombre proposé ne renferme pas de partie entière, on la remplace par un zéro. 25 dix-millièmes s'écrivent 0,0025.

Enfin, 4257 centièmes s'écriront 42,57, en plaçant la virgule de manière que le dernier chiffre 7 représente des centièmes.

170. En résumé, quand on lit un nombre décimal, la seule difficulté est de donner au dernier chiffre décimal le nom qui convient au rang qu'il occupe ; quand on écrit un nombre décimal, la seule difficulté est de placer le dernier chiffre décimal au rang énoncé.

(*) Si l'on avait énoncé la partie décimale de ce même nombre sous la forme : trois cent vingt-cinq millions cent vingt mille trois dix-billionièmes, il aurait fallu remarquer que le dernier chiffre décimal devant représenter des dix-billionièmes et dix billions indiquant dix rangs à *gauche* du chiffre des unités, la partie décimale doit contenir nécessairement dix chiffres, pour que le chiffre des dix-billionièmes se trouve dix rangs à *droite* du chiffre des unités (168). Par suite, on aurait complété ces dix chiffres en écrivant un zéro entre la virgule et le premier chiffre significatif de la partie décimale énoncée.

171. *On ne change pas la valeur d'un nombre décimal en écrivant des zéros à sa droite.* En effet, 205 millièmes, par exemple, équivalent à 2050 dix-millièmes ou à 20500 cent-millièmes, etc.

Il est utile de remarquer d'après cela que *tout nombre entier peut être regardé comme un nombre décimal dans lequel il n'y a que des zéros après la virgule.*

Pour multiplier ou diviser un nombre décimal par l'unité suivie d'un nombre quelconque de zéros, il suffit de reculer la virgule d'autant de rangs vers la droite ou vers la gauche qu'il y a de zéros après l'unité.

En effet, chaque chiffre du nombre proposé représente alors des unités 10, 100, 1000 fois plus grandes ou plus petites.

172. Il ne faut jamais perdre de vue que les nombres décimaux proviennent d'une simple extension des conditions générales de la numération aux parties de l'unité qui sont de dix en dix fois plus petites, c'est-à-dire aux parties de l'unité dont la succession graduée a lieu comme celle à laquelle les unités des différents ordres entiers obéissent. On pourra donc soumettre aux mêmes règles de calcul la partie entière et la partie décimale des nombres décimaux ; et la seule recherche sera la place que la virgule doit occuper dans le résultat.

Addition et soustraction.

173. En se reportant à la remarque qui précède, on suivra pour additionner et soustraire les nombres décimaux des règles identiques à celles indiquées pour les nombres entiers (**21**, **27**).

Pour que les unités de même ordre se trouvent rangées dans une même colonne verticale, il suffira d'écrire les nombres proposés les uns au-dessous des autres de manière que leurs virgules se correspondent.

Exemples :

75,82075	8,20593
1,273	2,0571
0,1024	
77,19615	6,14883

Lorsque, dans la soustraction, le plus grand nombre contient le moins de chiffres décimaux, on écrit à sa droite autant de zéros qu'il est nécessaire (**171**) pour que les deux nombres proposés contiennent le même nombre de chiffres décimaux.

Soit à soustraire 15,30721 de 29,815 ; on indiquera l'opéra-

tion comme il suit :

$$\begin{array}{r} 29,81500 \\ 15,30721 \\ \hline 14,50779 \end{array}$$

Multiplication.

174. *Pour multiplier deux nombres décimaux, on effectue leur produit en faisant abstraction de la virgule dans chacun d'eux, et l'on sépare sur la droite de ce produit autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs.*

Soit 325,948 à multiplier par 19,72. En faisant abstraction de la virgule dans le multiplicande, on le multiplie par 1000, et en faisant abstraction de la virgule dans le multiplicateur, on le multiplie par 100. On pourra donc écrire

$$\begin{aligned} &325948 \times 1972 = 325,948 \times 1000 \times 19,72 \times 100 \\ &= (325,948 \times 19,72) \times 100000. \end{aligned}$$

Par suite,

$$325,948 \times 19,72 = \frac{325948 \times 1972}{100000}.$$

Cette règle est générale, mais elle entraîne souvent des calculs inutiles. Supposons qu'on veuille multiplier deux nombres contenant chacun sept décimales; la règle donnera le produit avec quatorze décimales, et la connaissance de ces quatorze décimales sera en partie le plus souvent illusoire, soit à cause de l'insuffisance de nos procédés pratiques, soit parce que les sept décimales des deux facteurs ne seront pas elles-mêmes toutes certaines. Il est donc important d'indiquer une marche qui permette de ne poser au produit que le nombre de décimales indiqué d'avance par la nature de la question; et il faut, pour cela, ne faire concourir à la formation du produit approché que les décimales des deux facteurs qui peuvent influer sur les chiffres qu'on veut y conserver.

175. Avant d'exposer la *multiplication abrégée*, il faut montrer quelle erreur on commet lorsqu'on néglige plusieurs chiffres sur la droite d'un nombre décimal.

Soit le nombre 65,718249 supposé exact. Je remarque d'abord qu'*en négligeant des chiffres sur la droite de ce nombre, on ne fera jamais une erreur qui atteigne une unité de l'ordre du dernier chiffre conservé.* Si l'on prend, par exemple, 65,718 au lieu du nombre proposé, l'erreur sera plus petite qu'un millième; en effet, lors même que tous les chiffres négligés seraient des 9, il résulte du principe général de la numération, que la somme de leurs valeurs respectives serait toujours in-

férieure à un millième. En négligeant 9 dix-millièmes, il s'en faut d'un dix-millième qu'on néglige un millième; en négligeant 99 cent-millièmes, il s'en faut d'un cent-millième qu'on néglige un millième; etc.

Quand le nombre approché est plus petit que le nombre exact, on dit que l'erreur est *en moins* ou qu'elle a lieu *par défaut;* quand le nombre approché est plus grand que le nombre exact, on dit que l'erreur est *en plus* ou qu'elle a lieu *par excès.*

Ceci posé, je dis qu'on peut toujours faire en sorte que l'erreur commise soit, en plus ou en moins, plus petite qu'une demi-unité de l'ordre du dernier chiffre conservé.

Soit le même nombre 65,718249. En le remplaçant par le nombre 65,718, on néglige 249 millionièmes, c'est-à-dire un nombre inférieur à 300 millionièmes et, à plus forte raison, à 500 millionièmes ou à 5 dix-millièmes. Par suite, un millième valant dix dix-millièmes, l'erreur, *par défaut,* est plus petite qu'un demi-millième.

En remplaçant le nombre proposé par 65,72, on l'augmente de la différence qui existe entre un centième ou 10000 millionièmes et 8249 millionièmes, c'est-à-dire de 1751 millionièmes, quantité inférieure à 2000 millionièmes et, à plus forte raison, à 5000 millionièmes ou à 5 millièmes. Par suite, un centième valant dix millièmes, l'erreur, *par excès,* est plus petite qu'un demi-centième.

Donc, *lorsque le premier chiffre négligé est plus petit que* 5, *l'erreur est par défaut; lorsque le premier chiffre négligé est égal ou supérieur à* 5, *on force l'unité sur le dernier chiffre conservé* (*c'est-à-dire on l'augmente d'une unité*), *et l'erreur est par excès : dans les deux cas, elle est plus petite qu'une demi-unité du dernier ordre conservé.*

Multiplication abrégée.

176. Soit maintenant à multiplier les deux nombres

$$32,5136982 5 \quad \text{et} \quad 40,9230681$$

dont le produit exact est

$$1330,56028766860 0825.$$

Supposons qu'on demande ce produit seulement avec *trois* décimales, c'est-à-dire jusqu'au chiffre des *millièmes.*

On écrira alors les chiffres des unités du multiplicateur (ce chiffre peut être 0) sous le chiffre du multiplicande qui représente des unités *cent fois* plus faibles que celles qu'on veut conserver au produit, c'est-à-dire dans le cas considéré sous le chiffre des *cent-millièmes;* puis, on *renversera* les chiffres du

multiplicateur à droite et à gauche du chiffre des unités. De cette manière, le chiffre des dizaines du multiplicateur se trouvera sous le chiffre des millionièmes du multiplicande, tandis que le chiffre des dixièmes se trouvera sous celui des dix-millièmes, etc.

Il résulte de cette disposition que le produit d'un chiffre quelconque du multiplicande par le chiffre du multiplicateur placé au-dessous, représentera des *cent-millièmes;* car la valeur relative des chiffres du multiplicande devenant de dix en dix fois *plus petite,* celle des chiffres correspondants du multiplicateur devient de dix en dix fois *plus grande,* et inversement.

Si l'on a soin alors de multiplier le multiplicande par les différents chiffres du multiplicateur, *en commençant la multiplication au chiffre du multiplicande placé au-dessus du chiffre qu'on emploie au multiplicateur,* tous les produits partiels obtenus représenteront des *cent-millièmes,* et les chiffres des unités de ces différents produits partiels devront être écrits dans une même colonne verticale. On voit qu'on ne fera ainsi participer au produit que les chiffres des deux facteurs dont la combinaison peut donner *au moins* des cent-millièmes.

Le calcul présentera la disposition suivante :

```
 32,51369825
186 032904
-----------
130 054792
  2 926224
      65026
       9753
        192
         24
-----------
1330,56011
```

Je force alors l'unité sur le chiffre des millièmes du produit, et je dis que le produit demandé est bien 1330,561 à 0,001 près, *par excès* ou *par défaut.*

En effet, les chiffres négligés sur la droite de chaque *multiplicande partiel,* ne forment pas un nombre égal à une unité du dernier ordre conservé (**175**). Donc l'erreur sur chaque produit partiel correspondant sera moindre que le chiffre employé au multiplicateur multiplié par 0,00001 (dans le cas considéré). Par suite, il faudra d'abord tenir compte d'une erreur par défaut égale à la somme des chiffres employés au multiplicateur, multipliée par 0,00001.

Il faut remarquer que si le multiplicateur renversé dépasse le multiplicande sur la droite, on doit ajouter par la pensée des

zéros à la suite du multiplicande, de manière à ne négliger aucun chiffre sur la droite du multiplicateur renversé ; les chiffres du multiplicateur qui correspondent à ces zéros additionnels n'entrent pas alors dans l'évaluation de l'erreur.

Les chiffres du multiplicateur qui dépassent le multiplicande sur la gauche étant au contraire laissés de côté, il s'agit d'apprécier l'erreur qui en résulte. D'après ce qui précède, ces chiffres ne forment pas un nombre égal à une unité du dernier ordre conservé sur la gauche du multiplicateur. De plus, la valeur du multiplicande est inférieure à celle de son dernier chiffre à gauche augmenté de 1. Par conséquent, les chiffres négligés sur la gauche du multiplicateur entraîneront (en cent-millièmes) une erreur par défaut inférieure au dernier chiffre à gauche du multiplicande plus 1.

L'erreur par défaut commise sur le produit cherché est donc, dans l'exemple considéré, au plus égal à

$$(4+9+2+3+6+8)\times 0,00001+(3+1)\times 0,00001=0,00036,$$

quantité inférieure à 100 *cent-millièmes* ou 1 *millième*.

Le produit exact tombe donc entre

$$1330,56011, \quad \text{et} \quad 1330,56011+0,001=1330,56111.$$

A plus forte raison, sera-t-il compris entre

$$1330,560 \quad \text{et} \quad 1330,562.$$

Le nombre 1330,561 qui diffère de ces deux limites juste de 0,001, représentera le produit cherché *à moins* de 0,001 *par excès* ou *par défaut ;* car le produit exact tombant entre 1330,560 et 1330,562, tombe nécessairement entre 1330,560 et 1330,561 ou entre 1330,561 et 1330,562.

Dans la pratique, on peut ne pas écrire les chiffres du multiplicande et du multiplicateur qui ne doivent pas être employés. Soit, par exemple, à multiplier 42,30578006 par 9528,6023071 à 0,01 près ; le produit exact est

$$403114,953483381176426.$$

Le calcul présentera la disposition suivante :

$$\begin{array}{r}
42,305\ 7800 \\
3\ 206\ 8259 \\
\hline
380\ 752\ 0200 \\
21\ 152\ 8900 \\
846\ 1156 \\
338\ 4456 \\
25\ 3830 \\
846 \\
126 \\
\hline
403\ 114,9514
\end{array}$$

Et le produit cherché sera 403114,96 à 0,01 près, par excès ou par défaut.

177. On voit facilement comment il faudrait modifier la règle, si la limite de l'erreur surpassait une unité de l'ordre d'approximation demandé. Au lieu d'écrire le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre du multiplicande qui représente des unités *cent* fois plus petites que celle qui exprime ce degré d'approximation, on l'écrirait sous le chiffre qui représente des unités *mille* fois plus petites. On répondrait ainsi à tous les cas possibles de la pratique.

Si l'on avait, par exemple, à multiplier 40000,5071238 par 99,999999999071, et si l'on demandait le produit à 0,001 près, on obtiendrait, en appliquant la première règle indiquée (**176**), la disposition suivante :

$$\begin{array}{l} 40000{,}570712 \\ \underline{99999\ 999999} \end{array}$$

On verrait immédiatement que la limite supérieure de l'erreur commise atteindrait 104 cent-millièmes, quantité plus grande que 0,001. On aurait alors recours à la règle modifiée, c'est-à-dire qu'on écrirait le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre des millionièmes du multiplicande. Il vaudrait mieux d'ailleurs, dans l'exemple proposé, renverser l'ordre des deux facteurs, ce qui est évidemment permis. On aurait alors

$$\begin{array}{l} 99{,}999999999 \\ \underline{21\ 707500004} \end{array}$$

et l'erreur sur le produit aurait pour limite 0,00036, quantité moindre que 0,001.

Enfin, dans le cas où la somme des chiffres qui entrent dans l'évaluation de l'erreur est inférieure à 10, la règle au contraire se simplifie, puisqu'on peut écrire le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre du multiplicande qui représente seulement des unités dix fois plus faibles que le degré d'approximation voulu.

Division.

178. La division des nombres décimaux présente deux cas; 1° le diviseur est entier; 2° le diviseur est un nombre décimal. Le second cas se ramène au premier.

1°. Soit à diviser 493,607 par 78. En divisant 493607 par 78, on trouve 6328 pour quotient et 23 pour reste; en divisant 493607 millièmes par 78, on trouvera donc 6328 millièmes pour quotient et 23 millièmes pour reste.

On voit que, *pour diviser un nombre décimal par un nombre entier, il faut faire abstraction de la virgule au dividende et*

séparer sur la droite du quotient et du reste obtenus autant de décimales qu'il en contient; ce qui revient, dans la pratique, à mettre une virgule au quotient aussitôt que l'opération conduit à abaisser le premier chiffre décimal du dividende.

```
493,607 | 78
 25 6   |------
  2 20  | 6,328
    647
     23
```

Le quotient demandé est, dans l'exemple proposé, 6,328 et le reste 0,023.

179. 2°. Soit à diviser 942,84059 par 86,192.

On supprime la virgule du diviseur pour le rendre entier, et on la recule d'autant de rangs vers la droite dans le dividende, que le diviseur renferme de chiffres décimaux. De cette manière, on ne change pas le quotient, puisque le dividende et le diviseur se trouvent multipliés par un même nombre 1000; mais le reste est multiplié par ce même nombre (**68**). La question est donc ramenée à diviser 942840,59 par 86192 : c'est le cas précédent.

```
942840,59 | 86192
 80920 5  |------
  3347 79 | 10,93
   762 03
```

On trouve pour quotient 10,93 et pour reste 762,03 (**178**). Ce dernier résultat doit être divisé par 1000 : le reste de la division proposée est, par suite, 0,76203.

On peut remarquer que *le reste de la division de deux nombres décimaux doit toujours représenter des unités de même ordre que le dernier chiffre décimal du dividende tel qu'il est donné; et que le dernier chiffre décimal du quotient est de l'ordre du dernier chiffre décimal du dividende modifié de manière que le diviseur soit entier.*

Soit encore à diviser 285,73 par 8,9461. On regardera le dividende proposé comme égal à 285,7300 et, en appliquant la règle, on sera conduit à diviser les deux nombres entiers 2857300 et 89461.

Le quotient sera donc 31 et le reste 8,4009.

180. Il résulte des règles posées au n° **175** que le quotient est toujours obtenu à une unité près de l'ordre auquel on s'arrête. On peut, en comparant le reste trouvé au diviseur, obtenir le quotient à une demi-unité près du même ordre, par défaut ou par excès. En effet, *si le reste est plus petit que la moitié du diviseur,* la fraction qu'il faudrait ajouter au quotient

pour le compléter (154), sera plus petite qu'une demi-unité du dernier ordre conservé. *Si le reste est plus grand que la moitié du diviseur*, cette fraction sera plus grande qu'une demi-unité du même ordre, et, dans ce cas, il faudra forcer l'unité sur le dernier chiffre du quotient pour l'obtenir à une demi-unité près de cet ordre par excès. Dans le premier exemple considéré (178), le reste 23 étant inférieur à la moitié du diviseur 78, la fraction complémentaire $\frac{0,023}{78}$ sera inférieure à un demi-millième. Dans le second exemple (179), le reste 76203 surpassant la moitié du diviseur 86192, la fraction complémentaire $\frac{762,03}{86192}$ sera plus grande qu'un demi-centième. Dans le premier cas, on dira que le quotient est 6,328 à un demi-millième près par défaut. Dans le second, on prendra pour quotient 10,94, et l'on dira qu'il est obtenu à un demi-centième près par excès.

181. Il résulte de ce qui précède la possibilité de trouver le quotient de la division de deux nombres entiers, avec telle approximation décimale qu'on voudra. Il suffit pour cela de transformer le dividende en un nombre décimal dont le dernier chiffre soit du même ordre que l'approximation indiquée, en ajoutant à sa droite un nombre convenable de zéros. Si l'on demande, par exemple, le quotient de 285 par 7 à 0,001 près, on divisera 285,000 par 7. Dans la pratique, on divise d'abord 285 par 7 : on trouve pour quotient 40 et pour reste 5. On place alors une virgule au quotient et l'on continue la division en écrivant un zéro à la droite du reste 5 et de ceux qu'on obtient successivement, jusqu'à ce qu'on atteigne au quotient l'ordre des millièmes. Par suite, le quotient de 285 par 7 à 0,001 près est 40,714.

Division abrégée.

182. De même que l'approximation avec laquelle on veut calculer un produit de deux facteurs conduit à n'employer que certains chiffres de ces deux facteurs (176), de même l'approximation demandée au quotient permet de négliger certains chiffres du dividende et du diviseur. C'est sur cette remarque qu'est basé le procédé de la division abrégée. Nous poserons d'abord les deux règles suivantes.

1°. Dans la division de deux nombres quelconques, avant tout calcul, il faut rendre le diviseur entier (179);

2°. Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que le quotient est demandé à l'unité près. S'il est demandé en effet à un dixième, un centième, un millième près, il suffit de rendre le dividende 10, 100, 1000 fois plus grand et de cher-

cher le quotient à l'unité près; puisqu'on devra ensuite le rendre 10, 100, 1000 fois plus petit, il sera obtenu à un dixième, un centième, un millième près. Si l'on demande au contraire le quotient à une dizaine ou à une centaine près, il faudra rendre le dividende 10 ou 100 fois plus petit, et chercher le quotient à l'unité près. Comme on devra ensuite le multiplier par 10 ou par 100, il sera bien obtenu à une dizaine ou à une centaine près.

183. Soit donc à diviser dans ces conditions 83645012,37 par 613345. Le quotient trouvé par la méthode ordinaire est 136,59 à 0,01 près. Si l'on veut trouver ce quotient à 0,01 près, par la méthode abrégée, on devra chercher à l'unité près le quotient des nombres 8364501237 et 612345.

Nous commencerons par déterminer le nombre des chiffres du quotient (55) : ce nombre sera égal à 5. Il faudra alors séparer sur la gauche du diviseur assez de chiffres pour former un nombre au moins égal à 5×9. Ces chiffres formeront *le dernier diviseur* qui sera 61. On comptera alors $5 - 1$ ou 4 chiffres sur la droite du dernier diviseur, et l'on aura *le premier diviseur* qui sera 612345. S'il y avait d'autres chiffres au diviseur, après ceux qui constituent le premier diviseur, *on les supprimerait*. On efface alors sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y en a dans le diviseur après *le dernier diviseur*, et l'on obtient *le premier dividende* 836450.

On divise le premier dividende par le premier diviseur en suivant le procédé ordinaire. On a ainsi le chiffre des plus hautes unités du quotient, qui est 1, et un reste égal à 224105. *C'est ce reste qu'on prend pour second dividende;* mais on *barre* alors un chiffre sur la droite du premier diviseur, de sorte que *le second diviseur* est 61234. On obtient 3 pour second chiffre du quotient, et un reste égal à 40403. C'est ce reste qu'on prend pour troisième dividende. Le troisième diviseur 6123 s'obtient en barrant un nouveau chiffre sur la droite du second diviseur. On continue de la même manière, jusqu'à ce qu'on soit conduit à employer *le dernier diviseur* qui correspond nécessairement au dernier chiffre ou au chiffre des unités du quotient : en effet, pour former le *premier diviseur*, on a compté à la suite du *dernier diviseur* autant de chiffres moins un qu'il doit y en avoir au quotient.

836450$\overline{1237}$	612345
224105	13659
40403	
3665	
605	
56	

Il reste à prouver que le quotient 13659, obtenu en appliquant ce procédé, est bien exact à l'unité près.

On a d'abord négligé la partie 1237 du dividende. On néglige ensuite à la fin de l'opération le reste 56 qui représente des dizaines de mille. La somme de ces deux erreurs est donc égale à 561237, *et c'est une erreur par défaut*. Le reste 56 étant moindre que le dernier diviseur 61, *cette erreur par défaut sera moindre que le diviseur proposé*, puisqu'on a effacé sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y en avait au diviseur après le dernier diviseur.

De plus, dans le courant de l'opération, on a négligé de multiplier les chiffres barrés sur la droite de chaque diviseur par les chiffres correspondants du quotient, et comme les produits partiels successivement obtenus ont été retranchés des différents dividendes ou du dividende total, on a fait ainsi sur les différents dividendes ou sur le dividende total *une erreur par excès* qu'il faut évaluer.

Écrivons le quotient sous le premier diviseur, en le renversant comme dans la multiplication abrégée (**176**), et posons le chiffre des unités du quotient sous le chiffre des unités du dernier diviseur.

$$\begin{array}{r} 612345 \\ \underline{95631} \end{array}$$

Nous verrons alors facilement qu'on a précisément formé les différents produits partiels du diviseur par les chiffres successifs du quotient, comme s'il s'agissait de trouver le produit des deux nombres par le procédé de la multiplication abrégée. Le chiffre des unités du dernier diviseur représentant des dizaines de mille, et ce chiffre correspondant au chiffre des unités du quotient, l'erreur sur le produit sera inférieure à la somme des chiffres du quotient multipliée par une dizaine de mille (**176**). Le nombre des chiffres du quotient étant 5 et ces chiffres étant *au plus* tous égaux à 9, la limite supérieure de l'*erreur par excès* que nous cherchons à évaluer sera 9×5 dizaines de mille. *Le dernier diviseur* 61 *ayant été pris supérieur à* 9×5, il en résulte que l'*erreur totale par excès* sera encore moindre que le diviseur proposé 612345.

En résumé, l'*erreur commise sur le dividende se compose de deux erreurs : l'une par défaut, l'autre par excès ; et chacune de ces erreurs est moindre que le diviseur*. En effectuant la division, on divise aussi l'erreur. Par conséquent, l'*erreur sur le quotient se composera elle-même de deux erreurs : l'une par défaut, l'autre par excès ; et chacune de ces erreurs sera moindre qu'une unité*. En réalité, le quotient sera donc obtenu, *par excès ou par défaut*, à l'unité près.

Le quotient 13659 étant exact à moins d'une unité, le véritable quotient 136,59 sera exact à moins d'un centième.

Supposons, comme second exemple, qu'on demande de diviser 63817,908451273 par 49,6923 à 0,001 près. On commencera par rendre le diviseur entier, puis on multipliera le dividende par 1000 (**182**), et la question sera ramenée à chercher le quotient de 6381790845 12,73 par 496923 *à l'unité près*. On devra donc négliger d'abord les deux chiffres décimaux du dividende (**179**).

Le quotient devant avoir 7 chiffres et 7×9 étant égal à 63, 496 sera *le dernier diviseur*. On doit compter $7 - 1$ ou 6 chiffres à la suite de 496 pour avoir *le premier diviseur*. Mais le nombre des chiffres du diviseur proposé n'étant pas assez grand pour permettre l'application de la règle, on écrira trois zéros à la droite du dividende et du diviseur (**68**) : on aura ainsi 496923000 pour *premier diviseur*. Pour avoir le premier dividende, il faudra supprimer 6 chiffres sur la droite de 6381790845 12000 ; *le premier dividende* sera donc 638179084.

L'opération présentera la disposition suivante :

```
638179084 | 496923000
141256084 | 1284261
 41871484
  2117644
   129952
    30568
      754
      258
```

Le quotient donné par la méthode abrégée étant 1284261, le quotient cherché sera 1284,261 à 0,001 près.

184. Il peut arriver qu'un dividende partiel contienne 10 fois le diviseur correspondant. On peut alors en général appliquer la règle indiquée sans modification aucune, en ayant soin d'écrire le quotient égal à 10 entre deux parenthèses.

Soit à diviser 327981461 5 par 780913 à l'unité près. Le quotient contenant 4 chiffres et 4×9 étant moindre que 78, 78 formera le dernier diviseur. On devra compter 3 chiffres après 78, de sorte que 78091 sera le premier diviseur. On barrera le dernier chiffre du diviseur proposé, et l'on supprimera 4 chiffres sur la droite du dividende, puisque le diviseur donné en contient 4 à la suite du dernier diviseur. Le premier dividende sera donc 327981, et l'opération présentera la disposition suivante. Nous traçons une barre horizontale au-dessus de l'ensemble des chiffres supprimés tout d'abord à la droite

des nombres considérés : on pourrait d'ailleurs se dispenser d'écrire ces chiffres.

$$\begin{array}{r|l} 327981\overline{4615} & 78091\overline{3} \\ \cline{2-2} 15617 & 41(10)0 \\ 7808 & \\ 8 & \end{array}$$

Le quotient demandé sera 4200.

Il faut remarquer avec soin que le deuxième reste 7808 est moindre que le deuxième diviseur 7809. Par conséquent, si ce reste 7808, qui devient le troisième dividende, contient 10 fois le troisième diviseur 780, il ne peut surpasser 10 fois ce troisième diviseur que d'une quantité inférieure au chiffre 9 qu'on a barré sur sa droite. En d'autres termes, le reste suivant ou quatrième dividende *ne contiendra qu'un chiffre*. Comme le dernier diviseur en contient 2, *tous les chiffres suivants du quotient seront des zéros.*

On peut donc formuler cette règle : *Lorsqu'on est conduit à poser* (10) *au quotient, il faut forcer l'unité sur le chiffre trouvé précédemment et compléter le quotient par des zéros.*

Il peut arriver qu'on ait à poser immédiatement (10) au quotient, comme chiffre de ses plus hautes unités. Il est facile de voir que la règle précédente est encore applicable. Désignons par α le nombre des chiffres du dividende, par β le nombre des chiffres du diviseur. Le quotient aura alors (55) un nombre de chiffres égal à $\alpha - \beta$ ou à $\alpha - \beta + 1$.

Si l'on suppose que le dernier diviseur contienne p chiffres, le premier diviseur en contiendra autant que le quotient plus $p - 1$, c'est-à-dire $\alpha - \beta + p - 1$ ou $\alpha - \beta + p$.

Quant au premier dividende, puisqu'il est obtenu en barrant sur la droite du dividende proposé autant de chiffres que le diviseur en contient à la suite du dernier diviseur, il en renfermera $\alpha - \beta + p$.

Ainsi, *le premier dividende contient un chiffre de plus que le premier diviseur ou le même nombre de chiffres.*

On peut donc être conduit, *dans le premier cas*, à poser immédiatement (10) au quotient. Mais alors le quotient n'aura plus $\alpha - \beta$ chiffres : il en aura $\alpha - \beta + 1$; ce qui prouve d'abord qu'on ne peut jamais avoir à poser que 10 au quotient (et non pas 11, 12, etc.). En effet, le quotient devant réellement contenir $\alpha - \beta$ chiffres et la méthode abrégée en donnant $\alpha - \beta + 1$ avec une erreur moindre qu'une unité, c'est que le procédé ordinaire conduirait à un quotient composé de $\alpha - \beta$ neuf, *avec une erreur par défaut moindre qu'une unité*. Le procédé abrégé doit donc donner (10) suivi de

$\alpha - \beta - 1$ zéros, et l'*erreur moindre qu'une unité est alors par excès* (*).

On peut vérifier ce que nous venons de dire sur l'exemple suivant. Soit à diviser 437538 par 4378. On aura :

Procédé abrégé.

```
437538 | 4378
     5 |------
       | (10) 0
```

Procédé ordinaire.

```
437538 | 4378
 43518 |------
  4116 |  99
```

Pour évaluer dans le cas qui nous occupe l'erreur par excès commise sur le dividende (**183**), on doit écrire le quotient renversé sous le diviseur, de manière que le chiffre des unités du quotient corresponde, non pas au chiffre des unités, mais au chiffre des dizaines du dernier diviseur : en effet, *le quotient renferme un chiffre de plus*. L'erreur cherchée sera donc moindre que la somme des chiffres du quotient ou 1, multiplié par 1000. Le diviseur étant au moins égal à 1000 l'*erreur par excès commise sur le quotient sera encore plus petite que* 1. Quant à l'erreur par défaut, pour l'évaluer il n'y a rien à changer aux raisonnements précédents (**183**).

EXERCICES.

I. On traite annuellement dans une usine 11 250 000 kilogrammes de minerai de cuivre argentifère. Le minerai contient $2^{part},40$ de cuivre et $0^{part},0000695$ d'argent sur 100 parties. La perte en cuivre est de 4 parties sur 100 parties extraites, et la perte en argent est de 5 parties sur 100 parties extraites. Calculer les productions annuelles de cuivre et d'argent et

---

(*) Il faut, pour bien comprendre ce qui précède, se rappeler que lorsque le quotient a $(\alpha - \beta)$ chiffres, le premier dividende partiel employé en suivant le procédé ordinaire, doit contenir un chiffre de plus que le diviseur (55). D'ailleurs, ce premier dividende partiel divisé par le diviseur ne pouvant donner qu'un chiffre au quotient, on voit que le premier chiffre du dividende sera *au plus* égal au premier chiffre du diviseur. Lorsque cette condition sera remplie, il faudra qu'en comparant les chiffres suivants du diviseur à ceux qui leur correspondent dans le premier dividende partiel, on trouve au moins un chiffre du diviseur plus grand que celui de même rang dans le premier dividende partiel, les chiffres précédents étant égaux deux à deux. Sinon, le premier dividende partiel renfermerait dix fois le diviseur.

Ceci posé, en appliquant le procédé abrégé, le *premier* dividende contiendra donc *dix fois au plus* le *premier* diviseur (car les chiffres conservés dans le premier diviseur doivent être *au moins* égaux à ceux de même rang dans le premier dividende qui en renferme *un de plus*), et le reste obtenu ou *second* dividende n'aura alors qu'un *seul* chiffre. Comme le *dernier* diviseur en contient *au moins deux*, tous les chiffres suivants du quotient seront bien des zéros.

Si le premier chiffre du dividende est inférieur au premier chiffre du diviseur, le *premier* dividende ne pourra pas contenir dix fois le *premier* diviseur, et l'on rentrera dans l'un des cas déjà examinés.

leurs valeurs, en estimant 220 francs le kilogramme d'argent et $2^{fr},10$ le kilogramme de cuivre.

II. Un cheval peut traîner une voiture contenant un poids de 1500 kilogrammes; sa vitesse est de $4^{kil},25$ par heure; le temps pour le chargement et le déchargement est évalué à 10 minutes. Pour un travail journalier de 10 heures, on paye 5 francs au conducteur de la voiture. Calculer le prix du transport de 500 mètres cubes de terre à une distance de 97 mètres, sachant que le mètre cube de terre pèse 1600 kilogrammes.

III. Au chemin de fer de Paris à Lyon, les rails pèsent 38 kilogrammes par mètre courant; la longueur d'un rail est de 5 mètres; 100 kilogrammes de rails coûtent 37 francs. Il y a 512 kilomètres de Paris à Lyon, et le chemin est à deux voies. Calculer le poids total des rails, le volume occupé par eux, leur nombre et le prix total des deux voies. La densité du fer est 7,7.

IV. Les profondeurs de trois puits artésiens sont 220 mètres, 395 mètres, 543 mètres; les températures des eaux correspondantes sont $19^{\circ},75$, $25^{\circ},33$, $30^{\circ},50$. On demande de vérifier si le rapport qui existe entre les accroissements de température est égal à celui qui existe entre les accroissements de profondeur; on demande ensuite de calculer quelle température devrait avoir l'eau fournie par le troisième puits pour que l'égalité supposée pût exister.

V. Le grand axe de l'orbite de la planète Mars est égal, en prenant pour unité le grand axe de l'orbite terrestre, à 1,52369. Sachant que, d'après Képler, le rapport qui existe entre les carrés des temps pendant lesquels deux planètes exécutent leurs révolutions, est égal à celui que présentent les cubes des grands axes de leurs orbites; on demande de trouver en jours la durée de la révolution de Mars, la terre effectuant la sienne en $365^{j},25628$.

CHAPITRE IV.

CONVERSION DES FRACTIONS ORDINAIRES EN DÉCIMALES.

185. Nous avons vu (Chap. II) que les règles du calcul des fractions entraînaient une plus grande complication que les règles du calcul des entiers. En effet, l'addition et la soustraction exigent toujours qu'on réduise préalablement les expressions proposées au même dénominateur; et la multiplication et la division des fractions sont des opérations complexes qui renferment une double opération sur des nombres entiers. D'autre part, le calcul des nombres décimaux (Chap. III) ne présente en réalité aucune différence avec celui des nombres entiers, et permet d'obtenir le résultat cherché avec une approximation plus facile à apprécier que lorsqu'on complète la partie entière de ce résultat à l'aide d'une fraction. Il est donc naturel de chercher à remplacer les expressions fractionnaires

par des expressions décimales équivalentes : c'est ce qu'on appelle *convertir une fraction ordinaire en décimales.*

186. Soit la fraction $\frac{5}{7}$. Convertir cette fraction en décimales, c'est chercher à combien de dixièmes, de centièmes, de millièmes, etc., elle équivaut. En d'autres termes, puisque la fraction $\frac{5}{7}$ représente le quotient de 5 par 7 (134), c'est effectuer la division de 5 par 7 à un dixième, un centième, un millième près (181). Il en résulte immédiatement que, *pour convertir une fraction ordinaire en décimales, il faut ajouter à la droite de son numérateur autant de zéros que l'expression décimale cherchée doit contenir de chiffres décimaux, et diviser le nombre ainsi obtenu par le dénominateur de la fraction. Dans la pratique, on n'écrit pas ces zéros, on les ajoute successivement à la droite des restes partiels, et l'on écrit une virgule au quotient dès qu'on est conduit à employer un premier zéro.*

D'après cela, l'expression décimale de $\frac{5}{7}$ en millionièmes sera 0,714285 à moins d'un millionième par défaut ou 0,714286 à moins d'un demi-millionième par excès (180).

L'expression décimale de $\frac{285}{7}$ en millièmes sera 40,714 à moins d'un demi-millième par défaut (180).

50	7
10	0,714285
30	
20	
60	
40	
5	

285	7
50	40,714
10	
30	
2	

Il y aura deux cas à considérer : ou la conversion sera possible exactement, c'est-à-dire que la division poussée convenablement conduira à un reste nul ; ou la conversion sera impossible exactement, c'est-à-dire que la division continuée indéfiniment ne conduira jamais à un reste nul.

187. I. *Pour qu'une fraction ordinaire se réduise exactement en décimales, il faut et il suffit que son dénominateur ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5.*

En effet, on peut toujours supposer les deux termes de la fraction proposée premiers entre eux. Pour que la réduction en décimales s'opère exactement, il faut que le numérateur de la fraction multiplié par une certaine puissance de 10 forme un nombre exactement divisible par son dénominateur (186) :

et comme ce dénominateur est premier avec le numérateur, il faut qu'il divise la puissance de 10 employée (**107**); c'est-à-dire qu'il ne peut pas contenir d'autres facteurs premiers que ceux qui entrent dans cette puissance de 10.

Ainsi, la fraction $\frac{5}{8}$ peut être convertie exactement en décimales, parce que le dénominateur $8 = 2^3$. Il suffira de multiplier le numérateur 5 par $10^3 = 2^3 \times 5^3$, pour introduire autant de facteurs 2 au numérateur qu'il y en a au dénominateur, c'est-à-dire pour rendre la division possible. On trouvera alors $\frac{5}{8} = 0,625$ (*).

$$\begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0,625 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Fractions décimales périodiques.

188. II. *Lorsque le dénominateur de la fraction donnée contient des facteurs premiers étrangers aux facteurs* 2 *et* 5, *la conversion exacte est impossible, et le quotient illimité qu'on obtient est périodique.*

S'il s'agit, par exemple, de la fraction $\frac{5}{7}$, quelle que soit la puissance de 10 par laquelle on multiplie le numérateur 5, on ne pourra jamais introduire au dividende le facteur premier 7; dès lors la division n'aura jamais de fin.

De plus, les restes successivement obtenus seront toujours inférieurs au diviseur et, comme on ne peut trouver le reste 0, on ne pourra obtenir que les *six* restes 1, 2, 3, 4, 5, 6. Par conséquent, après *six* divisions *au plus*, un des restes déjà trouvés

---

(*) Soit la fraction $\frac{a}{b}$. Si $b = 2^n \times 5^p$, n étant supposé $> p$, il faudra multiplier le numérateur par 10^n ou $2^n \times 5^n$. L'expression du quotient sera alors

$$\frac{a \times 2^n \times 5^n}{2^n \times 5^p} = a \times 5^{n-p},$$

et l'on pourra poser

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 5^{n-p}}{10^n}.$$

On voit qu'il y a autant de décimales dans l'expression exacte que d'unités dans l'exposant le plus élevé des facteurs premiers 2 et 5 qui entrent au dénominateur; de plus, on obtient le nombre décimal cherché, abstraction faite de la virgule, en multipliant le numérateur a par celui de ces facteurs premiers 2 et 5 qui a le plus faible exposant, ce facteur devant être affecté d'un exposant égal à la différence des exposants n et p.

reparaîtra ; ce reste ramènera le même dividende partiel et le même chiffre du quotient, et puisqu'on sera alors dans des conditions identiques à celles où l'on était placé à la première apparition de ce reste, les chiffres du quotient, à partir du chiffre considéré, se reproduiront d'une manière indéfinie, périodiquement et dans le même ordre. On dit alors que ce quotient est un quotient décimal périodique ou une *fraction décimale périodique*.

$$\begin{array}{l|l} 50 & 7 \\ \cline{2-2} \;\;10 & 0,71428571\ldots \\ \;\;\;30 & \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;3 & \end{array}$$

Pour la fraction $\frac{5}{7}$, on trouve les six restes possibles dans un ordre irrégulier ; après quoi, le premier reste 5 reparaît. Le quotient périodique est

$$0,714285\,714285\,714285\,71\ldots\ldots$$

Remarquons que ce quotient représente $\frac{5}{7}$ à un dixième, à un centième,..., à un millionième près, suivant qu'on s'arrête au premier, au second,..., au sixième chiffre décimal. On approche donc autant qu'on veut de $\frac{5}{7}$, à mesure qu'on prend au quotient un plus grand nombre de chiffres, et l'on peut écrire que $\frac{5}{7}$ est *la limite* de ce quotient illimité ou

$$\frac{5}{7} = \text{limite de } 0,714285\,714285\,714285\,71\ldots \quad (139).$$

L'ensemble des chiffres qui se reproduisent constitue *la période* de la fraction décimale périodique considérée. On peut remarquer que cette période contient au plus $b - 1$ chiffres, si le dénominateur de la fraction ordinaire génératrice est b.

La période peut commencer immédiatement après la virgule : la fraction est alors dite *périodique simple*.

La période peut commencer un certain nombre de rangs après la virgule : la fraction est alors dite *périodique mixte*. L'ensemble des chiffres placés entre la virgule et la partie périodique, chiffres qui ne se reproduisent pas, constitue *la partie non périodique*.

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

Retour à la fraction ordinaire génératrice.

189. Étant donnée une fraction périodique, proposons-nous maintenant de retrouver la fraction ordinaire dont la conversion en décimales lui a donné naissance.

Soit d'abord une fraction périodique simple telle que

$$0,267\,267\,267\,2\ldots\ldots$$

Prenons seulement trois périodes, et représentons par a la valeur de ces trois périodes. Nous aurons

$$(1) \qquad a = 0,267\,267\,267.$$

Multiplions par 1000 les deux membres de cette égalité, de manière à faire passer une période avant la virgule. Il viendra :

$$(2) \qquad 1000\,a = 267,267\,267.$$

(*) Nous croyons que, pour être bien saisi, ce paragraphe doit être précédé des considérations suivantes : nous les donnons donc en note.

Les théorèmes qu'on va démontrer seront d'ailleurs utiles par la suite.

I. *Les puissances d'un nombre plus grand que* 1 *croissent indéfiniment, de manière à pouvoir surpasser toute quantité donnée.*

Soit le nombre $a > 1$. a^2 sera plus grand que a, parce que le produit est plus grand que le multiplicande, lorsque le multiplicateur surpasse l'unité. On aura de même $a^3 > a^2$, $a^4 > a^3, \ldots, a^m > a^{m-1}$. Ainsi, les puissances successives de a croissent indéfiniment; mais on ne sait pas à priori si leur valeur finira par surpasser toute quantité donnée, car une quantité variable peut croître indéfiniment, tout en s'approchant d'une certaine limite fixe : il faut prouver que, dans le cas considéré, cette limite n'existe pas.

Je dis qu'on pourra trouver pour l'exposant m une valeur telle que a^m surpasse N, N étant un nombre aussi grand qu'on voudra le supposer. Désignons par α l'excès de a sur l'unité et posons $a - 1 = \alpha$. Nous aurons, d'après la remarque qui précède,

$$\begin{aligned} a^2 - a &> \alpha, \\ a^3 - a^2 &> \alpha, \\ a^4 - a^3 &> \alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^m - a^{m-1} &> \alpha. \end{aligned}$$

Si nous ajoutons membre à membre la première égalité et les $m - 1$ inégalités suivantes, il viendra

$$a^m - 1 > m\alpha \quad \text{ou} \quad a^m > 1 + m\alpha.$$

Posons $1 + m\alpha = N$. Nous en déduirons

$$m = \frac{N - 1}{\alpha}.$$

Si l'on donne cette valeur à m, a^m qui surpasse toujours $1 + m\alpha$, surpassera aussi N.

Retranchons membre à membre l'égalité (1) de l'égalité (2), nous trouverons

$$999a = 267 - 0,000\,000\,267$$

ou

$$999a = 267 - \frac{267}{1000^3}.$$

Pour avoir la valeur de a, il suffira de diviser par 999 les deux membres de l'égalité obtenue. On aura donc

$$a = \frac{267}{999} - \frac{267}{999 \times 1000^3}.$$

La valeur des trois périodes considérées est donc égale à $\frac{267}{999}$ diminuée de la fraction $\frac{267}{999 \times 1000^3}$. Remarquons que le dénominateur de cette fraction renferme 1000^3, parce que nous avons pris trois périodes. Si nous en prenons quatre, il renfermera 1000^4; si nous en prenons cinq, il renfermera 1000^5; si nous en prenons un nombre quelconque n, il renfermera 1000^n. L'expression trouvée est donc générale, en ce sens qu'il suffit d'y faire varier l'exposant de 1000 de manière qu'il soit toujours égal au nombre des périodes considérées, pour

---

II. *Les puissances d'une quantité plus petite que* 1 *décroissent indéfiniment, de manière à pouvoir tomber au-dessous de toute quantité donnée.*

Soit le nombre $a < 1$. On aura

$$a^2 < a,$$

parce que le produit est plus petit que le multiplicande lorsque le multiplicateur est plus petit que 1. On aura de même

$$a^3 < a^2, \quad a^4 < a^3, \ldots, \quad a^m < a^{m-1}.$$

Il reste à prouver que l'on peut donner à m une valeur telle que a^m tombe au-dessous de $\frac{1}{N}$, N étant un nombre aussi grand qu'on voudra ou $\frac{1}{N}$ une fraction aussi petite qu'on voudra.

Puisque a est < 1, on peut le représenter par une fraction $\frac{1}{a'}$, a' étant > 1 $\left(\text{si } a \text{ représentait la fraction } \frac{5}{7}, \frac{1}{a'} \text{ représenterait } \frac{1}{\left(\frac{7}{5}\right)} \text{ et } a' \text{ serait } \frac{7}{5}\right)$. On aura alors

$$a^m = \left(\frac{1}{a'}\right)^m = \frac{1}{a'^m}.$$

Pour que a^m soit plus petit que $\frac{1}{N}$, il faut donc que $\frac{1}{a'^m}$ soit plus petit que $\frac{1}{N}$ ou $a'^m > N$, condition qu'on peut toujours remplir d'après le premier théorème, puisque a' est supérieur à 1; a^m converge donc vers zéro à mesure que m augmente.

avoir la valeur de ce nombre de périodes. Si nous désignons par A la valeur de n périodes, nous pourrons écrire

$$A = \frac{267}{999} - \frac{267}{999 \times 1000^n} \quad \text{ou} \quad A = \frac{267}{999} - \frac{267}{999} \times \left(\frac{1}{1000}\right)^n.$$

A mesure que n augmente, $\left(\frac{1}{1000}\right)^n$ devient de plus en plus petit, tandis que $\frac{267}{999}$ est une quantité fixe. Si n surpasse toute quantité donnée, $\left(\frac{1}{1000}\right)^n$ tombe au-dessous de toute quantité donnée (*voir* la note). La quantité qu'il faut retrancher de $\frac{267}{999}$ pour avoir la valeur des n périodes, devient donc de plus en plus petite à mesure que n augmente, et sa limite est zéro, puisque l'un des facteurs de cette quantité restant invariable, l'autre converge vers zéro. Par suite, la fraction $\frac{267}{999}$ est elle-même la limite vers laquelle converge la valeur de toutes les périodes. En désignant leur somme par x, on aura rigoureusement

$$x = \frac{267}{999}.$$

Ainsi, *la fraction ordinaire génératrice d'une fraction périodique simple a pour numérateur une période et, pour dénominateur, un nombre formé d'autant de* 9 *que la période contient de chiffres.*

190. Remarquons qu'un nombre formé seulement de 9 n'est jamais divisible par 2 ou par 5. En réduisant la fraction $\frac{267}{999}$ à sa plus simple expression, on ne pourra que supprimer les facteurs qui sont communs à ses deux termes. Il en résulte que *le dénominateur de la fraction ordinaire génératrice d'une fraction périodique simple ne renferme jamais que des facteurs étrangers aux facteurs premiers* 2 *et* 5.

191. Soit, en second lieu, une fraction périodique mixte

$$0,326156156156\ldots.$$

Désignons par x la valeur exacte de cette fraction : on aura

$$x = 0,326156156156\ldots.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par 100, de ma-

nière à faire passer la partie non périodique avant la virgule; il viendra

$$100x = 32,615615615 61\ldots.$$

Remarquons que nous n'avons en rien diminué le nombre des périodes : nous avons seulement déplacé la virgule de manière à la placer avant la première période. Le second membre est donc égal à 32 augmenté d'une fraction périodique simple dont la période est 615, c'est-à-dire à $32 + \frac{615}{999}$. Par suite,

$$100x = 32 + \frac{615}{999} \quad \text{ou} \quad x = \frac{32}{100} + \frac{615}{99900}.$$

Effectuons le calcul indiqué dans le second membre, nous aurons

$$x = \frac{32 \times 999 + 615}{99900}.$$

On peut remplacer 999 au numérateur par $1000 - 1$ et écrire

$$x = \frac{32 \times (1000 - 1) + 615}{99900} = \frac{32000 - 32 + 615}{99900},$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{32615 - 32}{99900}.$$

Cette manière d'opérer est évidemment générale, car les trois zéros de 32000 seront toujours remplacés par la période 615.

La fraction ordinaire génératrice d'une fraction périodique mixte a donc pour numérateur l'ensemble de la partie non périodique suivie d'une période, diminué de la partie non périodique, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 *que la période contient de chiffres, suivi d'autant de zéros que la partie non périodique contient de chiffres.*

192. Remarquons que le dénominateur de cette fraction qui est, dans l'exemple considéré, 999×100, renferme des facteurs premiers étrangers à 2 et à 5 provenant de 999, et des facteurs 2 et 5 provenant de 100. Lorsqu'on voudra réduire la fraction à sa plus simple expression, les facteurs étrangers ne pourront pas tous disparaître, sans quoi la fraction aurait une expression décimale exacte. De plus, on ne pourra jamais la diviser haut et bas par 10. Il faudrait pour cela, en effet, que la différence $32615 - 32$ fût terminée par 0 ou que le dernier chiffre de la partie périodique fût égal au dernier chiffre de la partie non périodique : ce qui est impossible. Si, dans l'exemple proposé, on remplaçait 5 par 2, il viendrait

$$x = 0,3261261261\ldots.$$

et la période ne serait pas 612, mais bien 261, c'est-à-dire qu'elle commencerait un chiffre plus tôt.

Puisqu'on ne peut pas diviser par 10 les deux termes de la fraction ordinaire génératrice d'une fraction périodique mixte, il en résulte que son dénominateur contiendra toujours autant de facteurs 2 *ou* autant de facteurs 5 qu'il contenait de zéros avant la réduction de la fraction à sa plus simple expression; car, si on peut diviser haut et bas par 2, on ne pourra pas diviser par 5, et inversement. On peut donc dire que l'exposant le plus élevé des facteurs 2 et 5 que renferme le dénominateur de la fraction génératrice, marque dans tous les cas le nombre de chiffres de la partie non périodique.

193. En rapprochant les résultats obtenus, on voit que toute fraction ordinaire dont le dénominateur ne renferme que des facteurs premiers étrangers à 2 et à 5, conduit à une fraction périodique simple, parce qu'elle ne peut conduire ni à une fraction limitée (**187**), ni à une fraction périodique mixte (**192**).

De même, toute fraction ordinaire dont le dénominateur contient à la fois des facteurs premiers étrangers à 2 et à 5 et des facteurs 2 et 5, conduit à une fraction périodique mixte, parce qu'elle ne peut conduire ni à une fraction limitée, ni à une fraction périodique simple (**190**); et le nombre des chiffres de la partie non périodique est d'avance indiqué par l'exposant le plus élevé des facteurs 2 et 5 du dénominateur (**192**).

194. Remarques. — I. Si l'on a des entiers joints à une fraction décimale périodique, il est facile de remplacer l'expression donnée par une expression exacte, en opérant comme il suit et en s'aidant des résultats précédents. Soit l'expression

$$x = 3,2727272727\ldots.$$

On en déduit

$$\frac{x}{10} = 0,32727272727\ldots.$$

Le second membre étant une fraction périodique mixte, on a

$$\frac{x}{10} = \frac{327-3}{990},$$

d'où

$$x = \frac{327-3}{99}.$$

Soit encore l'expression

$$x = 31,2765656565\ldots.$$

On en déduit

$$\frac{x}{100} = 0,312765656565\ldots.$$

ou

$$\frac{x}{100} = \frac{312765 - 3127}{990000},$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{312765 - 3127}{9900}.$$

II. Si la période est 9, on force l'unité sur le chiffre qui précède la première période, et l'on a la valeur exacte de l'expression périodique.

Ainsi

$$3,9999\ldots = 3 + \frac{9}{9} = 3 + 1 = 4.$$

De même

$$5,479999\ldots = 5,47 + 0,009999\ldots = 5,47 + \frac{9}{900}$$
$$= 5,47 + 0,01 = 5,48.$$

III. On peut facilement réduire en décimales toutes les fractions qui ont un même dénominateur, lorsqu'on a réduit en décimales celle d'entre elles qui a pour numérateur l'unité. Ainsi la fraction $\frac{1}{7}$ est égale à $0,142857142857 1\ldots$. Par conséquent, la fraction $\frac{3}{7}$ sera égale à cette même valeur multipliée par 3 ou à $0,428571428571 4\ldots$.

EXERCICES.

I. Convertir 3 heures 53 minutes 7 secondes en nombre décimal, l'heure étant prise pour unité.

II. Les mines de cuivre de la Grande-Bretagne ont donné, une certaine année, 152 615 000 kilogrammes de minerai, et l'on en a extrait 13 900 000 kilogrammes de cuivre. Le Chili et l'Australie ont fourni cette même année à l'Angleterre 41 490 000 kilogrammes de minerai, et l'on en a extrait 9 009 000 kilogrammes de cuivre. On demande la *richesse* en cuivre du minerai indigène et du minerai importé, c'est-à-dire combien 100 kilogrammes de chacun d'eux fournissent de kilogrammes de cuivre.

LIVRE QUATRIÈME.

LES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DE LA RACINE CARRÉE.

195. Nous avons terminé tout ce qui a rapport aux deux formes sous lesquelles on peut *directement* considérer les nombres. Les nombres *entiers* répondent à l'addition successive de l'unité; les nombres *fractionnaires*, à l'addition successive d'une certaine partie aliquote de l'unité. Cette partie aliquote peut être variée d'une manière quelconque, de sorte que le champ des nombres fractionnaires est beaucoup plus vaste que celui des nombres entiers. La progression des nombres entiers se retrouve à la fois au numérateur et au dénominateur de l'expression fractionnaire et, de plus, à un numérateur donné on peut faire correspondre tel dénominateur qu'on voudra.

Nous avons vu ensuite comment on pouvait simplifier les procédés du calcul en considérant spécialement les fractions décimales et en y ramenant toutes les autres, soit exactement, soit avec une approximation donnée.

Il nous reste à étudier une dernière classe de quantités que nous retrouverons constamment en mathématiques et qui naissent, en particulier, de la considération des racines, c'est-à-dire qu'on y est conduit par la sixième opération fondamentale, inverse de l'élévation aux puissances (77).

196. On appelle *racine carrée* d'un nombre, le nombre qui élevé au carré reproduit le nombre proposé. Ainsi, 25 étant égal au carré de 5, 5 est la racine carrée de 25; de même, $\frac{4}{9}$ étant le carré de $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ est la racine carrée de $\frac{4}{9}$.

On indique la racine carrée d'un nombre au moyen du signe $\sqrt{\ }$, qu'on appelle *radical*. On écrira donc

$$\sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

S'il s'agit d'une racine de degré plus élevé, on emploie le même signe et l'on écrit entre ses branches le nombre qui correspond au degré de la racine, c'est-à-dire l'*indice* de cette racine. Pour indiquer, par exemple, la racine cubique de 64, on écrira $\sqrt[3]{64} = 4$.

Le carré d'un nombre entier ou fractionnaire s'appelle *carré parfait*.

197. Tout nombre entier qui n'est pas carré parfait d'un nombre entier, ne peut pas l'être d'une fraction (**161**). Sa racine carrée ne pourra donc être exprimée exactement ni par un nombre entier ni par une fraction.

Toute fraction dont les deux termes ne sont pas carrés parfaits, ne peut être elle-même carré parfait d'une autre fraction (**161**). Sa racine carrée ne pourra donc être exprimée exactement ni par un nombre entier ni par une fraction.

198. Lorsque deux grandeurs sont multiples d'une troisième grandeur, cette troisième grandeur se nomme leur *commune mesure;* et les nombres qui représentent les deux premières grandeurs, lorsque la troisième est prise pour unité, sont dits *commensurables entre eux.*

Lorsque deux grandeurs n'ont pas de commune mesure, elles sont dites *incommensurables entre elles;* et les nombres qui les représentent, *nombres qu'on ne peut obtenir exactement lorsqu'on veut rapporter les grandeurs considérées à une même unité*, sont des nombres *incommensurables entre eux.*

Ceci posé, une unité étant choisie, on aura trois cas à examiner. Les grandeurs à mesurer pourront contenir exactement l'unité : elles seront alors représentées par des nombres entiers; ou bien, ces grandeurs contiendront exactement une partie aliquote de l'unité : elles seront alors représentées par des nombres fractionnaires; enfin, ces grandeurs ne contiendront exactement ni l'unité, ni aucune partie aliquote de l'unité : elles seront alors *incommensurables* et correspondront à des *nombres incommensurables.*

Les racines carrées des nombres entiers qui ne sont pas carrés parfaits et des fractions dont les deux termes ne sont pas carrés parfaits, ne pouvant être exprimées exactement ni par un nombre entier ni par une fraction (**197**), sont des nombres incommensurables : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\frac{5}{7}}$ sont des nombres incommensurables.

199. Les nombres incommensurables ne pouvant être nécessairement représentés que par des symboles, il est important

de marquer leur place dans l'échelle des grandeurs exactes. Nous dirons donc, pour préciser les idées, que lorsqu'une grandeur incommensurable tombe entre deux grandeurs commensurables, le nombre incommensurable qui lui correspond est compris entre les deux nombres commensurables qui mesurent les grandeurs limites considérées.

On pourra, d'après cela, obtenir l'expression numérique d'une grandeur incommensurable, sinon exactement, du moins avec telle approximation qu'on voudra. Soit, en effet, une grandeur incommensurable quelconque. Partageons l'unité en p parties égales et supposons que la grandeur proposée tombe entre m et $m+1$ de ces parties; le nombre qui lui correspond tombera entre $\frac{m}{p}$ et $\frac{m+1}{p}$: la différence de ces expressions étant $\frac{1}{p}$, il différera de chacune d'elles de moins de $\frac{1}{p}$. En le remplaçant par l'une ou l'autre, on fera donc une erreur plus petite que $\frac{1}{p}$, c'est-à-dire aussi petite qu'on voudra en donnant à p une valeur convenable.

Nous devons donc nous proposer dans ce chapitre de trouver la racine carrée d'un nombre, exactement lorsque cela sera possible, c'est-à-dire lorsque ce nombre sera un carré parfait, de la trouver avec une approximation donnée dans le cas contraire (*).

Composition du carré d'une somme de deux parties, et remarques sur les carrés.

200. Pour trouver le carré de la somme $7+3$, il faut multiplier $7+3$ par $7+3$. En suivant la règle indiquée (63), on trouve pour résultat

$$\begin{array}{l} 7+3 \\ 7+3 \\ \hline 7^2+7\times 3 \\ \quad +7\times 3+3^2 \\ \hline 7^2+2.(7\times 3)+3^2 \end{array}$$

(*) Il faut bien remarquer que tout ce que nous venons de dire est *relatif* au choix de l'unité. Une grandeur incommensurable avec une certaine unité peut être commensurable avec une autre. Quant aux nombres considérés abstraitement, comme ils expriment des *rapports*, ils restent commensurables ou incommensurables, sans qu'il y ait variation quand on passe d'un système à un autre. Ainsi, une grandeur est toujours incommensurable quand elle contient deux fois l'unité choisie, parce que le rapport 2 est tel qu'aucune expression numé-

$7^2 + 2.(7 \times 3) + 3^2$; c'est-à-dire que *le carré d'une somme de deux parties est égal au carré de la première partie, plus le double produit de la première partie par la seconde, plus le carré de la seconde partie* (*).

Tout nombre plus grand que 9 étant composé de dizaines et d'unités, on peut dire d'une manière générale que le carré d'un nombre entier contient *le carré de ses dizaines, plus le double produit de ses dizaines par ses unités, plus le carré de ses unités.*

Ainsi, l'on aura

$$37^2 = (30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 7 + 7^2.$$

D'après ce qui précède, on a

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

d'où

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Par conséquent, *la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale à deux fois le plus petit nombre plus* 1

Si le carré de 30 est égal à 900, le carré de 31 sera égal à $900 + 2 \times 30 + 1$ ou à 961.

201. La table suivante donne les carrés des neuf premiers nombres :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

On peut remarquer que le carré d'un nombre est nécessairement terminé par le même chiffre que le carré de ses unités. En effet, le carré des dizaines étant terminé par deux zéros, et le double produit des dizaines par les unités par un zéro, quand on additionne les trois parties qui constituent le carré, la colonne des unités ne renferme que le chiffre qui termine le carré des unités. Si, de plus, le nombre proposé est terminé par un 5, son carré doit être terminé par 25; car le double produit des dizaines par les unités est, dans ce cas, terminé

---

rique élevée au carré ne peut le reproduire. Si l'unité est choisie 2 fois plus petite, la grandeur devient commensurable parce qu'elle se trouve représentée par 4.

Il est bon de noter qu'il n'y a pas analogie entre les nombres incommensurables et les fractions décimales périodiques, puisque ces dernières expressions sont toujours susceptibles d'une représentation numérique exacte.

(*) Si l'on élevait $7 - 3$ au carré, on trouverait évidemment (64)

$$7^2 - 2.(7 \times 3) + 3^2.$$

par deux zéros. Ainsi

$$35^2 = (30+5)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 5 + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1225.$$

Enfin, si un nombre est terminé par un nombre quelconque de zéros, son carré sera terminé par deux fois plus de zéros : ceci résulte des principes de la multiplication (39).

En se reportant à la table des carrés des neuf premiers nombres, on voit que les nombres terminés par 1 et 9 auront leurs carrés terminés par 1 ; que les nombres terminés par 2 et 8 auront leurs carrés terminés par 4 ; que les nombres terminés par 3 et 7 auront leurs carrés terminés par 9; que les nombres terminés par 4 et 6 auront leurs carrés terminés par 6; enfin que les nombres terminés par 5 auront leurs carrés terminés par 25.

Donc, *tout nombre terminé par* 2, 3, 7 *ou* 8, *ne peut pas être un carré parfait ; tout nombre terminé par* 5, *sans l'être par* 25, *ne peut pas être un carré parfait ; tout nombre terminé par un nombre impair de zéros ne peut pas être un carré parfait.*

Extraction de la racine carrée d'un nombre à l'unité près.

202. Nous commencerons par remarquer que, *pour extraire la racine carrée d'un nombre fractionnaire à l'unité près, il suffit d'extraire à l'unité près la racine carrée de sa partie entière.*

En effet, pour que la racine carrée d'un nombre entier croisse d'une unité, il faut que ce nombre croisse lui-même *au moins* d'une unité, puisque la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale à deux fois le plus petit nombre *plus un* (200). Si l'on augmente un nombre entier d'une fraction proprement dite, on ne peut donc changer en rien la partie entière de sa racine carrée. Ainsi, extraire la racine carrée de $332 + \frac{19}{27}$ à l'unité près ou extraire la racine carrée de 332 à l'unité près, revient au même.

203. Ceci posé, la question se trouvant ramenée dans tous les cas à extraire la racine carrée d'un nombre entier à l'unité près, il faut distinguer entre les nombres plus petits et plus grands que 100.

Lorsqu'un nombre est plus petit que 100, il suffit de consulter la table des carrés des neuf premiers nombres. On voit immédiatement, par exemple, que la racine carrée de 49 est 7; et que 78 tombant entre 64 et 81, sa racine carrée tombe entre 8 et 9 (199), de sorte qu'elle est 8 par défaut et 9 par excès à l'unité près.

204. Si le nombre considéré est plus grand que 100, comme 487919, sa racine carrée est plus grande que 10 : elle renferme dès lors des dizaines et des unités. Si le nombre donné est un carré parfait, il contient les trois parties qui composent le carré de sa racine (**200**) ; s'il n'est pas un carré parfait, il contient en outre une quatrième partie qui représente son excès par rapport au carré de sa racine, et qu'on appelle *le reste* de l'opération.

Le carré des dizaines de la racine ne pouvant donner que des centaines sera compris dans les 4879 centaines du nombre proposé. Je dis qu'*en extrayant la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans ces centaines, on aura nécessairement le nombre des dizaines de la racine.*

En effet, désignons par a ce plus grand carré entier. On aura, en se reportant à l'exemple choisi,

$$a^2 < 4879 < (a+1)^2,$$

par suite,

$$a^2 \times 10^2 < 487900 < (a+1)^2 \times 10^2.$$

Les deux termes extrêmes différant *au moins* de 3 centaines (pour $a = 1$), on peut ajouter au terme intermédiaire une quantité plus petite qu'une centaine sans changer le sens des inégalités. On aura donc

$$a^2 \times 10^2 < 487919 < (a+1)^2 \times 10^2.$$

On en déduit

$$a \times 10 < \sqrt{487919} < (a+1) \times 10.$$

La racine carrée de 487919 tombant entre a dizaines et $(a+1)$ dizaines, contiendra a dizaines, a représentant, comme nous l'avons dit, la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans les 4879 centaines du nombre donné.

On est conduit à extraire la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans 4879, c'est-à-dire à extraire la racine carrée de ce nombre à l'unité près. Mais 4879 étant > 100, sa racine est plus grande que 10 ; les raisonnements précédents sont donc applicables, et il faut extraire la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans les 48 centaines de 4879, pour obtenir les dizaines de sa racine carrée. Le plus grand carré entier contenu dans 48 est 36 dont la racine carrée est 6. Le chiffre des dizaines de la racine carrée de 4879 est donc 6 ; reste à trouver le chiffre des unités.

$$\begin{array}{r|l}
48.79 & 69 \\ \cline{2-2}
36 & 129 \\ \cline{1-1}
127.9 & 9 \\ \cline{2-2}
1161 & \\ \cline{1-1}
118 &
\end{array}$$

Pour cela, retranchons 36 de 48; on trouve 12 : en retranchant le carré de 60, c'est-à-dire le carré des dizaines de la racine ou 3600, de 4879, on trouvera donc 1279. Le reste 1279 ainsi obtenu contient *au moins* le double produit des dizaines de la racine par les unités cherchées, plus le carré de ces unités. Le double produit des dizaines de la racine par ses unités ne pouvant donner que des dizaines, se trouvera dans les 127 dizaines du reste 1279. En divisant 127 par le double 12 du nombre de dizaines de la racine, on aura donc pour quotient le chiffre des unités de la racine ou un chiffre supérieur. Je dis *supérieur*, parce que 127 représente non-seulement le double produit du nombre de dizaines de la racine par ses unités, mais contient en outre les dizaines des autres parties qui composent 1279. Le quotient obtenu devra donc toujours être *essayé* : le premier chiffre de la racine est le seul qui soit nécessairement exact.

127 divisé par 12 donne 10 pour quotient; mais, comme le chiffre cherché est inférieur à 10 puisque le chiffre des dizaines est forcément 6, nous essayerons 9. La racine carrée de 4879, à l'unité près, est égale ou inférieure à 69. Si le carré de 69 peut se retrancher de 4879, le chiffre 9 est exact; sinon, il faut le diminuer d'une unité et recommencer l'essai. Nous avons déjà retranché de 4879, 3600 ou 60^2; il faut donc seulement vérifier si l'on peut retrancher du reste 1279 les deux autres parties du carré de 69. On peut évidemment former ces deux parties d'un seul coup, en écrivant le chiffre 9 à côté du double 12 du premier chiffre 6 de la racine et en multipliant le résultat 129 par 9. On obtient 1161 qui, retranché de 1279, donne 118 pour reste. 69 représente donc la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans 4879.

Par conséquent, en revenant au nombre 487919, 69 représente les dizaines de la racine carrée de ce nombre; reste à trouver le chiffre des unités.

En retranchant 69^2 de 4879, on trouve 118; en retranchant le carré de 690 de 487900, on trouvera donc 11800 et, par suite, en retranchant le carré de 690 ou le carré des dizaines de la racine de 487919, on trouvera pour reste 11819.

11819 contient *au moins* le double produit des dizaines de la racine par les unités cherchées, plus le carré de ces unités. Par conséquent, les dizaines 1181 du nombre 11819 sont *au moins* égales au double produit du nombre 69 des dizaines de la racine par les unités inconnues et, en divisant 1181 par 69×2 ou $138 = 129 + 9$, on obtiendra un quotient égal ou supérieur à ces mêmes unités.

48.79.19	698
36	129
127.9	9
1161	1388
1181.9	8
11104	
715	

1181 divisé par 138 donne 8 pour quotient. Pour essayer le chiffre 8, il faut voir si l'on peut retrancher de 487919 le carré de 698. On a déja retranché de 487919 le carré de 690; il faut donc seulement retrancher du reste 11819 les deux autres parties du carré de 698, parties qu'on formera en écrivant à côté du double 138 de la partie 69 déjà écrite à la racine le chiffre 8 à essayer, et en multipliant par 8 le résultat 1388. On obtient 11104 qui, retranché de 11819, donne le reste 715. La racine carrée demandée est donc 698 à l'unité près par défaut, et 715 représente le reste de l'opération.

205. En relisant attentivement les raisonnements précédents, on arrive à formuler la règle suivante :

Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier à l'unité près, on le partage en tranches de deux chiffres à partir de la droite et en remontant vers la gauche, de sorte que la dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un chiffre. Le nombre des tranches obtenues indique le nombre des chiffres de la racine. On obtient le premier chiffre de la racine en extrayant la racine carrée du plus grand carré entier contenue dans la dernière tranche à gauche. On retranche le carré de ce chiffre de cette même tranche et, à côté du reste, on abaisse la tranche suivante ; on sépare les dizaines de l'ensemble obtenu. En divisant ces dizaines par le double du premier chiffre de la racine, on a le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer, on l'écrit à côté du double du premier chiffre de la racine et on multiplie le résultat obtenu par le chiffre essayé. Si le produit peut se retrancher de l'ensemble du premier reste et de la seconde tranche, le chiffre essayé est exact ; sinon, on le diminue d'une unité, et l'on recommence l'essai. A côté du second reste, on abaisse la troisième tranche, on sépare les dizaines de l'ensemble obtenu, on les divise par le double de la partie écrite à la racine, et l'on a le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort dont l'essai s'effectue comme précédemment. On continue à suivre la même marche, jusqu'à l'abaissement de la dernière tranche qui conduit au dernier chiffre de la racine et au reste de l'opération.

Il est évident qu'on ne peut poser à la fois qu'un chiffre à

la racine, et que ce chiffre est zéro lorsque les dizaines du reste considéré sont inférieures au double de la partie déjà écrite à la racine.

En employant la simplification indiquée déjà (48), on donne au calcul la disposition suivante :

$$\begin{array}{r|l} 487\,919 & 698 \\ \cline{2-2} 127.9 & 129 \\ 11\,8\,1.9 & 9 \\ \cline{2-2} 7\,1\,5 & 138 \end{array}$$

206. *Le reste de l'opération ne peut pas dépasser deux fois la racine.*

En effet, le nombre proposé N est égal au carré de sa racine A, plus le reste trouvé R. Si ce reste était seulement égal à deux fois la racine plus un, le nombre donné égal à $A^2 + R$, serait égal à $A^2 + 2A + 1$ ou à $(A + 1)^2$. Sa racine carrée ne serait donc pas A à l'unité près, mais bien $A + 1$; et la crainte d'écrire au résultat un chiffre trop fort en aurait fait écrire un trop faible.

Cette remarque s'applique évidemment aux restes trouvés dans le courant de l'opération, comparés aux nombres déjà écrits à la racine.

207. *En comparant le reste de l'opération à la racine trouvée, on peut obtenir cette racine à moins d'une demi-unité par défaut ou par excès.*

En effet, on a en même temps

$$N = A^2 + R \quad \text{et} \quad \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 = A^2 + A + \frac{1}{4}.$$

Si R est $< A$, c'est-à-dire égal au plus à A, on a

$$N < \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{N} < A + \frac{1}{2}.$$

A représente alors la racine carrée demandée à moins d'une demi-unité par défaut.

Si R est $> A$, c'est-à-dire égal au moins à $A + 1$, on a au contraire

$$N > \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{N} > A + \frac{1}{2};$$

de sorte qu'en prenant A pour la racine, l'erreur par défaut surpasse une demi-unité, et qu'il faut dès lors, pour l'avoir à moins d'une demi-unité, mais pas excès, forcer l'unité sur le résultat trouvé A.

Si l'on cherche la racine carrée de 815718, on trouve 903, et

le reste est $309 < 903$: la racine est obtenue par défaut à une demi-unité près. Si l'on cherche la racine de 487917, on trouve 698, et le reste est $715 > 698$: la racine à moins d'une demi-unité par excès est 699.

Racine carrée des fractions et des nombres décimaux.

208. Puisque pour élever une fraction au carré il faut élever ses deux termes au carré (160), pour extraire la racine carrée d'une fraction carré parfait, il suffit d'extraire la racine carrée de ses deux termes. Ainsi, la racine carrée de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$.

Quelle que soit la fraction proposée $\frac{a}{b}$, on a d'une manière générale $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, le carré de la seconde expression étant $\frac{a}{b}$, comme celui de la première (196).

Il est important d'opérer toujours sur des fractions dont le dénominateur soit carré parfait, afin de pouvoir apprécier immédiatement le véritable degré d'approximation. On n'a, pour y arriver, qu'à multiplier haut et bas la fraction donnée par son dénominateur. Ainsi,

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5 \times 7}{7^2}} = \frac{\sqrt{5 \times 7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{5 \times 7}}{7}.$$

Si l'on extrait la racine carrée de 35 à l'unité près, comme on devra diviser le résultat trouvé par 7, on obtiendra la racine carrée de $\frac{5}{7}$ à $\frac{1}{7}$ près.

On n'a pas toujours besoin de multiplier la fraction haut et bas par son dénominateur. Si l'on a, par exemple, à extraire la racine carrée de $\frac{7}{40}$, c'est-à-dire la racine carrée de $\frac{7}{2^3 \times 5}$, il suffira pour rendre le dénominateur carré parfait (116) de multiplier les deux termes de la fraction par 2×5 ou 10. On aura alors

$$\sqrt{\frac{7}{2^3 \times 5}} = \sqrt{\frac{70}{2^4 \times 5^2}} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{(2^2 \times 5)^2}} = \frac{\sqrt{70}}{20}.$$

209. Soit à extraire la racine carrée d'un nombre décimal tel que 325,714. On est d'abord conduit, pour rentrer dans ce qui précède, à faire abstraction de la virgule. On a alors

$$325714 = 325,714 \times 1000$$

et, par suite,

$$\sqrt{325714} = \sqrt{325,714} \times \sqrt{1000} \qquad (76),$$

d'où

$$\sqrt{325,714} = \frac{\sqrt{325714}}{\sqrt{1000}}.$$

Pour que la question soit convenablement résolue, il faut qu'on puisse immédiatemment juger du degré d'approximation obtenu, ce qui exige qu'on ait à diviser par la racine carrée d'une puissance de dix qui soit carré parfait. Or, on peut toujours se placer dans ces conditions en rendant pair, s'il ne l'est pas déjà, le nombre des chiffres décimaux par l'addition d'un zéro. Dans l'exemple proposé, on remplacera le nombre donné par son équivalent 325,7140 et l'on aura alors

$$\sqrt{325,7140} = \frac{\sqrt{3257140}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{3257140}}{100}.$$

Si l'on extrait la racine de 3257140 à l'unité près, on obtiendra à 0,01 près la racine carrée de 325,7140.

La règle pratique sera donc *de compléter le nombre des chiffres décimaux par un zéro s'il est nécessaire, d'extraire la racine carrée du nombre obtenu à l'unité près, abstraction faite de la virgule, puis de séparer sur la droite de cette racine moitié moins de chiffres décimaux qu'il n'y en a dans le nombre considéré.*

L'ordre décimal auquel on arrive ainsi est aussi celui de l'approximation obtenue. On peut mettre une virgule à la racine, dès qu'on abaisse la première tranche décimale.

En général, *pour extraire la racine carrée d'un nombre fractionnaire à une approximation décimale donnée, il faut donc réduire l'expression fractionnaire en décimales jusqu'à ce qu'on obtienne deux fois plus de chiffres décimaux qu'on n'en veut à la racine, et appliquer la règle qu'on vient d'indiquer.* Nous verrons bientôt qu'on peut pousser beaucoup moins loin la réduction en décimales.

Si l'on veut extraire la racine carrée d'un nombre entier à une approximation décimale donnée, il faut le considérer comme un nombre décimal (**171**) contenant deux fois plus de décimales qu'on n'en veut à la racine; c'est-à-dire qu'il faut écrire à la droite de ce nombre entier autant de tranches de deux zéros que sa racine doit contenir de chiffres décimaux. Dans la pratique, on écrit successivement ces tranches de zéros à côté des restes obtenus, à mesure qu'on en a besoin.

Exemples. 1°. Extraire la racine carrée de $\frac{22}{7}$ à 0,01 près.

$$\begin{array}{r|l} 22 & 7 \\ \cline{2-2} 10 & 3,1428 \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3,1428 & 1,77 \\ \cline{2-2} 21.4 & 27 \\ 252.8 & 7 \\ 9\cdot9 & 347 \\ & 7 \end{array}$$

$\frac{22}{7} = 3,1428$ à 0,0001 près. La racine carrée de 3,1428 sera 1,77 à 0,01 près et, par suite, 1,77 représentera aussi la racine carrée de $\frac{22}{7}$ à 0,01 près. En effet, qu'on ajoute ou non à 3,1428 la quantité plus petite que 0,0001 qui lui permettrait de représenter exactement $\frac{22}{7}$, on ne modifiera en rien le chiffre des centièmes de la racine (202).

2°. Extraire la racine carrée de 2 à 0,001 près.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1,414 \\ \cline{2-2} 10.0 & 24 \\ 40.0 & 4 \\ 1190.0 & 281 \\ 604 & 1 \\ & 2824 \\ & 4 \end{array}$$

On trouve $\sqrt{2} = 1,414$ à $\frac{1}{2}$ millième près par défaut.

Simplification qu'on peut apporter à l'extraction de la racine carrée.

210. *Lorsqu'on a calculé en général plus de la moitié des chiffres de la racine carrée d'un nombre entier, on peut obtenir les autres chiffres en divisant le reste auquel on s'est arrêté par le double de la partie déjà écrite à la racine, suivie du nombre de zéros qui correspond aux unités qu'elle représente.*

Soit N le nombre proposé, ne faisons d'abord aucune hypothèse sur le nombre de chiffres de la racine. Désignons par a le nombre formé par la partie déjà écrite à la racine, suivie d'autant de zéros qu'il est nécessaire pour que le premier chiffre de la racine soit au rang qui convient aux unités qu'il représente. Appelons x la quantité quelconque, commensurable ou incommensurable, qu'il faut ajouter à a pour avoir

exactement la racine carrée de N. On aura aussi exactement

$$N = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

d'où

$$N - a^2 = 2ax + x^2.$$

$N - a^2$ est évidemment le reste R auquel on parvient, lorsqu'on cesse de poursuivre le calcul de la racine suivant le procédé ordinaire. On a donc

$$R = 2ax + x^2,$$

d'où

$$x = \frac{R}{2a} - \frac{x^2}{2a}.$$

Pour que la partie entière de x soit égale au quotient entier (154) de $\frac{R}{2a}$, il suffit que l'expression $\frac{x^2}{2a}$ soit une fraction proprement dite ou que la partie entière de x^2 soit inférieure à $2a$. Pour l'affirmer à priori, il faut que la partie entière de x^2 contienne moins de chiffres que $2a$.

Ceci posé, admettons d'abord que la racine cherchée à l'unité près doive contenir $2n+1$ chiffres. Si l'on a trouvé $n+1$ chiffres par le procédé habituel, x n'en contiendra plus que n à sa partie entière; x^2 en contiendra au plus $2n$ (40), tandis que $2a$ en contiendra au moins $2n+1$. Dans ce cas, $\frac{x^2}{2a}$ sera une fraction qu'on pourra négliger et, pour avoir la partie entière de x, il suffira de diviser R par $2a$.

De même, si la racine doit contenir $2n$ chiffres et si l'on en a déjà trouvé $n+1$, x en contiendra $n-1$ à sa partie entière; dès lors x^2 en contiendra au plus $2n-2$, tandis que $2a$ en contiendra au moins $2n$. On arrive donc encore à la même conclusion.

Enfin, si la racine contenant toujours $2n$ chiffres, son premier chiffre est égal ou supérieur à 5, il suffira de chercher n chiffres par le procédé habituel. En effet, x^2 contiendra alors au plus $2n$ chiffres, et $2a$, à cause de la retenue, en contiendra $2n+1$.

Si ce cas se présentait lorsque la racine renferme $2n+1$ chiffres et si l'on voulait ne chercher que n chiffres par le procédé ordinaire, x^2 contiendrait $2n+2$ chiffres au plus à sa partie entière, mais $2a$ en contiendrait aussi $2n+2$, de sorte qu'il y aurait doute.

En résumant, on voit que lorsque le nombre des chiffres de la racine est *impair*, il faut en calculer la moitié plus un avant de terminer l'opération en ayant recours à la division; et que, lorsque ce nombre est *pair*, il suffit d'en calculer seulement la

moitié, si le premier chiffre de la racine est égal ou supérieur à 5.

Si l'on appelle r le reste de la division de R par $2a$ et q le quotient de cette division, on peut remplacer $\frac{R}{2a}$ par $q+\frac{r}{2a}$; d'où

$$x=q+\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

On voit alors qu'en remplaçant x par q, la racine est obtenue à l'unité près par défaut ou par excès, suivant que r est plus grand ou plus petit que x^2 : cette racine serait exacte si l'on avait $r=x^2$.

Exemple. On demande de calculer $\sqrt{3}$ avec six décimales. Faisons abstraction de la virgule. Les quatre premiers chiffres de la racine forment le nombre 1732. On a donc ici $2a=3464000$ et $R=17600.00.00$. Divisons R par $2a$ ou 176000 par 3464. On trouve 50 pour quotient et 2800 pour reste. Puisque x doit avoir trois chiffres à sa partie entière, on devra prendre ici $x=050$ et $r=2800>50^2$ ou 2500. Par conséquent, la racine à l'unité près par défaut est 1732050 et l'on a $\sqrt{3}=1,732050$ à un millionième près par défaut.

```
3              | 1732          17600.0 | 3464
20.0           |-----          2800 0  |-----
 110.0         | 27              50
   710.0       |  7
     176       |-----
               | 343
               |   3
               |-----
               | 3462
               |    2
               |-----
```

CHAPITRE II.

THÉORIE DE LA RACINE CUBIQUE.

211. On appelle *racine cubique* d'un nombre le nombre qui, élevé au cube, reproduit le nombre proposé. Ainsi, 8 étant le cube de 2 et $\frac{27}{64}$ étant le cube de $\frac{3}{4}$, on a

$$\sqrt[3]{8}=2 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}.$$

Le cube d'un nombre entier ou fractionnaire s'appelle cube parfait.

Tout nombre entier qui n'est pas cube parfait, toute fraction dont les deux termes ne sont pas cubes parfaits, a pour racine cubique un nombre incommensurable (**161, 198**). On devra donc se proposer de trouver la racine cubique d'un nombre exactement ou avec une approximation donnée.

Composition d'un cube d'une somme de deux parties et remarques sur les cubes.

212. Pour trouver le cube de la somme $8+5$, il faut d'abord en faire le carré, ce qui donne $8^2+2\times(8\times5)+5^2$, et multiplier ce carré par $8+5$.

$$\begin{array}{l}
8^2+2\times(8\times5)+5^2 \\
\qquad\qquad\quad 8\ +5 \\
\hline
8^3+2\times(8^2\times5)+8\times5^2 \\
\quad +\qquad (8^2\times5)+2\times(8\times5^2)+5^3 \\
\hline
8^3+3\times(8^2\times5)+3\times(8\times5^2)+5^3
\end{array}$$

On trouve pour résultat

$$8^3+3\times(8^2\times5)+3\times(8\times5^2)+5^3,$$

c'est-à-dire que *le cube d'une somme de deux parties est égal au cube de la première partie, plus trois fois le carré de la première partie multiplié par la seconde, plus trois fois la première partie multipliée par le carré de la seconde, plus le cube de la seconde.*

Tout nombre plus grand que 9 étant composé de dizaines et d'unités, on peut dire d'une manière générale que *le cube d'un nombre entier contient le cube de ses dizaines, plus le triple produit du carré de ses dizaines par ses unités, plus le triple produit de ses dizaines par le carré de ses unités, plus le cube de ses unités.*

Ainsi l'on aura

$$47^3=(40+7)^3=40^3+3\times40^2\times7+3\times40\times7^2+7^3.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1,\quad \text{d'où}\quad (a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1.$$

Par conséquent, *la différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs est égale à trois fois le carré du plus petit nombre, plus trois fois ce plus petit nombre, plus un.*

213. La table suivante donne les cubes des neuf premiers nombres :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

On peut remarquer que le cube d'un nombre est nécessaire-

ment terminé par le même chiffre que le cube de ses unités; mais cette remarque ne fournit aucun moyen de distinguer les nombres qui peuvent être cubes parfaits; car un cube parfait peut être indifféremment terminé par l'un des neuf premiers nombres, puisque les cubes des nombres terminés par 1, 4, 5, 6 et 9, le sont aussi par 1, 4, 5, 6 et 9, tandis que les cubes des nombres terminés par 2, 3, 7 et 8, le sont inversement par 8, 7, 3 et 2.

Si un nombre est terminé par un nombre quelconque de zéros, son cube sera terminé par trois fois plus de zéros. Donc un nombre terminé par un nombre de zéros qui n'est pas multiple de trois, ne peut pas être cube parfait.

Extraction de la racine cubique d'un nombre à l'unité près.

214. Nous commencerons par remarquer que, pour extraire la racine cubique d'un nombre fractionnaire à l'unité près, il suffit d'extraire à l'unité près la racine cubique de la partie entière de ce nombre. En effet, pour que la racine cubique d'un nombre entier croisse d'une unité, il faut que ce nombre croisse lui-même *au moins* d'une unité d'après la différence qui existe entre les cubes de deux nombres entiers consécutifs (**212**). Si l'on augmente un nombre entier d'une fraction proprement dite, on ne peut donc changer en rien la partie entière de sa racine cubique. Ainsi, extraire la racine cubique de $42327 + \frac{137}{415}$ à l'unité près, ou extraire la racine cubique de 42327 à l'unité près, revient au même.

215. Ceci posé, la question se trouvant ramenée dans tous les cas à extraire la racine cubique d'un nombre entier à l'unité près, il faut distinguer entre les nombres plus petits et plus grands que 1000.

Lorsqu'un nombre est plus petit que 1000, il suffit de consulter la table des cubes des neuf premiers nombres. On voit immédiatement, par exemple, que la racine cubique de 512 est 8; et que 275 tombant entre 216 et 343, sa racine cubique tombe entre 6 et 7, de sorte qu'elle est 6 par défaut et 7 par excès à l'unité près.

216. Si le nombre considéré est plus grand que 1000, comme 57817233, sa racine cubique est plus grande que 10, elle renferme dès lors des dizaines et des unités. Si le nombre donné est un cube parfait, il contient les quatre parties qui composent le cube de sa racine (**212**); s'il n'est pas un cube parfait, il contient, en outre, une cinquième partie qui représente son excès par rapport au cube de sa racine, et qu'on appelle le *reste* de l'opération.

Le cube des dizaines de la racine ne pouvant donner que des mille, sera compris dans les 57817 mille du nombre proposé. Je dis qu'*en extrayant la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans ces mille, on aura nécessairement le nombre de dizaines de la racine.*

En effet, désignons par a ce plus grand cube entier. On aura, en se reportant à l'exemple choisi,

$$a^3 < 57817 < (a+1)^3,$$

et, par suite,

$$a^3 \times 10^3 < 57817000 < (a+1)^3 \times 10^3.$$

Les deux termes extrêmes différant au moins de 7 mille (pour $a = 1$), on peut ajouter au terme intermédiaire une quantité plus petite qu'un mille, sans changer le sens des inégalités. On aura donc

$$a^3 \times 10^3 < 57817233 < (a+1)^3 \times 10^3.$$

On en déduit

$$a \times 10 < \sqrt[3]{57817233} < (a+1) \times 10.$$

La racine cubique de 57817233 tombant entre a dizaines et $(a+1)$ dizaines, contiendra a dizaines, a représentant, comme nous l'avons dit, la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans les 57817 mille du nombre donné.

On est conduit à extraire la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans 57817, c'est-à-dire à extraire la racine cubique de ce nombre à l'unité près. Mais 57817 étant > 1000, sa racine est plus grande que 10; les raisonnements précédents sont donc applicables, et il faut extraire la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans les 57 mille de 57817, pour obtenir les dizaines de sa racine cubique. Le plus grand cube entier contenu dans 57 est 27 dont la racine cubique est 3. Le chiffre des dizaines de la racine cubique de 57817 est donc 3; reste à trouver le chiffre des unités.

57817	38
27	$2700 \times 8 = 3 \times 30^2 \times 8$
30817	$720 \times 8 = 3 \times 30 \times 8^2$
27872	$64 \times 8 = 8^3$
2945	$3484 \times 8 = 3 \times 30^2 \times 8 + 3 \times 30 \times 8^2 + 8^3$

Pour cela, retranchons 27 de 57; on trouve 30 pour reste. En retranchant le cube de 30, c'est-à-dire le cube des dizaines de la racine ou 27000 de 57817, on trouvera donc 30817. Le reste 30817 ainsi obtenu contient au moins le triple produit du carré des dizaines de la racine par les unités cherchées, plus le triple produit de ces dizaines par le carré des unités, plus le cube des

unités. Le triple carré des dizaines par les unités ne pouvant donner que des centaines, se trouvera dans les 308 centaines du reste 30817. En divisant 308 par le triple carré 27 du nombre de dizaines de la racine, on aura donc pour quotient le chiffre des unités de la racine ou un chiffre supérieur. Je dis *supérieur*, parce que 308 représente non-seulement le triple produit du carré du nombre de dizaines de la racine par ses unités, mais contient, en outre, les centaines des autres parties qui composent 30817. Le quotient obtenu devra donc toujours être essayé : le premier chiffre de la racine est le seul qui soit nécessairement exact.

308 divisé par 27 donne 11 pour quotient; mais comme le chiffre cherché est inférieur à 10, puisque le chiffre des dizaines est forcément 3, nous essayerons 9 et même 8; car 9 serait trop fort, parce que le cube de 39 est supérieur à 57817. La racine cubique à l'unité près de 57817 est donc égale ou inférieure à 38. Si le cube de 38 peut se retrancher de 57817, le chiffre 8 est exact; sinon, il faut le diminuer d'une unité, et recommencer l'essai. Nous avons déjà retranché de 57817, 27000 ou 30^3; il faut donc vérifier seulement si l'on peut retrancher du reste 30817 les trois autres parties du cube de 38. Pour former ces 3 parties, on opérera comme il suit.

Le triple carré de 3 étant 27, le triple carré de 30 sera 2700 : il suffira de multiplier 2700 par 8 pour avoir la première partie cherchée ou le triple carré des dizaines par les unités. Le triple produit de 30 par 8 sera 720 : 720×8 représentera donc le triple produit des dizaines par le carré des unités ou la seconde partie cherchée. Enfin, 64×8 représentera le cube de 8 ou la troisième partie demandée. L'essai sera ainsi ramené à voir si l'on peut retrancher du reste 30817 la somme 3484×8 ou 27872. La soustraction réussit, et le reste obtenu est 2945. 38 représente donc la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans 57817.

Par conséquent, en revenant au nombre 57817233, 38 représente les dizaines de la racine cubique de ce nombre. Il reste à trouver le chiffre des unités.

En retranchant 38^3 de 57817, on trouve 2945 ; en retranchant le cube de 380 de 57817000, on trouvera donc 2945000; et, par suite, en retranchant le cube de 380 ou le cube des dizaines de la racine de 57817233, on trouvera pour reste 2945233. 2945233 contient donc au moins le triple carré des dizaines de la racine multiplié par les unités cherchées, plus le triple produit des dizaines par le carré des unités, plus le cube des unités. Par conséquent, les centaines 29452 du nombre 2945233 sont au moins égales au triple carré du nombre 38 des dizaines de la racine, multiplié par les unités inconnues; et, en divisant

29452 par $38^2 \times 3$, on obtiendra un quotient égal ou supérieur à ces mêmes unités.

On peut facilement former, à l'aide des résultats précédents, le triple carré de 38. On a

5 7 8 1 7 2 3 3	386
2 7	$2700 = 3 \times 30^2$
3 0 8.1 7	$720 = 3 \times 30 \times 8$
2 7 8 7 2	$64 = 8^2$
2 9 4 5 2.3 3	$3484 = 3 \times 30^2 + 3 \times 30 \times 8 + 8^2$
2 6 4 0 4 5 6	$64 = 8^2$
3 0 4 7 7 7	$433200 = 3 \times 380^2$
	$6840 = 3 \times 380 \times 6$
	$36 = 6^2$
	440076

$38^2 \times 3 = 3 \times 30^2 + 6 \times 30 \times 8 + 3 \times 8^2$. Puisque 3484 représente déjà $3 \times 30^2 + 3 \times 30 \times 8 + 8^2$, il suffira d'ajouter à 3484, 720 ou $3 \times 30 \times 8$, 64 ou 8^2, plus encore une fois 64 ou 8^2, pour compléter $38^2 \times 3 = 4332$. En divisant 29452 par 4332, on trouve 6 pour quotient. La racine cherchée à l'unité près sera donc égale ou inférieure à 386. Pour essayer le chiffre 6, il faut voir si l'on peut retrancher 386^3 du nombre donné. On en a déjà retranché le cube de 380 ; il reste donc à voir si, du reste obtenu, on peut retrancher les trois autres parties du cube de 386. On a comme précédemment

$$433200 = 3 \times 380^2, \quad 6840 = 3 \times 380 \times 6, \quad 36 = 6^2.$$

L'essai consistera donc à retrancher du reste 2945233 la somme 440076×6 ou 2640456. La soustraction réussit et le reste obtenu est 304777. La racine cubique demandée est donc 386 à l'unité près par défaut, et 304777 représente le reste de l'opération.

Si l'on emploie la simplification connue, le calcul présente la disposition suivante.

5 7 8 1 7 2 3 3	386
3 0 8.1 7	2700
2 9 4 5 2.3 3	720
3 0 4 7 7 7	64
	3484
	64
	433200
	6840
	36
	440076

217. En relisant attentivement les raisonnements précédents, on arrive à formuler la règle suivante :

Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier à l'unité près, on le partage en tranches de trois chiffres à partir de la droite et en remontant vers la gauche, de sorte que la dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un ou deux chiffres. Le nombre des tranches obtenues indique le nombre des chiffres de la racine. On obtient le premier chiffre de la racine en extrayant la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans la dernière tranche à gauche. On retranche le cube de ce chiffre de cette même tranche et, à côté du reste, on abaisse la tranche suivante : on sépare les centaines de l'ensemble obtenu. En divisant ces centaines par le triple carré du premier chiffre de la racine, on a le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer, on peut opérer comme nous l'avons indiqué ; ou bien, élever au cube le nombre formé par les deux premiers chiffres de la racine et voir si l'on peut retrancher ce cube de l'ensemble des deux premières tranches à gauche du nombre proposé. Si la soustraction est possible, le chiffre essayé est exact ; sinon, on le diminue d'une unité et l'on recommence l'essai. A côté du second reste obtenu, on abaisse la troisième tranche : on sépare les centaines de l'ensemble obtenu, on les divise par le triple carré du nombre déjà écrit à la racine ; on a le troisième chiffre de cette racine qu'on essaye comme précédemment. On continue de la même manière, jusqu'à ce qu'on ait abaissé la dernière tranche.

218. Le reste de l'opération ne peut pas dépasser 3 fois le carré de la racine, plus 3 fois cette racine. En effet, le nombre proposé N est égal au cube de sa racine A, plus le reste trouvé R. Si ce reste était seulement égal à $3A^2 + 3A + 1$, le nombre donné égal à $A^3 + R$, serait égal à $A^3 + 3A^2 + 3A + 1$ ou à $(A + 1)^3$. Sa racine cubique ne serait donc pas A à l'unité près, mais bien $A + 1$; et la crainte d'écrire au résultat un chiffre trop fort en aurait fait écrire un trop faible.

Cette remarque s'applique évidemment aux restes trouvés dans le courant de l'opération, comparés aux nombres déjà écrits à la racine.

Racine cubique des fractions et des nombres décimaux.

219. Quelle que soit la fraction proposée $\frac{a}{b}$, on a d'une manière générale

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}},$$

le cube de la seconde expression étant $\frac{a}{b}$ comme celui de la première,

Il est important d'opérer toujours sur des fractions dont le dénominateur soit cube parfait, afin de pouvoir apprécier immédiatement le véritable degré d'approximation. On n'a, pour y arriver, qu'à multiplier haut et bas la fraction donnée par le carré de son dénominateur. Ainsi,

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 7^2}{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{5 \times 7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{5 \times 7}}{7}.$$

Si l'on extrait la racine cubique de 5×7^2 ou 245 à l'unité près, comme on devra diviser le résultat trouvé par 7, on obtiendra la racine cubique de $\frac{5}{7}$ à $\frac{1}{7}$ près.

On peut simplifier en multipliant les deux termes de la fraction par les facteurs premiers du dénominateur élevés à des puissances telles, que leurs exposants deviennent tous multiples de 3 : le dénominateur sera alors nécessairement un cube parfait.

220. Soit à extraire la racine cubique d'un nombre décimal tel que 2487,82. On a

$$248782 = 2487,82 \times 100$$

et, par suite,

$$\sqrt[3]{248782} = \sqrt[3]{2487,82} \times \sqrt[3]{100}, \quad \text{d'où} \quad \sqrt[3]{2487,82} = \frac{\sqrt[3]{248782}}{\sqrt[3]{100}}.$$

Pour que la question soit convenablement résolue, il faut qu'on ait à diviser par la racine cubique d'une puissance de dix qui soit cube parfait. Or, on peut toujours se placer dans ces conditions, en rendant multiple de trois (s'il ne l'est pas déjà) le nombre des chiffres décimaux par l'addition d'un ou deux zéros. Dans l'exemple proposé, on remplacera le nombre donné par son équivalent 2487,820 et l'on aura

$$\sqrt[3]{2487,820} = \frac{\sqrt[3]{2487820}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{2487820}}{10}.$$

La règle pratique sera donc *de compléter le nombre des chiffres décimaux de manière qu'il soit multiple de trois, par un ou deux zéros s'il est nécessaire; d'extraire la racine cubique à l'unité près du nombre obtenu, abstraction faite de la virgule; puis de séparer sur la droite de cette racine trois fois moins de chiffres décimaux qu'il n'y en a dans le nombre considéré. L'ordre décimal auquel on arrive ainsi est aussi celui de l'approximation obtenue.*

En général, pour extraire la racine cubique d'un nombre

fractionnaire à une approximation décimale donnée, il faut donc réduire l'expression fractionnaire en décimales, jusqu'à ce qu'on obtienne trois fois plus de chiffres décimaux qu'on n'en veut à la racine, et appliquer la règle qu'on vient d'indiquer. Nous verrons qu'on peut pousser beaucoup moins loin la réduction en décimales.

La même remarque est applicable lorsqu'on veut extraire la racine cubique d'un nombre entier à une approximation décimale donnée, puisqu'on peut le considérer comme un nombre décimal contenant à sa partie décimale trois fois plus de zéros qu'on ne veut avoir de chiffres décimaux à la racine.

Exemples. 1°. Extraire la racine cubique de $\frac{355}{113}$ à 0,01 près.

```
355        | 113          3,1 4 1 5 9 2   | 1,46
 160       |-----------   2 1.4 1         |-----
  470      | 3,141592       3 9 7 5.9 2    | 300
   180                        29 4 5 6      120
    670                                       16
    1050                                     ---
      330                                    436
      104                                     16
                                            -----
                                            58800
                                             2520
                                               36
                                            -----
                                            61356
```

On a $\frac{355}{113} = 3,141592$ à 0,000001 près. La racine cubique de 3,141592 sera 1,46 à 0,01 près.

2°. Extraire la racine cubique de 3 à 0,001 près.

```
3                    | 1,442
2 0.0 0              |-----
  2 5 6 0.0 0         | 300
    1 4 0 1 6 0.0 0    120
      1 5 5 7 1 1 2     16
                       ---
                       436
                        16
                       -----
                       58800
                        1680
                          16
                       -----
                       60496
                          16
                       -------
                       6220800
                          8640
                             4
                       -------
                       6229444
```

On trouve $\sqrt[3]{3} = 1,442$ à 0,001 près par défaut.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES APPROXIMATIONS DÉCIMALES.

221. Le calcul des nombres incommensurables se ramène, d'après ce qui précède, à celui des nombres commensurables. En effet, les *symboles* incommensurables doivent toujours être remplacés, au point de vue numérique, par des valeurs commensurables qui en diffèrent d'aussi peu qu'on voudra (199). Il n'y a donc pas lieu de donner, à cet égard, de nouvelles définitions des opérations fondamentales. Il faut seulement faire remarquer que ces opérations, par rapport aux nombres incommensurables, resteront aussi symboliques tant qu'on n'aura pas remplacé les nombres incommensurables considérés par des valeurs commensurables convenables. Ainsi les expressions $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{3})^5$, $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$, exigent, pour être comparées à l'unité (*), qu'on remplace $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ par des valeurs commensurables approchées suivant les cas à 0,1; à 0,01, etc.

Mais ici une nouvelle question se présente. Quelle influence l'approximation des *données* a-t-elle sur l'approximation du *résultat?* Et si l'approximation du résultat est indiquée d'avance, avec quelle approximation doit-on alors calculer les données? La réponse à cette question complexe est fournie par la théorie des approximations décimales.

Relation entre l'erreur absolue et l'erreur relative.

222. Il faut distinguer avec soin deux sortes d'erreurs : l'erreur *absolue* et l'erreur *relative*. *L'erreur absolue est l'erreur par rapport à l'unité choisie; l'erreur relative est l'erreur par rapport au nombre lui-même.*

Soit le nombre 35,62724. Si l'on néglige les deux derniers chiffres décimaux, on néglige une quantité plus petite qu'un millième d'unité : l'erreur absolue est donc plus petite qu'un millième. Le nombre 35,627 contient $\frac{35627}{1000}$; $\frac{1}{1000}$ est donc sa $35627^{\text{ième}}$ partie. Dès lors l'erreur relative est plus petite que $\frac{1}{35627}$. Réciproquement, si l'erreur relative est plus petite que

(*) Nous laissons de côté les simplifications apportées par le calcul des radicaux, qui ne changent rien au fond de la remarque.

$\frac{1}{35627}$, on peut compter sur les cinq premiers chiffres du nombre proposé. Car ce nombre renfermant 35627 millièmes, si son erreur relative tombe au-dessous de $\frac{1}{35627}$, c'est que son erreur absolue tombe au-dessous d'un millième.

On voit qu'on a une limite supérieure de l'erreur relative en divisant l'unité par le nombre proposé exprimé en unités de même ordre que l'erreur absolue.

On pourrait dire aussi que cette limite est égale à la limite supérieure de l'erreur absolue, divisée par le nombre considéré tel qu'il est donné $\left(\frac{1}{35627} = \frac{0,001}{35,627}\right)$.

Représentons par e d'une manière générale la limite supérieure de l'erreur absolue, par r la limite supérieure de l'erreur relative, par A le nombre proposé approché par défaut. On pourra poser la relation fondamentale

$$r = \frac{e}{A} \quad \text{ou} \quad e = Ar.$$

e désigne, dans les applications, une unité de l'ordre au-dessous duquel tombe immédiatement l'erreur absolue : c'est un centième, un millième, si l'erreur absolue est plus petite qu'un centième ou un millième. A représente l'ensemble des chiffres exacts du nombre proposé et contient autant de chiffres décimaux que l'expression de e.

On aura aussi

$$r = \frac{1}{N},$$

N étant le nombre A, abstraction faite de la virgule.

Dans l'exemple considéré, on a

$$e = 0,001, \quad A = 35,627 \quad \text{et} \quad N = 35627.$$

Dans les applications, c'est l'erreur relative qui est importante. Lorsqu'on donne les dimensions d'un bâtiment à 1 millimètre près, on atteint une très-grande approximation. Lorsqu'on donne avec la même approximation le diamètre d'un tube thermométrique, l'approximation est plus que grossière, puisque ce diamètre peut tomber au-dessous de 1 millimètre.

223. Il existe une relation fort simple entre l'erreur relative et la quotité des chiffres exacts du nombre proposé. Nous venons de voir qu'on obtenait une limite supérieure de l'erreur relative en divisant l'unité par le nombre proposé exprimé en unités de même ordre que l'erreur absolue. Ainsi en reprenant l'exemple précédent, si le nombre 35,627 est approché à

moins d'un millième, l'erreur relative aura pour limite supérieure $\frac{1}{35627}$. Mais, en remplaçant 35627 par 30000 ou 3×10^4, on obtiendra à fortiori $\frac{1}{3 \times 10^4}$ pour limite supérieure de cette erreur, et l'on introduira dans l'expression de cette limite le nombre des chiffres exacts égal à $4+1$.

D'une manière générale, si K représente le chiffre des plus hautes unités du nombre proposé et si ce nombre renferme n chiffres exacts (*), on pourra prendre pour limite supérieure de l'erreur relative $\frac{1}{K \times 10^{n-1}}$ ou encore $\frac{1}{10^{n-1}}$.

En rangeant par ordre de grandeur les limites de l'erreur relative qu'on peut avoir à employer, on obtient

$$\frac{1}{N}, \quad \frac{1}{K \times 10^{n-1}}, \quad \frac{1}{10^{n-1}}.$$

224. Réciproquement, si l'erreur relative est donnée plus petite que $\frac{1}{K' \times 10^p}$, K' étant inférieur à 10, et si K est le premier chiffre à gauche de N ou le chiffre des plus hautes unités de A, on pourra compter sur $p+1$ chiffres ou sur p chiffres exacts dans le nombre proposé, suivant que K' sera plus grand ou plus petit que K. En effet, si K' est plus grand que K, l'erreur relative plus petite que $\frac{1}{K' \times 10^p}$ sera à plus forte raison inférieure à l'unité divisée par K suivi de p chiffres quelconques; et dès lors, d'après ce qui précède (222), le nombre proposé renfermera $p+1$ chiffres exacts (**). Si K' est plus petit que K, l'erreur relative plus petite que $\frac{1}{K' \times 10^p}$, ou que $\frac{1}{10K' \times 10^{p-1}}$, est seulement plus petite que $\frac{1}{K \times 10^{p-1}}$ ou, mieux, que l'unité divisée par K suivi de $p-1$ chiffres quelconques; car $10K'$ l'emporte nécessairement sur K. Par suite, on ne peut plus compter que sur p chiffres exacts dans le nombre proposé.

Ainsi le nombre proposé étant 35,62724, si l'on sait que l'erreur relative est inférieure à $\frac{1}{5 \times 10^4}$, cette erreur relative

(*) Si A était un nombre décimal sans partie entière et qu'il y eût des zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif, ces zéros ne compteraient pas dans les n chiffres exacts.

(**) Plus exactement, l'erreur absolue sur le nombre proposé sera plus petite qu'une unité de l'ordre du dernier chiffre conservé.

plus petite que $\frac{1}{50000}$ sera à fortiori plus petite que $\frac{1}{30000}$ ou que $\frac{1}{35627}$. On pourra donc compter sur les cinq premiers chiffres du nombre donné (**222**), et l'on a $5 > 3$ qui est le chiffre des plus hautes unités de ce nombre.

Si l'on donnait au contraire l'erreur relative seulement plus petite que $\frac{1}{2 \times 10^4}$ ou que $\frac{1}{20000}$, on ne pourrait plus dire que cette erreur est inférieure à $\frac{1}{30000}$ ou à $\frac{1}{35627}$; mais on pourrait affirmer qu'elle tombe au-dessous de $\frac{1}{3000}$ ou de $\frac{1}{3652}$. On ne pourra donc dans ce cas compter que sur les quatre premiers chiffres du nombre donné, et l'on a $2 < 3$ qui est le chiffre des plus hautes unités de ce nombre.

Si $K = K'$, il est prudent de ne compter que sur p chiffres exacts; car le nombre proposé étant 35,627, si l'on donne l'erreur relative plus petite que $\frac{1}{30000}$ ou que $\frac{1}{3 \times 10^4}$, rien ne prouve qu'elle soit plus petite que $\frac{1}{35627}$; mais elle est plus petite que $\frac{1}{3563}$, et l'on peut certainement compter sur quatre chiffres exacts.

En résumé, *si l'erreur relative a pour expression limite* $\frac{1}{K' \times 10^p}$, *il faut comparer le chiffre* K *des plus hautes unités du nombre cherché au chiffre* K', *et compter sur* $p + 1$ *ou sur* p *chiffres exacts, suivant que* K' *est plus grand ou plus petit que* K.

Si la limite de l'erreur relative est exprimée par $\frac{1}{10^p}$, *on ne devra compter que sur* p *chiffres exacts ; car* $K' = 1$ *est ici au plus égal à* K.

Une remarque est importante. Soit le nombre 35,62724. On donne l'erreur relative plus petite que $\frac{1}{5 \times 10^4}$. D'après la règle, on peut compter sur 5 chiffres exacts. On doit donc prendre 35,627; mais on néglige ainsi 24 cent-millièmes. Si le nombre est approché par défaut, on fait donc deux erreurs de même sens qui peuvent dépasser 0,001, et il faut forcer l'unité sur le dernier chiffre conservé, c'est-à-dire prendre 35,628. L'erreur commise l'est par défaut ou par excès; mais elle est

moindre qu'un millième. Si l'on sait au contraire que le nombre donné est approché par excès, en négligeant ses derniers chiffres, on diminue l'erreur, et l'on doit conserver le chiffre 7 tel qu'il est. Si l'on ignore le sens de l'erreur qui affecte le nombre donné, on peut faire (dans le cas considéré) une erreur plus grande que 0,001; mais on est sûr qu'elle n'atteint pas 0,002.

Addition et soustraction.

225. La considération des erreurs relatives simplifiera beaucoup ce qui a rapport aux opérations supérieures. Pour l'addition et la soustraction, il est plus simple de considérer les erreurs absolues.

Comme il arrive souvent qu'on ne connaît pas le sens des erreurs, il faut se supposer placé, au point de vue théorique, dans le cas le plus défavorable. Pour l'addition, on admettra donc que toutes les erreurs sont de même sens, car alors elles s'ajouteront.

Si l'on a à ajouter les trois nombres 6,782; 9,6807; 15,01; chacun d'eux étant supposé exact à une unité près de l'ordre de son dernier chiffre, on voit qu'on ne pourra pas compter sur le chiffre des centièmes du résultat. On doit donc demander, au plus, la somme cherchée à 0,1 près et négliger dans les nombres proposés tous les chiffres qui dépassent l'ordre des centièmes. L'erreur sur chacun d'eux étant ainsi inférieure à 1 centième, elle sera sur leur somme inférieure à 3 centièmes ou à un dixième. La somme demandée sera 31,5 à 0,1 près.

$$\begin{array}{r} 6,78 \\ 9,68 \\ 15,01 \\ \hline 31,47 \end{array}$$

Réciproquement, si la somme est demandée d'avance à 0,1 près, chacun des nombres qui la composent devra être calculé à 0,01 près.

Remarquons que nous avons pris 31,5 pour résultat. En effet, 31,47 étant déjà un résultat par défaut, si nous négligions encore 7 centièmes, l'erreur pourrait devenir supérieure à 10 centièmes ou 1 dixième. Ainsi, quand on sait que le résultat est obtenu par défaut, il faut forcer l'unité sur le dernier chiffre conservé; on fait alors deux erreurs en sens contraire, chacune plus petite qu'une unité du dernier ordre conservé, de sorte que celle sur le résultat définitif remplit à fortiori cette condition.

Ce qui précède suppose qu'on n'a pas plus de vingt nombres à ajouter; car on peut calculer chacun d'eux à 0,005 ou à $\frac{1}{2}$ centième près (175), si l'on veut avoir la somme à 0,1 près.

Si l'on opère sur plus de vingt nombres, il suffit de calculer chacun d'eux avec deux chiffres décimaux de plus que ne l'indique l'ordre d'approximation demandé.

226. Pour la soustraction, on doit regarder les erreurs comme étant de sens contraire : elles s'ajoutent alors (62). Soient les nombres 82,6871 et 29,435 approchés chacun à une unité près de l'ordre de leur dernier chiffre. On ne pourra pas compter sur le chiffre des millièmes du résultat. On soustraira donc 29,435 de 82,687, et l'erreur sur le résultat étant inférieure à 0,002, ce résultat sera 53,25 à 0,01 près.

$$\begin{array}{r} 82,687 \\ 29,435 \\ \hline 53,252 \end{array}$$

Réciproquement, si la différence de deux nombres est demandée d'avance à 0,01 près, il faudra calculer chacun d'eux à 0,001 près.

Donc, d'une manière générale, *pour l'addition et la soustraction, il faut prendre les nombres à ajouter ou à soustraire avec un chiffre de plus que le résultat ne peut ou ne doit en contenir.*

Multiplication.

227. Nous devrons, comme pour l'addition, supposer les erreurs de même sens. Soient deux nombres A et B approchés tous deux par défaut. Désignons par α et β les limites supérieures des erreurs absolues commises sur les nombres exacts en les remplaçant par A et B. Le véritable produit sera plus petit que

$$(A+\alpha)(B+\beta) = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

Le produit approché étant AB, l'erreur absolue du résultat sera plus petite que

$$(A+\alpha)(B+\beta) - AB = A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

En général, les limites α et β étant des quantités très-petites, leur produit $\alpha\beta$ est lui-même une quantité très-petite. Si on le néglige, on pourra regarder l'erreur absolue du produit comme égale à $A\beta + B\alpha$. Pour avoir l'erreur relative correspondante, il faut diviser $A\beta + B\alpha$ par AB; ce qui donne

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B}.$$

On arrive donc à ce théorème : *L'erreur relative d'un produit de deux facteurs est sensiblement égale à la somme des erreurs relatives des deux facteurs* (222).

Il est facile d'étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

Si le théorème est supposé vrai pour m facteurs A, B, C, D, etc., dont les erreurs absolues ont pour limites α, β, γ, δ, etc., il sera encore vrai lorsqu'un nouveau facteur L, dont l'erreur absolue aura pour limite λ, s'introduira. En effet, le produit ABCD...L peut se décomposer en deux facteurs : ABCD... d'une part, et L de l'autre. L'erreur relative du produit sera égale à la somme des erreurs relatives des deux facteurs, c'est-à-dire à $\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}+\ldots+\frac{\lambda}{L}$. Le théorème, vrai pour deux facteurs, l'est donc pour trois facteurs, etc.

228. On peut donc maintenant résoudre toutes les questions d'approximation qui se rapportent à la multiplication.

Montrons d'abord comment on doit calculer le produit, lorsque les facteurs sont donnés avec une certaine approximation.

1°. Soit à multiplier 4832,95 par 9,2371. Le multiplicande est approché à 0,01 près par défaut, et le multiplicateur à 0,0001 près par défaut. L'erreur relative du produit étant la somme des erreurs relatives des facteurs, elle sera ici égale (**223**) à $\frac{1}{4\times10^5}+\frac{1}{9\times10^4}$ ou à $\frac{49}{36\times10^5}$. Cette fraction est plus petite que $\frac{1}{10^4}$; l'erreur relative du produit sera donc plus petite que $\frac{1}{10^4}$, et l'on pourra compter seulement sur quatre ou cinq chiffres exacts au produit (**224**); comme il renferme cinq chiffres à sa partie entière, on devra donc le calculer à l'unité près en appliquant le procédé de la multiplication abrégée (**176**).

$$\begin{array}{r}
4832,95\\
173\ 29\\
\hline
43496\ 55\\
966\ 58\\
144\ 96\\
33\ 81\\
48\\
\hline
44642,38
\end{array}.$$

Le produit cherché sera 44643 à l'unité près.

2°. Soit à multiplier 32,179 par 27,804, sachant que les deux facteurs sont approchés par défaut à 0,001 près. Forçons l'unité sur le dernier chiffre du multiplicateur, il sera approché par excès à moins de 1 millième. Les erreurs ayant lieu en *sens contraire*, l'erreur relative du produit sera égale à *la différence*

des erreurs relatives des deux facteurs (*), c'est-à-dire plus petite que la plus grande d'entre elles ou que $\frac{1}{2 \times 10^4}$. Le chiffre des plus hautes unités du produit surpassant 2, on ne devra compter que sur quatre chiffres au produit, et comme il ne contient que trois chiffres à sa partie entière, on le calculera à 0,1 près.

$$\begin{array}{r}
32,179 \\
40872 \\
\hline
643580 \\
225253 \\
25736 \\
128 \\
\hline
894,697
\end{array}$$

Le produit cherché sera 894,7 à 0,1 près.

3°. Soit à élever au cube le nombre 0,045782.

L'erreur relative du produit, égale à la somme des erreurs relatives des facteurs, sera ici égale à 3 fois l'erreur relative du nombre proposé ou à $\frac{3}{4 \times 10^4}$. Cette fraction est plus petite que $\frac{1}{10^4}$; on ne pourra donc compter que sur les quatre premiers chiffres du cube cherché. Comme il doit contenir dix-huit chiffres décimaux, dont *au moins* trois zéros [qui ne doivent pas entrer dans l'appréciation de l'erreur relative, et par suite dans le nombre des chiffres exacts (223, note 1)], on devra le calculer avec sept décimales ou à 0,0000001 près. Par suite, le carré devra d'abord être calculé avec deux chiffres de plus ou neuf décimales (176). On emploiera la multiplication abrégée.

$$\begin{array}{r}
0,045782\ldots\ldots \\
28754\ldots \\
\hline
183128000 \\
22891000 \\
3204740 \\
366256\,. \\
9156 \\
\hline
0,00209599152
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
0,002095992 \\
2875400 \\
\hline
83836 \\
10475 \\
1463 \\
160 \\
4 \\
\hline
0,000095938
\end{array}$$

Le cube cherché sera 0,0000960 à 0,0000001 près.

(*) Dans ce cas, le multiplicande exact étant représenté par $A + \alpha$, le multiplicateur exact sera représenté par $B - \beta$, en désignant par B le multiplicateur

4°. Soit à multiplier 262,457 par 3,1415926535.... On suppose ici que le second facteur peut être obtenu avec telle approximation qu'on voudra, le premier est approché à 0,001 près. L'erreur relative du produit étant au moins égale à l'erreur relative du multiplicande, c'est-à-dire à $\frac{1}{2 \times 10^5}$, on ne pourra compter sur plus de six chiffres exacts au produit, en admettant que le chiffre de ses plus hautes unités surpasse 2. Comme le produit renferme trois chiffres entiers, il faudra le calculer à 0,001 près. En prenant le multiplicateur avec six chiffres, l'erreur du produit restera toujours inférieure à $\frac{1}{10^5}$. On emploiera le procédé de la multiplication abrégée.

```
 262,457..
   9 51413
 --------
 78737100
  2624570
  1049828
    26245
     13120
      2358
 --------
 824,53221
```

Le produit cherché sera 824,533 à 0,001 près.

229. Supposons maintenant que l'approximation du produit soit indiquée d'avance, et qu'on demande avec quelle approximation les facteurs du produit doivent être calculés.

1°. On veut calculer le produit $\sqrt[3]{3} \times \sqrt{10}$ à 0,01 près. Le plus simple est de se rappeler (176) que le procédé de la multiplication abrégée exige qu'on connaisse le multiplicande avec deux chiffres décimaux de plus qu'on n'en veut conserver au produit. Comme chaque facteur peut être pris pour multiplicande, il faut donc les calculer tous les deux avec deux chiffres décimaux de plus qu'on n'en veut avoir au produit,

---

approché par excès et par β l'erreur commise. Le produit exact sera alors

$$(A + \alpha)(B - \beta) = AB + \alpha B - A\beta - \alpha\beta,$$

d'où

$$(A + \alpha)(B - \beta) - AB = \alpha B - A\beta - \alpha\beta.$$

Si on néglige $\alpha\beta$, l'erreur absolue commise sur le produit est sensiblement $\alpha B - A\beta$, et l'erreur relative devient

$$\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}.$$

c'est-à-dire à 0,0001 près, puisque chaque facteur a un chiffre à sa partie entière.

On trouve $\sqrt[3]{3} = 1,4422$ et $\sqrt{10} = 3,1622$.

$$\begin{array}{r} 1,4422 \\ 2\ 2613 \\ \hline 4\ 3266 \\ 1442 \\ 864 \\ 28 \\ 2 \\ \hline 4,5602 \end{array}$$

Par suite, le produit cherché sera 4,57 à 0,01 près.

2°. Soit à calculer le produit $(\sqrt{3}+2)\times(\sqrt{45}-1)\times(\sqrt{8}+1)$ à 0,01 près de sa valeur. On veut que l'erreur relative sur le produit soit inférieure à $\frac{1}{10^2}$. Il faut donc connaître ce produit avec 3 chiffres exacts (223). Les deux facteurs $[(\sqrt{3}+2)\times(\sqrt{45}-1)]$ d'une part et $\sqrt{8}+1$ de l'autre devront donc être calculés avec 5 chiffres exacts (1°). Pour que le produit $(\sqrt{3}+2)\times(\sqrt{45}-1)$ présente 5 chiffres exacts, comme il renferme deux chiffres à sa partie entière, il faut pouvoir le calculer jusqu'aux millièmes; ce qui exige qu'on connaisse les deux facteurs jusqu'aux cent-millièmes, c'est-à-dire avec 6 chiffres exacts. On trouvera :

$$\sqrt{3}+2 = 3,73205; \quad \sqrt{45}-1 = 5,70820; \quad \sqrt{8}+1 = 3,8284.$$

En appliquant le procédé de la multiplication abrégée, on arrive rapidement au produit cherché qui sera 81,6 à 0,1 près.

$$\begin{array}{r} 3,73205 \\ 0\ 28075 \\ \hline 18\ 66025 \\ 2\ 61240 \\ 2984 \\ 74 \\ \hline 21,30323 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21,304 \\ 48\ 283 \\ \hline 63\ 912 \\ 17\ 040 \\ 426 \\ 168 \\ 8 \\ \hline 81,554 \end{array}$$

Division.

230. On supposera que les erreurs sur le dividende et le diviseur sont de sens contraire ; de sorte qu'elles agiront dans le même sens pour augmenter ou diminuer le quotient. Le

dividende étant approché par excès et le diviseur par défaut, le quotient sera approché par excès; le dividende étant approché par défaut et le diviseur par excès, le quotient sera approché par défaut. On voit que les erreurs du diviseur et du quotient sont alors toujours de sens contraire. Il en résulte que le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, l'erreur relative du dividende est sensiblement égale à la différence des erreurs relatives du diviseur et du quotient (**228**, note 1). On peut donc dire d'une manière générale que *l'erreur relative du quotient est égale à la somme des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

231. Montrons d'abord comment on doit calculer le quotient, lorsque le dividende et le diviseur sont donnés avec une certaine approximation.

1°. On demande de calculer le quotient de 1 par 3,1415927. Le dividende est exact, le diviseur est approché par excès à $\frac{1}{2}$ unité près de l'ordre du dernier chiffre; le quotient sera alors approché par défaut. Son erreur relative sera égale à l'erreur relative du diviseur, puisque celle du dividende est nulle, c'est-à-dire à $\frac{\frac{1}{2}}{3 \times 10^7} = \frac{1}{6 \times 10^7}$.

Le premier chiffre du quotient étant 3, on pourra compter sur huit chiffres exacts au quotient (**224**) et le calculer par conséquent à 0,00000001 près.

$$\begin{array}{r|l}
10000000000 & 3141592700 \\ \cline{2-2}
575221900 & 31830988 \\
261062630 & \\
9735214 & \\
310438 & \\
27703 & \\
2575 & \\
63 &
\end{array}$$

En employant le procédé de la division abrégée (**183**) et en se reportant au n° **184**, on trouve pour quotient 0,31830988.

2°. On demande de calculer le quotient de 0,993855 par 9,8088, ces deux nombres étant approchés à une unité près de l'ordre de leurs derniers chiffres.

L'erreur relative du quotient sera égale à $\frac{1}{9 \times 10^5} + \frac{1}{9 \times 10^4}$ ou à $\frac{11}{9 \times 10^5}$; cette fraction étant moindre que $\frac{1}{10^4}$, on pourra compter au plus sur 5 chiffres au quotient.

En employant le procédé de la division abrégée et en remarquant qu'on peut aller au quotient jusqu'au chiffre des cent-

millièmes (184), on trouvera pour quotient 0,10132 à 0,00001 près.

$$\begin{array}{r|l} 993855 & 980880 \\ \cline{2-2} 12975 & 10132 \\ 3167 & \\ 227 & \\ 31 & \end{array}$$

232. Supposons maintenant que l'approximation du quotient soit indiquée d'avance et qu'on demande avec quelle approximation le dividende et le diviseur doivent être calculés.

1°. On veut calculer le quotient de $\sqrt{3}$ par $\sqrt{2}$ à 0,001 près. Le quotient ayant 1 pour partie entière, c'est demander de le calculer avec quatre chiffres exacts. L'erreur relative sur le quotient devra donc être plus petite que $\frac{1}{10^4}$ (223). Comme cette erreur relative doit être égale à la somme des erreurs relatives du dividende et du diviseur (230), la condition imposée sera remplie si l'on calcule le dividende par excès et le diviseur par défaut à $\frac{1}{2}$ dix-millième près; car, chacun d'eux contenant alors cinq chiffres exacts, la somme des erreurs relatives correspondantes sera plus petite que $\frac{\frac{1}{2}}{10^4} + \frac{\frac{1}{2}}{10^4} = \frac{1}{10^4}$. On trouve

$$\sqrt{3} = 1,7321 \quad \text{et} \quad \sqrt{2} = 1,4142.$$

$$\begin{array}{r|l} 173210 & 141420 \\ \cline{2-2} 31790 & 1224 \\ 3506 & \\ 678 & \\ 114 & \end{array}$$

En suivant la marche indiquée au n° 184, on trouve pour quotient 1,224 à 0,001 près par excès.

2°. On veut calculer le quotient de $\sqrt{10}$ par $\sqrt{3}$ à 0,001 près de sa valeur. C'est demander que l'erreur relative du quotient soit inférieure à 0,001 ou que le quotient renferme quatre chiffres exacts. La condition imposée sera remplie si l'on calcule le dividende par excès et le diviseur par défaut à $\frac{1}{2}$ dix-millième près; car chacun d'eux contenant alors 5 chiffres exacts, la somme des erreurs relatives correspondantes sera plus petite que $\frac{\frac{1}{2}}{3 \times 10^4} + \frac{\frac{1}{2}}{1 \times 10^4}$ ou que $\frac{2}{3 \times 10^4}$. Cette fraction étant moindre que $\frac{1}{10^4}$, on pourra compter sur 4 chiffres

exacts au quotient. On trouve

$$\sqrt{10} = 3,1623 \quad \text{et} \quad \sqrt{3} = 1,7320$$

et, par suite, le quotient cherché est 1,825 à 0,001 près par excès.

316230	173200
143030	1825
4470	
1006	
141	

Racine carrée.

233. Puisque l'erreur relative d'un produit est égale à la somme des erreurs relatives des deux facteurs, l'erreur relative d'un carré est égale au double de l'erreur relative du nombre élevé au carré. On peut donc admettre réciproquement que l'erreur relative de la racine carrée d'un nombre est la moitié de l'erreur relative commise sur ce nombre.

Ainsi, l'erreur relative d'un nombre ayant pour limite supérieure $\frac{1}{K \times 10^p}$ ($p+1$ étant le nombre des chiffres exacts), K désignant les plus hautes unités de ce nombre, l'erreur relative de la racine carrée de ce nombre aura pour limite supérieure $\frac{1}{2K \times 10^p}$. Il en résulte que si le premier chiffre de la racine est plus petit que 2K (*), on pourra compter sur $p+1$ chiffres exacts à la racine; sinon, seulement sur p chiffres exacts (224).

1°. Soit à calculer la racine carrée du quotient $\frac{1}{3,14159265 35...}$ à 0,0001 près, le diviseur pouvant être obtenu avec telle approximation qu'on voudra. Le premier chiffre du quotient étant un chiffre de dizièmes et ce premier chiffre étant 3, l'erreur relative sur la racine carrée de ce quotient sera inférieure à $\frac{1}{(2 \times 3) \times 10^p}$, $p+1$ représentant le nombre de chiffres exacts du quotient. Comme le premier chiffre de la racine est évidemment inférieur à 6, on pourra alors compter aussi sur $p+1$ chiffres exacts à cette racine. Mais $p+1$ doit être ici égal à 4, puisqu'on demande la racine à 0,0001 près. Par suite, on commencera par calculer le quotient avec 4 chiffres exacts ou à 0,0001 près; ce qui exigera qu'on prenne pour diviseur

(*) 2K représente ici ce que nous avons appelé K′ précédemment (224).

3,1415. On trouve pour quotient 0,3183 et pour racine carrée, 0,5641. On peut maintenant se reporter au n° 209.

1000000	314150	0,318 3	0,5641
57550	3183	68.3	106
26135		4 70.0	6
1007		20 40.0	1124
65		9 11 9	4
			11281
			1

2°. Calculer à 0,00001 près l'expression

$$\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}} \quad (*)$$

Il suffit évidemment de calculer à 0,00001 près chaque radical principal, puisqu'en en prenant le quart on divisera l'erreur par 4; de manière que l'erreur sur la somme sera inférieure à $\frac{1}{2}$ 0,00001.

Le premier chiffre de l'expression $3+\sqrt{5}$ étant 5 dont le double est 10, et le premier chiffre de la racine correspondante étant forcément inférieur à 10, il suffira pour calculer $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ à 0,00001 près ou avec 6 chiffres exacts, de connaître d'abord $3+\sqrt{5}$ avec six chiffres exacts. De même, le premier chiffre de l'expression $\sqrt{5-\sqrt{5}}$ étant 2 dont le double est 4 et le premier chiffre de la racine correspondante étant inférieur à 4, il faudra aussi calculer d'abord $5-\sqrt{5}$ avec 6 chiffres exacts. En résumé, *on peut dire qu'on peut compter à la racine sur autant de chiffres exacts qu'il y en a dans le nombre proposé ou sur autant moins un, suivant que le premier chiffre de la racine est plus petit ou plus grand que le double du premier chiffre du nombre proposé*. On trouve

$$\sqrt{5}=2,23606,$$

d'où

$$3+\sqrt{5}=5,23606 \quad \text{et} \quad 5-\sqrt{5}=2,76394.$$

Par suite

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}=2,28824 \quad \text{et} \quad \sqrt{5-\sqrt{5}}=1,66251.$$

(*) Cette expression représente le sinus naturel de 81°. (*Voir* la *Trigonométrie*.)

5,236060	2,28824	2,763940	1,66251
1 23	42	1 76	26
3960	2	2039	6
37660	448	8340	326
111600	8	169600	6
2007600	4568	337500	3322
177024	8	4999	2
	45762		33245
	2		5
	457644		332501
	4		1

L'expression demandée est

$$\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}=\frac{3,95075}{4}=0,98769.$$

234. Les questions relatives à la racine cubique se traiteront d'une manière analogue, en remarquant que l'erreur relative de la racine cubique d'un nombre est le tiers de l'erreur relative de ce nombre.

Table des carrés des 1000 premiers nombres.

On peut se servir de cette table de la manière suivante. On veut extraire la racine carrée de 48217932 à l'unité près. On remarque que, d'après la table, le plus grand carré contenu dans les 482179 centaines de ce nombre est 481636 dont la racine carrée est 694. Les dizaines de la racine cherchée sont donc 694; on n'a plus qu'à chercher le chiffre des unités.

Soit à extraire la racine carrée de 11 à 0,001 près. C'est comme si l'on demandait la racine carrée de 11000000 à l'unité près. On remarque alors que le plus grand carré contenu dans les 110000 centaines de ce nombre est 109561 dont la racine carrée est 331. Les premiers chiffres de la racine cherchée sont donc 3,31. On n'a plus qu'à chercher le chiffre des millièmes.

NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.
1	1	54	2916	107	11449	160	25600
2	4	55	3025	108	11664	161	25921
3	9	56	3136	109	11881	162	26244
4	16	57	3249	110	12100	163	26569
5	25	58	3364	111	12321	164	26896
6	36	59	3481	112	12544	165	27225
7	49	60	3600	113	12769	166	27556
8	64	61	3721	114	12996	167	27889
9	81	62	3844	115	13225	168	28224
10	100	63	3969	116	13456	169	28561
11	121	64	4096	117	13689	170	28900
12	144	65	4225	118	13924	171	29241
13	169	66	4356	119	14161	172	29584
14	196	67	4489	120	14400	173	29929
15	225	68	4624	121	14641	174	30276
16	256	69	4761	122	14884	175	30625
17	289	70	4900	123	15129	176	30976
18	324	71	5041	124	15376	177	31329
19	361	72	5184	125	15625	178	31684
20	400	73	5329	126	15876	179	32041
21	441	74	5476	127	16129	180	32400
22	484	75	5625	128	16384	181	32761
23	529	76	5776	129	16641	182	33124
24	576	77	5929	130	16900	183	33489
25	625	78	6084	131	17161	184	33856
26	676	79	6241	132	17424	185	34225
27	729	80	6400	133	17689	186	34596
28	784	81	6561	134	17956	187	34969
29	841	82	6724	135	18225	188	35344
30	900	83	6889	136	18496	189	35721
31	961	84	7056	137	18769	190	36100
32	1024	85	7225	138	19044	191	36481
33	1089	86	7396	139	19321	192	36864
34	1156	87	7569	140	19600	193	37249
35	1225	88	7744	141	19881	194	37636
36	1296	89	7921	142	20164	195	38025
37	1369	90	8100	143	20449	196	38416
38	1444	91	8281	144	20736	197	38809
39	1521	92	8464	145	21025	198	39204
40	1600	93	8649	146	21316	199	39601
41	1681	94	8836	147	21609	200	40000
42	1764	95	9025	148	21904	201	40401
43	1849	96	9216	149	22201	202	40804
44	1936	97	9409	150	22500	203	41209
45	2025	98	9604	151	22801	204	41616
46	2116	99	9801	152	23104	205	42025
47	2209	100	10000	153	23409	206	42436
48	2304	101	10201	154	23716	207	42849
49	2401	102	10404	155	24025	208	43264
50	2500	103	10609	156	24336	209	43681
51	2601	104	10816	157	24649	210	44100
52	2704	105	11025	158	24964	211	44521
53	2809	106	11236	159	25281	212	44944

NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.
213	45369	266	70756	319	101761	372	138384
214	45796	267	71289	320	102400	373	139129
215	46225	268	71824	321	103041	374	139876
216	46656	269	72361	322	103684	375	140625
217	47089	270	72900	323	104329	376	141376
218	47524	271	73441	324	104976	377	142129
219	47961	272	73984	325	105625	378	142884
220	48400	273	74529	326	106276	379	143641
221	48841	274	75076	327	106929	380	144400
222	49284	275	75625	328	107584	381	145161
223	49729	276	76176	329	108241	382	145924
224	50176	277	76729	330	108900	383	146689
225	50625	278	77284	331	109561	384	147456
226	51076	279	77841	332	110224	385	148225
227	51529	280	78400	333	110889	386	148996
228	51984	281	78961	334	111556	387	149769
229	52441	282	79524	335	112225	388	150544
230	52900	283	80089	336	112896	389	151321
231	53361	284	80656	337	113569	390	152100
232	53824	285	81225	338	114244	391	152881
233	54289	286	81796	339	114921	392	153664
234	54756	287	82369	340	115600	393	154449
235	55225	288	82944	341	116281	394	155236
236	55696	289	83521	342	116964	395	156025
237	56169	290	84100	343	117649	396	156816
238	56644	291	84681	344	118336	397	157609
239	57121	292	85264	345	119025	398	158404
240	57600	293	85849	346	119716	399	159201
241	58081	294	86436	347	120409	400	160000
242	58564	295	87025	348	121104	401	160801
243	59049	296	87616	349	121801	402	161604
244	59536	297	88209	350	122500	403	162409
245	60025	298	88804	351	123201	404	163216
246	60516	299	89401	352	123904	405	164025
247	61009	300	90000	353	124609	406	164836
248	61504	301	90601	354	125316	407	165649
249	62001	302	91204	355	126025	408	166464
250	62500	303	91809	356	126736	409	167281
251	63001	304	92416	357	127449	410	168100
252	63504	305	93025	358	128164	411	168921
253	64009	306	93636	359	128881	412	169744
254	64516	307	94249	360	129600	413	170569
255	65025	308	94864	361	130321	414	171396
256	65536	309	95481	362	131044	415	172225
257	66049	310	96100	363	131769	416	173056
258	66564	311	96721	364	132496	417	173889
259	67081	312	97344	365	133225	418	174724
260	67600	313	97969	366	133956	419	175561
261	68121	314	98596	367	134689	420	176400
262	68644	315	99225	368	135424	421	177241
263	69169	316	99856	369	136161	422	178084
264	69696	317	100489	370	136900	423	178929
265	70225	318	101124	371	137641	424	179776

NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.
425	180625	478	228484	531	281961	584	341056
426	181476	479	229441	532	283024	585	342225
427	182329	480	230400	533	284089	586	343396
428	183184	481	231361	534	285156	587	344569
429	184041	482	232324	535	286225	588	345744
430	184900	483	233289	536	287296	589	346921
431	185761	484	234256	537	288369	590	348100
432	186624	485	235225	538	289444	591	349281
433	187489	486	236196	539	290521	592	350464
434	188356	487	237169	540	291600	593	351649
435	189225	488	238144	541	292681	594	352836
436	190096	489	239121	542	293764	595	354025
437	190969	490	240100	543	294849	596	355216
438	191844	491	241081	544	295936	597	356409
439	192721	492	242064	545	297025	598	357604
440	193600	493	243049	546	298116	599	358801
441	194481	494	244036	547	299209	600	360000
442	195364	495	245025	548	300304	601	361201
443	196249	496	246016	549	301401	602	362404
444	197136	497	247009	550	302500	603	363609
445	198025	498	248004	551	303601	604	364816
446	198916	499	249001	552	304704	605	366025
447	199809	500	250000	553	305809	606	367236
448	200704	501	251001	554	306916	607	368449
449	201601	502	252004	555	308025	608	369664
450	202500	503	253009	556	309136	609	370881
451	203401	504	254016	557	310249	610	372100
452	204304	505	255025	558	311364	611	373321
453	205209	506	256036	559	312481	612	374544
454	206116	507	257049	560	313600	613	375769
455	207025	508	258064	561	314721	614	376996
456	207936	509	259081	562	315844	615	378225
457	208849	510	260100	563	316969	616	379456
458	209764	511	261121	564	318096	617	380689
459	210681	512	262144	565	319225	618	381924
460	211600	513	263169	566	320356	619	383161
461	212521	514	264196	567	321489	620	384400
462	213444	515	265225	568	322624	621	385641
463	214369	516	266256	569	323761	622	386884
464	215296	517	267289	570	324900	623	388129
465	216225	518	268324	571	326041	624	389376
466	217156	519	269361	572	327184	625	390625
467	218089	520	270400	573	328329	626	391876
468	219024	521	271441	574	329476	627	393129
469	219961	522	272484	575	330625	628	394384
470	220900	523	273529	576	331776	629	395641
471	221841	524	274576	577	332929	630	396900
472	222784	525	275625	578	334084	631	398161
473	223729	526	276676	579	335241	632	399424
474	224676	527	277729	580	336400	633	400689
475	225625	528	278784	581	337561	634	401956
476	226576	529	279841	582	338724	635	403225
477	227529	530	280900	583	339889	636	404496

NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.
637	405769	690	476100	743	552049	796	633616
638	407044	691	477481	744	553536	797	635209
639	408321	692	478864	745	555025	798	636804
640	409600	693	480249	746	556516	799	638401
641	410881	694	481636	747	558009	800	640000
642	412164	695	483025	748	559504	801	641601
643	413449	696	484416	749	561001	802	643204
644	414736	697	485809	750	562500	803	644809
645	416025	698	487204	751	564001	804	646416
646	417316	699	488601	752	565504	805	648025
647	418609	700	490000	753	567009	806	649636
648	419904	701	491401	754	568516	807	651249
649	421201	702	492804	755	570025	808	652864
650	422500	703	494209	756	571536	809	654481
651	423801	704	495616	757	573049	810	656100
652	425104	705	497025	758	574564	811	657721
653	426409	706	498436	759	576081	812	659344
654	427716	707	499849	760	577600	813	660969
655	429025	708	501264	761	579121	814	662596
656	430336	709	502681	762	580644	815	664225
657	431649	710	504100	763	582169	816	665856
658	432964	711	505521	764	583696	817	667489
659	434281	712	506944	765	585225	818	669124
660	435600	713	508369	766	586756	819	670761
661	436921	714	509796	767	588289	820	672400
662	438244	715	511225	768	589824	821	674041
663	439569	716	512656	769	591361	822	675684
664	440896	717	514089	770	592900	823	677329
665	442225	718	515524	771	594441	824	678976
666	443556	719	516961	772	595984	825	680625
667	444889	720	518400	773	597529	826	682276
668	446224	721	519841	774	599076	827	683929
669	447561	722	521284	775	600625	828	685584
670	448900	723	522729	776	602176	829	687241
671	450241	724	524176	777	603729	830	688900
672	451584	725	525625	778	605284	831	690561
673	452929	726	527076	779	606841	832	692224
674	454276	727	528529	780	608400	833	693889
675	455625	728	529984	781	609961	834	695556
676	456976	729	531441	782	611524	835	697225
677	458329	730	532900	783	613089	836	698896
678	459684	731	534361	784	614656	837	700569
679	461041	732	535824	785	616225	838	702244
680	462400	733	537289	786	617796	839	703921
681	463761	734	538756	787	619369	840	705600
682	465124	735	540225	788	620944	841	707281
683	466489	736	541696	789	622521	842	708964
684	467856	737	543169	790	624100	843	710649
685	469225	738	544644	791	625681	844	712336
686	470596	739	546121	792	627264	845	714025
687	471969	740	547600	793	628849	846	715716
688	473344	741	549081	794	630436	847	717409
689	474721	742	550564	795	632025	848	719104

NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.	NOMBRES.	CARRÉS.
849	720801	887	786769	925	855625	963	927369
850	722500	888	788544	926	857476	964	929296
851	724201	889	790321	927	859329	965	931225
852	725904	890	792100	928	861184	966	933156
853	727609	891	793881	929	863041	967	935089
854	729316	892	795664	930	864900	968	937024
855	731025	893	797449	931	866761	969	938961
856	732736	894	799236	932	868624	970	940900
857	734449	895	801025	933	870489	971	942841
858	736164	896	802816	934	872356	972	944784
859	737881	897	804609	935	874225	973	946729
860	739600	898	806404	936	876096	974	948676
861	741321	899	808201	937	877969	975	950625
862	743044	900	810000	938	879844	976	952576
863	744769	901	811801	939	881721	977	954529
864	746496	902	813604	940	883600	978	956484
865	748225	903	815409	941	885481	979	958441
866	749956	904	817216	942	887364	980	960400
867	751689	905	819025	943	889249	981	962361
868	753424	906	820836	944	891136	982	964324
869	755161	907	822649	945	893025	983	966289
870	756900	908	824464	946	894916	984	968256
871	758641	909	826281	947	896809	985	970225
872	760384	910	828100	948	898704	986	972196
873	762129	911	829921	949	900601	987	974169
874	763876	912	831744	950	902500	988	976144
875	765625	913	833569	951	904401	989	978121
876	767376	914	835396	952	906304	990	980100
877	769129	915	837225	953	908209	991	982081
878	770884	916	839056	954	910116	992	984064
879	772641	917	840889	955	912025	993	986049
880	774400	918	842724	956	913936	994	988036
881	776161	919	844561	957	915849	995	990025
882	777924	920	846400	958	917764	996	992016
883	779689	921	848241	959	919681	997	994009
884	781456	922	850084	960	921600	998	996004
885	783225	923	851929	961	923521	999	998001
886	784996	924	853776	962	925444	1000	1000000

Table des racines carrée et cubique des 100 premiers nombres, avec sept décimales.

N	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{N}$	N	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{N}$
1	1,0000000	1,0000000	51	7,1414284	3,7084298
2	1,4142136	1,2599210	52	7,2111026	3,7325111
3	1,7320508	1,4422496	53	7,2801099	3,7562858
4	2,0000000	1,5874011	54	7,3484692	3,7797631
5	2,2360680	1,7099759	55	7,4161985	3,8029525
6	2,4494897	1,8171206	56	7,4833148	3,8258624
7	2,6457513	1,9129312	57	7,5498344	3,8485011
8	2,8284271	2,0000000	58	7,6157731	3,8708766
9	3,0000000	2,0800838	59	7,6811457	3,8929965
10	3,1622777	2,1544347	60	7,7459667	3,9148676
11	3,3166248	2,2239801	61	7,8102497	3,9364972
12	3,4641016	2,2894286	62	7,8740079	3,9578915
13	3,6055513	2,3513347	63	7,9372539	3,9790571
14	3,7416574	2,4101422	64	8,0000000	4,0000000
15	3,8729833	2,4662121	65	8,0622577	4,0207256
16	4,0000000	2,5198421	66	8,1240384	4,0412401
17	4,1231056	2,5712816	67	8,1853528	4,0615480
18	4,2426407	2,6207414	68	8,2462113	4,0816551
19	4,3588989	2,6684016	69	8,3066239	4,1015661
20	4,4721360	2,7144177	70	8,3666003	4,1212853
21	4,5825757	2,7589243	71	8,4261498	4,1408178
22	4,6904158	2,8020393	72	8,4852814	4,1601676
23	4,7958315	2,8438670	73	8,5440037	4,1793392
24	4,8989795	2,8844991	74	8,6023253	4,1983364
25	5,0000000	2,9240177	75	8,6602540	4,2171633
26	5,0990195	2,9624960	76	8,7177979	4,2358236
27	5,1961524	3,0000000	77	8,7749644	4,2543210
28	5,2915026	3,0365889	78	8,8317609	4,2726586
29	5,3851648	3,0723168	79	8,8881944	4,2908404
30	5,4772256	3,1072325	80	8,9442719	4,3088695
31	5,5677644	3,1413806	81	9,0000000	4,3267487
32	5,6568542	3,1748021	82	9,0553851	4,3444815
33	5,7445626	3,2075343	83	9,1104336	4,3620707
34	5,8309519	3,2396118	84	9,1651514	4,3795191
35	5,9160798	3,2710663	85	9,2195445	4,3968296
36	6,0000000	3,3019272	86	9,2736185	4,4140049
37	6,0827625	3,3322218	87	9,3273791	4,4310476
38	6,1644140	3,3619754	88	9,3808315	4,4479602
39	6,2449980	3,3912114	89	9,4339811	4,4647451
40	6,3245553	3,4199519	90	9,4868330	4,4814047
41	6,4031242	3,4482172	91	9,5393920	4,4979414
42	6,4807407	3,4760266	92	9,5916630	4,5143574
43	6,5574385	3,5033981	93	9,6436508	4,5306549
44	6,6332496	3,5303483	94	9,6953597	4,5468359
45	6,7082039	3,5568933	95	9,7467943	4,5629026
46	6,7823300	3,5830479	96	9,7979590	4,5788570
47	6,8556546	3,6088261	97	9,8488578	4,5947009
48	6,9282032	3,6342411	98	9,8994949	4,6104363
49	7,0000000	3,6593057	99	9,9498744	4,6260650
50	7,0710678	3,6840314	100	10,0000000	4,6415888

LIVRE CINQUIÈME.

LES MESURES ET LES APPLICATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

235. Nous avons achevé tout ce qui concerne le calcul quand on considère seulement les six premières opérations fondamentales. L'étude des logarithmes en algèbre et celle des rapports trigonométriques augmenteront plus tard nos ressources sous ce point de vue.

Pour terminer l'arithmétique proprement dite, nous devons maintenant exposer ses applications usuelles. Ces applications sont plutôt du ressort de l'algèbre; car l'arithmétique ne trouve pas les solutions, elle les calcule. Mais il ne sera pas inutile de montrer, par comparaison, quels sont les avantages de l'algèbre et, après avoir résolu certaines questions à l'aide de l'arithmétique, de les résoudre de nouveau algébriquement, avec une rapidité et une simplicité bien plus grandes.

Comme les calculs les plus ordinaires ont pour objet des longueurs, des surfaces, des volumes et des poids, nous exposerons d'abord le système général de ces mesures.

236. « L'excessive diversité des mesures de longueur, de » volume et de poids, autrefois usitées dans les diverses pro- » vinces de la France, présentait au gouvernement, ainsi qu'au » commerce, des inconvénients depuis longtemps reconnus. » Mais le caractère légal, attaché aux usages individuels de » ces provinces, n'aurait pas aisément permis à l'Administra- » tion royale de les ramener à l'uniformité. Lorsque la grande » révolution de 1789 eut mis toute la force d'un pouvoir cen- » tral aux mains de l'Assemblée Constituante, quelques hommes » éclairés songèrent à profiter de cette position pour donner à » la France un système de mesures général et uniforme, dont » toutes les parties fussent astreintes à un mode régulier de » dérivation. Une Commission, prise dans l'Académie des » Sciences, composée de Borda, Lagrange, Laplace, Monge et » Condorcet, fut chargée de proposer un choix d'unité fonda-

» mentale, et d'indiquer les opérations nécessaires pour la dé-
» terminer. » (*Voir* Biot, *Astronomie physique*, tome III, page 334.)

L'unité fondamentale choisie par la Commission fut la dix-millionième partie du quart d'un méridien terrestre (*) : cette unité fondamentale reçut le nom de *mètre*. Les résultats des opérations exécutées, pour la déterminer d'une manière aussi précise que possible, par Méchain, Delambre et Borda, furent approuvés par le Corps Législatif le 4 messidor an VII (22 juin 1799), et les étalons des mesures de longueur et de poids adoptées, déposés aux Archives (**).

Nota. D'après les opérations géodésiques exécutées et les calculs auxiliaires, le quart du méridien terrestre elliptique avait été trouvé égal à 5130740 toises (***) ou le mètre, égal à $0^{\text{Toise}},5130740$: telle est la longueur du mètre *légal*. Des calculs plus exacts ont prouvé depuis que cette valeur est *un peu plus petite* que la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre considéré, lequel passe par Paris en allant de Dunkerque à Barcelone. Il est très-heureux cependant qu'on ait accepté immédiatement les résultats indiqués : ce qui importait, c'était l'établissement légal de l'uniformité des mesures pour toute la France. Le mètre théorique et le mètre légal diffèrent d'ailleurs très-peu, puisque l'erreur présumée affecte seulement les centièmes de ligne. Le mètre légal étant représenté par le nombre $0^{\text{Toise}},5130740$ ou $443^{\text{lignes}},296$, le calcul indique la valeur $0^{\text{Toise}},5131276$ ou $443^{\text{lignes}},342$.

Mesures de longueur.

237. Comme le dit Laplace (*Exposition du système du monde*, livre I, ch. XIV), « L'identité du calcul décimal et de celui
» des nombres entiers ne laisse aucun doute sur les avantages
» de la division de toutes les espèces de mesures en parties
» décimales. »

On a donc soumis les multiples et les subdivisions du mètre à la loi décimale : les multiples représentent des longueurs de dix en dix fois plus grandes, les subdivisions des longueurs de

---

(*) On démontre que la terre peut être regardée approximativement comme un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles et renflé à l'équateur. Toute section passant par l'axe, c'est-à-dire par la ligne des pôles, détermine un méridien terrestre. (*Voir* la *Géométrie*.)

(**) L'étalon en platine déposé aux Archives donne la longueur légale du mètre à la température de la glace fondante.

(***) La toise était l'ancienne unité de mesure pour les longueurs : elle se subdivisait en 6 pieds, chaque pied en 12 pouces, chaque pouce en 12 lignes ; la toise renfermait donc 72 pouces ou 864 lignes.

dix en dix fois plus petites. Les noms des multiples sont formés du nom de l'unité principale, précédé des mots grecs *déca, hecto, kilo, myria,* qui signifient *dix, cent, mille, dix mille;* et les noms des subdivisions sont formés du nom de l'unité principale, précédé des mots latins *déci, centi, milli,* qui signifient *dixième, centième, millième.* Cette règle est également suivie pour toutes les autres mesures. Les mesures de longueur seront comprises dans le tableau suivant.

Myriamètre.....	(MM)	dix mille mètres.
Kilomètre.....	(KM)	mille mètres.
Hectomètre.....	(HM)	cent mètres.
Décamètre.....	(DM)	dix mètres.
MÈTRE.....	(M)	*unité de longueur, unité fondamentale.*
Décimètre.....	(dM)	dixième de mètre.
Centimètre.....	(cM)	centième de mètre.
Millimètre.....	(mM)	millième de mètre.

238. D'après ce tableau, une longueur contenant

3 *kilomètres*, 5 *hectomètres*, 2 *décamètres*, 7 *mètres*, 8 *décimètres*, 9 *centimètres*,

sera représentée par

$$3527^{M},89.$$

On ne prend pas toujours le mètre pour unité. S'il s'agit de distances itinéraires, on rapporte le nombre considéré au myriamètre ou au kilomètre. Dans l'arpentage, c'est l'hectomètre ou le décamètre qui devient l'unité. Les physiciens, dans leurs expériences délicates, expriment les résultats qu'ils obtiennent en centimètres ou en millimètres. Il est évident d'ailleurs que, lorsqu'on veut changer d'unité, il suffit de placer la virgule à la droite du chiffre de même espèce que la nouvelle unité. Ainsi, le nombre $3275^{M},713$ représente aussi $32^{HM},75713$. Le déplacement de la virgule ne change pas l'espèce d'unité représentée par le dernier chiffre à droite. Dans tous les cas, l'unité adoptée ne doit être ni trop grande ni trop petite par rapport aux longueurs à mesurer.

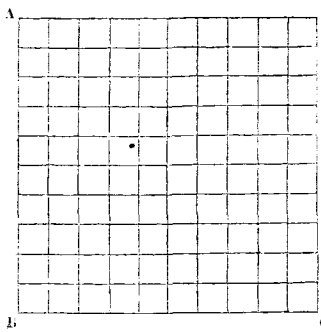
On mesure les longueurs à l'aide de règles. On emploie pour le dessin le double décimètre, longueur de 2 décimètres, divisée en centimètres et en millimètres, à l'aide de laquelle on peut très-facilement évaluer une petite longueur à $\frac{1}{2}$ millimètre près. Dans le lever des plans, on se sert de règles en bois ou en métal ayant 1, 2, 4 ou 6 mètres. La chaîne d'arpenteur est une chaîne de 10 mètres.

En France, des bornes placées le long des routes indiquent les kilomètres parcourus. On compte par lieue métrique de

4000 mètres ou de 4 kilomètres; par lieue de 25 au degré (*) (c'est-à-dire qu'on en compte 25 dans l'arc d'un degré) ou par lieue de $4444^{M},44$ (**); par lieue marine de 20 au degré ou de $5555^{M},56$; par mille marin de 60 au degré ou de 1 minute, contenant $1851^{M},85$. (Dans la navigation, l'unité de vitesse est le *nœud;* le nœud est égal au mille marin, c'est-à-dire à peu près à 1852^{M}.)

Mesures de surface.

239. L'unité de surface est *toujours* le carré construit sur l'unité de longueur (*voir* la *Géométrie*). Cette unité porte le nom de *mètre carré*. Les multiples du mètre carré sont de cent en cent fois plus grands, les subdivisions de cent en cent fois plus petites. Pour nous en rendre compte, considérons le carré construit sur un mètre. Divisons le côté AB en dix parties égales : chacune représentera un décimètre; par les points de division obtenus, menons des parallèles au côté BC. Nous diviserons le carré en dix bandes ayant 1^{M} de longueur et $0^{M},1$ de hauteur. Divisons de même le côté BC en dix décimètres et, par les points de division, menons des parallèles au coté AB. Nous partagerons chacune des dix premières bandes en dix carrés ayant pour côté $0^{M},1$ ou en dix décimètres carrés. Le mètre carré en contient donc 100. Même démonstration pour les autres multiples ou subdivisions. On peut donc former le tableau suivant :



Myriamètre carré.....	(MMq)	100000000 M. carrés.
Kilomètre carré.....	(KMq)	1000000 M. carrés.
Hectomètre carré.....	(HMq)	10000 M. carrés.
Décamètre carré.....	(DMq)	100 M. carrés.
MÈTRE CARRÉ.....	(Mq)	*carré construit sur l'unité de longueur.*
Décimètre carré.....	(dMq)	0,01 de M. carré.
Centimètre carré.....	(cMq)	0,0001 de M. carré.
Millimètre carré.....	(mMq)	0,000001 de M. carré.

(*) Le quart du méridien terrestre étant divisé en 90 degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes.

(**) Il s'agit ici, bien entendu, d'une valeur moyenne.

On voit que deux chiffres sont nécessaires pour représenter chaque multiple ou subdivision, de sorte qu'une surface renfermant

$$3^{\text{HMq}}\ 25^{\text{DMq}}\ 7^{\text{Mq}}\ 83^{\text{dMq}}\ 9^{\text{cMq}}$$

sera représentée par le nombre $32507^{\text{Mq}},8309$.

Lorsqu'on veut passer d'une unité à une autre, il suffit évidemment de placer la virgule après le chiffre qui correspond à la nouvelle unité.

240. Quand il s'agit de mesures agraires ou d'arpentage, l'unité principale devient le décamètre carré, et on lui donne alors le nom d'*are*. L'are n'admet qu'un seul multiple : l'*hectare*, qui vaut cent ares; qu'une seule subdivision : le *centiare*, égal à la centième partie de l'are. En se reportant à ce qui précède, on peut donc former le tableau suivant :

Hectare.....	(Ha)	100 ares	ou 1^{HMq}	ou 10000^{Mq}
Are.....	(a)	.....	1^{DMq}	ou 100^{Mq}
Centiare.....	(ca)	0,01 d'are		ou 1^{Mq}

La surperficie d'un terrain renfermant 135 hectares, 7 ares, 12 centiares, sera alors représentée par le nombre $135^{\text{Ha}},0712$ ou par le nombre $13507^{\text{a}},12$ ou par le nombre 1350712^{ca}.

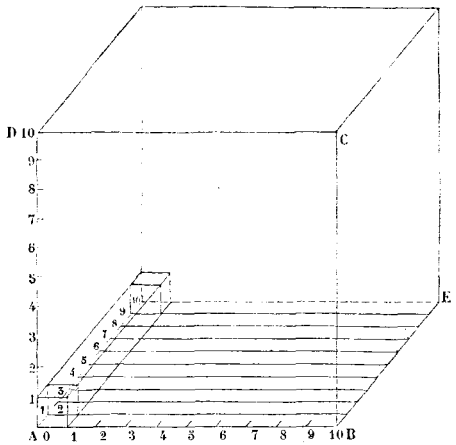
Pour transformer un nombre d'hectares en mètres carrés, il suffit de le transformer en centiares, puisque le centiare et le mètre carré représentent la même surface. Ainsi, une surface de $3127^{\text{Ha}},2598$ renferme 31272598^{ca} ou 31272598^{Mq}.

241. Les surfaces ne sont jamais mesurées directement, c'est-à-dire qu'on ne *porte* pas l'unité de surface autant de fois que possible sur la surface à évaluer. La Géométrie ramène cette évaluation à celle de la longueur d'une ou plusieurs lignes ayant une liaison déterminée avec la surface considérée.

Mesures de volume et de capacité.

242. On prend *toujours* pour unité de volume le cube construit sur l'unité de longueur (*voir* la *Géométrie*). Cette unité porte le nom de *mètre cube*. Les multiples du mètre cube sont de mille en mille fois plus grands, les subdivisions de mille en mille fois plus petites. Pour nous en rendre compte, considérons le cube construit sur un mètre. Sa face ABCD renfermera 100 décimètres carrés, puisque cette face est un mètre carré. Sur chacun de ces décimètres carrés comme base, on peut construire un volume ayant pour hauteur l'arête BE du cube : le mètre cube considéré renfermera cent de ces volumes. On peut maintenant diviser l'arête $BE = 1^{\text{M}}$ en 10^{dM} et par les points de division obtenus faire passer des plans parallèles à

la face ABCD. On décomposera chacun des cent volumes déjà construits en dix volumes, et ces dix volumes seront évidem-



ment des cubes ayant 1^{dM} de côté, c'est-à-dire des décimètres cubes. Le mètre cube contient donc bien 1000 décimètres cubes. Même démonstration pour les autres multiples ou subdivisions. On peut donc former le tableau suivant :

Hectomètre cube.....	(HMc)	1000000 M. cubes.	
Décamètre cube.....	(DMc)	1000 M. cubes.	
MÈTRE CUBE.....	(Mc)	*cube construit sur l'unité de longueur.*	
Décimètre cube.....	(dMc)	0,001	de M. cube.
Centimètre cube.....	(cMc)	0,000001	de M. cube.
Millimètre cube.....	(mMc)	0,000000001	de M. cube.

On voit que trois chiffres sont nécessaires pour représenter chaque multiple ou subdivision, de sorte qu'un volume renfermant

$$37^{DMc}\ 365^{Mc}\ 27^{dMc}\ 9^{cMc}$$

sera représenté par le nombre 37365^{Mc},027009. Lorsqu'on veut passer d'une unité à une autre, il suffit évidemment de placer la virgule après le chiffre qui correspond à la nouvelle unité.

Les mesures géométriques, les déblais et remblais, les blocs extraits des carrières, etc., sont exprimés en mètres cubes. Lorsqu'il s'agit d'évaluer le volume des bois de chauffage ou de charpente, l'unité de volume prend le nom de *stère*.

Le stère n'a qu'un multiple : le *décastère*, qui vaut dix stères ; qu'une subdivision : le *décistère*, qui est le dixième partie du stère. On fait aussi usage du *double stère* et du *demi-décastère*.

Les volumes, de même que les surfaces, ne sont jamais mesurés directement.

243. L'unité de capacité, ou l'unité employée pour la mesure des liquides et des grains, a reçu le nom de *litre*. Le litre est la capacité d'un décimètre cube. On compte par litres comme on compte par mètres : on peut donc former le tableau suivant.

Kilolitre.....	(Kl)	1000 litres.
Hectolitre.....	(Hl)	100 litres.
Décalitre.....	(Dl)	10 litres.
LITRE.....	(l)	*ou décimètre cube*.
Décilitre.....	(dl)	0,1 du litre.
Centilitre.....	(cl)	0,01 du litre.
Millilitre.....	(ml)	0,001 du litre.

Le mètre cube vaut 1000 décimètres cubes et le kilolitre vaut 1000 litres. Par conséquent, le kilolitre est la capacité d'un mètre cube.

Une capacité renfermant

$$15^{Hl}\ 7^{Dl}\ 8^{l}\ 9^{dl}\ 8^{cl}$$

sera représentée par le nombre $1758^{l},98$. Si l'on demande à combien de mètres cubes équivaut cette capacité, il suffira de prendre d'abord pour unité le kilolitre, c'est-à-dire de placer la virgule après le chiffre qui exprime des kilolitres. On obtiendra ainsi

$$1^{kl},57898 \quad \text{ou} \quad 1^{Mc},578980.$$

Les boissons se mesurent en hectolitres ou en litres; les grains, en hectolitres, décalitres ou litres; les graines propres au jardinage, en décilitres.

Pour la mesure des liquides, on se sert de vases en étain. Ces vases sont cylindriques, et leur hauteur est double du diamètre de leur base. Ces vases sont de 1^{l}, 5^{dl}, 2^{dl}, 1^{dl}, 5^{cl}, 2^{cl}, 1^{cl}.

Pour la mesure des grains, on se sert de vases en bois. Ces vases sont cylindriques, et leur hauteur est égale au diamètre de leur base. Ces vases sont de 1^{Hl}, 5^{Dl}, 2^{Dl}, 1^{Dl}, 5^{l}, 2^{l}, 1^{l}, 5^{dl}, 2^{dl}, 1^{dl}.

Mesures de poids.

244. L'unité de poids a reçu le nom de *gramme*. Le gramme est le poids dans le vide d'un centimètre cube d'eau distillée, à la température de 4 degrés centigrades. On a pris de l'eau distillée, c'est-à-dire parfaitement pure, parce que le poids de l'eau varie avec les matières qu'elle tient en suspension. On a choisi la température de 4 degrés centigrades, parce que le poids de l'eau varie avec la température, et que ce poids atteint

son maximum à la température de 4 degrés centigrades. Enfin, on a considéré le poids dans le vide, parce qu'on a voulu éviter la poussée de l'air qui aurait diminué le poids accusé par les appareils, et, en outre, parce que le poids dans l'air varie suivant l'état de l'atmosphère.

On compte par grammes comme on compte par mètres. On peut donc former le tableau suivant :

Millier, tonne ou tonneau de mer	(T)	1000 kilogrammes.
Quintal métrique	(Q)	100 kilogrammes.
.....		
Kilogramme	(Kg)	1000 grammes.
Hectogramme	(Hg)	100 grammes.
Décagramme	(Dg)	10 grammes.
GRAMME	(g)	*unité de poids.*
Décigramme	(dg)	0,1 de gramme.
Centigramme	(cg)	0,01 de gramme.
Milligramme	(mg)	0.001 de gramme.

Comme le gramme eût été trop petit, c'est le kilogramme qui a été déposé aux Archives, sous forme d'un cylindre en platine, dont la hauteur égale le diamètre de la base.

Le kilogramme, valant 1000 grammes, représente le poids de 1000^{cMc} d'eau distillée dans les conditions indiquées : il équivaut donc au poids de 1^{dMc} ou d'un litre d'eau distillée.

De même, la tonne, valant 1000 kilogrammes, représente le poids de 1000 litres d'eau distillée, c'est-à-dire équivaut au poids d'un mètre cube d'eau distillée. Pour évaluer le chargement des navires, on se sert de la tonne ou tonneau. Un navire de 1000 tonneaux est un navire capable de porter 1000000 de kilogrammes.

Les poids adoptés dans le commerce sont en fonte de fer ou en cuivre, on les divise en trois séries. Les *gros poids* dépassent le kilogramme; les *poids moyens* vont du kilogramme au gramme; les *petits poids* sont comptés à partir du gramme.

Les poids en fonte de fer sont de 50^{Kg}, 20^{Kg}, 10^{Kg}, 5^{Kg}, 2^{Kg}, 1^{Kg}, 5^{Hg}, 2^{Hg}, 1^{Hg}, 5^{Dg}.

Les poids en cuivre sont de 20^{Kg}, 10^{Kg}, 5^{Kg}, 2^{Kg}, 1^{Kg}, 2^{Hg}, 1^{Hg}, 5^{Dg}, 2^{Dg}, 1^{Dg}, 5^{g}, 2^{g}, 1^{g}, 5^{dg}, 2^{dg}, 1^{dg}, 5^{cg}, 2^{cg}, 1^{cg}, 5^{mg}, 2^{mg}, 1^{mg}.

Les poids inférieurs au gramme sont surtout employés dans les analyses chimiques, les pesées pharmaceutiques ou les expériences de physique : on leur donne la forme d'une plaque carrée, l'un des angles est relevé pour qu'on puisse les saisir avec une pince.

Il est utile de se rappeler que le poids moyen de l'hectolitre de froment est de 75 kilogrammes.

245. Le rapport qui lie le kilogramme au litre ou la tonne

au mètre cube, permet d'apprécier immédiatement le volume d'une masse d'eau dont le poids est connu ou inversement.

Si une masse d'eau pèse 257^{kg}, 825, elle occupe une capacité de 257^{l},825 et son volume est égal à 0^{Mc},257825.

Si une masse d'eau occupe une capacité de 2459^{l},7 elle pèse 2459^{kg},7 ou 2^{T},4597.

On peut résoudre le même problème pour tous les corps, pourvu qu'on connaisse leur poids sous l'unité de volume ou leur poids spécifique.

Remarquons que lorsqu'on fait correspondre l'unité de poids ou le kilogramme et l'unité de capacité ou le litre, le même nombre abstrait représente le poids de la masse d'eau considérée et son volume. On peut donc dire encore que le poids spécifique d'un corps est le rapport de son poids à celui d'une masse d'eau de même volume.

Supposons qu'on demande le poids d'un bloc de marbre de 2^{Mc},875. S'il s'agissait d'un volume d'eau, le poids correspondant serait 2^{T},875 ou 2875^{kg}; le poids spécifique du marbre étant égal à 2,8376, le poids cherché sera $2875^{kg} \times 2,8376$ ou 8158^{kg},1.

Si l'on demande le volume occupé par un bloc de marbre pesant 459^{kg},27, il faudra remarquer que le même poids d'eau occuperait un volume égal à 459^{dMc},270; mais le marbre pesant près de 3 fois plus que l'eau sous le même volume, occupera, pour un poids donné, un volume environ 3 fois plus petit: plus exactement, on obtiendra le volume cherché en divisant le poids 459^{kg},27 ou le volume d'eau correspondant 459^{dMc},270 par le poids spécifique 2,8376; on trouvera 161^{dMc},851.

Monnaies.

246. L'unité de monnaie est le *franc*. Le franc est une pièce du poids de 5 grammes : elle est composée, en poids, de neuf parties d'argent et de une de cuivre. Cet alliage donne à la monnaie une plus grande dureté et lui permet de résister mieux à l'action du frottement.

Le franc a pour subdivisions le *décime* ou dixième du franc et le *centime* ou centième du franc. Ses multiples n'ont pas reçu de noms particuliers.

Les monnaies françaises sont en argent, en or, et en bronze. Les monnaies d'or sont composées, en poids, de 9 parties d'or pur et de 1 partie de cuivre. Les monnaies de bronze, sur 100 parties en poids, sont composées de 95 parties de cuivre, de 4 parties d'étain et de 1 de zinc.

Toutes les monnaies françaises sont comprises dans les tableaux suivants :

Monnaies d'or.

VALEUR EN FRANCS.	POIDS en grammes.	DIAMÈTRE en millimètres.
fr	gr	mM
Pièce de 100	32,258	35
— 50	16,129	28
— 20	6,45161	21
— 10	3,22580	19
— 5	1,61290	17

La tolérance pour le poids est de 1 millième en plus ou en moins pour la pièce de 100 francs; de 2 millièmes pour les pièces de 50 francs, de 20 francs et de 10 francs; de 3 millièmes pour la pièce de 5 francs.

Monnaies d'argent.

VALEUR EN FRANCS.	POIDS en grammes.	DIAMÈTRE en millimètres.
fr	gr	mM
Pièce de 5	25	37
— 2	10	27
— 1	5	23
— 0,50	2,5	18
— 0,20	1	15

La tolérance pour le poids est de 3 millièmes en plus ou en moins pour les pièces de 5 francs et de 2 francs; de 5 millièmes pour la pièce de 1 franc; de 7 millièmes pour la pièce de $0^{fr},50$, et de 10 millièmes pour la pièce de $0^{fr},20$.

Monnaies de bronze.

VALEUR EN FRANC.	POIDS en grammes.	DIAMÈTRE en millimètres.
fr	gr	mM
Pièce de 0,10	10	30
— 0,05	5	25
— 0,02	2	20
— 0,01	1	15

La tolérance pour le poids est de 10 millièmes en plus ou en moins pour les pièces de $0^{fr},10$ et de $0^{fr},05$; et de 15 millièmes pour les pièces de $0^{fr},02$ et de $0^{fr},01$.

Légalement, l'or vaut, sous le même poids, quinze fois et demie plus que l'argent; l'argent vaut, sous le même poids, vingt fois plus que le bronze.

Il est facile d'après cela de déterminer directement le poids de la pièce d'or de 20 francs, par exemple. En effet, 20 francs en argent pesant 100 grammes, 20 francs en or devront peser quinze fois et demie moins. Le poids de la pièce d'or de 20 francs sera donc égal à $\frac{100^{gr}}{15,5}$ ou à $\frac{1000^{gr}}{155}$, c'est-à-dire à $6^{gr},45161$. Ce calcul prouve en même temps que 155 pièces d'or de 20 francs pèsent 1000 grammes ou que 1 kilogramme d'or monnayé représente 3100 francs.

Il est bon de remarquer que les monnaies peuvent, d'après les tableaux précédents, servir de poids usuels.

Pour avoir en grammes le poids d'une somme d'argent exprimée en francs, il suffit de la multiplier par 5, puisque 1 franc pèse 5 grammes. Pour avoir en francs la valeur d'une somme d'argent dont le poids est connu en grammes, il suffit de diviser ce poids par 5.

247. On appelle *alliage* le résultat de la fonte de plusieurs métaux. Toute portion d'alliage ou de métal pur s'appelle *lingot*. Le rapport du poids d'un des métaux qui entrent dans l'alliage au poids total du lingot, est le *titre* du lingot par rapport au métal considéré. Ainsi les monnaies françaises sont au titre de 0,9 par rapport à l'or ou à l'argent. On exprime ordinairement les titres monétaires en millièmes. On dira que les monnaies françaises sont au titre de 0,900 *de fin*, en indiquant par cette expression qu'on veut parler du métal le plus précieux entrant dans l'alliage. On accorde sur le titre une tolérance de 2 millièmes en plus ou en moins, toujours pour les monnaies d'or et d'argent.

Les frais de fabrication des monnaies s'élèvent à 6 francs par kilogramme d'or monnayé et à $1^{fr},50$ par kilogramme d'argent monnayé. Par suite, un alliage d'argent au titre de 0,900 et pesant 1 kilogramme, vaut $198^{fr},50$; un alliage d'or au titre de 0,900 et pesant 1 kilogramme vaut 3094 francs. 1 kilogramme d'argent pur vaudra par conséquent $\frac{198,5 \times 1000}{900} = 220^{fr},55$. En effet, dans un kilogramme d'argent monnayé il n'entre que 900 grammes d'argent pur. De même, un kilogramme d'or pur vaudra $\frac{3094 \times 1000}{900} = 3437^{fr},78$ (*).

(*) Nous n'entrerons dans aucun détail sur les retenues spéciales qui, dans certains cas, peuvent venir diminuer un peu les valeurs indiquées.

Il y a trois titres légaux pour les *ouvrages* d'or : ce sont les titres de 0,920; de 0,840 et de 0,750. Il y en a deux pour les ouvrages d'argent : ce sont les titres de 0,950 et de 0,800. Ces titres sont indiqués par une marque spéciale frappée dans les hôtels des monnaies, et qu'on appelle *contrôle*.

Il est facile de calculer la valeur intrinsèque d'un objet en or ou en argent, lorsqu'on connaît son poids et son titre. Un ouvrage d'or, au titre de 0,920, pèse 85 grammes, quelle est sa valeur propre? La quantité d'or pur contenue dans cet objet sera égale à $85^{gr} \times 0,920$, c'est-à-dire à $78^{gr},2$. Puisque 1 kilogramme d'or pur vaut $3437^{fr},78$, 1 gramme d'or pur vaut $3^{fr},438$: par suite, l'objet considéré vaut $3^{fr},438 \times 78,2$ ou $268^{fr},85$.

Résumé.

248. On comprend maintenant toute la simplicité du système métrique. « Sa création a été l'une des plus belles entreprises » des sciences, » et, pour en mieux saisir l'utilité et l'opportunité, il faudrait pouvoir se représenter par la pensée « le vé- » ritable chaos dans lequel l'incroyable et incohérente diver- » sité des mesures, qui changeaient pour ainsi dire de village à » village, avait mis toutes les relations sociales. L'Institut de » France et le gouvernement de notre pays ont donné à cette » occasion un grand et bel exemple au monde, exemple unique » dans l'histoire des sciences : ils ont voulu qu'un congrès de » savants de toutes les nations qui voudraient bien envoyer des » députés, s'assemblât pour prendre connaissance de toutes » les observations, de toutes les expériences déjà faites, pour » les vérifier et les recommencer au besoin, pour s'assurer de » l'exactitude de toutes les déterminations et de tous les cal- » culs. » Les nations qui comprirent alors la grandeur du problème posé doivent s'en honorer. Il nous reste à désirer que ce magnifique projet s'accomplisse dans toute son étendue et que le système des mesures métriques et décimales soit adopté par tous les peuples. Son adoption générale sera d'autant plus rationnelle, indépendamment de toute condition économique, que « son établissement s'est rattaché aux plus hautes ques- » tions astronomiques, et a servi à confirmer les lois de l'at- » traction universelle en donnant une idée complétement » exacte de la forme et des dimensions de notre globe (Arago, » *Astronomie populaire*, t. IV, p. 73 et suivantes). »

Une dernière remarque est importante. Lorsque l'unité de longueur est fixée, toutes les autres unités le sont nécessairement. Ainsi, si l'on prend le décimètre pour unité de longueur, l'unité de surface est le décimètre carré, l'unité de volume est le décimètre cube, l'unité de capacité est le litre, l'unité de

poids est le kilogramme. Si l'on négligeait cette précaution dans les calculs, on pourrait être conduit à des erreurs grossières.

EXERCICES.

I. L'ensemencement de 1 hectare exige en moyenne $204^{\text{litres}},8$ de blé. Combien faudrait-il de mètres cubes de blé pour ensemencer 1 kilomètre carré?

II. Chercher le volume d'un lingot d'or valant 52875 francs, sachant que la densité de l'or est 19,26.

III. Un litre de charbon de terre pèse $1^{\text{kg}},33$. Combien 150 quintaux métriques de charbon rempliraient-ils de stères?

CHAPITRE II.

DES ANCIENNES MESURES DE FRANCE.

249. *Mesures de longueur.* — La principale unité de longueur, comme nous l'avons déjà dit, était la *toise*. Elle se subdivisait en 6 *pieds*, chaque pied en 12 *pouces*, chaque pouce en 12 *lignes*, chaque ligne en 12 *points*.

Pour la mesure des étoffes, on employait l'*aune*, qui valait 6322 points.

Les distances itinéraires étaient évaluées en *milles* de 1000 toises et en *lieues de poste* de 2000 toises.

Le mètre satisfaisant, d'après ce qui précède (236), à l'égalité $10\,000\,000^{\text{M}} = 5\,130\,740^{\text{T}}$, on en déduit

$$1^{\text{T}} = \frac{10000000^{\text{M}}}{5130740} = 1^{\text{M}},94904.$$

On en déduit aussi $1^{\text{M}} = 0^{\text{T}},5130740$, et comme la toise renferme 864 lignes, on a

$$1^{\text{M}} = 0,5130740 \times 864^{\text{lignes}} = 443^{\text{lignes}},296.$$

On voit par là que, pour convertir un nombre de toises en mètres, il faut d'abord le convertir en lignes, puis diviser le résultat obtenu par le nombre 443,296.

En multipliant la valeur du mètre en toise, c'est-à-dire 0,5130740 par 6, on aura cette valeur exprimée en pieds, puisque la toise vaut 6 pieds. On trouve ainsi $1^{\text{M}} = 3^{\text{pieds}},07844$. En multipliant la partie décimale par 12, on aura le nombre de pouces correspondant, puisqu'un pied vaut 12 pouces; mais

cette partie décimale étant inférieure à $\frac{1}{12}$, il faut la multiplier immédiatement par 144 pour trouver le nombre de lignes auquel elle équivaut, puisqu'un pied vaut 144 lignes. On aura

$$0,07844 \times 144^{\text{lignes}} = 11^{\text{lignes}},296.$$

Par suite, $1^{\text{M}} = 3^{\text{pieds}}\,0^{\text{pouce}}\,11^{\text{lignes}},296$.

Pour faciliter les calculs de conversion, on construit des tables, publiées chaque année dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes. La table qui concerne les mesures de longueur renferme les valeurs en mètres des différents multiples de la toise, du pied, du pouce, de la ligne, depuis 1 jusqu'à 9.

QUOTITÉ.	TOISES en mètres.	PIEDS en mètres.	POUCES en mètres.	LIGNES en mètres.
1	1,94904	0,32484	0,027070	0,002256
2	3,89807	0,64968	0,054140	0,004512
3	5,84711	0,97452	0,081210	0,006767
4	7,79615	1,29936	0,108280	0,009023
5	9,74518	1,62420	0,135350	0,011279
6	11,69422	1,94904	0,162420	0,013535
7	13,64326	2,27388	0,189490	0,015791
8	15,59229	2,59872	0,216560	0,018047
9	17,54133	2,92355	0,243630	0,020302

Supposons qu'on demande la valeur en mètres de 316 toises, 2 pieds, 7 pouces, 9 lignes. On aura, d'après la table :

300 toises	=	$584^{\text{M}},711$
10 toises	=	19,4904
6 toises	=	11,69422
2 pieds	=	0,64968
7 pouces	=	0,18949
9 lignes	=	0,020302
		$616^{\text{M}},755092$

On ne peut compter que sur les trois premiers chiffres décimaux. On aura donc

$$316^{\text{T}}\,2^{\text{P}}\,7^{\text{P}}\,9^{\text{l}} = 616^{\text{M}},755.$$

250. *Mesures de superficie.* — Les unités de superficie étaient les carrés construits sur les diverses unités de longueur. La toise carrée vaut $3^{\text{Mq}},798743$. Pour les mesures agraires, on comptait par *perches* et par *arpents*. On distinguait la perche des Eaux et Forêts ou carré de 22 pieds de côté, la perche de Paris ou

carré de 18 pieds de côté. L'arpent des Eaux et Forêts valait 100 perches des Eaux et Forêts; l'arpent de Paris valait 100 perches de Paris.

Il suffit de savoir, pour les conversions, que 1 arpent des Eaux et Forêts vaut $0^{Ha},5107$ et que 1 arpent de Paris vaut $0^{Ha},3419$. Réciproquement, 1 hectare vaut $1^{arpent},9580$ des Eaux et Forêts et $2^{arpents},9249$ de Paris. Ainsi 1 hectare vaut environ 2 arpents des Eaux et Forêts et 3 arpents de Paris.

251. *Mesures de volume et de capacité.* — Les unités de volume étaient les cubes construits sur les diverses unités de longueur. La toise cube vaut $7^{Mc},403887$.

Pour mesurer les bois de chauffage on employait la *voie*, ou 56 pieds cubes (*), et la *corde* des Eaux et Forêts, qui valait 2 voies. Pour mesurer les bois de charpente on employait la *solive* ou 3 pieds cubes. La voie équivaut à $1^{Mc},91952$: c'est donc à peu près 2 stères.

On mesurait les liquides à l'aide de la *pinte*, contenance de $0^{litre},9313$. La *velte* valait 8 pintes; le *quartaut* valait 9 veltes; la *feuillette* 2 quartauts, et le *muid* 2 feuillettes.

On mesurait les grains à l'aide du *litron*, contenance de $0^{litre},8130$. Le *boisseau* valait 16 litrons, et le *setier* 12 boisseaux.

252. *Mesures de poids.* — L'unité de poids était la *livre-poids* (**). Elle vaut $0^{Kg},489506$. Le kilogramme, réciproquement, vaut $2^{livres\ poids},0428765$. Ainsi le kilogramme vaut un peu plus de 2 livres. La livre-poids se subdivisait en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, le gros en 3 *deniers* ou *scrupules*, le denier en 24 *grains* ou le gros en 72 grains. Le *quintal* valait 100 livres.

Nous donnons la table de conversion des anciens poids en nouveaux.

(*) La toise cube vaut évidemment 216 pieds cubes, 1 pied cube vaut 1728 pouces cubes, 1 pouce cube vaut 1728 lignes cubes. De même, la toise carrée vaut 36 pieds carrés, un pied carré vaut 144 pouces carrés, 1 pouce carré vaut 144 lignes carrées.

(**) On indiquait la livre-poids par le signe ℔.

QUOTITÉ	LIVRES en kilogrammes	ONCES en grammes.	GROS en grammes.	GRAINS en grammes.	QUINTAUX en myriagramm.
1	0,48951	30,59	3,824	0,053	4,8951
2	0,97901	61,19	7,649	0,106	9,7901
3	1,46852	91,78	11,473	0,159	14,6852
4	1,95802	122,38	15,297	0,212	19,5802
5	2,44753	152,97	19,121	0,266	24,4753
6	2,93704	183,56	22,946	0,319	29,3704
7	3,42654	214,16	26,770	0,372	34,2654
8	3,91605	244,75	30,594	0,425	39,1605
9	4,40555	275,35	34,418	0,478	44,0555

253. *Monnaies.* — L'unité monétaire était la *livre-tournois* (*); elle se subdivisait en 20 *sous*, chaque sou en 4 *liards* ou 12 *deniers*. La livre-tournois n'avait pas de représentation monétaire. Les monnaies d'or étaient le *double-louis*, de 48 livres; le *louis*, de 24 livres; le *demi-louis*, de 12 livres. Les monnaies d'argent étaient l'*écu* de 6 livres et l'écu de 3 livres; la pièce de 30 *sols*, celle de 24 sols, celle de 15 sols et celle de 12 sols. Les monnaies de billon étaient la pièce de 2 sols et celle de 6 liards. Enfin les monnaies de cuivre étaient la pièce de 2 sols et celle de 1 sol, celle de 2 liards et celle de 1 liard. $81^{\#}$ valent 80 francs, de sorte que $1^{\#} = \frac{80^{fr}}{81} = 0^{fr},98765$. On prend ordinairement $1^{\#} = 0^{fr},99$.

254. *Mesures de temps.* — Le temps employé par la terre pour faire une révolution entière autour de son axe est l'unité de temps appelée *jour* (**).

Le jour se divise en 24 *heures*, l'heure en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*, la seconde en 60 *tierces*. Cette dernière subdivision est peu employée, et l'on compte par dixièmes et centièmes de seconde. Les heures, minutes et secondes s'indiquent au moyen des lettres initiales *h*, *m* et *s*. Ainsi 23 heures, 32 minutes, 7 secondes, 9 dixièmes de seconde seront représentés comme il suit : $23^h 32^m 7^s,9$.

(*) On indiquait la livre-tournois par le signe #.

(**) Le jour ainsi défini représente le temps qui s'écoule entre les passages supérieurs successifs d'une même étoile au méridien : c'est le jour *sidéral*. Lorsqu'on considère les passages supérieurs du soleil, l'intervalle entre deux passages successifs est le jour solaire vrai, plus long que le jour sidéral, mais non constant comme ce dernier. Enfin, le jour *solaire moyen* ou jour *civil* est un troisième jour constant, qui peut par conséquent servir aussi d'unité de temps, et surpasse le jour sidéral de 236 secondes.

Les calculs sur les nombres complexes qui correspondent aux mesures de temps ne présentent pas de difficultés. Pour l'addition et la multiplication, il suffit de tenir compte des retenues en se rappelant que 60 secondes valent 1 minute, et 60 minutes 1 heure.

Les opérations suivantes indiquent la marche à suivre :

$$\begin{array}{r} 15^h\ 33^m\ 56^s,8 \\ 35\ \ 52\ \ 19,7 \\ 27\ \ 50\ \ 33,2 \\ \hline 79^h\ 16^m\ 49^s,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3^h\ 17^m\ 32^s,4 \\ 9 \\ \hline 29^h\ 37^m\ 51^s,6 \end{array}$$

Pour la soustraction, si les secondes du nombre supérieur sont, par exemple, trop faibles, on les augmente de 60, et par compensation on augmente d'une minute les minutes du nombre inférieur.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 43^h\ 22^m\ \ 5^s,4 \\ 19\ \ 37\ \ 18,3 \\ \hline 23^h\ 44^m\ 47^s,1 \end{array}$$

Soit maintenant à diviser par 14 le nombre $92^h\ 57^m\ 32^s,5$. Le quotient sera égal à

$$\frac{92^h}{14}\ \frac{57^m}{14}\ \frac{32^s,5}{14}.$$

$\frac{92^h}{14} = 6^h + \frac{8^h}{14} = 6^h + \frac{480^m}{14}$. Si l'on ajoute les deux fractions de minutes, on a

$$\frac{480^m}{14} + \frac{57^m}{14} = \frac{537^m}{14} = 38^m + \frac{5^m}{14}.$$

La fraction $\frac{5^m}{14}$ revient à $\frac{300^s}{14}$. Si l'on ajoute les deux fractions de seconde, il vient

$$\frac{300^s}{14} + \frac{32^s,5}{14} = \frac{332^s,5}{14} = 23^s,75.$$

Le quotient cherché est donc, en réunissant les résultats successivement obtenus, $6^h\ 38^m\ 23^s,75$.

Pour donner un exemple de la marche à suivre dans des cas plus compliqués, supposons qu'on ait à résoudre cette question. On a exécuté en 1 heure $5^T\ 4^P\ 3^p$ d'un certain ouvrage; quelle sera l'expression du travail produit en $3^h\ 32^m\ 45^s$? Nous commencerons par réduire le multiplicande $5^T\ 4^P\ 3^p$ en toises et fraction *décimale* de la toise; puis nous réduirons le multiplicateur en heures et fraction décimale de l'heure.

Nous aurons

$$3^p = \frac{3^p}{12} = \frac{1^p}{4} = 0^p,25.$$

Il viendra ensuite

$$4^p,25 = \frac{4^T,25}{6} = 0^T,7083.$$

Le multiplicande sera donc égal à $5^T,7083$.

Nous aurons

$$45^s = \frac{45^m}{60} = \frac{3^m}{4} = 0^m,75.$$

Il viendra ensuite

$$32^m,75 = \frac{32^h,75}{60} = 0^h,5458.$$

Le multiplicateur sera donc égal à $3^h,5458$.

Il faut multiplier les deux nombres 5,7083 et 3,5458 : le produit représentera des toises. On ne peut compter au produit que sur le chiffre des millièmes. Employons le procédé de la multiplication abrégée :

$$\begin{array}{r}
5,7083. \\
85453 \\
\hline
17\ 12490 \\
2\ 85415 \\
22832 \\
2850 \\
456 \\
\hline
20,24043
\end{array}$$

Le produit sera égal à $20^T,241$. Mais on a

$$0^T,241 = 0,241 \times 6^p = 1^p,446,$$
$$0^p,446 = 0,446 \times 12^p = 5^p,352,$$
$$0^p,352 = 0,352 \times 12^l = 4^l,224.$$

Le produit demandé est donc $20^T\,1^p\,5^p\,4^l,22$.

EXERCICES.

I. L'aune valait 3 pieds, 7 pouces, 10 lignes, 10 points; calculer sa longueur en mètres, à 1 millimètre près.

II. Calculer à 1 litre près la capacité de 12 muids, 1 feuillette, 1 quartaut, 5 veltes, 3 pintes.

CHAPITRE III.

DES GRANDEURS PROPORTIONNELLES OU INVERSEMENT PROPORTIONNELLES.

---

255. *Lorsque deux grandeurs varient ensemble de manière que le rapport de deux valeurs numériques quelconques de la première grandeur soit égal au rapport des deux valeurs numériques correspondantes de la seconde grandeur, on dit que ces grandeurs sont proportionnelles.*

Ainsi il est de convention que le salaire d'un ouvrier est proportionnel à la durée de son travail.

On démontre en mécanique que l'espace parcouru par un corps doué d'un mouvement uniforme est proportionnel au temps écoulé.

La géométrie prouve que la longueur d'une circonférence de cercle est proportionnelle à celle de son rayon.

256. *Lorsque deux grandeurs varient ensemble de manière que le rapport de deux valeurs numériques quelconques de la première grandeur soit égal au rapport inverse des deux valeurs numériques correspondantes de la seconde grandeur, on dit que ces grandeurs sont inversement proportionnelles.*

Ainsi, dans certaines limites, on peut admettre que le temps nécessaire pour l'achèvement d'un travail donné est inversement proportionnel au nombre des ouvriers employés.

On démontre en mécanique que le temps employé par un corps, doué d'un mouvement uniforme, à parcourir un certain espace, est inversement proportionnel à la vitesse constante du mouvement.

La physique prouve que les hauteurs de deux liquides différents se faisant équilibre dans les deux branches d'un vase communiquant, sont inversement proportionnelles aux poids spécifiques de ces liquides.

257. En général, la proportionnalité directe ou inverse des grandeurs résulte d'une convention ou d'une démonstration appartenant à une autre science. Il est facile cependant de s'assurer *arithmétiquement* de l'existence de cette proportionnalité directe ou inverse.

1°. *Lorsque deux grandeurs sont telles, que, l'une devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'autre devient le même nombre de fois plus grande ou plus petite, on peut affirmer la proportionnalité des grandeurs considérées.*

Considérons deux valeurs numériques quelconques A et A'

de la première grandeur, dont le rapport soit $\frac{3}{4}$: la première valeur A sera les $\frac{3}{4}$ de la seconde A′.

Considérons les deux valeurs numériques correspondantes B et B′ de la seconde grandeur. Si l'on passe de la valeur A′ à la valeur 3 A′, l'énoncé signifie qu'on passera de la valeur B′ à la valeur 3 B′ ; et si l'on passe de la valeur 3 A′ à la valeur $\frac{3A'}{4}$, on passera de même de la valeur 3 B′ à la valeur $\frac{3B'}{4}$. Mais $\frac{3A'}{4}$ représente A par hypothèse ; donc la valeur $\frac{3B'}{4}$ représente la valeur B qui correspond à A. On peut donc écrire

$$B = \frac{3B'}{4},$$

c'est-à-dire qu'on a à la fois

$$\frac{A}{A'} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{B}{B'} = \frac{3}{4},$$

d'où

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

2°. *Lorsque deux grandeurs sont telles, que, l'une devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'autre devient le même nombre de fois plus petite ou plus grande, on peut affirmer que les grandeurs considérées sont inversement proportionnelles.*

Considérons deux valeurs numériques quelconques A et A′ de la première grandeur, dont le rapport soit $\frac{3}{4}$: la première valeur A sera les $\frac{3}{4}$ de la seconde A′.

Considérons les deux valeurs numériques correspondantes B et B′ de la seconde grandeur. Si l'on passe de la valeur A′ à la valeur 3 A′, l'énoncé signifie qu'on passera de la valeur B′ à la valeur $\frac{B'}{3}$; et si l'on passe de la valeur 3 A′ à la valeur $\frac{3A'}{4}$, on passera de même de la valeur $\frac{B'}{3}$ à la valeur $\frac{4B'}{3}$. Mais $\frac{3A'}{4}$ représente A par hypothèse ; donc la valeur $\frac{4B'}{3}$ représente la valeur B qui correspond à A. On peut, par suite, écrire

$$B = \frac{4B'}{3},$$

c'est-à-dire qu'on a à la fois

$$\frac{A}{A'} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{B}{B'} = \frac{4}{3},$$

d'où

$$\frac{A}{A'} = \frac{B'}{B}.$$

Règles de trois simples.

258. On entend par *règle de trois simple directe ou inverse*, une question dans laquelle il entre quatre quantités deux à deux de même espèce : l'une est inconnue, il faut la trouver au moyen des trois autres. La condition *expresse* pour qu'il y ait règle de trois, c'est que les *deux grandeurs qui entrent dans la question soient directement ou inversement proportionnelles.*

1°. Si A et A′ représentent les valeurs numériques de la première grandeur, si B et x représentent les valeurs numériques correspondantes de la seconde grandeur (x est la quantité inconnue), et si l'on suppose la proportionnalité directe des grandeurs considérées, on raisonnera comme il suit :

Si l'on passe de la valeur A à une valeur A fois plus petite, c'est-à-dire égale à 1, B passera de la valeur B à la valeur $\frac{B}{A}$ [257, 1°]. Si l'on passe de la valeur $\frac{A}{A}$ ou 1 à la valeur A′, on passera de la valeur $\frac{B}{A}$ à la valeur $\frac{B}{A} \times A'$, c'est-à-dire qu'on aura, puisque x correspond à A′,

$$x = \frac{B}{A} \times A'.$$

Il faut donc chercher la valeur numérique de même espèce que l'inconnue, pour une valeur de l'autre grandeur égale à l'unité ; puis multiplier le résultat obtenu par la valeur connue d'espèce différente qui correspond à l'inconnue : c'est en cela que consiste la méthode dite de réduction à l'unité.

Exemple. Une usine a consommé 17000 kilogrammes de charbon pour produire 6285 kilogrammes de fonte ; quelle quantité de charbon faudrait-il brûler pour produire 11812 kilogrammes de fonte ?

J'admets la proportionnalité des grandeurs qui entrent dans la question, et je cherche la quantité de charbon qui correspond à la production de 1 kilogramme de fonte. 6285 kilogrammes de fonte correspondent à 17000 kilogrammes de charbon, 1 kilogramme de fonte correspondra à $\frac{17000}{6285}$ kilo-

grammes de charbon. Par suite, 11812 kilogrammes de fonte exigeront $\frac{17000}{6285} \times 11812^{kg}$ de charbon, c'est-à-dire 31949.

2°. Si A et A′ représentent les valeurs numériques de la première grandeur, si B et x représentent les valeurs numériques correspondantes de la seconde grandeur (x est la quantité inconnue), et si l'on suppose la proportionnalité inverse des grandeurs considérées, on raisonnera comme il suit :

Si l'on passe de la valeur A à une valeur A fois plus petite, c'est-à-dire égale à 1, B passera de la valeur B à la valeur $B \times A$ (257, 2°). Si l'on passe de la valeur $\frac{A}{A}$ ou 1 à la valeur A′, on passera de la valeur $B \times A$ à la valeur $\frac{B \times A}{A'}$; c'est-à-dire qu'on aura, puisque x correspond à A,

$$x = \frac{B \times A}{A'}.$$

Il faut donc chercher la valeur numérique de même espèce que l'inconnue, pour une valeur de l'autre grandeur égale à l'unité ; puis diviser le résultat obtenu par la valeur connue d'espèce différente qui correspond à l'inconnue.

Exemple. Il a fallu 15 jours à 22 ouvriers pour faire un certain travail ; combien en aurait-il fallu à 37 ouvriers ?

J'admets la proportionnalité inverse des grandeurs qui entrent dans la question, et je cherche le temps nécessaire à un seul ouvrier pour exécuter le travail donné. Il a fallu 15 jours à 22 ouvriers ; il faudra 15×22 jours à 1 ouvrier. Par suite le temps nécessaire à 37 ouvriers sera égal à $\frac{15 \times 22}{37}$ jours ou à $8^j,9$.

Grandeurs proportionnelles ou inversement proportionnelles à plusieurs autres grandeurs.

259. Une grandeur dépend le plus souvent, non d'une seule grandeur, mais de plusieurs autres grandeurs. Lorsqu'on dit, dans ce cas, que la grandeur considérée est proportionnelle ou inversement proportionnelle à une autre grandeur, on sous-entend que les autres grandeurs qui la font varier conservent alors la même valeur.

Ainsi, dire que le poids d'une barre de métal est proportionnel à la densité de ce métal, c'est sous-entendre que les dimensions de la barre restent constantes quand on passe d'un métal à un autre.

Le problème qui se présente est celui-ci : *On connaît une*

série de valeurs numériques correspondantes des grandeurs considérées ; on connaît en outre les variations de ces valeurs numériques pour un nouvel état de la question, sauf une seule qu'il s'agit de découvrir.

Désignons par les symboles généraux M, A, B, P, Q, les grandeurs considérées : M est supposée proportionnelle à A et B, inversement proportionnelle à P et Q. Désignons par m, a, b, p, q, la série connue des valeurs numériques correspondantes de ces grandeurs. Sachant que a, b, p, q, deviennent a', b', p', q', on demande la valeur x qui, dans cette nouvelle série, doit remplacer m.

Nous généraliserons la méthode de réduction à l'unité.

Si l'on passe de la valeur a à la valeur 1 sans faire varier b, p, q, on passera de la valeur m à la valeur $\frac{m}{a}$ (258, 1°). De même si l'on passe ensuite de la valeur b à la valeur 1 sans faire varier les autres valeurs 1, p, q, on passera pour la grandeur M de la valeur $\frac{m}{a}$ à la valeur $\frac{m}{a \times b}$. Enfin si l'on passe *successivement* des valeurs p et q à la valeur 1, en ne faisant varier à la fois qu'un seul élément, on passera *successivement*, pour la grandeur M, de la valeur $\frac{m}{a \times b}$ à la valeur $\frac{m \times p}{a \times b}$, et de cette valeur à la valeur $\frac{m \times p \times q}{a \times b}$ (258, 2°).

On a donc trouvé la valeur numérique prise par la grandeur M, lorsque toutes les autres grandeurs deviennent égales à l'unité.

En suivant la même marche, on verra que ces valeurs égales à l'unité devenant, *successivement et une par une*, égales à a', b', p', q', la grandeur M prendra aussi successivement les valeurs

$$\frac{m \times p \times q \times a'}{a \times b}, \quad \frac{m \times p \times q \times a' \times b'}{a \times b}, \quad \frac{m \times p \times q \times a' \times b'}{a \times b \times p'},$$

$$\frac{m \times p \times q \times a' \times b'}{a \times b \times p' \times q'}.$$

On aura donc finalement

$$x = \frac{m \times p \times q \times a' \times b'}{a \times b \times p' \times q'},$$

valeur qu'on peut écrire

$$x = m \times \frac{a'}{a} \times \frac{b'}{b} \times \frac{p}{p'} \times \frac{q}{q'},$$

et qui conduit à une règle générale dont nous développerons l'énoncé en algèbre. Il nous suffit d'avoir indiqué le procédé à suivre au point de vue arithmétique.

Règles de trois composées.

260. On entend par *règle de trois composée* une question dans laquelle il entre un nombre pair de quantités deux à deux de même espèce. Une de ces quantités est inconnue ; il faut la trouver au moyen de toutes les autres. La condition *expresse* pour qu'il y ait règle de trois composée est celle-ci : il faut que la grandeur de même espèce que l'inconnue, comparée successivement à toutes les autres grandeurs considérées une à une, soit proportionnelle ou inversement proportionnelle à ces grandeurs. Le numéro précédent donne la solution générale des règles de trois composées.

Exemple. Il faut 15 quintaux de foin pour nourrir 11 chevaux pendant 21 jours ; combien la nourriture de 17 chevaux pendant 35 jours exigera-t-elle de quintaux de foin ?

Plus il y a de chevaux, plus il faut de quintaux ; plus il s'écoule de jours, plus il faut de quintaux : la question est donc bien une règle de trois composée.

Si l'on avait à nourrir un seul cheval pendant 21 jours, il ne faudrait que $\frac{15}{11}$ quintaux ; si l'on ne devait le nourrir qu'un seul jour, il faudrait seulement $\frac{15}{11 \times 21}$ quintaux. Si l'on a maintenant 17 chevaux à nourrir, le nombre de quintaux consommés en un jour sera $\frac{15 \times 17}{11 \times 21}$, et pour 35 jours il en faudra

$$\frac{15 \times 17 \times 35}{11 \times 21} = 38,64.$$

261. Il faut bien remarquer que, pour employer la méthode de réduction à l'unité, les grandeurs considérées doivent être proportionnelles ou inversement proportionnelles. Si l'on pose cette question : Un corps qui tombe a parcouru en 5 secondes $122^{M},61$; quelle distance parcourra-t-il en 10 secondes? L'espace parcouru ne croît pas, dans ce cas, proportionnellement au temps écoulé : les éléments indiqués ne peuvent faire partie d'une règle de trois. Il faut interroger la mécanique, qui apprend que la proportionnalité existe, non entre les hauteurs parcourues et les temps écoulés, mais bien entre ces hauteurs et les carrés des temps correspondants, et qui résout la question plus simplemeut à l'aide d'une formule directe.

EXERCICES.

I. Avec $312^{Kg},5$ de fil, on a fabriqué une toile de 1219 mètres de longueur sur $3^{M},85$ de largeur. Quelle sera la longueur d'une toile de 2 mètres de largeur fabriquée avec 182 kilogrammes de fil ?

II. Un équipage n'a plus que pour 20 jours de vivres : il doit encore tenir la mer pendant 35 jours. Dans quelle proportion doit-on réduire les rations quotidiennes ?

X III. Une machine à vapeur dépense 1545 kilogrammes de charbon en 76 jours. Un perfectionnement apporté à la machine réduit la dépense à 348 kilogrammes pour 28 jours. On demande l'économie annuelle due au perfectionnement, sachant que la machine marche 330 jours par an et que le prix du quintal de charbon est $3^{fr},75$.

IV. Un parallélipipède rectangle de glace ayant pour dimensions $12^{M},25$, $18^{M},30$ et $24^{M},40$, flotte sur la mer. On demande sa hauteur au-dessus du niveau, sachant que le poids spécifique de la glace est 0,930 et celui de l'eau de mer 1,026. On calculera les trois solutions possibles.

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES.

Règles d'intérêt simple.

262. Une somme d'argent quelconque s'appelle *capital*. Lorsqu'on emprunte un capital, on indemnise le prêteur en lui payant tous les ans un certain *intérêt*. Pour fixer cet intérêt, on indique ce que rapporte le capital *cent francs*, placé pendant un an dans les mêmes conditions que le capital considéré : c'est ce qu'on nomme le *taux* de l'intérêt.

Pour un capital donné, l'intérêt est *proportionnel* au taux choisi et au temps écoulé. Si l'on propose de trouver cet intérêt, la question revient donc à une véritable règle de trois composée qu'on peut formuler ainsi : 100 francs rapportent, je suppose, 5 francs en 12 mois; quel intérêt rapportera, par exemple, le capital 15825 francs en 7 mois?

Nous allons parcourir les quatre problèmes auxquels peuvent donner lieu les questions d'intérêt; et, comme exercice, nous les résoudrons successivement par la méthode de réduction à l'unité : la formule générale à employer sera donnée plus loin. Remarquons que, pour un intérêt donné, le capital, le temps et le taux, sont des grandeurs inversement proportionnelles : si le capital est double, il aura besoin d'être placé deux fois moins de temps pour rapporter le même intérêt, etc.

263. 1°. *Quel est l'intérêt produit par un capital de* 15825 *fr., placé à* 5 *pour* 100 *pendant* 7 *mois?*

En un an, 100 francs rapportent 5 francs; dans le même

temps, 1 franc rapportera donc 0,05; et, en un mois, seulement $\frac{0,05}{12}$. Le capital 15825 francs rapportera donc en un mois $\frac{0,05 \times 15825}{12}$ et, en 7 mois, $\frac{0,05 \times 15825 \times 7}{12}$ ou $461^{fr},5625$.

2°. *Trouver le capital qui, placé à 5 pour 100, pendant 7 mois, a rapporté un intérêt égal à* $461^{fr},5625$?

5 francs d'intérêt en un an correspondent au capital 100 francs; 1 franc d'intérêt, en un an, correspondra au capital $\frac{100}{5}$. Si le capital reste seulement placé un mois, il devra être 12 fois plus grand pour rapporter le même intérêt : il sera donc $\frac{100 \times 12}{5}$. Le capital qui, au lieu de 1 franc, rapporte $461^{fr},5625$ en un mois sera donc $\frac{100 \times 12 \times 461,5625}{5}$; et s'il reste placé 7 mois, il sera seulement $\frac{100 \times 12 \times 461,5625}{5 \times 7} = 15825$.

3°. *Un capital de* 15835 *francs, placé à* 5 *pour* 100, *a rapporté un intérêt de* $461^{fr},5625$; *combien de temps est-il resté placé?*

Pour rapporter 1 franc d'intérêt, 100 francs doivent être placés 5 fois moins de temps, c'est-à-dire $\frac{12}{5}$. 1 franc, pour rapporter le même intérêt, devra être placé 100 fois plus longtemps, c'est-à-dire $\frac{12 \times 100}{5}$. Le capital 15825, pour rapporter cet intérêt, devra être placé 15825 fois moins de temps ou $\frac{12 \times 100}{5 \times 15825}$; et, pour rapporter $461^{fr},5625$, un temps représenté par $\frac{12 \times 100 \times 461,5635}{5 \times 15825}$ ou 7 mois.

4°. *Un capital de* 15825 *francs a rapporté* $461^{fr},5625$ *en* 7 *mois; à quel taux était-il placé?*

15825 francs ont rapporté $461^{fr},5625$ en 7 mois, c'est-à-dire $\frac{461,5625}{7}$ en un mois. 1 franc rapportera $\frac{461,5625}{7 \times 15825}$ dans le même temps. 100 francs rapporteront donc $\frac{461,5625 \times 100}{7 \times 15825}$ dans le même temps et, en 12 mois, $\frac{461,5625 \times 100 \times 12}{7 \times 15825} = 5$.

Si l'on prenait le jour ou l'année au lieu du mois, pour unité de temps, on raisonnerait d'une manière tout à fait analogue. Dans le commerce, on compte les mois de 30 jours, et l'année de 360 jours. En justice, cette réduction n'est pas ad-

mise. Nous indiquerons en algèbre la formule générale qui rend tous ces calculs plus rapides.

Questions sur les rentes.

264. Lorsqu'un gouvernement fait un emprunt, il peut opérer de deux manières : indiquer d'avance l'intérêt qu'un capital donné rapportera, ce qui est le mode le plus rationnel; ou bien, indiquer seulement l'intérêt promis en omettant le véritable capital correspondant et en le remplacant par l'indication d'un capital fictif: c'est la marche généralement suivie pour les emprunts publics.

Ainsi, on emprunte 100 millions à 3 pour 100 : cela veut dire qu'on constitue aux prêteurs 3 millions de rentes annuelles; car 100 est contenu un million de fois dans 100 millions. Mais cela ne signifie pas que l'État recevra réellement en échange un capital de 100 millions. Si la situation du crédit est telle, au moment de l'emprunt, qu'on puisse retirer plus de 3 francs d'intérêt d'un capital de 100 francs, le gouvernement sera forcé de recevoir, pour l'intérêt de 3 francs, un capital inférieur à 100 francs. Il exigera donc, suivant les circonstances 80, 75, 70 francs. Dans le second cas, par exemple, le prêteur ne placera pas son argent à 3 pour 100, mais bien à 4; car donner 75 francs de capital pour 3 francs d'intérêt, c'est donner 25 francs pour 1 franc d'intérêt, et 100 francs pour 4 francs d'intérêt. C'est pour cette raison que, dans les titres ou inscriptions de rentes sur l'État, le capital n'est pas énoncé, mais seulement l'intérêt.

Les rentes sur l'État, les actions et obligations de chemins de fer, etc., se négocient tous les jours à la Bourse. La valeur du capital correspondant varie continuellement suivant les circonstances, les bruits de toute nature, les prévisions des joueurs, etc. Cette valeur spéciale et journalière s'appelle le *cours* ou la *cote* de l'effet public considéré.

265. Tous les problèmes qu'on peut se proposer sur les effets publics sont de simples règles de trois. Nous en donnerons quelques exemples.

1°. *On veut placer* 60000 *francs en rentes* 3 *pour* 100; *le cours actuel de la rente* 3 *pour* 100 *étant* 71,25, *quelle inscription devra-t-on recevoir?*

Dire que le cours de la rente 3 pour 100 est 71,25, c'est dire que ce capital correspond à 3 francs de rente. La question revient donc à celle-ci : $71^{fr},25$ correspondent à 3 francs de rente, 60000 francs correspondront à une rente x. Les capitaux et les rentes sont des grandeurs proportionnelles. 1 franc rapportera

donc $\frac{3^{fr}}{71,25}$ et 60000 francs rapporteront $\frac{3^{fr}}{71 \times 25} \times 60000$ ou $x = 2526^{fr},35$.

2°. *Le 4 pour 100 est au cours de $84^{fr},25$; le 3 pour 100, au cours de $69^{fr},15$; quel est le placement le plus avantageux au point de vue des intérêts produits?*

Si 4 francs correspondent au capital 84,25, 1 franc d'intérêt sera produit par le capital $\frac{84,25}{4} = 21^{fr},0625$.

Si 3 francs correspondent au capital 69,15, 1 franc d'intérêt sera produit par le capital $\frac{69,15}{3} = 23^{fr},05$.

Il vaut mieux acheter de la rente 4 pour 100.

Des assurances.

266. On appelle *assurance* un contrat par lequel, moyennant une *prime* convenue, un objet déterminé se trouve pour un temps limité *garanti* ou *assuré* contre tout risque extérieur. On assure une maison, un mobilier, des récoltes, etc., contre l'incendie ou la foudre ou la grêle. Le contrat passé entre l'assureur et l'assuré, ou *police d'assurance*, est signé d'avance et la prime est calculée à tant pour 100 de la valeur de l'objet, d'après les données de l'expérience. Les mêmes sinistres se reproduisent périodiquement, pourvu qu'on considère un temps assez long qui permette aux inégalités de détail de se perdre dans l'ensemble. Le nombre des naissances, celui des décès, des mariages, la quantité des eaux pluviales, la température moyenne, etc., sont, dans un pays donné, des quantités approximativement fixes, lorsqu'on considère une certaine période partagée en intervalles égaux d'une durée convenable.

Supposons qu'il soit prouvé par les faits que, sur 586 navires baleiniers, 8 se sont perdus en 4 ans. Prenons ce résultat pour moyenne des pertes. Si 8 navires se perdent sur 586, il s'en perdra 1 sur $\frac{586}{8}$ ou 1 sur 73,25. On prendra donc 74. Faisant abstraction de toute chance heureuse ou malheureuse, on posera en principe que, sur 74 navires, il s'en perd toujours 1. Sur le capital engagé, l'assureur devra donc prélever d'abord une prime égale à $\frac{1}{74}$, ce qui revient à 1,36 pour 100; mais il doit s'indemniser aussi des frais d'administration et jouir d'un certain bénéfice. La prime pourra alors être réglée à 4 pour 100. Les bénéfices de l'assureur ne sont plus exposés au hasard, et l'assuré, en sacrifiant une petite partie de ceux auxquels il a

droit, les rend tout à fait certains. Le calcul se réduit à chercher l'intérêt à 4 pour 100 du capital engagé dans l'entreprise maritime.

Rien de mieux entendu et de plus utile que les assurances. Il est à désirer que le gouvernement les élève à la hauteur d'une institution. La prime des assurances contre l'incendie, contre la grêle, etc., se calcule de la même manière, en ayant toujours égard à l'observation des événements malheureux dans un temps donné.

Règles d'escompte.

267. Dans le commerce, on paye rarement comptant les objets livrés : on solde ses achats au moyen d'un *billet* ou *effet*, payable à une époque déterminée qu'on nomme *échéance* du billet.

Si l'on a besoin d'argent avant l'échéance, il faut passer le billet à un banquier qui en acquitte le montant, sauf une retenue à son profit. Cette opération et la retenue correspondante portent le nom d'*escompte*.

Il y a deux sortes d'escomptes : l'escompte en *dehors*, le seul usité en France, et l'escompte en *dedans* souvent employé à l'étranger.

Prendre l'escompte en dehors d'un billet, c'est retenir l'intérêt rapporté par la somme marquée sur le billet, pendant le temps qui doit s'écouler jusqu'à l'échéance. Le possesseur du billet reçoit seulement la différence entre le montant du billet et l'intérêt ainsi calculé.

Exemple : Trouver l'escompte en dehors d'un billet de 15000 *francs, payable dans* 39 *jours, le taux de l'escompte étant fixé à* 7,5 *pour* 100.

En 1 jour, 100 francs rapportent d'après l'énoncé $\frac{7,5}{360}$ et 1 franc, $\frac{7,5}{36000}$. Par suite, 15000 francs en 39 jours rapporteront $\frac{7,5 \times 39 \times 15000}{36000}$ ou $121^{fr},875$.

L'escompte du billet sera donc $121^{fr},875$ et le banquier ne payera que $1487^{fr},125$.

268. *L'escompte en dedans consiste à retenir seulement les intérêts de la valeur actuelle du billet.* Un billet de 3000 francs, payable dans 3 mois, ne vaut pas *aujourd'hui* 3000 francs : il ne les vaudra que dans 3 mois. *Sa valeur actuelle* est la somme qui, augmentée de ses intérêts pendant 3 mois, représente précisément 3000 francs.

Il est évident que le montant d'un billet, sa valeur actuelle,

son escompte en dedans ou l'intérêt correspondant à sa valeur actuelle, sont, *toutes choses égales d'ailleurs*, des quantités proportionnelles. La question est donc une simple règle de trois.

Exemple : Calculer l'escompte en dedans d'un billet de 15000 *francs, payables dans* 39 *jours, le taux de l'escompte étant fixé à* 7,5 *pour* 100.

100 francs rapportent $7^{fr},5$ en un an : ils rapporteront $\frac{7,5 \times 39}{360}$ en 39 jours, et 1 franc rapportera dans les mêmes conditions $\frac{7,5 \times 39}{36000}$. Par suite, le problème est celui-ci : Un billet de $1 + \frac{7,5 \times 39}{36000}$ correspond à un escompte de $\frac{7,5 \times 39}{36000}$, un billet de 15000 francs correspondra à un escompte x. Les quantités considérées étant proportionnelles, on aura

$$\frac{15000}{1 + \frac{7,5 \times 39}{36000}} = \frac{x}{\frac{7,5 \times 39}{36000}}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{15000 \times \frac{7,5 \times 39}{36000}}{1 + \frac{7,5 \times 39}{36000}}.$$

En multipliant haut et bas par 36000, on a

$$x = \frac{15000 \times 7,5 \times 39}{36000 + 7,5 \times 39} = 120,893.$$

L'escompte du billet sera donc $120^{fr},893$ et le banquier ne payera que $14879^{fr},107$.

La différence avec l'escompte en dehors est ici de $0^{fr},982$.

La différence entre les deux escomptes est facile à formuler. Le montant du billet est égal à sa valeur actuelle plus l'escompte en dedans. Pour avoir les intérêts de ce montant ou l'escompte en dehors, il suffit donc d'ajouter aux intérêts de la valeur actuelle, c'est-à-dire à l'escompte en dedans, les intérêts de ce même escompte. C'est ce qu'on peut vérifier sur l'exemple précédent.

Nous indiquerons en algèbre la formule générale de l'escompte en dedans et de la valeur actuelle d'un billet donné. L'escompte en dedans semble plus équitable ; du reste, la différence entre les deux escomptes est ordinairement très-faible.

Partages proportionnels.

269. *Partager un nombre donné en parties proportionnelles à d'autres nombres donnés, c'est vouloir que les rapports de chaque partie au nombre correspondant soient égaux.*

Ainsi, partager A en parties x, x', x'', proportionnelles aux nombres 3, 5, 7, c'est vouloir qu'on ait

$$\frac{x}{3} = \frac{x'}{5} = \frac{x''}{7}.$$

Mais nous savons (**165**) que lorsque plusieurs rapports sont égaux, le rapport formé en divisant la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, est égal à chacun d'eux. Le rapport $\frac{x + x' + x''}{3 + 5 + 7}$ ou $\frac{A}{3 + 5 + 7}$ est donc égal au tiers de x ou au cinquième de x' ou au septième de x''. On fera par suite la somme des nombres proportionnels, on divisera A en autant de parties égales que cette somme contiendra d'unités : trois de ces parties formeront x, cinq formeront x', sept formeront x''.

270. Les règles de *société* sont une application des partages proportionnels. En effet, lorsque plusieurs personnes s'associent pour former une entreprise, on convient généralement de partager les bénéfices proportionnellement aux *mises* des associés. Si les mises ne restent pas placées pendant le même temps, on partage les bénéfices proportionnellement aux produits des mises par les temps qui leur correspondent.

Exemple : 4 associés ont placé dans une entreprise : le premier 24000 *francs pendant* 4 *ans, le second* 15000 *francs pendant* 3 *ans, le troisième* 36000 *francs pendant* 1 *an, le quatrième* 60000 *francs pendant* 6 *mois. Le bénéfice est de* 57800 *francs.* On le partagera proportionnellement aux produits 24000×4, 15000×3, 36000×1, $60000 \times \frac{1}{2}$, c'est-à-dire aux nombres 96000, 45000, 36000 et 30000 ou 32, 15, 12 et 10. En désignant les parts par x', x'', x''', x^{IV}, on aura

$$x' = \frac{57800}{32 + 15 + 12 + 10} \times 32 = 26805^{\text{f}},80,$$

$$x'' = \frac{57800}{32 + 15 + 12 + 10} \times 15 = 12565^{\text{f}},22,$$

$$x''' = \frac{57800}{32 + 15 + 12 + 10} \times 12 = 10052^{\text{f}},16,$$

$$x^{\text{IV}} = \frac{57800}{32 + 15 + 12 + 10} \times 10 = 8376^{\text{f}},82.$$

La somme des parts doit reconstituer, comme vérification, le bénéfice total 57800 (*).

(*) L'hypothèse de la proportionnalité des parts aux produits des mises par les temps, est basée sur la convention toute naturelle que, pour des temps

Questions sur les mélanges et les alliages.

271. On peut se proposer sur les mélanges deux questions très-différentes. 1° *On peut donner les quantités à mélanger et les prix qui correspondent à leurs unités, on cherche alors le prix total du mélange.* 2° *On peut donner le prix total du mélange et les prix des unités, on cherche alors dans quelles proportions les quantités correspondantes doivent être mélangées.* Cette seconde question est en réalité du ressort de l'algèbre, et elle est évidemment indéterminée dès qu'on considère plus de deux quantités d'espèce différente.

Exemple : On mélange 80^{l} *de vin à* $0^{fr},50$ *le litre ;* 60^{l} *de vin à* $0^{fr},70$ *le litre ;* 110^{l} *à* $0^{fr},85$ *le litre, on demande le prix du litre du mélange.*

$$\begin{array}{lll} 80^{l} \text{ à } 0^{fr},50 & \text{valent } 80 \times 0,50 = & 40^{fr} \\ 60 \text{ à } 0\ ,70 & \text{valent } 60 \times 0,70 = & 42 \\ \underline{110 \text{ à } 0\ ,85} & \text{valent } 110 \times 0,85 = & \underline{93,50} \\ 250^{l} & & 175^{fr},50 \end{array}$$

Les 250^{l} du mélange vaudront donc $175^{fr},50$. Par suite, 1^{l} du mélange vaudra $\frac{175,50}{250} = 0^{fr},702$.

Exemple : On a 3 *lingots d'argent, le premier au titre de* 0,950 *et pesant* 8^{kg}*; le second, au titre de* 0,820 *et pesant* 15^{kg}*; le troisième, au titre de* 0,750 *et pesant* $11^{kg},5$. *On demande le titre du lingot obtenu en fondant ensemble ces* 3 *lingots.*

8^{kg} à 0,950 de fin renferment $8^{kg} \times 0,950$ ou $7^{kg},600$ d'argent pur.

15^{kg} à 0,820 renferment $15^{kg} \times 0,820$ ou $12^{kg},300$ d'argent pur.

$11^{kg},5$ à 0,750 renferment $11^{kg},5 \times 0,750$ ou $8^{kg},625$ d'argent pur.

Le lingot résultant de la fonte pèse donc $34^{kg},5$ et contient

---

égaux, les parts doivent être proportionnelles aux mises et, pour des mises égales, proportionnelles à la durée du placement. Dès lors, a et a' représentant deux parts quelconques, b et b', c et c', les mises et les temps correspondants, on trouvera (259)

$$a' = a \times \frac{b'}{b} \times \frac{c'}{c},$$

d'où

$$\frac{a'}{a} = \frac{b' \times c'}{b \times c}.$$

Les parts sont donc bien alors proportionnelles aux produits des mises par les temps.

$28^{kg},525$ d'argent pur. Son titre sera donc égal (247) à

$$\frac{28,525}{34,5} = 0,8268.$$

272. *Exemple. On a deux lingots d'argent, l'un au titre de* 0,950, *l'autre au titre de* 0,820, *dans quelle proportion faut-il les mélanger pour obtenir un alliage au titre de* 0,900?

Si, au lieu d'un kilogramme de l'alliage cherché, on prenait 1 kilogramme du premier lingot, l'erreur *en plus* sur le titre serait de $0,950 - 0,900 = 0,050$. Si la quantité choisie du premier lingot n'est plus égale à 1^{kg}, mais à la fraction x^{kg}, l'erreur en plus sera $x \times 0,050$.

De même, si au lieu de 1 kilogramme de l'alliage cherché, on prenait 1 kilogramme du second lingot, l'erreur *en moins* serait de $0,900 - 0,820 = 0,080$. Si la quantité choisie du second lingot n'est plus égale à 1^{kg}, mais à la fraction y^{kg}, l'erreur en moins sera $y \times 0,080$.

Pour qu'il y ait compensation, c'est-à-dire pour que le kilogramme de l'alliage soit au titre de 0,900, il faut que les erreurs en plus et en moins soient égales et, par suite, qu'on ait

$$x \times 0,050 = y \times 0,080,$$

on en déduit

$$\frac{x}{y} = \frac{0,080}{0,050}.$$

On doit donc former 1 kilogramme de l'alliage projeté, de deux fractions x et y des lingots considérés, inversement proportionnelles aux différences 0,050 et 0,080 qui existent entre le titre moyen et chacun des titres donnés; c'est-à-dire que x, quantité du premier lingot, doit correspondre à la différence entre le titre moyen et le titre du second lingot, et que y, quantité du second lingot, doit correspondre à la différence entre le titre du premier lingot et le titre moyen.

Remarquons que la somme des fractions x et y est supposée égale à 1 kilogramme. La question est donc ramenée à partager un nombre donné en parties proportionnelles à des nombres donnés. On peut remplacer le rapport $\frac{0,080}{0,050}$ par le rapport $\frac{8}{5}$. On aura alors (269)

$$x = \frac{1}{8+5} \times 8 \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{8+5} \times 5,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{8}{13} \quad \text{et} \quad y = \frac{5}{13}.$$

La fraction $\frac{8}{13}$ revient à 0,6154 et la fraction $\frac{5}{13}$ à 0,3846. On prendra $0^{kg},6154$ du premier lingot et $0^{kg},3846$ du second, pour former 1 kilogramme de l'alliage.

273. Voyons maintenant comment on peut opérer dans le cas où l'on a à considérer plus de deux quantités, et supposons le problème suivant.

Exemple : Un boulanger a trois espèces de farines, la première à $0^{fr},40$ *le kilogramme, la seconde à* $0^{fr},50$ *le kilogramme, la troisième à* $0^{fr},55$ *le kilogramme. Dans quelles proportions doit-on opérer le mélange de ces trois farines pour que le kilogramme du mélange coûte* $0^{fr},45$?

La question est indéterminée : c'est ce que montrera la marche que nous allons suivre pour trouver l'une des solutions du problème.

On prendra un prix intermédiaire entre le premier prix $0^{fr},40$ et le prix moyen $0^{fr},45$: par exemple, le prix $0^{fr},43$; et l'on cherchera dans quelle proportion il faut mélanger la première et la seconde espèce de farine pour que le prix moyen du mélange auxiliaire ainsi formé soit égal à $0^{fr},43$. En appelant x et y les fractions de kilogramme à mélanger, pour avoir 1^{kg} du mélange, on pourra poser, d'après ce qui précède,

$$\frac{x}{y} = \frac{0,50 - 0,43}{0,43 - 0,40} = \frac{0,07}{0,03} = \frac{7}{3}.$$

On devra donc partager 1 en parties proportionnelles à 7 et 3, c'est-à-dire que x sera égale à $0^{kg},7$ et y à $0^{kg},3$.

On cherchera ensuite dans quelle proportion il faut mélanger la farine résultant du premier mélange et celle à $0^{fr},55$ pour que le prix moyen atteigne la valeur demandée $0^{fr},45$.

En appelant z et u les fractions de kilogramme du premier mélange et de la troisième espèce de farine, qui doivent composer le kilogramme du mélange cherché, on aura

$$\frac{z}{u} = \frac{0,55 - 0,45}{0,45 - 0,43} = \frac{0,10}{0,02} = \frac{10}{2} = \frac{5}{1}.$$

On devra, par suite, partager 1 en parties proportionnelles à 5 et 1, c'est-à-dire que z sera égale à $\frac{5^{kg}}{6}$ et u à $\frac{1^{kg}}{6}$.

Il faut, pour terminer, calculer les quantités des deux premières espèces de farines qui doivent composer z. Si z était égale à 1^{kg}, il y entrerait $0^{kg},7$ à $0^{fr},40$ et $0^{kg},3$ à $0^{fr},50$; z étant égale à $\frac{5^{kg}}{6}$, il y entrera $\frac{5^{kg}}{6} \times 0,7 = 0^{kg},583$ de farine à $0^{fr},40$ et $\frac{5^{kg}}{6} \times 0,3 = 0^{kg},250$ de farine à $0^{fr},50$.

En résumé, on répondra à la question, en formant chaque kilogramme du mélange de

	$0^{kg},583$	de farine	à $0^{fr},40$
	$0\ ,250$		à $0\ ,50$
$\frac{1^{kg}}{6}$ ou	$0\ ,167$		à $0\ ,55$
	$1^{kg},000$		

La question est bien indéterminée; car si nous changions le prix moyen auxiliaire 0,43 dont la valeur est arbitraire, nous arriverions à une nouvelle solution.

Règle conjointe.

274. *On appelle ainsi un problème dans lequel deux quantités principales sont liées entre elles par une série de rapports connus, qui permettent de les déduire l'une de l'autre.* Deux exemples suffiront pour indiquer la marche à suivre.

Exemple : On demande combien 113 *pieds anglais valent de mètres, sachant que* 16 *pieds anglais valent* 15 *pieds français, et que* 4 *pieds français valent* $1^{M},3$.

Puisque 4 pieds français valent $1^{M},3$, la valeur de 1 pied français sera $\frac{1\ ,3}{4}$. 16 pieds anglais valant 15 pieds français, 1 pied anglais vaudra $\frac{15}{16}$ de pied français et, par conséquent, $\frac{15}{16} \times \frac{1^{M},3}{4}$. Enfin, 113 pieds anglais vaudront

$$\frac{15}{16} \times \frac{1^{M},3}{4} \times 113 = 34^{M},53.$$

Exemple : On demande en francs la valeur de 100 *pistoles d'Espagne, sachant que* 4 *piastres valent* 1 *pistole et que* 1 *piastre vaut* $5^{fr},40$.

Puisque 1 pistole vaut 4 piastres et que 1 piastre vaut $5^{fr},40$, 1 pistole vaut $5^{fr},40 \times 4$ ou 100 pistoles valent $5^{fr},40 \times 4 \times 100$ ou 2160^{fr}. Quand il s'agit du change des monnaies, la règle conjointe prend souvent le nom d'*arbitrage*.

Questions diverses.

275. *Payer* 95 *francs avec* 28 *pièces, les unes de* 5 *francs, les autres de* 2 *francs.*

Pour résoudre cette question, nous ferons une *hypothèse arbitraire* sur le nombre de pièces de 5 francs nécessaire. Supposons qu'on prenne 15 pièces de 5 francs; il restera à prendre 28 — 15 ou 13 pièces de 2 francs. La somme formée

sera égale à $15 \times 5 + 13 \times 2$ ou 101 francs : elle surpasse 95 francs de 6 francs. On remarque alors que, si l'on remplace une pièce de 5 francs par une pièce de 2 francs, on diminuera de 3 francs la somme formée. Il faut diminuer la somme 101 de 6 francs. Par suite, en divisant par 3 la différence 6, le quotient 2 indiquera qu'il faut remplacer 2 pièces de 5 francs par 2 pièces de 2 francs, c'est-à-dire prendre 13 pièces de 5 francs et 15 pièces de 2 francs.

276. *Une personne a souscrit trois billets, le premier de* 800 *francs payable dans* 5 *mois, le second de* 2000 *francs payable dans* 8 *mois, le troisième de* 500 *francs payable dans* 14 *mois : elle veut les remplacer par un seul billet à l'échéance de* 11 *mois ; on demande le montant de ce billet, le taux de l'intérêt étant* 5 *pour* 100.

Si le premier billet de 800 francs n'est pas acquitté au bout de 5 mois et si la dette correspondante n'est couverte qu'au bout de 11 mois, on doit tenir compte au créancier des intérêts de 800 francs pendant $11 - 5$ ou 6 mois. Ces intérêts sont $\frac{800 \times 5 \times 6}{100 \times 12} = \frac{8 \times 5}{2} = 20^{\text{fr}}$.

Si le second billet de 2000 francs n'est pas acquitté au bout de 8 mois et si la dette correspondante n'est couverte qu'au bout de 11 mois, on doit tenir compte au créancier des intérêts de 2000 francs pendant $11 - 8$ ou 3 mois. Ces intérêts sont $\frac{2000 \times 5 \times 3}{100 \times 12} = \frac{20 \times 5}{4} = 25^{\text{fr}}$.

Enfin, la dette représentée par le troisième billet de 500 francs, étant acquittée 3 mois plus tôt, le créancier doit au contraire tenir compte au débiteur de ce payement anticipé, en recevant au lieu de 500 francs la somme qui, augmentée de ses intérêts pendant 3 mois, forme 500 francs. Si l'on divise 500 francs par 1 franc augmenté de ses intérêts pendant 3 mois, on aura nécessairement la somme cherchée. 1 franc en 3 mois rapporte, dans les conditions de l'énoncé, $\frac{0,05 \times 3}{12} = \frac{0,05}{4}$; et l'on aura $500 : \left(1 + \frac{0,05}{4}\right) = 500 : \frac{4,05}{4}$; ce qui revient à $\frac{2000}{4,05}$ ou à $493^{\text{fr}},827$.

Le montant du billet à l'échéance de 11 mois devra donc se composer des sommes $800 + 20$ ou 820, $2000 + 25$ ou 2025 et 493,827. Ce montant sera, par conséquent, $3338^{\text{fr}},827$.

277. *Un arrondissement, composé de* 4 *cantons, doit fournir* 215 *soldats. Les populations des* 4 *cantons sont respectivement :* 32119 *habitants,* 40827 *habitants,* 23910 *habitants,*

19813 *habitants. On demande de répartir le contingent à fournir d'après la population, aussi équitablement que possible.*

Il faut partager 215 en parties proportionnelles aux nombres d'habitants donnés. On trouve ainsi :

pour le 1er canton.....	59,1
pour le 2e canton.....	75,2
pour le 3e canton.....	44,0
pour le 4e canton.....	36,5

La répartition ne pouvant avoir lieu qu'en nombres entiers, on demandera respectivement aux 4 cantons, 59 hommes, 75 hommes, 44 hommes, 36 hommes, en tout 214. Il restera donc 1 conscrit à demander en plus à l'un des 4 cantons. Il semblerait au premier abord que c'est le quatrième canton qui doit le fournir, parce que c'est pour ce canton que la partie décimale négligée est la plus considérale. Mais on ne tiendrait pas compte ainsi du nombre des habitants. Il faut chercher l'augmentation absolue que subit le résultat trouvé lorsqu'on prend pour chaque canton un soldat de plus, et la comparer au nombre d'habitants du canton. Le canton pour lequel on trouvera ainsi le plus petit quotient devra évidemment fournir un soldat de plus.

Les résultats 60, 76, 45, 37, correspondent aux augmentations absolues 0,9, 0,8, 1, 0,5, et l'on a

$$\frac{0,9}{32119} = 0,000028,$$

$$\frac{0,8}{40827} = 0,000019,$$

$$\frac{1}{23910} = 0,000041,$$

$$\frac{0,5}{19813} = 0,000025.$$

La plus petite augmentation relative correspond au second canton. La répartition la plus équitable consistera donc à demander 59 hommes au 1er canton, 76 au 2e, 44 au 3e et 36 au 4e.

Nota. Nous renvoyons à l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour toutes les tables concernant les anciennes mesures de France et les mesures étrangères, comparées aux nouvelles mesures de France.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

LIVRE PREMIER.

LE CALCUL ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. En Arithmétique, nous avons employé des *signes particuliers*, ayant une valeur déterminée; en Algèbre, on emploie des *symboles généraux* qui peuvent représenter toutes les valeurs possibles.

En Arithmétique, les signes étant *particuliers*, il faut que les raisonnements aient une généralité telle, qu'on puisse en conclure une règle fixe. En Algèbre, les symboles étant *généraux*, les raisonnements peuvent être particuliers, sans nuire à la généralité de la règle à laquelle on est conduit.

En Arithmétique, une question étant résolue, si elle se presente de nouveau avec d'autres données, il faut la résoudre de nouveau, parce que la solution *numérique* est un résultat brut qui ne conserve aucune trace des opérations successivement effectuées. En Algèbre, une question est résolue une fois pour toutes; les symboles employés ne peuvent, comme les nombres, se fondre les uns dans les autres : ceux qui n'influent pas sur le résultat disparaissent seuls, et l'on obtient une *formule*, c'est-à-dire une expression où les opérations à faire sur les quantités données pour en déduire les quantités inconnues, sont régulièrement indiquées. De sorte que si la même question se présente avec d'autres données spéciales, il suffit de substituer ces nouvelles valeurs particulières aux symboles généraux dans la formule trouvée. Car il faut remarquer que le rôle de l'Arithmétique commence où finit celui de l'Algèbre : *l'Algèbre trouve les formules, l'Arithmétique les calcule.*

Les symboles employés en Algèbre pour représenter les quantités sont les lettres de l'alphabet. On désigne ordinaire-

ment par les premières lettres a, b, c, etc., les quantités connues, et par les dernières x, y, z, etc., les quantités inconnues.

Nous allons rendre sensibles par des exemples les considérations qui précèdent.

2. Proposons-nous cette question : *Trouver deux nombres dont la somme soit* 138 *et la différence* 24.

La somme du plus grand et du plus petit nombre étant 138, et leur différence étant 24, si l'on ajoute cette somme et cette différence, on aura évidemment le double du plus grand nombre, puisque le plus petit nombre, ajouté et retranché, devra disparaître. Deux fois le plus grand nombre formant le nombre $138 + 24$ ou 162, ce plus grand nombre sera égal à $\frac{162}{2}$ ou à 81. Dès lors le plus petit nombre sera représenté par $138 - 81$ ou 57.

Voilà la résolution du problème au point de vue arithmétique.

On simplifie déjà notablement en représentant le plus grand nombre cherché par x et le plus petit par y. Les conditions de l'énoncé sont alors exprimées par les égalités

$$x + y = 138, \quad x - y = 24.$$

Si on les ajoute membre à membre, on trouve

$$2x = 162, \quad \text{d'où} \quad x = 81.$$

Par suite,

$$y = 138 - 81 = 57.$$

Mais ici on a emprunté seulement la forme algébrique : les données seraient autres que 138 et 24, on devrait recommencer le problème. Il faut faire un pas de plus, généraliser d'avantage, arriver à une formule. Pour cela, les données numériques elles-mêmes seront remplacées par des lettres, la somme donnée sera représentée par s, la différence donnée par d. On aura alors

$$x + y = s,$$
$$x - y = d.$$

On en déduira

$$2x = s + d \quad \text{ou} \quad x = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$$

et

$$y = s - x = s - \frac{s}{2} - \frac{d}{2} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}.$$

Ainsi, quelles que soient la somme et la différence données, *le plus grand nombre est égal à la demi-somme plus la demi-différence, et le plus petit nombre à la demi-somme moins la demi-différence.*

Voilà la résolution du problème au point de vue algébrique.

3. Soit encore la question suivante : *Deux fontaines remplissent isolément un bassin, l'une en coulant pendant* 3 *heures, l'autre en coulant pendant* 5 *heures ; en combien de temps le rempliraient-elles si elles coulaient ensemble ?*

La première fontaine remplit le bassin en 3 heures ; en 1 heure, elle en remplira $\frac{1}{3}$; la seconde remplit le bassin en 5 heures ; en 1 heure elle en remplira $\frac{1}{5}$. Les deux fontaines coulant ensemble rempliront donc en 1 heure $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ du bassin, c'est-à-dire $\frac{8}{15}$ du bassin. Elles en rempliront $\frac{1}{15}$ en $\frac{1}{8}$ d'heure, elles le rempliront tout entier en $\frac{15}{8}$ d'heure, c'est-à-dire en $1^h\frac{7}{8}$ ou $1^h 52^m,5$.

Remarquons que le résultat $\frac{15}{8}$ est l'inverse de la fraction $\frac{8}{15}$.

Si l'on veut obtenir la formule qui correspond à tous les problèmes de même espèce, on représente par a et b les temps nécessaires aux deux fontaines coulant seules pour remplir le bassin, par x le temps cherché. L'heure étant toujours prise pour unité et la capacité du bassin représentée par 1, la première fontaine remplit en 1 heure une fraction de cette capacité représentée par $\frac{1}{a}$, la seconde une fraction représentée par $\frac{1}{b}$. Coulant ensemble, elles remplissent donc en 1 heure $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ou $\frac{a+b}{ab}$ du bassin. Autant de fois 1 contiendra $\frac{a+b}{ab}$, autant il faudra d'heures pour que le bassin soit rempli. On aura donc

$$x=\frac{ab}{a+b},$$

inverse de la fraction $\frac{a+b}{ab}$.

Si l'on veut vérifier la solution numérique précédente, il faudra dans cette formule remplacer a par 3 et b par 5. Il viendra

$$x=\frac{15}{8}.$$

4. L'usage des formules offre en outre ce précieux avantage,

de résumer aussi nettement et aussi simplement que possible les relations qui peuvent exister entre les quantités considérées, de manière à faire apercevoir immédiatement des rapprochements que le raisonnement aurait eu quelquefois peine à découvrir. De plus, si les inconnues et les données se transforment les unes dans les autres, les mêmes formules sont encore applicables, pourvu qu'on y effectue les mêmes transformations.

Ainsi, l'équation du mouvement uniforme étant

$$e = v \times t,$$

si la vitesse devient l'inconnue, on en déduit

$$v = \frac{e}{t};$$

et si le temps à son tour doit être déterminé, la même formule donne encore

$$t = \frac{e}{v}.$$

Nous démontrerons plus loin qu'un cercle a pour expression un nombre constant π, multiplié par le carré R^2 de son rayon R; de sorte qu'on peut écrire, pour deux cercles quelconques de rayons R et R′,

$$\text{cercle } R = \pi \times R^2 \quad \text{et} \quad \text{cercle } R' = \pi \times R'^2.$$

On en déduit à l'instant

$$\frac{\text{cercle } R}{\text{cercle } R'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Si dans le second problème traité plus haut (3), on donne le temps nécessaire à la première fontaine coulant seule pour remplir le bassin, ainsi que le temps nécessaire aux deux fontaines coulant ensemble pour remplir le même bassin, et qu'on demande pendant combien d'heures la seconde fontaine devra être ouverte pour produire aussi ce résultat, il suffira dans la formule $x = \frac{ab}{a+b}$ de regarder x comme une quantité donnée et b comme la quantité inconnue. On en déduira alors sans peine

$$ax + bx = ab, \quad ab - bx = ax, \quad (a - x)\,b = ax,$$

et enfin

$$b = \frac{ax}{a - x}.$$

Des signes et des expressions algébriques.

5. On indique l'addition et la soustraction par les mêmes signes qu'en Arithmétique.

On indique la multiplication par le signe $\times$ ou par un simple point placé entre les quantités à multiplier; ou mieux encore, on les écrit à la suite l'une de l'autre sans l'interposition d'aucun signe. Ainsi, les expressions $a \times b$, $a.b$, ab, sont équivalentes.

Quand il y a un facteur numérique, on a soin de l'écrire le premier, et il prend alors le nom de *coefficient*. Si l'on donne l'expression $a.b.5.c.7$, comme on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué et les ranger dans l'ordre qu'on veut (*Arith.*, 66), on remplacera 5 et 7 par leur produit 35, et l'expression proposée deviendra $35abc$. 35 est le coefficient.

Quand une lettre est prise plusieurs fois comme facteur, on ne l'écrit qu'une seule fois en faisant usage de l'*exposant*. $a \times a \times a \times a$ s'écrira a^4. Cette notation, en apparence de peu d'importance, a eu la plus heureuse influence sur les progrès de l'algèbre. Elle est due à Descartes.

Il faut avoir soin de ne pas confondre le coefficient et l'exposant. Le coefficient indique combien de fois il faut répéter une certaine quantité, et l'exposant à quelle puissance il faut élever cette quantité.

On indique la division en Algèbre comme en Arithmétique.

L'usage des parenthèses est nécessaire, en Algèbre comme en Arithmétique, quand il s'agit de soumettre à de nouvelles opérations des expressions où le calcul qui doit les transformer est lui-même seulement indiqué.

Si l'on veut, par exemple, multiplier $a+b$ par $c-d$, il faudra écrire

$$(a+b) \times (c-d).$$

Si l'on veut diviser la différence $\frac{a+b}{c-d} - f$ par la somme $a+f$, on écrira de même

$$\left(\frac{a+b}{c-d} - f\right) : (a+f).$$

Les mots *égalité* et *inégalité* ont le même sens en Arithmétique et en Algèbre : les signes correspondants sont aussi les mêmes.

Comme nous l'avons déjà dit en Arithmétique, lorsque plusieurs quantités ont, sans être égales, une dépendance commune, une certaine analogie qu'il importe de rappeler, on

représente ces quantités par la même lettre affectée d'accents différents a, a', a'', a''', etc.

6. Un *monôme* est une expression algébrique dans laquelle il n'entre aucun signe *plus* ou *moins*. Une expression formée de plusieurs monômes réunis entre eux par les signes $+$ ou $-$, constitue ce qu'on appelle un *polynôme*. Les différents monômes, pris avec le signe qui les précèdent, sont les *termes* du polynôme. Un monôme qui n'a pas de signe est censé avoir le signe $+$. Quand le polynôme ne contient que deux termes, on l'appelle *binôme;* quand il en contient trois, on l'appelle *trinôme*.

Les expressions $\frac{5}{3}a^3b^2c$, $19\sqrt{bc}$, sont des monômes.

Les expressions $3a^2 - 5ab$, $\frac{a}{2} + 4\sqrt{ab}$, sont des binômes.

L'expression $2a + \frac{3}{2}\sqrt{ab} - 5b$ est un trinôme.

L'expression $a^4 - 3a^3b + \frac{5}{2}a^2b^2 - \frac{7}{3}ab^3 - 2b^4$ est un polynôme.

7. Une expression algébrique est dite *entière* ou *fractionnaire* suivant qu'elle ne contient pas ou qu'elle contient des dénominateurs. Elle est dite *rationnelle* ou *irrationnelle* suivant qu'elle ne contient pas ou qu'elle contient des radicaux (*Arith.*, **196**).

Par exemple, l'expression $\frac{4a^2 - 3ab^2}{a + b}$ est à la fois fractionnaire et rationnelle; l'expression $a + \sqrt{ab}$ est à la fois entière et irrationnelle.

Souvent on ne considère la nature de l'expression que par rapport à l'une des lettres qui y entrent. Ainsi, une expression entière par rapport à x est une expression dans laquelle x n'entre dans aucun dénominateur.

On peut remarquer qu'une expression fractionnaire algébriquement donnera souvent un résultat numérique entier, lorsqu'on y remplacera les lettres par des nombres spéciaux; de même, une expression entière algébriquement donnera souvent un résultat numérique fractionnaire. Il ne faut point perdre de vue que les symboles algébriques doivent pouvoir représenter toutes les quantités possibles. $\sqrt{a}$ reste incommensurable, si l'on fait $a = 2$, et devient numériquement commensurable si l'on fait $a = 25$.

8. On appelle *degré* d'un monôme la somme des exposants

de toutes les lettres qui y entrent. Le monôme $7a^2b^3c$ est un monôme du 6e degré, la lettre c a l'exposant 1.

On appelle degré d'un polynôme le degré le plus élevé parmi ceux des termes qui le composent. Le polynôme $2a^4b - 3a^3 + 5b^2 - \frac{7}{2}b$ est un polynôme du 5e degré.

Quand tous les termes d'un polynôme sont de même degré, il est dit *homogène*. Le polynôme $2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3$ est un polynôme homogène du troisième degré.

Souvent on ne prend le degré que par rapport à une lettre. Le monôme $5a^2x^3$ est du troisième degré en x. Le polynôme $3a^3x^3 - 2a^2x^2 + 5ax - a^3$ est aussi du troisième degré en x.

9. On entend par *termes semblables* deux termes qui contiennent les mêmes lettres affectées des mêmes exposants, et qui ne diffèrent que par le signe et le coefficient.

Quand il y a des termes semblables dans un polynôme, on a soin d'en opérer la *réduction* pour simplifier l'expression du polynôme.

Soit le polynôme

$$3a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - a^3 + 2a^2b - 3ab^2 + 2a^3 + a^2b - 5ab^2.$$

Les termes $3a^3, -a^3, +2a^3$, sont semblables. Il faut, à la quantité représentée par $3a^3$, ajouter la quantité représentée par $2a^3$, puis retrancher du résultat la quantité représentée par a^3. On aura évidemment

$$3a^3 - a^3 + 2a^3 = 4a^3.$$

On aura de même

$$-5a^2b + 2a^2b + a^2b = -2a^2b,$$

ce dernier résultat signifiant qu'on doit de la quantité $4a^3$ retrancher la quantité $2a^2b$.

Enfin, on peut écrire $7ab^2 - 3ab^2 - 5ab^2 = -ab^2$, ce qui indique qu'on doit retrancher encore du reste de la précédente soustraction la quantité ab^2.

Le polynôme proposé prendra donc la forme beaucoup plus simple

$$4a^3 - 2a^2b - ab^2.$$

Pour opérer la réduction des termes semblables, on voit qu'il suffit de considérer les coefficients et leurs signes. Si les coefficients des termes semblables ont le même signe, on les ajoute, on donne leur signe à la somme obtenue et on écrit à la suite la partie littérale commune. Si les coefficients des termes semblables n'ont pas le même signe, on ajoute séparément les coefficients qui ont le signe + et séparément les

coefficients qui ont le signe —, on retranche la plus petite somme de la plus grande, on donne au résultat le signe de la plus grande somme et on écrit à la suite la partie littérale commune.

10. Après avoir opéré la réduction des termes semblables, on *ordonne* ordinairement le polynôme. Ordonner un polynôme, c'est l'écrire de manière que les exposants d'une certaine lettre aillent en croissant ou en décroissant d'un terme au suivant : cette lettre est *la lettre ordonnatrice*.

Le polynôme $5x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ est ordonné suivant les puissances décroissantes de x ; le polynôme $-7x + x^2 - 9x^3 + 2x^4$ est ordonné au contraire suivant les puissances croissantes de x.

Quand un terme ne contient pas la lettre ordonnatrice, il est du degré zéro par rapport à cette lettre.

Un polynôme est *complet* quand il contient, par rapport à la lettre ordonnatrice, les termes de tous les degrés depuis zéro jusqu'au degré du polynôme. Un polynôme complet a donc un terme de plus que le nombre qui indique son degré. Un polynôme complet du degré m renferme $m + 1$ termes.

Lorsque, dans un polynôme, plusieurs termes renferment une même puissance de la lettre ordonnatrice, on écrit ces termes en les ordonnant par rapport à une seconde lettre. On met souvent, dans ce cas, la puissance commune de la lettre ordonnatrice en facteur commun. Si l'on a les termes $-4a^3x^3$, $+5a^4x^3$, $+3a^2x^3$, on les écrira de l'une ou l'autre des manières suivantes :

$$3a^2x^3 - 4a^3x^3 + 5a^4x^3, \quad (3a^2 - 4a^3 + 5a^4)x^3.$$

11. Quand deux quantités dépendent l'une de l'autre, de manière que, la valeur de l'une d'elles étant fixée, la valeur de l'autre s'ensuive nécessairement, on dit que ces deux quantités sont *fonction* l'une de l'autre. Ainsi, la pression de la vapeur d'eau est *fonction* de sa température. La relation qui exprime la liaison existante entre les quantités fonctions les unes des autres, s'appelle une *équation*.

La relation $5x - 3y = 7$ est une équation entre les quantités x et y fonction l'une de l'autre. On a étendu le sens du mot fonction en l'appliquant à l'équation elle-même : $5x - 3y = 7$ est une fonction *implicite* de x et de y. Nous disons *implicite*, parce que la forme sous laquelle se présente l'équation ne montre pas immédiatement quelles opérations il faut exécuter pour déduire y de x ou x de y.

Si l'on fait tout passer dans un membre de manière à avoir $5x - 3y - 7 = 0$, on peut représenter la fonction par le symbole $F(x, y) = 0$, qu'on doit lire *fonction* de x et de y égale

zéro. Si l'on a plusieurs fonctions différentes à indiquer, on fait varier la lettre F et on la remplace par la lettre f, la lettre φ, etc.

On peut, dans certains cas, isoler dans un membre l'une des quantités variables considérées. Par exemple, de l'équation $5x - 3y = 7$, on déduira

$$x = \frac{7 + 3y}{5}.$$

On a alors une fonction *explicite* de x par rapport à y, parce qu'on voit immédiatement quelles opérations il faut faire pour déduire x de y. y dans ce cas est appelé la *variable indépendante*. On indique la fonction en écrivant $x = \mathrm{F}(y)$. $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}(y)$ indiquent en général deux fonctions explicites composées de la même manière, l'une en x, l'autre en y, de sorte qu'elles se transforment l'une dans l'autre quand on y change x en y et y en x.

Le but principal de l'Algèbre est précisément le passage des fonctions *implicites* aux fonctions *explicites* correspondantes, c'est-à-dire que ce but est la résolution des équations.

CHAPITRE II.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

12. Comme l'Algèbre opère sur des symboles généraux qui ne peuvent pas se fondre les uns dans les autres, le calcul algébrique consiste à remplacer certaines indications par d'autres plus simples ou équivalentes.

Addition.

13. Soit le polynôme $a + b - c + d - e - f$. Il est évident que sa *valeur* est l'excès de la somme des termes qui ont le signe + sur la somme des termes qui ont le signe —, de sorte qu'on peut mettre le polynôme sous la forme

$$(a + b + d) - (c + e + f).$$

Représentons par A la somme des termes qui ont le signe +, c'est-à-dire la somme des termes *positifs* ; représentons par B la somme des termes qui ont le signe —, c'est-à-dire la somme des termes *négatifs*. On aura

$$\mathrm{A} = a + b + d, \quad \mathrm{B} = c + e + f,$$

et le polynôme donné, quel qu'il soit, aura pour expression $\mathrm{A} - \mathrm{B}$.

Ce que nous venons de dire prouve qu'on peut écrire les termes d'un polynôme dans un ordre quelconque, sans changer sa valeur.

Si l'on remplace les lettres par des nombres, le résultat final ou la valeur du polynôme peut être positive ou négative. Si le polynôme proposé devient, par cette substitution,

$$12 + 5 - 9 + 2 - 3 - 4,$$

sa valeur sera $(12 + 5 + 2) - (9 + 3 + 4)$ ou 3. Si le polynôme devient au contraire $9 + 3 - 12 + 4 - 5 - 2$, sa valeur sera $(9 + 3 + 4) - (12 + 5 + 2)$ ou -3.

14. Ceci posé, admettons qu'on veuille ajouter au polynôme P le polynôme A — B, dont la valeur est *positive*. Pour ajouter une différence, il faut évidemment ajouter le plus grand nombre et retrancher le plus petit du résultat. On aura donc

$$P + (A - B) = P + A - B.$$

Ajouter A, c'est écrire à la suite du premier polynôme P tous les termes du second qui ont le signe +, avec leurs signes; et retrancher B, c'est écrire à la suite du résultat obtenu tous les termes du second polynôme qui ont le signe —, aussi avec leurs signes. En effet, ajouter ou retrancher une somme, c'est ajouter ou retrancher successivement toutes les parties de cette somme.

On arrive donc à cette règle générale : *Pour ajouter deux polynômes, on écrit le second à la suite du premier en conservant les signes de tous ses termes.*

On ne sait jamais d'avance si le polynôme à ajouter aura une valeur positive ou négative, car on ne sait pas quelles valeurs numériques la question proposée conduira à substituer aux lettres. On serait donc toujours arrêté dans l'application de la règle, si on ne la généralisait pas à l'aide d'une convention à laquelle cette nécessité même donne naissance.

Pour pouvoir étendre la règle au cas où le polynôme à ajouter a une valeur négative, il faut faire cette convention qu'ajouter une quantité négative, c'est retrancher la quantité positive correspondante : ajouter -3, c'est retrancher 3. Si le polynôme A — B a la valeur -3, $P + (A - B)$ sera égal à $P - 3$.

L'addition n'entraîne donc plus l'idée d'augmentation : c'est une augmentation, si le polynôme qu'on ajoute a une valeur positive; c'est une diminution dans le cas contraire. L'addition algébrique renferme à la fois l'addition et la soustraction arithmétique.

On peut dire, d'après ce qui précède, qu'un polynôme est la somme algébrique de tous ses termes, et qu'ajouter un polynôme, c'est ajouter tous ses termes.

Soustraction.

15. Supposons qu'on ait à retrancher du polynôme P le polynôme A — B, et que la valeur de ce dernier polynôme soit positive. Nous avons vu en Arithmétique (62) que, pour retrancher une différence, il fallait ajouter le plus petit nombre et retrancher le plus grand du résultat. Le résultat demandé sera donc

$$P - (A - B) = P + B - A.$$

Ajouter B, c'est écrire tous les termes de B à la suite du polynôme P avec un signe contraire à celui qu'ils ont dans le polynôme à retrancher; ajouter ensuite — A ou retrancher A, c'est écrire tous les termes de A à la suite du premier résultat, aussi avec un signe contraire à celui dont ils sont affectés dans le polynôme à retrancher. On est donc conduit à cette règle : *Pour soustraire deux polynômes l'un de l'autre, on écrit le second à la suite du premier en changeant les signes de tous ses termes.*

Pour pouvoir étendre la règle au cas où le polynôme à retrancher a une valeur négative, il faut faire cette convention que, retrancher une quantité négative, c'est ajouter la quantité positive correspondante. Retrancher — 3, c'est ajouter 3. Si le polynôme A—B a la valeur — 3, P — (A — B) sera égale à P+3.

Ayant d'ailleurs fait la convention qu'ajouter — 3, c'est retrancher 3, il faut bien faire la convention que retrancher — 3, c'est ajouter 3 : il faut que ces deux opérations, ajouter — 3 et retrancher — 3, se détruisent.

De même que l'addition algébrique n'entraîne plus l'idée d'augmentation, la soustraction algébrique n'entraîne plus l'idée de diminution. C'est une diminution quand la quantité à retrancher est positive, c'est une augmentation dans le cas contraire.

On peut dire, d'après ce qui précède, que retrancher un polynôme, c'est retrancher tous ses termes.

Exemples :

$$\text{polynômes à ajouter}\left\{\begin{array}{r} 5a^4 - 3a^3b + 7a^2b^2 - 5ab^3 - b^4 \\ -3a^4 + 3a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3 - 2b^4 \\ a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 + 5b^4 \\ \hline 3a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + 2b^4 \end{array}\right.$$

$$\text{polynômes à soustraire}\left\{\begin{array}{r} 5a^4 - 3a^3b + 7a^2b^2 - 5ab^3 - b^4 \\ -3a^4 + 3a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3 - 2b^4 \\ \hline 8a^4 - 6a^3b + 15a^2b^2 - 9ab^3 + b^4 \end{array}\right.$$

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION.

Multiplication des monômes.

16. Nous avons vu en Arithmétique que, pour multiplier deux produits de plusieurs facteurs, il suffisait de former un produit unique avec tous les facteurs du multiplicande et tous ceux du multiplicateur. Nous avons vu aussi que, dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs, on pouvait changer leur ordre de toutes les manières possibles et en remplacer un nombre quelconque par leur produit effectué. De plus, on multiplie deux puissances d'une même quantité, en ajoutant leurs exposants (*Arith.*, 66, 67, 73).

Ceci posé, soit à multiplier le monôme $5a^3bx^2$ par le monôme $7a^4b^2y$. Le produit sera égal à

$$5 \times a^3 \times b \times x^2 \times 7 \times a^4 \times b^2 \times y.$$

On pourra remplacer les facteurs 5 et 7 par leur produit effectué 35, a^3 et a^4 par leur produit effectué a^7, b et b^2 par leur produit effectué b^3; et il viendra

$$5a^3bx^2 \times 7a^4b^2y = 35a^7b^3x^2y$$

Pour multiplier deux monômes, *il faut donc multiplier leurs coefficients, écrire les lettres communes à la suite du résultat obtenu avec un exposant égal à la somme de ceux qu'elles ont dans les deux facteurs, écrire les lettres non communes telles qu'elles se trouvent dans les deux facteurs.*

Cette règle permet d'effectuer le produit d'autant de monômes qu'on voudra.

Multiplication d'un polynôme par une quantité quelconque.

17. Soit le polynôme $a + b - c$ à multiplier par m. Si m est entier, on a pour but de répéter m fois le multiplicande. En appliquant la règle de l'addition, on trouve immédiatement pour résultat

$$am + bm - cm.$$

Si l'on veut diviser le polynôme $a + b - c$ par l'entier p, le résultat sera évidemment, d'après ce que nous venons d'obtenir,

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p} - \frac{c}{p}.$$

En effet, ce dernier polynôme multiplié par le diviseur p reproduit bien le dividende $a + b - c$.

Si l'on a maintenant à multiplier le polynôme $a + b - c$ par la quantité fractionnaire quelconque $\frac{m}{p}$, il faudra diviser le polynôme par p et répéter m fois le quotient obtenu. L'application des deux remarques précédentes conduira alors au résultat

$$\frac{am}{p} + \frac{bm}{p} - \frac{cm}{p}.$$

On voit que, *pour multiplier un polynôme par une quantité quelconque, il faut multiplier tous les termes du multiplicande par le multiplicateur, en conservant leurs signes.*

Multiplication de deux polynômes.

18. Représentons le premier polynôme par $A - B$, le second par $C - D$, et supposons que les valeurs des deux polynômes soient positives.

Nous rappellerons les deux théorèmes suivants démontrés en Arithmétique.

Pour multiplier deux sommes l'une par l'autre, il faut multiplier toutes les parties de la première somme par toutes les parties de la seconde, et ajouter tous les produits partiels obtenus (63).

Pour multiplier un nombre par une différence, il faut multiplier ce nombre par chaque partie de la différence, et retrancher le plus petit produit du plus grand (64).

En regardant $A - B$ comme une différence effectuée, on pourra écrire :

$$(A - B) \times (C - D) = (A - B)\,C - (A - B)\,D.$$

Si l'on ne regarde plus $A - B$ comme une différence effectuée, on aura (17).

$$(A - B)\,C = AC - BC,$$
$$(A - B)\,D = AD - BD.$$

Pour retrancher ce dernier produit, il faut écrire ses termes à la suite du premier résultat en changeant leurs signes (15). On aura donc

$$(A - B) \times (C - D) = AC - BC - AD + BD.$$

Examinons ce produit. Il renferme les produits de A et de B par C et par D. Comme A, B, C, D représentent quatre sommes arithmétiques, on pourra dire que le produit demandé contient les produits partiels de tous les termes du multiplicande par

tous ceux du multiplicateur. Il reste maintenant à savoir de quels signes ces produits partiels devront être affectés. AC et BD étant précédés du signe +, tous les produits partiels correspondants auront le signe +. A et C représentent l'ensemble des termes du multiplicande et l'ensemble des termes du multiplicateur qui ont le signe +, B et D l'ensemble des termes du multiplicande et l'ensemble des termes du multiplicateur qui ont le signe —. On peut donc dire que *deux termes qui ont le signe + ou deux termes qui ont le signe —, c'est-à-dire deux termes qui ont le même signe, donnent un produit partiel positif.* BC et AD étant précédés du signe —, tous les produits partiels correspondants auront le signe —. Tous les termes de B sont, dans le multiplicande, précédés du signe — ; tous les termes de C sont, dans le multiplicateur, précédés du signe +. De même, tous les termes de A sont, dans le multiplicande, précédés du signe + ; et tous les termes de D sont, dans le multiplicateur, précédés du signe —. On peut donc dire qu'*un terme qui a le signe — et un terme qui a le signe + ou un terme qui a le signe + et un terme qui a le signe —, c'est-à-dire deux termes qui ont des signes différents, donnent un produit partiel négatif.*

On est donc conduit à cette règle : *Pour multiplier deux polynômes, il faut multiplier tous les termes du multiplicande par tous les termes du multiplicateur, en suivant la règle des signes.*

19. Pour généraliser cette règle, pour pouvoir l'appliquer au cas où l'un des polynômes ou tous les deux ont une valeur négative, il faut étendre la règle des signes au cas où les quantités à multiplier sont des quantités isolées, et faire les conventions suivantes : *Deux quantités isolées de même signe donnent un produit positif, deux quantités isolées de signes contraires donnent un produit négatif.* C'est ce qu'on exprime en posant

$$(+a) \times (-b) = -ab,$$
$$(-a) \times (-b) = ab.$$

Il résulte de là qu'en changeant le signe de l'un des facteurs du produit, on change nécessairement le signe du produit; et qu'en changeant à la fois les signes des deux facteurs, on ne change pas le signe du produit.

Ceci posé, si le multiplicateur C — D a une valeur négative, on pourra écrire

$$(A - B) \times (C - D) = -[(A - B) \times (D - C)].$$

Les deux facteurs entre parenthèses étant positifs, on peut leur

appliquer la règle précédente (18), et il vient

$$(A - B) \times (C - D) = -(AD - BD - AC + BC),$$

ou

$$(A - B) \times (C - D) = AC - BC - AD + BD.$$

De même, si le multiplicateur $A - B$ et le multiplicateur $C - D$ ont tous les deux une valeur négative, on pourra écrire

$$(A - B) \times (C - D) = (B - A) \times (D - C).$$

Les deux facteurs du second membre étant positifs, on aura

$$(A - B) \times (C - D) = BD - AD - BC + AC,$$

ou

$$(A - B) \times (C - D) = AC - BC - AD + BD.$$

20. Il résulte de ce qu'on vient de dire que *les puissances paires d'une quantité négative sont toujours positives, et que ses puissances impaires sont toujours négatives.* En effet, le produit de $2n$ facteurs négatifs revient à n produits partiels composés chacun de deux facteurs négatifs; ces n produits seront donc tous positifs, ainsi que le résultat obtenu en les multipliant entre eux. Ce résultat étant multiplié par un nouveau facteur négatif, c'est-à-dire le nombre des facteurs négatifs devenant impair, le signe du produit changera et deviendra négatif.

De sorte que *si, dans une expression algébrique, le signe d'une lettre vient à changer, les termes qui la contiennent à une puissance paire conservent leurs signes, tandis que les termes qui la contiennent à une puissance impaire doivent en changer.*

Multiplication des polynômes ordonnés.

21. Dans la pratique, on a soin, quand cela est possible, d'ordonner les deux polynômes à multiplier. On multiplie alors le multiplicande successivement par tous les termes du multiplicateur, et l'on écrit les produits partiels obtenus les uns au-dessous des autres, de manière à favoriser la réduction des termes semblables.

Exemples :

$$\begin{array}{r}
9x^3 + 10x^2 - 7x + 2 \\
3x^2 + 5x - 8 \\
\hline
27x^5 + 30x^4 - 21x^3 + 6x^2 \\
+ 45x^4 + 50x^3 - 35x^2 + 10x \\
- 72x^3 - 80x^2 + 56x - 16 \\
\hline
27x^5 + 75x^4 - 43x^3 - 109x^2 + 66x - 16
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad 6a^3 - a^2b + 4ab^2 + 3b^3 \\
\qquad\qquad\quad 5a^2 - 7ab \quad + 2b^2 \\
\hline
30a^5 - \ \ 5a^4b + 20a^3b^2 + 15a^2b^3 \\
\qquad - 42a^4b + \ \ 7a^3b^2 - 28a^2b^3 - 21ab^4 \\
\qquad\qquad\qquad + 12a^3b^2 - \ \ 2a^2b^3 + \ \ 8ab^4 + 6b^5 \\
\hline
30a^5 - 47a^4b + 39a^3b^2 - 15a^2b^3 - 13ab^4 + 6b^5
\end{array}
$$

Il est important de remarquer que, lorsque deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, *on peut immédiatement indiquer deux termes de leur produit qui ne se réduiront avec aucun autre.* Ces deux termes sont ceux qui proviennent du produit des deux premiers termes et du produit des deux derniers termes du multiplicande et du multiplicateur. En effet, les termes indiqués contenant la lettre ordonnatrice avec un exposant plus élevé ou plus faible que tous les autres termes du multiplicande et du multiplicateur, leurs produits contiendront aussi la lettre ordonnatrice avec un exposant plus élevé ou plus faible que tous les autres termes du produit cherché. Par conséquent le premier et le dernier terme de ce produit échapperont à toute réduction, puisque aucun terme du produit ne peut leur être semblable. C'est précisément sur cette remarque que repose la théorie de la division des polynômes ordonnés.

22. Lorsque la lettre ordonnatrice entre à une même puissance dans plusieurs termes, la multiplication principale est compliquée de multiplications partielles particulières ; mais la marche à suivre est la même.

Soit, par exemple, à multiplier

$$(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 - 2ab + b^2)x + (ab - b^2)$$

par

$$(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)x - b^2.$$

Le plus simple est d'écrire dans une même colonne verticale, avec leurs signes, les termes qui multiplient une même puissance de x ; on trace une barre verticale à droite de ces termes, et l'on écrit en face du premier la puissance de x qui multiplie toute la colonne.

A ce sujet, nous remarquerons que lorsqu'on met plusieurs termes entre parenthèses, si la parenthèse est précédée du signe $+$, ces termes y entrent avec leurs signes ; mais on les écrit avec des signes contraires, si la parenthèse est précédée du signe $-$. Cette remarque résulte immédiatement de la règle de la soustraction algébrique. Lorsqu'on enlève les parenthèses, dans le second cas, il faut en effet, d'après cette règle,

changer les signes des termes du polynôme qu'elles isolaient; si l'on n'avait pas pris la précaution indiquée, on ne reproduirait donc pas ce polynôme tel qu'il a été donné.

L'opération demandée présentera la disposition suivante :

Multiplicande	a^2 $-b^2$	x^2+a^2 $-2ab$ $+b^2$	$x+ab$ $-b^2$
Multiplicateur	$-a^2$ $+b^2$	x^2-a^2 $+b^2$	$x-b^2$

a^4 $-a^2b^2$ $+a^2b^2$ $-b^4$	x^4+a^4 $-2a^3b$ $+a^2b^2$ $+a^2b^2$ $-2ab^3$ $+b^4$ $-a^4$ $+a^2b^2$ $+a^2b^2$ $-b^4$	x^3+a^3b $-a^2b^2$ $+ab^3$ $-b^4$ $-a^4$ $+2a^3b$ $-a^2b^2$ $+a^2b^2$ $-2ab^3$ $+b^4$ $-a^2b^2$ $+b^4$	x^2-a^3b $+a^2b^2$ $+ab^3$ $-b^4$ $-a^2b^2$ $+2ab^3$ $-b^4$	$x-ab^2$ $+b^4$

Produit	a^4 $-b^4$	x^4-2a^3b $+4a^2b^2$ $-2ab^3$	x^3-a^4 $+3a^3b$ $-2a^2b^2$ $-ab^3$ $+b^4$	x^2-a^3b $+3ab^3$ $-2b^4$	$x-ab^3$ $+b^4$

Le produit est égal à

$$\begin{aligned}&(a^4-b^4)\,x^4-(2a^3b-4a^2b^2+2ab^3)\,x^3\\&-(a^4-3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4)\,x^2\\&-(a^3b-3ab^3+2b^4)\,x-(ab^3-b^4).\end{aligned}$$

Pour obtenir ce produit, on suit la marche que nous allons indiquer. Si l'on posait

$$\mathrm{M}=a^2-b^2,\quad \mathrm{N}=a^2-2ab+b^2,\quad \mathrm{P}=ab-b^2,$$
$$\mathrm{Q}=a^2+b^2,\quad \mathrm{R}=-a^2+b^2,\quad \mathrm{S}=-b^2;$$

le multiplicande prendrait la forme

$$\mathrm{M}x^2+\mathrm{N}x+\mathrm{P}$$

et le multiplicateur, la forme

$$\mathrm{Q}x^2+\mathrm{R}x+\mathrm{S}.$$

Pour effectuer la multiplication, on commencerait alors par

multiplier le monôme Mx^2 par le monôme Qx^2, le résultat serait MQx^4. Il faudra donc réellement former d'abord le produit du binôme représenté par M, par le binôme représenté par Q, et donner au résultat, comme facteur commun, la 4e puissance de la lettre ordonnatrice. Nx multiplié par Qx^2 donne NQx^3. Il faudra donc multiplier le trinôme N par le binôme Q, et donner au résultat, comme facteur commun, la 3e puissance de la lettre ordonnatrice, etc. On voit qu'on doit multiplier à part les diverses puissances de la lettre ordonnatrice et à part les polynômes dont elles sont facteurs communs, c'est-à-dire les quantités placées à gauche des barres verticales au multiplicande et au multiplicateur. On doit écrire les résultats qui correspondent à une même puissance de la lettre ordonnatrice dans une même colonne verticale, à droite de laquelle on place cette puissance de la lettre ordonnatrice. On prépare ainsi la réduction des termes semblables, puisque ces termes ne peuvent correspondre qu'à une même puissance de x. On opère successivement cette réduction en examinant chaque colonne verticale et en posant les termes obtenus au produit définitif, en ayant soin de les ordonner par rapport aux puissances d'une seconde lettre. Dans l'exemple proposé, ces termes ont été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a ou croissantes de b. On n'a pas besoin d'effectuer à part la multiplication des coefficients polynômes des différentes puissances de la lettre ordonnatrice. On écrit immédiatement les termes trouvés à la place convenable. Ainsi, pour multiplier le premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, on multipliera x^2 par x^2 : on obtiendra x^4, qu'on écrira au produit en traçant à gauche une barre verticale. Pour multiplier $a^2 - b^2$ par $a^2 + b^2$, on multipliera a^2 et b^2 par a^2, on aura les termes a^4 et a^2b^2, qu'on écrira à gauche de x^4. On multipliera ensuite a^2 et b^2 par $-b^2$, on aura les termes $-a^2b^2$ et $-b^4$, qu'on écrira aussi à gauche de x^4, au-dessous des termes précédents; et le coefficient polynôme de x^4 sera formé, etc.

23. Pour multiplier plusieurs polynômes entre eux, il faut multiplier le premier par le second, le résultat obtenu par le troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé tous les polynômes. Les termes du premier produit seront les produits *deux à deux* des termes des deux premiers polynômes. Les termes du second produit seront les produits deux à deux des termes du premier produit et du troisième polynôme, c'est-à-dire que ces termes seront les produits *trois à trois* des termes des trois premiers polynômes; etc. S'il y a n polynômes facteurs, les termes du produit cherché seront donc les produits n à n des termes des n polynômes proposés, c'est-à-dire que

dans chaque terme de ce produit il entrera comme facteurs un terme du premier polynôme, un terme du second, un terme du troisième, ..., un terme du $n^{ième}$.

Théorèmes démontrés par la multiplication algébrique.

24. I. *Le carré d'une somme de deux parties est égal au carré de la première partie, plus le double produit de la première partie par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Multiplions $a+b$ par $a+b$.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

On trouve pour produit

$$a^2+2ab+b^2.$$

L'identité $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ est donc démontrée. Le mot identité signifie que cette égalité se vérifiera toujours, quelles que soient les valeurs numériques mises à la place de a et de b. Si l'on change b en $-b$, on aura donc

$$(a-b)^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2,$$

c'est-à-dire (19)

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Ainsi *le carré d'une différence est égal au carré de la première partie, moins le double produit de la première partie par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Pour avoir le cube de la somme $(a+b)$, il suffit de multiplier le carré de $(a+b)$ par $(a+b)$.

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ \qquad\quad a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

On trouve ainsi le résultat déjà connu

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Si l'on change b en $-b$ dans cette identité, il vient

$$(a-b)^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$$

ou

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

II. *Le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités.*

Multiplions $a+b$ par $a-b$.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad - \quad b^2 \end{array}$$

Nous aurons pour résultat a^2-b^2, ce qui démontre le théorème.

Puisqu'on a $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, on a réciproquement $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, ce qu'on peut écrire

$$(a^2-b^2)=(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2})(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}).$$

Ainsi *la différence de deux quantités quelconques est égale au produit de la somme des racines carrées de ces quantités par la différence des mêmes racines.*

On a

$$49-25=(7+5)(7-5),$$
$$11-3=(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{11}-\sqrt{3}).$$

III. *Partager une quantité donnée en deux parties dont le produit soit le plus grand possible ou maximum.*

Soit a la quantité donnée. Si l'une de ses parties est représentée par $\frac{a}{2}+x$, l'autre le sera nécessairement par $a-\left(\frac{a}{2}+x\right)$, c'est-à-dire par $\frac{a}{2}-x$. Le produit de la somme $\frac{a}{2}+x$ par la différence $\frac{a}{2}-x$ est égal à la différence des carrés $\frac{a^2}{4}-x^2$. Quel que soit x, le carré x^2 sera une quantité positive. Le produit formé sera donc toujours plus petit que $\frac{a^2}{4}$, sauf pour le cas particulier où x sera égal à zéro : ce produit atteindra alors son maximum et ses deux facteurs seront égaux à la même quantité $\frac{a}{2}$.

Donc, *pour que le produit de deux facteurs dont la somme est constante soit le plus grand possible, il faut que ces deux facteurs soient égaux à la moitié de la somme donnée.*

CHAPITRE IV.

DIVISION.

25. La division est l'opération inverse de la multiplication : elle a pour but, étant donnés le produit de deux expressions algébriques et l'une de ces expressions, de trouver l'autre.

Division des monômes.

26. Soit le monôme M à diviser par le monôme P; désignons par Q le quotient. Ce quotient ne peut être qu'un monôme, puisque le produit d'un polynôme par un monôme est nécessairement un polynôme (17). Si l'on suppose la division exacte, on devra avoir

$$M = P \times Q.$$

En se reportant à la règle de multiplication des monômes, on voit que le coefficient du dividende sera égal au produit du coefficient du diviseur par le coefficient du quotient. Réciproquement, le coefficient du quotient s'obtiendra en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur.

L'exposant d'une lettre quelconque du dividende doit être égal à la somme des exposants dont elle est affectée dans le diviseur et le quotient. Réciproquement, l'exposant dont une lettre commune au dividende et au diviseur est affectée au quotient, doit être égal à la différence des exposants de cette même lettre au dividende et au diviseur.

Si une lettre entre avec le même exposant dans le dividende et le diviseur, elle ne peut entrer au quotient, sans quoi son exposant dans le dividende surpasserait celui qu'elle a au diviseur.

Si une lettre entre dans le dividende sans entrer dans le diviseur, elle provient seulement du quotient et elle y entre de la même manière qu'au dividende.

La règle sera donc d'*écrire au quotient : le quotient des deux coefficients, les lettres communes au dividende et au diviseur avec un exposant égal à la différence de leurs exposants, sauf le cas où cette différence est zéro, les lettres qui entrent seulement au dividende sans modifier leurs exposants.*

Soit à diviser $35\,a^3b^4c^2d$ par $7\,abc^2$. On trouvera

$$\frac{35\,a^3b^4c^2d}{7\,abc^2} = 5\,a^2b^3d.$$

27. Si l'on voulait appliquer la règle, sans se préoccuper de

l'égalité des exposants d'une même lettre au dividende et au diviseur, on aurait

$$\frac{35\,a^3\,b^4\,c^2\,d}{7\,abc^2} = 5\,a^2\,b^3\,c^0\,d.$$

Si l'on veut que les deux expressions du quotient soient équivalentes, il faut faire la convention suivante : *une quantité quelconque, affectée d'un exposant égal à zéro, représente l'unité.* Cette convention est toute naturelle, puisque l'exposant zéro correspond à la division de deux quantités égales l'une par l'autre.

Quand un terme ne contient pas une lettre, on peut dire qu'elle y entre avec l'exposant zéro. Cette remarque permet de simplifier les énoncés des règles relatives à la multiplication et à la division des monômes.

Pour multiplier deux monômes, il suffit de multiplier les coefficients et d'ajouter les exposants des lettres communes.

Pour diviser deux monômes, il suffit de diviser les coefficients et de soustraire les exposants des lettres communes.

28. On regarde la division comme possible, lors même que les coefficients ne sont pas divisibles l'un par l'autre. On a un coefficient fractionnaire, mais le quotient reste entier *algébriquement*. Ainsi,

$$\frac{4\,a^3\,b^2\,c}{3\,a^2\,b} = \frac{4}{3}\,abc.$$

La division n'est impossible que dans le cas où une lettre entre dans le diviseur sans entrer dans le dividende ou lorsqu'elle entre dans le divieur avec un exposant plus élevé que celui qu'elle a dans le dividende. Il n'existe dans ce cas aucun monôme entier algébriquement qui, multipliant le diviseur, reproduise le dividende.

On ne peut diviser $5\,a^3\,b^2$ par $3\,a^2\,b^2\,c$. On peut seulement simplifier, comme nous le verrons plus tard, l'expression $\frac{5\,a^3\,b^2}{3\,a^2\,b^2\,c}$.

Si l'on voulait appliquer la règle, on trouverait

$$\frac{5\,a^3\,b^2}{3\,a^2\,b^2\,c} = \frac{5}{3}\,ab^0\,c^{-1};$$

de même,

$$\frac{3\,a^2\,b}{2\,a^5\,b} = \frac{3}{2}\,a^{-2}\,b^0.$$

Cette extension de la règle donne naissance aux exposants négatifs : nous y reviendrons plus loin.

29. Le produit du diviseur par le quotient doit reproduire le

dividende en grandeur et en signe. Pour juger du signe du quotient, nous n'avons donc qu'à nous rappeler la règle des signes étendue au cas des quantités isolées (19). On formera ainsi le tableau suivant :

$$\frac{+M}{+P} = +Q, \quad \frac{-M}{-P} = +Q, \quad \frac{+M}{-P} = -Q, \quad \frac{-M}{+P} = -Q.$$

On peut le résumer en disant : *Le quotient de deux quantités de même signe est positif, le quotient de deux quantités de signes contraires est négatif.*

Division d'un polynôme par un monôme.

30. Lorsqu'on divise un polynôme par un monôme, le quotient est polynôme, puisque le produit d'un monôme par un monôme est un monôme. En multipliant le polynôme quotient par le monôme diviseur, on doit reproduire identiquement le polynôme dividende; cette multiplication s'opérera en multipliant par le diviseur les différents termes du quotient, et l'on obtiendra ainsi sans réduction les termes du dividende (17). Réciproquement, pour avoir le quotient, il faut donc diviser successivement les termes du dividende par le monôme diviseur. On rentre, par conséquent, dans le cas qu'on vient d'examiner (26 et suivants).

On trouve, d'après cela,

$$\frac{24a^3b^3c^3 + 40a^4b^4c^4 - 16a^3b^5c^5}{4a^3b^2c^2} = 6a^2bc + 10ab^2c^2 - 4b^3c^3.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} &24a^3b^3c^3 + 40a^4b^4c^4 - 16a^3b^5c^5 \\ &= 4a^3b^2c^2 \times (6a^2bc + 10ab^2c^2 - 4b^3c^3). \end{aligned}$$

Le diviseur $4a^3b^2c^2$ divisant exactement tous les termes du dividende est dit *facteur commun* à tous ses termes; pour mettre ce facteur commun *en évidence*, il faut précisément effectuer la division du polynôme proposé par ce même facteur. La mise en évidence des facteurs communs est très-importante au point de vue du calcul.

Division des polynômes ordonnés.

31. Généralement, quand on a deux polynômes A et B à diviser l'un par l'autre, on ne peut qu'indiquer l'opération sous forme fractionnaire $\frac{A}{B}$. Quelquefois on peut remplacer l'expression fractionnaire $\frac{A}{B}$ par un polynôme Q, entier par rapport

à la lettre suivant laquelle les deux polynômes A et B sont supposés ordonnés. C'est la recherche de ce polynôme Q que nous nous proposons.

Pour fixer les idées, nous admettrons que les trois polynômes considérés sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre.

Puisqu'on a, dans le cas examiné, $\frac{A}{B} = Q$, on a aussi $A = B \times Q$. Le dividende est donc alors le produit exact du diviseur par le quotient. Puisqu'il s'agit de polynômes ordonnés, le premier terme du dividende provient du produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient; de même, le dernier terme du dividende est égal au produit du dernier terme du diviseur par le dernier terme du quotient (21). Il résulte immédiatement de cette remarque, *qu'on obtiendra le premier terme du quotient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.*

Ceci posé, le dividende représente la somme des produits partiels du diviseur par les différents termes du quotient; si l'on en retranche le produit du diviseur par le premier terme trouvé au quotient, le reste obtenu, ordonné comme le dividende et le diviseur, représentera la somme des produits partiels du diviseur par les autres termes du quotient. On sera donc conduit à une nouvelle division, dans laquelle on devra prendre ce reste pour dividende et conserver le même diviseur. On divisera le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, et l'on aura le second terme du quotient. On multipliera le diviseur par ce terme, on retranchera le produit obtenu du premier reste, et on opérera sur le second reste auquel on sera conduit, comme sur le premier. Le dernier terme du quotient correspondra à un reste nul, car on aura retranché alors du dividende toutes les parties qui le composent. Ainsi, quand la division est exacte, on arrive forcément à un reste nul, qui indique que le quotient est complet; et quand on arrive à un reste nul, la division est exacte, puisque le polynôme dividende représente le produit du polynôme diviseur par le polynôme écrit au quotient.

Soit à diviser le polynôme

$$27x^5 + 75x^4 - 43x^3 - 109x^2 + 66x - 16$$

par le polynôme

$$9x^3 + 10x^2 - 7x + 2.$$

On disposera l'opération de la manière suivante :

$$
\begin{array}{r|l}
27x^6 + 75x^5 - 43x^4 - 109x^3 + 66x - 16 & 9x^3 + 10x^2 - 7x + 2 \\
\cline{2-2}
-30x^6 + 21x^5 - 6x^2 & 3x^3 + 5x - 8 \\
\cline{1-1}
+45x^5 - 92x^4 - 115x^3 + 66x - 16 & \\
-50x^3 + 35x^2 - 10x & \\
\cline{1-1}
-72x^4 - 80x^3 + 56x - 16 & \\
+80x^3 - 56x + 16 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

On fait à la fois la multiplication et la soustraction qui correspondent à chaque terme du quotient, en changeant immédiatement les signes des produits partiels obtenus et en les écrivant au-dessous des différents dividendes, de manière à préparer la réduction des termes semblables. Comme le premier terme de chaque dividende doit toujours disparaître dans la soustraction, puisqu'il est égal au premier terme du diviseur multiplié par le terme considéré au quotient, on néglige d'écrire le produit partiel qui le détruit et l'on ne commence la multiplication qu'au second terme du diviseur.

Soit encore à diviser le polynôme

$$30a^5 - 47a^4b + 39a^3b^2 - 15a^2b^3 - 13ab^4 + 6b^5$$

par le polynôme

$$6a^3 - a^2b + 4ab^2 + 3b^3.$$

$$
\begin{array}{r|l}
30a^5 - 47a^4b + 39a^3b^2 - 15a^2b^3 - 13ab^4 + 6b^5 & 6a^3 - a^2b + 4ab^2 + 3b^3 \\
\cline{2-2}
+5a^4b - 20a^3b^2 - 15a^2b^3 & 5a^2 - 7ab + 2b^2 \\
\cline{1-1}
-42a^4b + 19a^3b^2 - 30a^2b^3 - 13ab^4 + 6b^5 & \\
-7a^3b^2 + 28a^2b^3 + 21ab^4 & \\
\cline{1-1}
+12a^3b^2 - 2a^2b^3 + 8ab^4 + 6b^5 & \\
+2a^2b^3 - 8ab^4 - 6b^5 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

32. Il peut arriver, comme pour la multiplication, que la lettre ordonnatrice entre à une même puissance dans plusieurs termes du dividende et du diviseur. On suit alors une marche analogue à celle déjà indiquée (**22**), et la division principale se trouve seulement compliquée de divisions partielles. Il faut remarquer qu'on ne doit opérer la réduction des termes semblables que dans les colonnes verticales qui correspondent aux premiers termes des restes successifs; car il suffit de connaître le premier terme du reste auquel on est parvenu pour pouvoir continuer la division.

Soit à diviser le polynôme

$$\begin{aligned}&(a^4 - b^4)x^4 - (2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3)x^3\\ &- (a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 - b^4)x^2\\ &- (a^3b - 3ab^3 + 2b^4)x - (ab^3 - b^4)\end{aligned}$$

par le polynôme

$$(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)x - b^2.$$

L'opération présentera la disposition suivante

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l|l}
a^4 & x^4 & x^3 & x^2 & x & a^2 & x^2 & x \\
-b^4 & -2a^3b & -a^4 & -a^3b & -ab^3 & +b^2 & -a^2 & -b^2 \\
 & +4a^2b^2 & +3a^3b & +3ab^3 & +b^4 & & +b^2 & \\
 & -2ab^3 & -2a^2b^2 & -2b^4 & +ab^3 & a^2 & x^2 + a^2 & x + ab \\
 & +a^4 & -ab^3 & +a^2b^2 & -b^4 & -b^2 & -2ab & -b^2 \\
 & -a^2b^2 & +b^4 & -2ab^3 & 0 & & +b^2 & \\
 & -a^2b^2 & +a^2b^2 & +b^4 & & & & \\
 & +b^4 & -b^4 & +a^3b & & & & \\
 & & & -ab^3 & & & & \\
 & & & -a^2b^2 & & & & \\
 & & & +b^4 & & & & \\
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

2e terme du 1er reste $\left\{\begin{array}{l}+a^4\\-2a^3b\\+2a^2b^2\\-2ab^3\\+b^4\end{array}\right.$

1er terme du 2e reste $\left\{\begin{array}{l}+a^3b\\-a^2b^2\\+ab^3\\-b^4\end{array}\right.$

Première division partielle.

$$\begin{array}{r|l}
a^4 - b^4 & a^2 + b^2 \\
\cline{2-2}
-a^2b^2 & a^2 - b^2 \\
\hline
-a^2b^2 - b^4 & \\
+b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Deuxième division partielle.

$$\begin{array}{r|l}
a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 & a^2 + b^2 \\
\cline{2-2}
-a^2b^2 & a^2 - 2ab + b^2 \\
\hline
-2a^3b + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 & \\
+2ab^3 & \\
\hline
+a^2b^2 + b^4 & \\
-b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Troisième division partielle.

$$\begin{array}{r|l}
a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4 & a^2 + b^2 \\
\cline{2-2}
-ab^3 & ab - b^2 \\
\hline
-a^2b^2 - b^4 & \\
+b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Nota. Le diviseur peut ne pas contenir la lettre ordonnatrice choisie, de sorte que si on la désigne par x, le dividende

aura la forme $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots$, et le diviseur la forme M. M et les coefficients A, B, C, etc., doivent être ensemble polynômes. Si M est un monôme, A, B, C, etc., sont monômes ou polynômes. On est ramené alors à suivre la marche indiquée au n° 30. L'opération se compose de divisions partielles.

33. Si le premier terme du dividende est divisible par le premier terme du diviseur, on peut tenter la division sans qu'elle soit possible. Il est alors essentiel d'indiquer des caractères au moyen desquels on puisse reconnaître la possibilité ou l'impossibilité de la division, car dans certains cas elle peut se poursuivre indéfiniment.

Nous savons que, lorsque la division est exacte, le dernier terme du dividende divisé par le dernier terme du diviseur doit donner le dernier terme du quotient. Donc la division n'est pas possible exactement :

1°. Lorsque le dernier terme du dividende n'est pas divisible par le dernier terme du diviseur.

Le polynôme $5x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 7x$ n'est pas divisible par le polynôme $5x^3 - 5x^2 + 3$.

2°. Lorsque le dernier terme du dividende étant divisible par le dernier terme du diviseur, on est conduit à poser au quotient un terme de même degré par rapport à la lettre ordonnatrice, mais différent de celui qui devrait être le dernier.

Le polynôme $6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ n'est pas divisible par le polynôme $3x^3 - 3x^2 + x - 2$, parce que la division conduit à poser au quotient comme terme de degré zéro par rapport à la lettre ordonnatrice le terme $+1$, au lieu du terme -2, quotient du dernier terme 4 du dividende par le dernier terme -2 du diviseur.

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 4 & 3x^3 - 3x^2 + x - 2 \\
\quad\;\; + 6x^2 - 2x^2 + 4x & \overline{2x + 1} \\
\hline
\quad\;\; + 3x^3 \qquad\quad - x + 4 & \\
\qquad\qquad + 3x^2 - x + 2 & \\
\hline
\qquad\qquad\quad 3x^2 - 2x + 6 &
\end{array}
$$

3°. Lorsque le dernier terme du dividende étant divisible par le dernier terme du diviseur, on est conduit à poser au quotient un terme identique à celui qu'on doit trouver comme le dernier, sans que le reste correspondant soit nul.

Le polynôme $5 - 2x + 16x^2 - 9x^3$ n'est pas divisible par le polynôme $1 - x - 3x^2$, parce que la division conduit à poser au quotient le terme $+3x$, résultat de la division du dernier terme $-9x^3$ du dividende par le dernier terme $-3x^2$ du divi-

seur, sans que l'opération s'achève :

$$\begin{array}{r|l} 5 - 2x + 16x^2 - 9x^3 & 1 - x - 3x^2 \\ \underline{+5x + 15x^2} & \overline{5 + 3x} \\ +3x + 31x^2 - 9x^3 & \\ \underline{+\ 3x^2 + 9x^3} & \\ +34x^2 & \end{array}$$

4°. On peut encore remarquer que, si le premier terme du diviseur a pour coefficient l'unité, aucun coefficient fractionnaire ne pourra s'introduire dans le calcul; de sorte que si le dernier terme du dividende et le dernier terme du diviseur sont des nombres entiers dont le quotient soit fractionnaire, on pourra affirmer à priori l'impossibilité de la division.

Le polynôme $4x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ n'est pas divisible par le polynôme $x^2 - 2x - 7$, parce que le dernier terme du quotient devrait être égal à $\frac{4}{7}$.

Des divisions inexactes.

34. Quand la division n'est pas possible et que le premier terme du dividende A est divisible par le premier terme du diviseur B, on peut remplacer l'expression fractionnaire $\frac{A}{B}$ par un polynôme Q entier par rapport à la lettre ordonnatrice, augmenté d'une fraction ayant pour numérateur un polynôme de degré inférieur au diviseur par rapport à la lettre ordonnatrice, et pour dénominateur le diviseur.

En effet, on pourra toujours continuer la division jusqu'à ce qu'on arrive à un reste dont le premier terme ne soit plus divisible par le premier terme du diviseur, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on arrive à un reste dont le premier terme ne contienne plus la lettre ordonnatrice avec un exposant aussi élevé que le premier terme du diviseur. Désignons ce reste par R : on aura nécessairement $R = A - BQ$, Q désignant le polynôme écrit au quotient au moment où l'on obtient le reste R. On déduit de l'égalité indiquée

$$A = BQ + R;$$

et en divisant les deux membres de cette dernière relation par B, il vient

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

En divisant $6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ par $3x^3 - 3x^2 + x - 2$, on trouve pour quotient (33) le binôme $2x + 1$ et pour reste

le trinôme $3x^2-2x+6$. On peut alors poser

$$\frac{6x^4-3x^3+2x^2-5x+4}{3x^3-3x^2-x-2}=2x+1+\frac{3x^2-2x+6}{3x^3-3x^2+x-2}.$$

35. Quand la division est exacte, on peut changer la lettre ordonnatrice sans rien changer aux résultats de l'opération. Quand la division est inexacte, si l'on change de lettre ordonnatrice, on modifie généralement l'expression du quotient et celle du reste.

Condition de divisibilité d'un polynôme entier par rapport à x, par un binôme de la forme $x-a$.

36. Désignons par X le polynôme dividende ordonné suivant les puissances décroissantes de x. Le diviseur $x-a$ étant du premier degré en x, la division pourra continuer tant que le reste obtenu contiendra x. Le reste final de l'opération, s'il y en a un, sera donc nécessairement *indépendant* de x, c'est-à-dire ne contiendra pas x. Désignons par Q le quotient trouvé entier par rapport à x, et par R le dernier reste, s'il y en a un. On aura l'égalité fondamentale qui résulte de toute division

$$X=(x-a)Q+R.$$

Il faut bien comprendre que cette égalité est en même temps une identité, c'est-à-dire qu'elle reste vraie quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux lettres qui y entrent. Elle subsistera donc encore quand on y remplacera x par la valeur spéciale a.

Désignons par X_a le résultat de la substitution de a à la place de x dans le dividende; remarquons que le facteur $x-a$ devenant égal à $a-a$, s'annule, tandis que l'autre facteur Q qui ne contient pas x en dénominateur prend une valeur finie ou égale à zéro; dans les deux cas, le produit $(x-a)Q$ disparaît. Quant au reste R qui ne contient pas x, il ne change pas. On a donc identiquement

$$X_a=R.$$

Ce qui nous conduit à ce théorème très-important : *Quand on divise un polynôme entier par rapport à x par un binôme de la forme $x-a$, on obtient immédiatement le reste de la division en remplaçant dans le dividende la lettre x par la lettre a.*

On pourra donc, à priori, s'assurer de la possibilité de la division. Si la substitution indiquée conduit à un résultat nul, la division réussira.

37. Il est facile d'étendre et de généraliser le théorème qu'on vient de démontrer. *Si un polynôme entier par rapport à x*

s'annule lorsqu'on remplace successivement x par des quantités différentes a et b, on peut affirmer que ce polynôme est divisible par le produit des binômes $x-a$ et $x-b$.

En effet, le polynôme X s'annulant pour $x=a$ est, d'après ce qui précède, divisible par $x-a$ puisqu'on a alors $X_a=R=0$. En désignant par Q le quotient de X par $x-a$, on pourra donc écrire

$$X=(x-a)Q.$$

Cette égalité subsiste quel que soit x, elle restera vraie si l'on y remplace x par b. On aura alors

$$X_b=(b-a)Q_b.$$

Nous indiquons par X_b et Q_b les résultats de la substitution de b à la place de x dans les polynômes X et Q. Par hypothèse X_b est égal à zéro, et $b-a$ est différent de zéro. Il faut donc qu'on ait $Q_b=0$ ou que le quotient Q soit divisible par $x-b$. Désignons par q le quotient de Q par $x-b$. On pourra écrire $Q=(x-b)q$ et, par suite,

$$X=(x-a)(x-b)q;$$

ce qui vérifie le théorème énoncé et prouve en même temps qu'il s'applique à un nombre quelconque de facteurs binômes.

Lorsque le polynôme diviseur peut se mettre sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré de la forme $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc., il suffit de voir par conséquent si le polynôme dividende devient nul lorsqu'on y remplace successivement x par a, b, c, etc. : s'il en est ainsi, on peut affirmer à priori la possibilité de la division.

S'il existe seulement quelques facteurs binômes du premier degré communs au dividende et au diviseur, on peut simplifier l'expression fractionnaire correspondante en faisant disparaître ces facteurs communs.

38. Appliquons le théorème démontré (36) à la recherche de certains caractères de divisibilité utiles à connaître au point de vue du calcul.

1°. Cherchons d'abord si l'expression x^m-a^m est divisible par $x-a$, m étant un entier quelconque. Dans ce cas, on a $X_a=a^m-a^m$, c'est-à-dire on a $R=0$. *L'expression x^m-a^m est donc toujours divisible par $x-a$.*

Trouvons la forme du quotient et, pour cela, calculons-en les premiers termes.

$$
\begin{array}{r|l}
x^m \quad - a^m & x - a \\
\cline{2-2}
a\,x^{m-1} - a^m & x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} \\
a^2 x^{m-2} - a^m & \\
a^3 x^{m-3} - a^m & \\
\ldots\ldots\ldots & \\
a^{m-1} x - a^m & \\
\quad + a^m & \\
\hline
\quad 0 &
\end{array}
$$

On remarque que dans le premier terme des différents dividendes partiels l'exposant de x va toujours en diminuant d'une unité, tandis que l'exposant de a va toujours en augmentant d'une unité, de sorte que la somme de ces deux exposants est constamment égale à m. Il en sera donc de même pour les différents termes du quotient, avec cette différence que la somme des exposants sera, dans chaque terme, égale à $m - 1$. Cherchons quel sera le dernier terme du quotient. L'avant-dernier reste doit contenir x à la première puissance seulement : il sera donc $+ a^{m-1} x - a^m$, et le dernier terme du quotient sera a^{m-1}. En résumé, les termes extrêmes du quotient sont x^{m-1} et a^{m-1}, et pour avoir les termes intermédiaires, il suffit de diminuer l'exposant de x d'une unité et d'augmenter celui de a d'une unité en passant d'un terme au suivant. Nous pouvons donc poser d'une manière générale

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + a^3 x^{m-4} + \ldots + a^{m-2} x + a^{m-1}.$$

2°. Soit maintenant à diviser $x^m - a^m$ par $x + a$. On peut écrire le diviseur sous la forme $x - (-a)$ et regarder $-a$ comme le second terme du binôme. Le reste de la division aura alors pour expression $(-a)^m - a^m$. Ce reste ne pourra être nul que si $(-a)^m$ est égal à a^m, c'est-à-dire si m est pair. *$x^m - a^m$ est donc divisible par $x + a$, lorsque m est pair.*

Quant à la forme du quotient, remarquons que l'égalité qui donne l'expression du quotient de $x^m - a^m$ par $x - a$, reste vraie si l'on y suppose m pair et si l'on remplace a par $-a$. On trouve alors

$$\frac{x^m - (-a)^m}{x - (-a)} = \frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - a x^{m-2}$$
$$+ a^2 x^{m-3} - a^3 x^{m-4} + \ldots + a^{m-2} x - a^{m-1}.$$

La forme du quotient est la même que précédemment, sauf l'alternance des signes $+$ et $-$; le dernier terme a le signe $-$. Il faut se rappeler que les puissances impaires d'une quantité qui change de signe changent de signe, tandis que ses puissances paires conservent celui qu'elles avaient d'abord (20).

3°. Soit à diviser $x^m + a^m$ par $x - a$. Le reste de la division sera $(a)^m + a^m = 2a^m$. *La division de $x^m + a^m$ par $x - a$ n'est donc jamais possible.*

4°. Soit à diviser $x^m + a^m$ par $x + a$. On peut écrire le diviseur sous la forme $x - (-a)$. Cette transformation est nécessaire, car le théorème sur lequel nous nous appuyons repose lui-même sur cette condition, que le second terme du diviseur binôme est négatif. Le reste de la division sera $(-a)^m + a^m$. Ce reste ne sera nul qu'autant que $(-a)^m$ sera égal à $-a^m$, c'est-à-dire que si m est impair. *$x^m + a^m$ est donc divisible par $x + a$*, lorsque m est impair.

Quant à la forme du quotient, nous changerons a en $-a$ dans l'égalité qui correspond à l'expression du quotient de $x^m - a^m$ par $x - a$, et nous y supposerons m impair. Il viendra alors

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} + \ldots - a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

La forme du quotient reste encore la même, sauf l'alternance des signes + et —; le dernier terme est positif, parce que $m - 1$ est pair.

5°. $x^m - a^m$ est évidemment divisible par $x^p - a^p$, si m est un multiple de p. Soit $m = Kp$. Posons $x^p = X$ et $a^p = A$. On aura $x^m = X^K$ et $a^m = A^K$, car $(x^p)^K = x^{Kp}$ et $(a^p)^K = a^{Kp}$.

D'après ce qui précède

$$\frac{X^K - A^K}{X - A} = X^{K-1} + AX^{K-2} + A^2X^{K-3} + \ldots + A^{K-2}X + A^{K-1}.$$

Mais

$$X^{K-1} = (x^p)^{K-1} = x^{pK-p} = x^{m-p};$$

de même,

$$X^{K-2} = x^{m-2p}, \text{ etc.}$$

On a aussi

$$A^2 = (a^p)^2 = a^{2p}; \quad A^3 = (a^p)^3 = a^{3p}, \text{ etc.}$$

Nous avons en effet démontré en Arithmétique (74) que, pour élever une puissance à une autre puissance, il fallait multiplier le premier exposant par le second. Il viendra par suite :

$$\frac{x^m - a^m}{x^p - a^p} = x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + a^{2p} x^{m-3p} + \ldots + a^{m-2p} x^p + a^{m-p}.$$

La loi de formation du quotient est encore la même; seulement, la somme des exposants dans chaque terme est égale à $m - p$ et, lorsqu'on passe d'un terme au suivant, l'exposant de x diminue de p tandis que celui de a croît de p.

D'après les expressions générales que nous venons de trou-

ver, on a par exemple :

$$\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{x^8-1}{x+1}=x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1,$$

$$\frac{x^7+1}{x+1}=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1,$$

$$\frac{x^{15}-a^{15}}{x^5-a^5}=x^{10}+a^5x^5+a^{10},$$

$$\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=x^{12}+x^9+x^6+x^3+1.$$

CHAPITRE V.

DES RAPPORTS ALGÉBRIQUES.

39. L'expression de la division de deux quantités quelles qu'elles soient, monômes ou polynômes, entières ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, positives ou négatives, constitue un rapport algébrique. En employant la marche déjà indiquée en Arithmétique (**165**), on prouve que toutes les règles du calcul des fractions numériques s'appliquent aux rapports algébriques.

Puisqu'une lettre peut représenter en Algèbre une quantité quelconque, si l'on a un rapport $\frac{a}{b}$, on pourra le représenter par une seule lettre q, que la division de a par b soit ou non possible. Ayant $\frac{a}{b}=q$, on pourra multiplier les deux membres par b, d'où

$$\frac{a}{b}\times b=b\times q;$$

mais, d'après la définition de la division,

$$\frac{a}{b}\times b=a.$$

De $\frac{a}{b}=q$, on peut donc déduire

$$a=b\times q:$$

c'est en cela que consistent réellement les démonstrations que nous allons rapidement indiquer.

40. 1°. *On ne change pas la valeur d'un rapport en multipliant ou divisant ses deux termes par une même quantité.*

De $\frac{a}{b} = q$, je dis qu'on peut déduire $\frac{a \times m}{b \times m} = q$, c'est-à-dire que le rapport $\frac{a}{b}$ est égal au rapport $\frac{a \times m}{b \times m}$, m étant une quantité quelconque.

Puisqu'on a

$$a = b \times q,$$

on a aussi

$$a \times m = b \times m \times q,$$

et l'on en tire

$$\frac{a \times m}{b \times m} = q = \frac{a}{b}.$$

Il résulte immédiatement de ce théorème que, pour réduire un rapport algébrique à sa plus simple expression, il faut rendre ses deux termes premiers entre eux.

On dit que deux quantités sont algébriquement premières entre elles, lorsqu'elles n'admettent aucun facteur commun, soit numérique, soit algébrique, soit monôme, soit polynôme.

Considérons le rapport

$$\frac{12a^3b^4 - 12a^2b^5}{28a^5b^2 - 56a^4b^3 + 28a^3b^4}.$$

Mettons en évidence au numérateur le facteur commun $12a^2b^4$; le numérateur deviendra

$$12a^2b^4(a - b).$$

Mettons en évidence au dénominateur le facteur commun $28a^3b^2$; le dénominateur deviendra

$$28a^3b^2(a^2 - 2ab + b^2).$$

Le rapport prendra donc la forme

$$\frac{12a^2b^4(a - b)}{28a^3b^2(a^2 - 2ab + b^2)} = \frac{3b^2(a - b)}{7a(a - b)(a - b)} = \frac{3b^2}{7a(a - b)}.$$

Pour réduire plusieurs rapports au même dénominateur ou au plus petit dénominateur commun, il suit aussi du théorème démontré qu'on doit opérer comme en Arithmétique.

Soient les rapports

$$\frac{7c}{12a^2b^3(a + b)}, \quad \frac{3b}{40a^3c^2(a - b)}, \quad \frac{5a}{27b^3c^3(a^2 - b^2)}.$$

Les dénominateurs décomposés en facteurs donneront

$$12a^2b^3(a + b) = 2^2 \times 3 \times a^2 \times b^3 \times (a + b),$$
$$40a^3c^2(a - b) = 2^3 \times 5 \times a^3 \times c^2 \times (a - b),$$
$$27b^3c^3(a^2 - b^2) = 3^3 \times b^3 \times c^3 \times (a + b) \times (a - b).$$

Leur plus petit multiple commun sera

$$2^3 \times 3^3 \times 5 \times a^3 \times b^3 \times c^3 \times (a+b) \times (a-b) = 1080 a^3 b^3 c^3 (a^2 - b^2).$$

En divisant ce plus petit multiple commun par chacun des dénominateurs, ce qu'on fera en supprimant leurs facteurs parmi ceux du plus petit multiple commun, on trouvera pour quotients successifs :

$$2 \times 3^3 \times 5 \times a \times c^3 \times (a-b) = 90 a c^3 (a-b),$$
$$3^3 \times b^3 \times c \times (a+b) \ldots\ldots = 27 b^3 c (a+b),$$
$$2^3 \times 5 \times a^3 \ldots\ldots\ldots\ldots = 40 a^3.$$

En multipliant respectivement les deux termes de chaque rapport par ces quotients, les rapports proposés deviendront

$$\frac{630 a c^4 (a-b)}{1080 a^3 b^3 c^3 (a^2 - b^2)}, \quad \frac{81 b^4 c (a+b)}{1080 a^3 b^3 c^3 (a^2 - b^2)}, \quad \frac{200 a^4}{1080 a^3 b^3 c^3 (a^2 - b^2)}.$$

Pour additionner plusieurs rapports, il faut les réduire au même dénominateur, ajouter leurs numérateurs, et donner à la somme obtenue le dénominateur commun.

Pour soustraire deux rapports, il faut les réduire au même dénominateur, retrancher leurs numérateurs, et donner à la différence obtenue le dénominateur commun.

41. 2°. *Pour multiplier deux rapports, il faut les multiplier terme à terme.*

Soient les deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. Posons $\frac{a}{b} = q$ et $\frac{c}{d} = q'$. Nous aurons

$$a = bq$$
$$c = dq'.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, il viendra

$$ac = bdqq'.$$

Divisons les deux membres de cette dernière égalité par bd. On pourra écrire

$$\frac{ac}{bd} = qq' = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}.$$

42. 3°. *Pour diviser deux rapports, il faut multiplier le premier rapport par le second renversé ou les diviser terme à terme.*

Soient les deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. Je dis que leur quotient sera égal à

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

En effet, on a

$$\frac{c}{d} \times \frac{ad}{bc} = \frac{cad}{dbc} = \frac{a}{b};$$

le quotient $\frac{ad}{bc}$ peut aussi s'écrire

$$\frac{a}{\frac{c}{b}} = \frac{a:c}{b:d}.$$

Remarquons que les quantités entières peuvent être assimilées à des rapports qui ont pour dénominateur l'unité.

43. 4°. *Lorsque plusieurs rapports sont égaux, si on les ajoute terme à terme, on forme un rapport égal à chacun des rapports proposés.*

Soient les rapports

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = q.$$

On en déduit

$$a = bq, \quad a' = b'q, \quad a'' = b''q.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre, nous aurons

$$a + a' + a'' = bq + b'q + b''q = (b + b' + b'')q,$$

d'où

$$\frac{a + a' + a''}{b + b' + b''} = q.$$

On démontre de même que lorsque deux rapports sont égaux, si on les soustrait terme à terme, on forme un rapport égal à chacun des rapports proposés.

44. 5° *Lorsque plusieurs rapports sont égaux, le rapport formé en divisant la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs par la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs, est égal à chacun des rapports proposés.*

Soient les rapports $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$. Pour élever un rapport au carré, il faut évidemment élever ses deux termes au carré. On aura donc aussi

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2}.$$

On en déduira

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2}{b^2 + b'^2 + b''^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Pour extraire la racine carrée d'un rapport, il faut évidem-

ment extraire la racine carrée de ses deux termes. On aura donc

$$\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2}}=\frac{a}{b}.$$

45. Proposons-nous, comme exercice, de simplifier l'expression suivante :

$$\frac{a+\dfrac{b-a}{1+ba}}{1-\dfrac{ab-a^2}{1+ba}}.$$

On commencera par faire disparaître le dénominateur $1+ba$, en multipliant les deux termes du rapport par ce dénominateur. On trouvera

$$\frac{a+ba^2+b-a}{1+ba-ab+a^2}=\frac{ba^2+b}{1+a^2}=\frac{b(a^2+1)}{1+a^2}=b.$$

Il faut se rappeler que, pour multiplier une somme ou une différence par une quantité, on doit multiplier chaque partie de la somme ou de la différence par cette quantité.

Soit encore à simplifier l'expression

$$\frac{\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{a-b}{a+b}-1\right)}{\left(\dfrac{a-b}{a+b}+1\right)\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)}.$$

On commencera par effectuer l'opération indiquée dans chaque parenthèse, c'est-à-dire qu'on réduira les rapports correspondants au même dénominateur, puis qu'on les ajoutera ou retranchera. On trouvera

$$\frac{\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}\times\dfrac{a-b-a-b}{a+b}}{\dfrac{a-b+a+b}{a+b}\times\dfrac{a^2-b^2}{ab}}=\frac{\dfrac{(b^2-a^2)\times-2b}{a^2b^2(a+b)}}{\dfrac{2a(a^2-b^2)}{ab(a+b)}}.$$

On simplifiera autant que possible les deux rapports obtenus en numérateur et en dénominateur. Il viendra

$$\frac{\dfrac{2(a-b)}{ab}}{\dfrac{2(a-b)}{b}}.$$

Puisque pour diviser deux rapports il faut multiplier le pre-

mier par le second renversé, le résultat cherché sera

$$\frac{2(a-b)}{a^2b} \times \frac{b}{2(a-b)} = \frac{2b(a-b)}{2a^2b(a-b)} = \frac{1}{a^2}.$$

Théorie des proportions.

46. *On appelle proportion l'égalité de deux rapports.* Si les deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux, ils formeront la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. On écrit aussi une proportion en remplaçant la barre de fraction par le signe :. On a alors

$$a : b = c : d.$$

Il résulte des explications données en Arithmétique (164) que lorsque quatre grandeurs forment proportion, il en est de même des nombres qui les représentent.

Dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a : b = c : d$, les numérateurs des deux rapports prennent le nom d'*antécédents*, les dénominateurs prennent le nom de *conséquents*. Les termes a et d sont les deux *extrêmes*, les termes b et c sont les deux *moyens*. On énonce souvent une proportion, surtout en Géométrie, en disant : a *est à* b *comme* c *est à* d.

La propriété fondamentale des proportions est la suivante : *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Réduisons les deux rapports au même dénominateur, il viendra

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}.$$

Ces deux rapports étant égaux et ayant même dénominateur, leurs numérateurs sont égaux, et l'on a

$$a \times d = c \times b.$$

Réciproquement, *Si quatre nombres sont tels, que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens, ces quatre nombres forment proportion dans l'ordre même où ils sont écrits.* En effet, si l'on a l'égalité $a \times d = c \times b$, on peut en diviser les deux membres par le produit $d \times b$. Il vient

$$\frac{a \times d}{d \times b} = \frac{c \times b}{d \times b}.$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Étant donnés trois termes d'une proportion, on peut d'après cela déterminer facilement le quatrième. Si c'est un extrême qui est inconnu, il faut diviser le produit des moyens par l'extrême connu. Si c'est un moyen qui est inconnu, il faut diviser le produit des extrêmes par le moyen connu.

Comme la condition pour qu'il y ait proportion est que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, on peut faire subir à une proportion, sans qu'il cesse d'y avoir proportion, les changements suivants :

1°. *On peut changer les moyens entre eux.* De la proportion

$$a : b = c : d,$$

on déduit alors

$$a : c = b : d.$$

2°. *On peut échanger les extrêmes.* Si l'on fait subir cette transformation aux deux proportions précédentes, il vient

$$d : b = c : a,$$
$$d : c = b : a.$$

3°. *On peut changer les moyens de place avec les extrêmes.* Si l'on fait subir cette transformation aux quatre proportions déjà obtenues, on trouve

$$b . a = d : c,$$
$$c : a = d : b,$$
$$b : d = a : c,$$
$$c : d = a : b.$$

En tout trois changements donnant lieu à huit proportions.

On peut de même multiplier ou diviser par un même nombre les deux termes du premier ou du second rapport, multiplier ou diviser par un même nombre les deux antécédents ou les deux conséquents.

47. *Lorsque deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports forment proportion.*

Si l'on a

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

on en déduit

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Il résulte de ce que nous venons de dire que, *lorsque deux*

proportions ont les mêmes antécédents ou les mêmes conséquents, leurs conséquents ou leurs antécédents forment proportion.

Soient les proportions $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{a}{e}=\frac{c}{f}$. Changeons les moyens de place dans ces deux proportions; elles deviendront

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{a}{c}=\frac{e}{f},$$

et l'on en déduira

$$\frac{b}{d}=\frac{e}{f}.$$

48. *Dans toute proportion, la somme ou la différence des antécédents est à la somme ou à la différence des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent.*

De la proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ on tire immédiatement (43)

$$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}.$$

En séparant les signes, on a à la fois

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\quad\text{et}\quad\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}.$$

On en déduit

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d},$$

ou, en changeant les moyens de place,

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d};$$

ce qu'on énonce en disant que, *dans toute proportion, la somme des antécédents est à leur différence, comme la somme des conséquents est à leur différence.*

49. *Dans toute proportion, la somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou à la différence des deux derniers, comme le premier terme est au troisième ou le second au quatrième.*

Dans la proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, changeons les moyens de place; nous aurons $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. Appliquons le théorème précédent (48) à cette dernière proportion; il viendra

$$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

En séparant les signes, on a à la fois

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}.$$

On en déduit

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$$

ou, en changeant les moyens de place,

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};$$

ce qu'on énonce en disant que, *dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est à leur différence comme la somme des deux derniers termes est à leur différence.*

30. *En multipliant plusieurs proportions terme à terme, on obtient une proportion.*

Soient les proportions $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$, $\frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$. Multiplions membre à membre ces trois égalités. On trouvera

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''},$$

c'est-à-dire, en suivant la règle de multiplication des rapports (41),

$$\frac{aa'a''}{bb'b''}=\frac{cc'c''}{dd'd''}.$$

De même, *en divisant deux proportions terme à terme, les quotients obtenus forment proportion.*

Soient les proportions $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$. Divisons membre à membre ces deux égalités, nous trouverons

$$\frac{a}{b}:\frac{a'}{b'}=\frac{c}{d}:\frac{c'}{d'},$$

c'est-à-dire, en suivant la seconde règle de division des rapports (42),

$$\frac{a:a'}{b:b'}=\frac{c:c'}{d:d'}.$$

Les puissances ou les racines de même degré des quatre termes d'une proportion, forment proportion.

De l'égalité $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ on tire évidemment

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{c}{d}\right)^m \quad \text{ou} \quad \frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}.$$

On en déduit aussi

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{c}{d}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}.$$

La démonstration est analogue à celle déjà donnée en Arithmétique (**208**, **219**).

51. Chercher *une moyenne proportionnelle* entre deux quantités, c'est former une proportion qui ait pour extrêmes les quantités données et pour moyens égaux la moyenne proportionnelle demandée.

Désignons par x la moyenne cherchée, par a et b les quantités données. Il faudra qu'on ait

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \quad \text{ou} \quad x^2=ab,$$

c'est-à-dire

$$x=\sqrt{ab}.$$

La moyenne proportionnelle de deux quantités est par suite égale à la racine carrée de leur produit.

x tombe nécessairement entre a et b, d'où le terme de *moyenne* employé.

Il est facile de comparer la moyenne proportionnelle ou *géométrique* de deux quantités à leur moyenne arithmétique (*Arith.*, **140**).

Soient les quantités a et b. Désignons par y leur moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ et par x leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$. Nous aurons

$$y^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad \text{et} \quad x^2=ab,$$

d'où

$$y^2-x^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Que a soit plus grand ou plus petit que b, ces deux quantités étant d'ailleurs supposées positives, $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ est une quantité essentiellement positive. y^2 l'emporte donc sur x^2, ou y sur x, c'est-à-dire que la moyenne arithmétique de deux quantités est plus grande que leur moyenne géométrique.

Des grandeurs proportionnelles ou inversement proportionnelles.

52. Je rappelle la définition de ces grandeurs (*Arith.*, **255** et suivants). Deux grandeurs sont proportionnelles, lorsque deux

valeurs quelconques de la première grandeur forment un rapport égal à celui des valeurs correspondantes de la seconde grandeur.

Deux grandeurs sont inversement proportionnelles, lorsque deux valeurs quelconques de la première grandeur forment un rapport égal au rapport inverse des valeurs correspondantes de la seconde grandeur.

53. Désignons par les symboles X et Y les deux grandeurs considérées. Soient x' et x'' deux valeurs particulières de X, y' et y'' les valeurs correspondantes de Y. Si les grandeurs considérées sont proportionnelles, on aura par définition

$$\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''}.$$

Si l'on change les moyens de place, il vient

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x''}{y''}.$$

Les valeurs considérées étant quelconques, on peut dire que le *rapport* de deux valeurs correspondantes quelconques des deux grandeurs est *constant*. Les grandeurs proportionnelles sont donc caractérisées par la formule générale

$$\frac{X}{Y} = \text{const.}$$

Si l'expérience donne deux valeurs particulières correspondantes des grandeurs considérées, la constante, égale à leur quotient, se trouve déterminée ainsi que la relation numérique qui lie les deux grandeurs.

54. Si les grandeurs X et Y sont inversement proportionnelles, on a par définition

$$\frac{x'}{x''} = \frac{y''}{y'}.$$

Si l'on forme le produit des extrêmes égal au produit des moyens, on a

$$x' \times y' = x'' \times y''.$$

Les valeurs considérées étant quelconques, on peut dire que le *produit* de deux valeurs correspondantes quelconques des deux grandeurs est *constant*. Les grandeurs inversement proportionnelles sont donc caractérisées par la formule générale

$$X . Y = \text{const.}$$

Si l'expérience donne deux valeurs particulières correspondantes des grandeurs considérées, la constante, égale à leur

produit, se trouve déterminée ainsi que la relation numérique qui lie les deux grandeurs.

55. Les formules indiquées résolvent immédiatement *les règles de trois simples*, directes ou inverses. Si les grandeurs sont proportionnelles, on a

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x''}{y''},$$

et si x' est l'inconnue, on en déduit immédiatement

$$x' = \left(\frac{x''}{y''}\right) \times y'.$$

Remarquons que si dans cette formule générale qui donne toutes les variations de x' correspondantes aux variations de y', l'on fait $y' = 1$, il vient

$$x' = \left(\frac{x''}{y''}\right).$$

La *constante* $\left(\frac{x''}{y''}\right)$ n'est donc autre chose que la valeur prise par la grandeur de même espèce que l'inconnue pour une valeur de l'autre grandeur égale à l'unité : ce qui ramène à la *méthode de réduction à l'unité* indiquée en Arithmétique.

56. Si les grandeurs sont inversement proportionnelles, on a

$$x' \cdot y' = x'' \cdot y'',$$

et si x' est l'inconnue, on en déduit

$$x' = \frac{(x'' \cdot y'')}{y'}.$$

Si l'on fait dans la formule $y' = 1$, on trouve

$$x' = (x'' \cdot y'').$$

La *constante* $(x'' \cdot y'')$ n'est donc aussi autre chose dans ce cas que la valeur particulière qu'on vient de définir.

57. Supposons maintenant plus de deux grandeurs. Je rappelle que, lorsque la variation d'une grandeur dépend de celle de plusieurs autres grandeurs, si l'on dit que la grandeur considérée est proportionnelle ou inversement proportionnelle à une autre grandeur, on sous-entend que tous les autres éléments de variation restent constants au moment de la comparaison des deux grandeurs.

Les grandeurs considérées étant représentées par les symboles généraux x, A, B, P, Q, admettons que x soit proportionnelle à A et à B, inversement proportionnelle à P et à Q. Soient deux séries de valeurs particulières correspondantes de

toutes ces grandeurs :

$$\begin{array}{ccccc} x', & a', & b', & p', & q' \\ x'', & a'', & b'', & p'', & q''. \end{array}$$

Exprimons x'', supposée inconnue, en fonction de toutes les autres valeurs données.

Si l'on considère seulement x et A et si l'on suppose que les autres grandeurs conservent les valeurs b', p', q', A passant de la valeur a' à la valeur a'', x passera de la valeur x' à une certaine valeur X qui satisfera à la relation

$$(1) \qquad X = \frac{a''}{a'} \cdot x',$$

puisque x et A sont des grandeurs proportionnelles (53).

Si l'on considère maintenant x et B, les autres grandeurs conservant les valeurs a'', p', q', et B passant de la valeur b' à la valeur b'', x passera de la valeur X qui correspond à b' à une certaine valeur X' qui satisfera à la relation

$$(2) \qquad X' = \frac{b''}{b'} \cdot X,$$

puisque x et B sont des grandeurs proportionnelles.

Considérons x et P. Les autres grandeurs conservant les valeurs a'', b'', q', si P passe de la valeur p' à la valeur p'', x passera de la valeur X' qui correspond à p' à une certaine valeur X'' qui satisfera à la relation

$$(3) \qquad X'' = \frac{p' \cdot X'}{p''},$$

puisque x et P sont des grandeurs inversement proportionnelles (56).

Enfin, si l'on considère x et Q, et si les autres grandeurs conservent les valeurs a'', b'', p'', Q passant de la valeur q' à la valeur q'', x passera de la valeur X'' à la valeur x'' qui correspond à la série a'', b'', p'', q''. Cette valeur x'' satisfera à la relation

$$(4) \qquad x'' = \frac{q' \cdot X''}{q''},$$

puisque x et Q sont des grandeurs inversement proportionnelles.

Pour faire disparaître les inconnues auxiliaires X, X', X'', multiplions membre à membre les égalités (1), (2), (3), (4). Il viendra

$$X \cdot X' \cdot X'' \cdot x'' = X \cdot X' \cdot X'' \cdot x' \cdot \frac{a''}{a'} \cdot \frac{b''}{b'} \cdot \frac{p'}{p''} \cdot \frac{q'}{q''}.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par le produit

$X.X'.X''$, on aura enfin

$$x'' = x' \cdot \frac{a''}{a'} \cdot \frac{b''}{b'} \cdot \frac{p'}{p''} \cdot \frac{q'}{q''}.$$

Appelons *anciennes valeurs* celles qui correspondent à x', *nouvelles valeurs* celles qui correspondent à x''. On voit que, pour avoir x'', *il faut multiplier la quantité connue de même espèce, c'est-à-dire x', par les rapports $\frac{a''}{a'}$, $\frac{b''}{b'}$, des nouvelles valeurs aux anciennes, pour les grandeurs proportionnelles à x, et par les rapports inverses $\frac{p'}{p''}$, $\frac{q'}{q''}$, des nouvelles valeurs aux anciennes, pour les grandeurs inversement proportionnelles à x.*

Cette formule permet de résoudre immédiatement *les règles de trois composées.*

58. Si l'on pose à part

$$K = \frac{x'.p'.q'}{a'.b'},$$

x', a', b', p', q', représentant une série de valeurs quelconques correspondantes des grandeurs considérées, on aura

$$x'' = K \cdot \frac{a''.b''}{p''.q''}.$$

Cette relation (*) s'appliquant à une série de valeurs quelconques correspondantes des grandeurs considérées, on peut remplacer ces valeurs particulières par les symboles généraux adoptés, et écrire

$$x = K \cdot \frac{A.B}{P.Q}.$$

L'expérience ayant déterminé une série de valeurs particulières coexistantes des grandeurs données, on aura le *coefficient constant* K, et par suite la relation numérique qui lie toutes les grandeurs considérées.

S'il n'entre dans la question que les grandeurs x, A et B, on a évidemment

$$x = K.A.B \quad \text{ou} \quad \frac{x}{AB} = K.$$

(*) On peut remarquer que, dans l'expression $K = \frac{x'.p'.q'}{a'.b'}$, il suffit que les quantités qui entrent dans le second membre se correspondent. Si l'on suppose qu'on ait $a' = b' = p' = q' = 1$, il reste $K = x'$. K est donc égal à la valeur que prend la grandeur de même espèce que l'inconnue pour des valeurs des autres grandeurs toutes égales à l'unité. On est donc ainsi encore ramené à la méthode de réduction à l'unité.

Donc, *lorsqu'une grandeur est proportionnelle à plusieurs autres grandeurs, elle est proportionnelle à leur produit.*

S'il n'entre dans la question que les grandeurs x, P et Q, on a évidemment

$$x = \frac{K}{P.Q} \quad \text{ou} \quad x.PQ = K.$$

Donc, *lorsqu'une grandeur est inversement proportionnelle à plusieurs autres grandeurs, elle est aussi inversement proportionnelle à leur produit.*

59. Si l'on met la formule générale

$$x'' = x' \cdot \frac{a''}{a'} \cdot \frac{b''}{b'} \cdot \frac{p'}{p''} \cdot \frac{q'}{q''}$$

sous la forme $x''.a'.b'.p''.q'' = x'.a''.b''.p'.q'$, on peut remarquer que cette formule est *homogène*, c'est-à-dire que les termes qui y entrent sont du même degré, puisqu'ils contiennent le même nombre de facteurs littéraux à la même puissance. Il doit en être ainsi toutes les fois qu'il s'agit de relations algébriques entre grandeurs, lorsqu'aucune d'elles n'a été prise pour unité spéciale. Nous reviendrons plus loin sur le principe général de l'*homogénéité*, qui a une grande importance (*).

Partages proportionnels.

60. Partager un nombre N en parties x, y, z, proportionnelles aux nombres donnés a, b, c, c'est, d'après ce qui précède, vouloir qu'on ait

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \text{const.}$$

Si l'on pouvait déterminer cette quantité constante, le problème serait immédiatement résolu. Il suffit de se rappeler que lorsqu'on ajoute plusieurs rapports égaux terme à terme, on forme un rapport égal à chacun d'eux. La constante cherchée est donc aussi égale au rapport

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}.$$

Mais les trois parties x, y, z, forment le nombre N. On a donc

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{N}{a+b+c}.$$

(*) Tout ce que nous venons de dire sur les grandeurs proportionnelles ou inversement proportionnelles est susceptible d'applications très-nombreuses. Nous en donnerons des exemples. Nous recommandons spécialement l'étude de cette théorie aux élèves.

On en déduit :

$$x = \frac{Na}{a+b+c},$$

$$y = \frac{Nb}{a+b+c},$$

$$z = \frac{Nc}{a+b+c}.$$

Il faut donc, pour avoir les parties demandées, multiplier respectivement le rapport du nombre à partager à la somme des nombres proportionnels, par chacun de ces nombres.

CHAPITRE VI.

CARRÉ ET RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

61. Il faudrait maintenant traiter d'une manière générale ce qui se rapporte aux puissances et aux racines de degré quelconque des polynômes. Nous nous bornerons ici à ce qui concerne l'élévation au carré et l'extraction de la racine carrée des polynômes.

62. Pour former le carré d'un monôme, il suffit, d'après la règle de multiplication des monômes, *d'élever son coefficient au carré et de doubler tous les exposants des lettres qui y entrent.* Le carré de $7a^3bx$ est $49a^6b^2x^2$.

63. Nous savons former le carré d'un binôme, cherchons le carré d'un trinôme $a+b+c$. On peut le considérer comme un binôme dont le premier terme est $a+b$. On aura alors

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

ou

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$

Le carré d'un trinôme est donc égal au carré du premier terme, plus le double produit du premier terme par le second, plus le carré du second, plus le double produit de chacun des deux premiers termes par le troisième, plus le carré du troisième.

Si un terme d s'ajoute aux précédents, on aura évidemment

$$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2.$$

Par l'introduction d'un nouveau terme, on ajoute donc au développement le double produit de chacun des premiers termes par le dernier, plus le carré de ce dernier. La loi est manifeste.

On peut dire encore que le carré d'un polynôme renferme les carrés de tous ses termes et les doubles produits de tous ses termes pris deux à deux.

Si l'on considère un polynôme ordonné, on peut remarquer que les deux premiers et les deux derniers termes du développement ne se réduiront avec aucun autre, et resteront dans le développement tels qu'on les aura trouvés. En effet, en supposant que les exposants de la lettre ordonnatrice aillent en décroissant, on voit que a^2 et $2ab$ contiendront la lettre ordonnatrice à une puissance plus élevée que tous les autres termes; les deux derniers termes, quels qu'ils soient, contiendront cette même lettre à une puissance plus faible que tous les autres termes.

64. *Pour extraire la racine carrée d'un monôme, il faut évidemment extraire la racine carrée de son coefficient et diviser par 2 les exposants de toutes les lettres qui y entrent* (62). Un monôme sera carré parfait si son coefficient est carré parfait et si les exposants des lettres qui y entrent sont tous pairs. Sinon, on ne pourra qu'indiquer l'extraction de la racine. La racine carrée du monôme $49a^6b^2x^2$ est $7a^3bx$. Si l'on donne le monôme $63a^3x^2$, on écrit seulement $\sqrt{63a^3x^2}$.

65. Soit maintenant à chercher la racine carrée d'un polynôme supposé carré parfait. Ce polynôme aura au moins trois termes, puisque le carré d'un monôme est un monôme et que le carré d'un binôme est un trinôme. Désignons-le par P et représentons sa racine carrée par

$$a + b + c + d + \ldots.$$

On aura

$$P = (a + b + c + d + \ldots)^2.$$

D'après la remarque faite (63), le polynôme étant supposé ordonné suivant les puissances décroissantes d'une certaine lettre ainsi que sa racine carrée, ses deux premiers termes seront, sans réduction, a^2 et $2ab$. *En extrayant la racine carrée du premier terme du polynôme proposé, on aura donc le premier terme de la racine.* Si l'on retranche a^2 de P, le reste R qu'on obtiendra sera égal à

$$2ab + b^2 + 2ac + \ldots.$$

Son premier terme étant égal à $2ab$, il suffira, pour avoir le second terme de la racine de diviser ce premier terme $2ab$ par le double $2a$ du premier terme écrit à la racine. Ayant les deux premiers termes de la racine, on formera le carré du binôme correspondant $a + b$, et on le retranchera du polynôme P. On en a déja retranché a^2; pour former la quantité $2ab + b^2$ qu'on doit retrancher du reste R alors obtenu, il suffit d'écrire à la

suite du double $2a$ le second terme b et de multiplier par ce second terme l'ensemble $2a + b$. Le nouveau reste R′ sera égal à

$$2ac + 2bc + c^2 + \ldots.$$

Le premier terme de ce reste est encore le produit du double du premier terme de la racine par le troisième terme de cette racine : il suffira donc de le diviser par $2a$ pour avoir le troisième terme c. Il faudra ensuite former le carré du trinôme déterminé par les trois premiers termes de la racine et le retrancher du polynôme P. On en a déjà retranché $(a + b)^2$; il faut donc seulement retrancher du reste R′ alors obtenu

$$2(a + b)c + c^2,$$

ce qui revient à

$$(2a + 2b + c)c.$$

Pour obtenir l'expression à retrancher du reste R′, il faut donc former le double des deux premiers termes de la racine, écrire à la suite le troisième terme de cette racine, et multiplier l'ensemble trouvé par ce troisième terme.

Il n'est pas besoin d'aller plus loin : la règle à suivre est évidente. *Dès qu'on a trouvé le premier terme de la racine en extrayant la racine carrée du premier terme du polynôme proposé, on trouve tous les autres en divisant le premier terme de chacun des restes successifs par le double du premier terme de la racine. On obtient d'ailleurs les différents restes, en retranchant successivement du polynôme donné le carré du premier, des deux premiers, des trois premiers.... termes de la racine ; ce qui revient, dès le second reste, à retrancher du reste précédent le produit de l'ensemble du double de la partie écrite à la racine suivi du dernier terme trouvé, par ce dernier terme. On sera averti qu'on est arrivé au dernier terme de la racine, lorsqu'on obtiendra un reste nul. Réciproquement, la racine est exacte si l'on trouve un reste nul.*

L'opération présente la disposition suivante. Soit à extraire la racine carrée du polynôme

$$25a^6x^6 - 20a^5x^5 + 74a^4x^4 - 48a^3x^3 + 57a^2x^2 - 28a^3x + 4a^4$$

$-4a^4x^4$	$5ax^3 - 2a^2x^2 + 7a^3x - 2a^4$
$70a^4x^4 - 48a^3x^3 + 57a^2x^2 - 28a^3x + 4a^4$	$10ax^3 - 2a^2x^2$
$+28a^3x^3 - 49a^2x^2$	$-2a^2x^2$
$-20a^3x^3 + 8a^2x^2 - 28a^3x + 4a^4$	$10ax^3 - 4a^2x^2 + 7a^3x$
$-8a^2x^2 + 28a^3x - 4a^4$	$+7a^3x$
0	$10ax^3 - 4a^2x^2 + 14a^3x - 2a^4$
	$-2a^4$

L'extraction de la racine carrée des polynômes a une grande analogie avec l'extraction de la racine carrée des nombres. On

écrit immédiatement les produits à retrancher au-dessous des restes successifs, en changeant les signes des termes de ces produits à mesure qu'on les calcule et en les disposant de manière à faciliter la réduction des termes semblables. On n'écrit pas le premier terme de chaque produit, qui détruit forcément le premier terme du reste correspondant (*).

66. L'extraction est impossible lorsque, le polynôme étant ordonné par rapport à une lettre quelconque, le premier et le dernier terme ne sont pas des carrés parfaits. Elle est encore impossible lorsque, le premier et le dernier terme étant des carrés parfaits, le second et l'avant-dernier terme ne sont pas respectivement divisibles par le double de la racine carrée du premier et du dernier terme. Enfin, l'extraction sera encore impossible lorsqu'on sera conduit à un reste dont le premier terme ne sera plus divisible par le double du premier terme posé à la racine.

Lorsque le premier terme du polynôme proposé est un carré parfait, on peut toujours commencer l'extraction de la racine carrée et la continuer jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste R dont le premier terme ne soit plus divisible par le double du premier terme de la racine. Si l'on appelle P le polynôme proposé et A le polynôme écrit à la racine, on aura, d'après ce qui précède,

$$R = P - A^2,$$

d'où

$$P = A^2 + R.$$

On peut donc remplacer le polynôme P, dans le cas considéré, par un polynôme carré parfait augmenté d'un autre polynôme de degré inférieur au premier par rapport à la lettre ordonnatrice.

Soit le polynôme

$$\begin{array}{r|l} 9a^2x^4 - 30a^3x^3 + 25a^4x^2 - 7a^5x + 2a^6 & 3ax^2 - 5a^2x \\ \cline{2-2} -25a^4x^2 & 6ax^2 - 5a^2x \\ \cline{1-1} -7a^5x + 2a^6 & -5a^2x \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Après avoir trouvé à la racine le binôme $3ax^2 - 5a^2x$, on est obligé de s'arrêter au reste $-7a^5x + 2a^6$, dans lequel le premier terme est d'un degré inférieur en x au premier terme écrit à la racine. On peut alors poser

$$\begin{aligned} &9a^2x^4 - 30a^3x^3 + 25a^4x^2 - 7a^5x + 2a^6 \\ &= (3ax^2 - 5a^2x)^2 - 7a^5x + 2a^6. \end{aligned}$$

(*) Si la lettre ordonnatrice entrait dans plusieurs termes du polynôme proposé avec un même exposant, la règle à suivre serait identique. Seulement, l'extraction principale serait compliquée d'extractions partielles.

67. Pour élever au carré un rapport algébrique, il faut évidemment élever ses deux termes au carré. De même, pour extraire la racine carrée d'un rapport algébrique, il faut extraire la racine carrée de ses deux termes.

68. Comme exercice, cherchons la condition pour qu'un trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ soit un carré parfait. Nous effectuerons l'extraction de la racine carrée de ce trinôme jusqu'à ce que nous parvenions à un reste indépendant de x. En égalant ce reste à zéro, nous aurons la relation à laquelle les coefficients a, b, c, doivent satisfaire pour que le trinôme soit carré parfait.

$$\begin{array}{r|l}
ax^2 + bx + c & \sqrt{a}.x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}} \\
\cline{2-2}
-\dfrac{b^2}{4a} & 2\sqrt{a}.x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}} \\
\cline{1-1}
-\dfrac{b^2}{4a} + c & +\dfrac{b}{2\sqrt{a}} \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

Le reste indépendant de x étant $-\dfrac{b^2}{4a} + c$, il faut qu'on ait $-\dfrac{b^2}{4a} + c = 0$, ce qui revient évidemment à $b^2 - 4ac = 0$. Quel que soit x, le trinôme sera donc carré parfait si le carré du coefficient de x est égal au quadruple produit du coefficient de x^2 par le terme qui ne contient pas x.

On aurait pu, pour éviter dans le calcul les quantités irrationnelles, multiplier le trinôme par a. Il aurait fallu ensuite diviser la racine carrée obtenue par $\sqrt{a}$.

La racine carrée $\sqrt{a}\,.\,x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$ est d'ailleurs rationnelle par rapport à x.

CHAPITRE VII.

CALCUL DES VALEURS ARITHMÉTIQUES DES RADICAUX. — EXPOSANTS FRACTIONNAIRES ET NÉGATIFS.

69. Nous avons déjà dit en Arithmétique que la racine $m^{ième}$ d'une quantité, étant élevée à la puissance m, devait reproduire la quantité proposée. On indique la racine $m^{ième}$ d'une quantité en employant le signe $\sqrt{\ }$, affecté de l'indice m.

La racine $m^{ième}$ de la quantité a s'écrira $\sqrt[m]{a}$.

a peut avoir une valeur *positive* ou *négative*, m peut être *pair* ou *impair*. Examinons ces différents cas.

1°. Si m est pair et que a soit positif, $\sqrt[m]{a}$ admettra deux valeurs égales et de signes contraires. En effet, qu'on affecte la valeur absolue de $\sqrt[m]{a}$ du signe + ou du signe —, comme m est pair et que le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs est positif (20), on obtiendra toujours a comme résultat en prenant m facteurs égaux à $+\sqrt[m]{a}$ ou à $-\sqrt[m]{a}$. Si a' désigne la valeur absolue de $\sqrt[m]{a}$, on aura donc d'une manière générale

$$\sqrt[m]{a} = \pm a'.$$

2°. Si m est pair et que a soit négatif, $\sqrt[m]{a}$ ne pourra être exprimée par aucun nombre positif ou négatif, puisque le produit d'un nombre pair de facteurs positifs ou négatifs est positif. On donne à une pareille expression le nom d'expression *imaginaire*, parce qu'elle ne peut avoir aucune représentation numérique.

3°. Si m est impair, $\sqrt[m]{a}$ n'aura qu'une seule valeur de même signe que a : un nombre impair de facteurs positifs donne en effet un produit positif, un nombre impair de facteurs négatifs, donne un produit négatif. En désignant par a' la valeur absolue de $\sqrt[m]{a}$, abstraction faite du signe de a, on aura d'une manière générale

$$\sqrt[m]{a} = +a', \text{ si } a \text{ est positif;}$$
$$\sqrt[m]{a} = -a', \text{ si } a \text{ est négatif.}$$

Ainsi

$$\sqrt{4} = \pm 2, \quad \sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Dans ce qui va suivre, nous considérerons les quantités placées sous les radicaux comme ayant une valeur positive et nous n'admettrons que les racines positives de ces quantités.

70. Il n'y a pas lieu de s'arrêter à l'addition et à la soustraction des radicaux. Le plus souvent on ne pourra qu'indiquer l'opération à effectuer. Si des simplifications sont possibles, elles dépendront des transformations que nous allons étudier et de ce qu'on a déjà dit sur la réduction des termes semblables.

71. *Pour multiplier plusieurs radicaux de même indice, on multiplie les quantités placées sous ces radicaux et on affecte leur produit du radical commun.*

Je dis qu'on a

$$\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc},$$

a, b, c, étant des quantités quelconques positives.

Rappelons-nous que, pour élever un produit à une puissance, il faut élever à cette puissance chaque facteur du produit (*Arith.*, 76) ; de plus, on a par définition

$$(\sqrt[m]{a})^m = a.$$

Si l'on élève alors à la puissance m les deux membres de l'égalité précédente, on trouvera

$$(\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c})^m = abc,$$

ce qui démontre la règle. En effet, puisque le premier membre de cette égalité, élevé à la puissance m, reproduit abc, ce premier membre représente $\sqrt[m]{abc}$.

L'égalité $\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$ prouve que, *pour extraire la racine d'un produit, il faut extraire la racine de chaque facteur.*

On peut, d'après cela, simplifier l'expression d'un radical, lorsqu'il recouvre le produit de deux facteurs dont l'un est une puissance exacte relativement à l'indice du radical.

Ainsi

$$\sqrt[m]{a^{2m}b} = a^2\sqrt[m]{b},$$

on fera donc sortir un facteur du radical, c'est-à-dire on l'écrira en dehors du radical, *en en extrayant une racine marquée par l'indice du radical.*

Réciproquement, si l'on a intérêt *à faire entrer un facteur sous le radical, il faut l'élever à une puissance marquée par l'indice du radical.*

On aura

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}.$$

On aura de même

$$2\sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{4 \times 7}{12}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

72. *Pour diviser deux radicaux de même indice, on divise les quantités placées sous les radicaux, et on affecte leur quotient du radical commun.*

Je dis qu'on a

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Rappelons-nous que, pour élever une fraction à une puissance, il faut élever ses deux termes à cette puissance. On

aura alors

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{a}{b},$$

ce qui démontre la règle énoncée.

73. *Pour élever un radical à une puissance, on élève à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

Je dis qu'on a

$$(\sqrt[m]{a})^p = \sqrt[m]{a^p}.$$

En effet, élever $\sqrt[m]{a}$ à la puissance p, c'est faire le produit de p facteurs égaux à $\sqrt[m]{a}$ (**71**).

74. *Pour extraire la racine d'un radical, on extrait la racine de la quantité placée sous ce radical, ou l'on multiplie les deux indices l'un par l'autre.*

Je dis qu'on a

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[mp]{a}.$$

On a démontré en Arithmétique que, pour élever une puissance à une autre puissance, il fallait multiplier les exposants des deux puissances : $(a^3)^4 = a^{3\times 4}$. Réciproquement, pour élever a à la puissance 12, on peut indifféremment commencer par élever a au cube, puis le résultat a^3 à la quatrième puissance, ou bien élever a à la quatrième puissance et le résultat a^4 au cube. Ceci posé, en élevant les trois expressions indiquées à la puissance mp, on trouvera a : $\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}$, par exemple, élevée à la puissance p donnera $\sqrt[m]{a}$, et ce résultat élevé à la puissance m donnera a; ces trois expressions sont donc égales comme représentant la racine $mp^{ième}$ d'une même quantité.

Ce théorème permet de simplifier l'extraction des racines numériques, lorsque leur degré ne renferme que les facteurs premiers 2 et 3.

Ainsi, on peut écrire

$$\sqrt[12]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}.$$

Pour extraire la racine douzième de a, on pourra donc extraire la racine carrée de a, puis la racine carrée de cette racine carrée, et enfin la racine cubique du résultat. On aura de même

$$\sqrt[6]{46656} = \sqrt[3]{\sqrt{46656}} = \sqrt[3]{216} = 6.$$

75. *On ne change pas la valeur d'un radical en multipliant son indice par un certain nombre, pourvu qu'on élève à la puissance marquée par ce nombre la quantité placée sous le radical. Si l'on divise l'indice par un certain nombre, on doit*

au contraire extraire de la quantité placée sous le radical une racine marquée par le diviseur employé.

Cette règle résulte immédiatement du théorème précédent. On a évidemment.

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mp]{a^p},$$

puisqu'on vient de démontrer la relation

$$\sqrt[mp]{a^p} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a^p}},$$

et que $\sqrt[p]{a^p}$ équivaut à a.

On peut, d'après ce qu'on vient de dire, simplifier un radical en supprimant les facteurs communs à l'indice du radical et à l'exposant de la puissance qu'il recouvre.

$$\sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[4]{3}.$$

On peut aussi réduire plusieurs radicaux au même indice, en suivant une marche analogue à celle qu'on emploie en Arithmétique pour réduire plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun. Soit proposé de réduire au même indice les radicaux $\sqrt[15]{a}$, $\sqrt[12]{b}$, $\sqrt[14]{c}$. On a

$$15 = 3 \times 5, \quad 12 = 2^2 \times 3, \quad 14 = 2 \times 7.$$

Le plus petit multiple commun des trois indices sera donc

$$2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420.$$

En le divisant successivement par 15, 12 et 14, on trouvera pour quotients 28, 35, 30. Il faudra multiplier chaque indice par le quotient qui lui correspond et élever à une puissance marquée par ce quotient la quantité placée sous le radical considéré. Il viendra

$$\sqrt[420]{a^{28}}, \quad \sqrt[420]{b^{35}}, \quad \sqrt[420]{c^{30}}.$$

76. *Pour multiplier ou diviser des radicaux d'indices différents, on commence par les ramener au même indice, puis on applique les résultats précédents.*

Des exposants fractionnaires.

77. On peut diviser par un même nombre l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité qu'il recouvre (75). On peut donc écrire

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m = a^{\frac{mp}{p}}.$$

La fraction $\frac{mp}{p}$ a pour numérateur l'exposant de la quantité placée sous le radical, et pour dénominateur l'indice de ce radical.

La forme fractionnaire de l'exposant n'entraîne ici aucune remarque, puisque cette forme fractionnaire correspond à un quotient entier. Mais il y a avantage évident, ou, pour mieux dire, le caractère de l'Algèbre conduit nécessairement à étendre par convention cette notation au cas même où l'exposant de la quantité placée sous le radical n'est pas divisible par l'indice du radical. En effet, les règles relatives au calcul des quantités affectées d'exposants, qui ont été démontrées en Arithmétique (73 et suivants), exigent que ces exposants soient entiers. Les exposants pouvant être, eux aussi, représentés en Algèbre par des symboles généraux, il faut qu'on puisse supposer ces symboles remplacés par des valeurs quelconques et, par suite, par des valeurs fractionnaires, sans que les règles de calcul soient modifiées ; et cette extension sera facilement justifiée, si nous convenons de regarder comme équivalentes les deux expressions

$$\sqrt[p]{a^m} \quad \text{et} \quad a^{\frac{m}{p}},$$

m et p étant des quantités entières positives quelconques.

Pour que cette convention soit permise, il faut montrer que la valeur de la seconde expression étant indépendante de la forme donnée à la valeur fractionnaire $\frac{m}{p}$, il en sera de même de la valeur de la première. Supposons, en effet, qu'on ait

$$\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'}.$$

On aura

$$a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m'}{p'}}.$$

Je dis qu'on aura aussi

$$\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[p']{a^{m'}}.$$

Réduisons ces deux radicaux au même indice ; ils deviendront

$$\sqrt[pp']{a^{mp'}} \quad \text{et} \quad \sqrt[pp']{a^{m'p}}.$$

Mais puisqu'on a

$$\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'},$$

on a

$$mp' = m'p.$$

Les deux radicaux, réduits ou non au même indice, sont donc identiques.

Il est utile de remarquer que, pour calculer la valeur numérique d'une puissance fractionnaire, il faut revenir à la forme

radicale. Ainsi

$$16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \sqrt{4^6} = 4^3 = 64.$$

Nous allons étendre maintenant aux exposants fractionnaires les règles démontrées dans le cas des exposants entiers.

78. *Pour multiplier deux puissances entières ou fractionnaires d'une même quantité, on ajoute leurs exposants.*

Je dis qu'on a

$$a^{\frac{m}{p}} \times a^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}}.$$

En effet

$$a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^m}, \qquad a^{\frac{n}{q}} = \sqrt[q]{a^n},$$

et l'on a

$$\sqrt[p]{a^m} \times \sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{mq}.a^{np}} = \sqrt[pq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{pq}},$$

c'est-à-dire $a^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}}$.

On peut supposer m ou n égal à 1, p ou q égal à 1.

79. *Pour diviser deux puissances entières ou fractionnaires d'une même quantité, on retranche leurs exposants.*

Je dis qu'on a

$$a^{\frac{m}{p}} : a^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{m}{p}-\frac{n}{q}},$$

en faisant toutefois la restriction $\frac{m}{p} > \frac{n}{q}$, restriction qui sera levée bientôt.

En effet,

$$a^{\frac{m}{p}} : a^{\frac{n}{q}} = \sqrt[p]{a^m} : \sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[pq]{a^{mq-np}},$$

puisque la condition $\frac{m}{p} > \frac{n}{q}$ entraîne nécessairement la condition $mq > np$; on aura donc, en revenant à la notation adoptée,

$$a^{\frac{m}{p}} : a^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{mq-np}{pq}} = a^{\frac{m}{p}-\frac{n}{q}}.$$

On peut supposer m ou n égal à 1, p ou q égal à 1.

80. *Pour élever une puissance entière ou fractionnaire à une autre puissance entière ou fractionnaire, on multiplie les deux exposants.*

Je dis qu'on a

$$\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{q}} = a^{\frac{m}{p}\cdot\frac{n}{q}}.$$

En effet,

$$\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{q}} = \left(\sqrt[p]{a^m}\right)^{\frac{n}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[p]{a^m}\right)^n},$$

ou

$$\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{q}} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{(a^m)^n}} = \sqrt[pq]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{pq}} = a^{\frac{m}{p}\cdot\frac{n}{q}}.$$

On peut supposer m ou n égal à 1, p ou q égal à 1.

81. *Pour élever un produit à une puissance entière ou fractionnaire, on peut élever chacun de ses facteurs à cette puissance.*

Je dis que $(abc)^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}}.b^{\frac{m}{p}}.c^{\frac{m}{p}}$. En effet

$$(abc)^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{(abc)^m} = \sqrt[p]{a^m.b^m.c^m},$$

c'est-à-dire

$$(abc)^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^m}.\sqrt[p]{b^m}.\sqrt[p]{c^m} = a^{\frac{m}{p}}.b^{\frac{m}{p}}.c^{\frac{m}{p}}.$$

Des exposants négatifs.

82. De même que la nécessité de conserver aux symboles algébriques toute leur généralité nous a conduit à admettre les exposants fractionnaires, nous devons aussi admettre les exposants négatifs et chercher l'interprétation dont ils sont susceptibles.

Nous avons déjà vu (28) que les exposants négatifs apparaissaient, lorsqu'on voulait étendre la règle de la division des monômes au cas où l'exposant d'une certaine lettre était plus faible au dividende qu'au diviseur. Supposons qu'on ait l'expression $\frac{a^m}{a^n}$. Si m surpasse n, on en déduit immédiatement

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Mais m étant plus petit que n, l'expression a^{m-n} n'a aucun sens, si l'on s'en tient à la définition générale des puissances. Posons

$$n = m + p,$$

p étant la différence des deux exposants. On pourra alors écrire

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m.a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

En appliquant la règle connue, on aura d'ailleurs

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{-p}.$$

Il est donc naturel d'admettre ou de convenir que les deux expressions a^{-p} et $\frac{1}{a^p}$ sont équivalentes. Il sera facile, d'après cela, d'étendre aux exposants négatifs les mêmes règles de calcul qu'aux exposants entiers ou fractionnaires.

Il est utile de remarquer que, pour calculer la valeur numérique d'une puissance négative, il faut revenir à la forme fractionnaire. Ainsi

$$2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

83. *Pour multiplier deux puissances positives ou négatives d'une même quantité, on ajoute leurs exposants.*

Je dis qu'on a

$$a^{-m}.a^{-q} = a^{-m-q} = a^{-(m+q)}.$$

En effet

$$a^{-m}.a^{-q} = \frac{1}{a^m}.\frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^m.a^q} = \frac{1}{a^{m+q}},$$

c'est-à-dire, en revenant à la notation adoptée,

$$a^{-m}.a^{-q} = a^{-(m+q)}.$$

On peut supposer m et q positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires.

84. *Pour diviser deux puissances positives ou négatives d'une même quantité, on retranche leurs exposants.*

Je dis qu'on a

$$a^{-m} : a^{-q} = a^{-m+q} = a^{q-m}.$$

En effet

$$a^{-m} : a^{-q} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^q} = \frac{a^q}{a^m} = a^{q-m}.$$

On peut supposer m et q positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires.

85. *Pour élever une puissance positive ou négative à une autre puissance positive ou négative, on multiplie les deux exposants.*

Je dis qu'on a

$$(a^{-m})^{-q} = a^{-m.-q} = a^{mq}.$$

En effet

$$(a^{-m})^{-q} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{(a^m)^q}},$$

c'est-à-dire

$$(a^{-m})^{-q} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mq}}} = a^{mq}.$$

On peut supposer m et q positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires.

86. *Pour élever un produit à une puissance positive ou négative, on peut élever chacun de ses facteurs à cette puissance.*

Je dis qu'on a

$$(abc)^{-m} = a^{-m}.b^{-m}.c^{-m}.$$

En effet,

$$(abc)^{-m} = \frac{1}{(abc)^m} = \frac{1}{a^m.b^m.c^m} = \frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{b^m}\cdot\frac{1}{c^m},$$

c'est-à-dire

$$(abc)^{-m} = a^{-m}.b^{-m}.c^{-m}.$$

On peut supposer m positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

87. On doit remarquer que, par suite de l'emploi des exposants négatifs, les divisions et les extractions de racines carrées inexactes pourront se continuer indéfiniment, de sorte que l'expression du quotient ou de la racine sera composée d'un nombre illimité de termes. Le premier exposant négatif dont sera affectée la lettre ordonnatrice correspondra au premier reste de degré inférieur par rapport à cette lettre, au diviseur ou à la racine.

88. En résumant tout ce que nous venons de dire sur les exposants fractionnaires et négatifs, on obtient les règles suivantes, qui ne sont plus soumises à aucune restriction sur la nature des exposants.

1°. *Pour multiplier deux puissances d'une même quantité, on ajoute leurs exposants.*

2°. *Pour diviser deux puissances d'une même quantité, on retranche leurs exposants.*

3°. *Pour élever une puissance à une autre puissance, on multiplie les exposants des deux puissances.*

4°. *Pour élever un produit à une puissance, on peut élever chacun de ses facteurs à cette puissance.*

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DES PROGRESSIONS.

Des progressions par différence.

89. On appelle *progression arithmétique* ou *par différence* une suite de termes tels, que *la différence* qui existe entre

chaque terme et le précédent est une quantité constante : cette quantité constante est *la raison* de la progression.

Quand la raison est positive, la progression est *croissante*, c'est-à-dire que ses termes vont en augmentant. Quand la raison est négative, la progression est *décroissante*, c'est-à-dire que ses termes vont en diminuant. Une progression décroissante n'est d'ailleurs qu'une progression croissante renversée.

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.23.26.29...$$

est une progression croissante dont la raison est 3.

$$\div 29.26.23.20.17.14.11.8.5.2...$$

est une progression décroissante dont la raison est -3.

90. *Dans toute progression par différence, un terme de rang quelconque est égal au premier augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui qu'on considère.*

Soit la progression

$$\div a.b.c.d.e...h.k.l.$$

Désignons par r la raison de cette progression, et supposons qu'on se soit arrêté au $n^{ième}$ terme. On aura, par définition,

$$\begin{aligned} b &= a + r \\ c &= b + r = a + 2r \\ d &= c + r = a + 3r \\ e &= d + r = a + 4r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La loi de formation est évidente : *le multiplicateur de la raison est inférieur d'une unité au rang du terme.* l étant le $n^{ième}$ terme, on aura la formule générale

$$l = a + (n - 1)r.$$

On en déduit

$$a = l - (n - 1)r.$$

Comme on peut commencer la progression où l'on veut, cette dernière relation prouve *qu'un terme de rang quelconque est égal au dernier diminué d'autant de fois la raison qu'il y a de termes après celui qu'on considère.*

91. *La somme de deux termes également éloignés des extrêmes est égale à la somme des extrêmes.*

Considérons les deux termes T et T' : T a p termes avant lui, T' en a p après lui. On aura

$$\begin{aligned} T &= a + pr, \\ T' &= l - pr. \end{aligned}$$

ajoutons ces deux égalités membre à membre : il viendra

$$T + T' = a + l.$$

92. *Insérer n moyens arithmétiques entre deux nombres donnés, c'est former une progression dont les deux termes extrêmes soient les nombres donnés, et qui contienne en tout $n + 2$ termes.*

Désignons par a et l les termes extrêmes de la progression, c'est-à-dire les nombres donnés, par r la raison *inconnue* de la progression. On aura (90)

$$l = a + (n + 1) r,$$

d'où

$$r = \frac{l - a}{n + 1}.$$

La raison est donc égale à la différence des nombres donnés, divisée par le nombre des moyens à insérer plus 1.

Connaissant la raison et le premier terme, on formera immédiatement la progression demandée.

93. *Étant donnée une progression par différence, si l'on insère un même nombre de moyens arithmétiques entre ses termes consécutifs, on formera une nouvelle progression par différence qui aura pour raison le quotient de la raison de la première progression par le nombre des moyens insérés entre chacun de ses termes et le suivant, plus* 1.

Soit la progression

$$\div\, a.b.c.d.e \ldots h.k.l.$$

désignons par r sa raison ou la différence qui existe entre un terme quelconque et le précédent, par n le nombre des moyens insérés entre a et b, b et c, c et d,..., k et l. Les raisons des différentes progressions formées auront pour expressions :

$$\frac{b - a}{n + 1}, \quad \frac{c - b}{n + 1}, \quad \frac{d - c}{n + 1}, \ldots, \quad \frac{l - k}{n + 1}.$$

Elles seront donc toutes égales au quotient $\frac{r}{n + 1}$. De plus, la première progression finit où commence la seconde, la seconde finit où commence la troisième, etc. Toutes ces progressions forment donc une progression non interrompue ayant pour raison $\frac{r}{n + 1}$.

94. *La somme des termes d'une progression par différence est égale au produit de la demi-somme des extrêmes par le nombre des termes.*

Soit la progression

$$\div a.b.c.d.e \ldots h.k.l.$$

En désignant par S la somme des n premiers termes jusqu'à l, on aura

$$S = a + b + c + d + e + \ldots + h + k + l.$$

Si l'on renversait la progression, on aurait de même

$$S = l + k + h + \ldots + e + d + c + b + a.$$

Si l'on ajoute alors membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\begin{aligned} 2S = &(a + l) + (b + k) + (c + h) + \ldots \\ &+ (h + c) + (k + b) + (l + a). \end{aligned}$$

Les sommes partielles mises entre parenthèses dans le second membre de l'égalité résultante sont égales à la somme des extrêmes ou à la somme de deux termes également éloignés des extrêmes : toutes représentent donc la somme des extrêmes (91). Si la progression contient n termes, le second membre de l'égalité considérée renferme n sommes partielles. On peut, par conséquent, poser

$$2S = (a + l)\,n \quad \text{ou} \quad S = \frac{a + l}{2} \cdot n.$$

Quand on ne connaît que le premier terme a, la raison r et le nombre n des termes considérés, on peut remplacer dans cette relation l par sa valeur $a + (n - 1)\,r$. Elle devient alors

$$S = \frac{[2a + (n - 1)\,r]\,n}{2}.$$

Remarquons que, dans toute progression par différence, on a à tenir compte des cinq quantités a, l, r, n, S, et qu'on n'a que deux relations entre ces cinq quantités, savoir

$$l = a + (n - 1)\,r \quad \text{et} \quad S = \frac{(a + l)\,n}{2}.$$

95. *On demande la somme des n premiers nombres entiers :* c'est demander la somme des n premiers termes d'une progression par différence ayant 1 pour raison et pour premier terme. En appliquant la formule

$$S = \frac{[2a + (n - 1)\,r]\,n}{2},$$

on trouve

$$S = \frac{(n + 1)\,n}{2};$$

ce que donne immédiatement la formule

$$S = \frac{(a + l)n}{2},$$

en remarquant que l est égal à n.

On demande la somme des n premiers nombres impairs. La raison de la progression est ici égale à 2. Si l'on applique la formule

$$S = \frac{[2a + (n - 1)r]n}{2},$$

on trouve

$$S = \frac{[2 + (n - 1)2]n}{2} = \frac{(2 + 2n - 2)n}{2} = n^2.$$

Ainsi la somme des 100 premiers nombres impairs est égale à 100^2 ou 10000.

Des progressions par quotient.

96. On appelle *progression géométrique ou par quotient*, une suite de termes tels, que le *rapport* de chaque terme au précédent est une quantité constante : cette quantité constante est la *raison* de la progression.

Quand la raison est plus grande que 1, la progression est *croissante*, c'est-à-dire que ses termes vont en augmentant. Quand la raison est plus petite que 1, la progression est *décroissante*, c'est-à-dire que ses termes vont en diminuant. Une progression décroissante n'est d'ailleurs qu'une progression croissante renversée.

$$\because 3:6:12:24:48:96:192\ldots$$

est une progression croissante dont la raison est 2.

$$\because 192:96:48:24:12:6:3\ldots$$

est une progression décroissante dont la raison est $\frac{1}{2}$.

97. *Dans toute progression par quotient, un terme de rang quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent celui qu'on considère.*

Soit la progression

$$\because a:b:c:d:e:\ldots:h:k:l.$$

Désignons par q la raison de cette progression, et supposons

qu'on se soit arrêté au $n^{ième}$ terme. On aura, par définition :

$$\begin{aligned} b &= aq \\ c &= bq = aq^2 \\ d &= cq = aq^3 \\ e &= dq = aq^4 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La loi est évidente : l'*exposant de la raison est inférieur d'une unité au rang du terme.* l étant le $n^{ième}$ terme, on aura la formule générale

$$l = aq^{n-1}.$$

On en déduit

$$a = \frac{l}{q^{n-1}}.$$

Comme on peut commencer la progression où l'on veut, cette dernière relation prouve qu'*un terme de rang quelconque est égal au dernier divisé par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui suivent celui qu'on considère.*

D'après ce qui précède, on peut écrire la progression donnée sous la forme suivante,

$$\div\!\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \ldots : aq^{n-3} : aq^{n-2} : aq^{n-1}.$$

Nous avons démontré en Arithmétique (**189**, note) que les puissances successives d'une quantité plus grande que 1 pouvaient croître au delà de toute limite donnée, et que les puissances successives d'une quantité plus petite que 1 pouvaient décroître et tomber au-dessous de toute limite donnée.

Si la progression est croissante et si on la suppose prolongée indéfiniment, aq^{n-1} finira donc par surpasser toute quantité donnée. Si la progression est décroissante et si on la suppose prolongée indéfiniment, aq^{n-1} finira donc au contraire par tomber au-dessous de toute quantité donnée.

98. *Insérer n moyens par quotient entre deux nombres donnés, c'est former une progression dont les deux termes extrêmes soient les nombres donnés, et qui contienne en tout* $n+2$ *termes.*

Désignons par a et l les termes extrêmes de la progression, c'est-à-dire les nombres donnés, par q la raison *inconnue* de la progression. On aura (**97**)

$$l = aq^{n+1},$$

d'où

$$q^{n+1} = \frac{l}{a} \quad \text{et} \quad q = \sqrt[n+1]{\frac{l}{a}}.$$

La raison est donc égale à une racine du quotient des nombres donnés, marquée par le nombre des moyens à insérer plus 1.

Connaissant la raison et le premier terme, on formera immédiatement la progression demandée.

99. *Étant donnée une progression par quotient, si l'on insère un même nombre de moyens entre ses termes consécutifs, on formera une nouvelle progression par quotient qui aura pour raison une racine de la raison de la première progression, marquée par le nombre des moyens insérés entre chacun de ses termes et le suivant, plus* 1

Soit la progression $\div\!\!\div\, a : b : c : d : e : \ldots : h : k : l$. Désignons par q sa raison ou le quotient d'un terme quelconque par le précédent, par n le nombre des moyens insérés entre a et b, b et c, c et $d, \ldots$, k et l. Les raisons des différentes progressions formées auront pour expressions :

$$\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\quad \sqrt[n+1]{\frac{c}{b}},\quad \sqrt[n+1]{\frac{d}{c}},\ldots,\quad \sqrt[n+1]{\frac{l}{k}}.$$

Elles seront donc toutes égales à $\sqrt[n+1]{q}$. De plus, la première progression finit où commence la seconde, la seconde finit où commence la troisième, etc. Toutes ces progressions forment donc une progression non interrompue ayant pour raison $\sqrt[n+1]{q}$.

100. *La somme des termes d'une progression par quotient est égale à la différence qui existe entre le produit du dernier terme par la raison et le premier terme, divisée par l'excès de la raison sur l'unité.*

Soit la progression $\div\!\!\div\, a : b : c : d : e : \ldots : h : k : l$.

En désignant par S la somme des n premiers termes jusqu'à l, on aura

$$S = a + b + c + d + e + \ldots + h + k + l.$$

Multiplions par la raison q les deux membres de cette égalité et remarquons que $aq = b$, $bq = c$, $cq = d, \ldots, kq = l$. Il viendra alors

$$Sq = b + c + d + e + f + \ldots + k + l + lq.$$

Si nous supposons la progression croissante, nous retrancherons membre à membre la première égalité de la seconde, et nous aurons :

$$Sq - S = lq - a \quad \text{ou} \quad S(q-1) = lq - a,$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Si la progression était décroissante, on retrancherait la seconde égalité de la première, et l'on trouverait

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

Mais on peut employer indifféremment la première ou la seconde formule, que la progression soit croissante ou décroissante, parce qu'on ne change pas un quotient en changeant à la fois le signe du dividende et celui du diviseur (29).

Reprenons la formule $S = \frac{lq - a}{q - 1}$. On peut y remplacer l par aq^{n-1}. Il vient alors

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}.$$

Dans le cas de la progression décroissante, on aurait

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Il serait facile de trouver directement cette formule, en remarquant que la progression peut s'écrire

$$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \ldots aq^{n-2} : aq^{n-1}.$$

On a alors

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1},$$

d'où

$$S = a\,(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}).$$

Mais la quantité renfermée entre parenthèses représente le quotient de $1 - q^n$ par $1 - q$ (38). Par suite,

$$S = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

101. *La somme des termes d'une progression décroissante indéfiniment prolongée, a pour limite le quotient du premier terme par l'excès de l'unité sur la raison.*

Reprenons la formule

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

On peut l'écrire sous la forme

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^n.$$

$\frac{a}{1 - q}$ est une quantité fixe ; q étant plus petit que 1, q^n devient de plus en plus petit à mesure que n augmente ; par consé-

quent, le produit $\frac{a}{1-q} \cdot q^n$ devient lui-même de plus en plus petit. La somme des termes de la progression, à mesure qu'on en considère un plus grand nombre, s'approche donc constamment de la quantité fixe $\frac{a}{1-q}$; cette quantité représente donc la limite de la somme des termes de la progression, lorsqu'on suppose cette progression indéfiniment prolongée.

On peut vérifier à postériori cette valeur $S = \frac{a}{1-q}$, en effectuant la division de a par $1-q$. On retrouve pour quotient illimité la progression

$$\div\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \ldots : aq^{n-2} : aq^{n-1} \ldots$$

102. *On demande la somme des termes de la progression indéfiniment décroissante* $\div\div\, 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} \ldots$ On aura

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

On demande la valeur d'une fraction décimale périodique simple 0,365 365 365 365....

Cette fraction périodique peut s'écrire sous la forme

$$\div\div\, \frac{365}{1000} : \frac{365}{1000^2} : \frac{365}{1000^3} : \frac{365}{1000^4} \ldots$$

Elle représente donc la somme des termes d'une progression décroissante indéfiniment prolongée, qui aurait $\frac{365}{1000}$ pour premier terme et $\frac{1}{1000}$ pour raison. En appelant S la valeur cherchée, on aura

$$S = \frac{\frac{365}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{\frac{365}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{365}{999},$$

résultat qui concorde avec celui trouvé en Arithmétique.

103. On peut remarquer que, dans toute progression par quotient, on a à tenir compte des cinq quantités a, l, q, n, S, et qu'il n'existe que deux relations générales entre ces cinq quantités, savoir

$$l = aq^{n-1} \quad \text{et} \quad S = \frac{lq-a}{q-1}.$$

104. On entend par *série* une suite indéfinie de termes qui se déduisent les uns des autres d'après une loi déterminée. La série est *convergente* lorsque la somme de ses termes, à mesure qu'on en considère davantage, tend vers une limite fixe; elle est *divergente* dans le cas contraire. Une progression par quotient indéfiniment décroissante est une série convergente. Une progression par quotient indéfiniment croissante est au contraire divergente, car ses termes pouvant croître au delà de toute quantité donnée, il en est de même de leur somme.

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Vérifier l'égalité

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$
$$=(ab'-ba')^2+(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2.$$

Il suffira d'effectuer les calculs indiqués dans le premier membre et de grouper les termes obtenus de manière à former le second membre.

II. Effectuer le produit

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

En rapprochant le premier et le quatrième facteur, le second et le troisième facteur, et en se reportant au théorème démontré (**24**, II), on arrivera rapidement au produit

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

III. Quelle valeur doit-on attribuer au coefficient indéterminé k pour que le polynôme

$$a^4+ka^3b-2a^2b^2+3ab^3-b^4$$

soit divisible par a^2-ab+b^2?

On poursuivra la division jusqu'au reste du premier degré en a, et, en écrivant que ce reste est nul indépendamment de toute valeur attribuée à a ou à b, on trouvera la valeur demandée, qui est $k=1$.

IV. Chercher si le polynôme

$$x^3-10x^2+23x-14$$

est divisible par le produit $(x-1)(x-2)$.

Déterminer le quotient (*voir* 37).

V. Vérifier que l'expression

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{(y^2-a^2)(a^2-x^2)}{a^2(b^2-a^2)}+\frac{(b^2-y^2)(b^2-x^2)}{b^2(b^2-a^2)}$$

est égale à l'unité.

VI. Réduire la fraction $\frac{x^2-6x+5}{x^3-31x+30}$ à sa plus simple expression.

On y arrivera immédiatement en cherchant quelles valeurs prennent les deux termes du rapport donné, lorsqu'on suppose $x=1$. On doit trouver $\frac{1}{x+6}$.

VII. Vérifier l'égalité

$$\frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

VIII. L'expérience prouve que, lorsqu'une tige verticale fixée à l'une de ses extrémités, est sollicitée par un certain poids qui agit dans le sens de l'extension de la tige, la résistance variable opposée par la tige est proportionnelle à sa section et, en outre, au rapport de l'allongement qu'elle éprouve à sa longueur primitive. Écrire l'expression algébrique de cette résistance F pour une section A, une longueur primitive L et un allongement variable x.

IX. Sur un chemin de fer, la traction de la locomotive doit vaincre le frottement des roues sur les rails et la résistance de l'air. Le frottement, proportionnel au poids du convoi, est indépendant de la vitesse; la résistance de l'air, indépendante du poids du convoi, est proportionnelle au carré de la vitesse. Trouver une formule qui donne la traction pour un poids et une vitesse quelconques, sachant que la valeur du frottement pour un poids P est F, et que la résistance de l'air pour une vitesse V est R.

X. Chercher à quelle condition doivent satisfaire les coefficients du polynôme

$$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 - 2p(m+1)x + (m+1)^2$$

pour que ce polynôme soit un carré parfait (*voir* 68).

On doit trouver

$$q - \frac{p}{4} = m + 1.$$

XI. Chercher à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients a, b, c, d, e, du polynôme général

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

pour que ce polynôme soit un carré parfait.

On doit trouver

$$d = \frac{b(4ac - b^2)}{8a^2} \quad \text{et} \quad e = \frac{(4ac - b^2)^2}{64a^3}.$$

D'après cela, quelles valeurs doit-on donner à d et à e pour que le polynôme

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - dx + e$$

soit un carré parfait?

Vérifier les valeurs obtenues.

XII. Partager 525 kilomètres en parties proportionnelles aux temps $3^h 25^m$, $4^h 15^m$, $2^h 40^m$.

XIII. On suppose l'égalité

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

et l'on demande si a^3 est plus grand ou plus petit que $b^3 + c^3$.

Pour résoudre la question, on peut comparer $(a^3)^2$ avec $(b^3 + c^3)^2$, en remarquant que $(a^3)^2 = (a^2)^3$.

XIV. Réduire l'expression $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

XV. Prouver qu'on a

$$\left[\frac{a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(a+b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On élèvera les deux membres au carré.

XVI. Diviser $a^{\frac{m}{p}}-b^{\frac{m}{p}}$ par $a^{\frac{1}{p}}-b^{\frac{1}{p}}$.
Diviser $a^{-m}-b^{-m}$ par $a^{-1}-b^{-1}$.

Prouver que la règle démontrée (38) s'étend au cas des exposants fractionnaires et à celui des exposants négatifs.

XVII. Effectuer le produit

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}\right).$$

En rapprochant le premier et le quatrième facteur, le second et le troisième facteur, on trouve facilement le résultat demandé

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc.$$

XVIII. Simplifier l'expression

$$5\sqrt{98-7\sqrt{147}}-\sqrt{162-27\sqrt{27}}$$

et prouver qu'elle est égale à $26\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

XIX. Prouver que, si dans une suite de nombres, chacun est la demi-somme de ceux qui le comprennent, cette suite est une progression par différence; et que si chacun est moyen proportionnel entre les nombres qui le comprennent, la suite donnée est une progression par quotient.

XX. Trouver la limite de la somme des fractions

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\frac{6}{64}+\frac{7}{128}+\ldots,$$

dont les numérateurs forment une progression par différence, et les dénominateurs une progression par quotient.

La limite cherchée est 2, somme des termes de la progression indéfinie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots.$$

Il faut décomposer la somme donnée en une série de progressions partielles, dont les sommes partielles constituent les termes de la progression indiquée.

XXI. Deux courriers A et B suivent une même route. A est en arrière de 1500 mètres; mais il va deux fois plus vite que B. Prouver que pour rencontrer B, A doit parcourir $1500^{\text{M}}+\frac{1500^{\text{M}}}{2}+\frac{1500^{\text{M}}}{4}+\ldots$, et calculer le chemin correspondant.

XXII. La production du fer en France a été en 1826 de 1 156 850 quintaux métriques, et, en 1847, de 3 601 901 quintaux métriques; calculer ce qu'elle devrait être en 1859 si l'accroissement annuel de la production était constant.

LIVRE DEUXIÈME.

LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

Définitions.

105. Nous avons déjà dit (**11**), à un point de vue très-général, ce qu'on devait entendre par équation. Il faut préciser maintenant notre définition et considérer tous les cas qui peuvent se présenter.

Soit l'égalité $3x - 2 = x + 5$, où x représente une quantité inconnue qui doit précisément être déterminée, de manière à remplir cette condition d'égalité entre $3x - 2$ d'une part et $x + 5$ de l'autre. Il est évident à priori que toutes les valeurs ne pourront pas être mises à la place de x, qu'il n'y en aura qu'un nombre limité d'admissibles : dans le cas examiné, ce nombre se réduira même à une seule valeur, comme nous le verrons bientôt.

Si l'on passe à l'égalité $x^2 - 3x - 1 = 7x - 3x^2 + 5$, on pourra répéter la même remarque, et elle s'étendra à toutes les égalités qui ne renfermeront qu'une inconnue : le nombre des valeurs admissibles pourra augmenter, il sera toujours limité.

Soit la fonction $5x - 3y = 7$, déjà indiquée (**11**), où x et y représentent deux inconnues liées par la relation donnée. Cette égalité pourra, au contraire, être vérifiée ou *satisfaite* par un nombre illimité de valeurs de x et de y; ces valeurs devront seulement se correspondre de manière que x soit toujours égale à $\frac{3y+7}{5}$. On pourra remplacer l'une des inconnues par une valeur prise au hasard, mais seulement l'une d'elles, et l'autre sera immédiatement déterminée par le choix fait pour la première. Les valeurs qui satisfont à l'égalité proposée ou qui la vérifient, seront donc en nombre quelconque, mais ne seront pas quelconques.

Si l'on joint à l'égalité $5x - 3y = 7$ une autre égalité

$7x+4y=18$, et si la question proposée exige que les inconnues x et y vérifient ces deux égalités *à la fois*, il est évident à priori que toutes les valeurs possibles, soit pour x, soit pour y, ne pourront convenir. Comme on déduit des égalités données

$$x=\frac{3y+7}{5} \quad \text{et} \quad x=\frac{18-4y}{7},$$

si l'on remplace y par une certaine valeur dans les deux égalités, il faudra, pour qu'elle soit admissible, qu'on ait aussi pour x une même valeur, c'est-à-dire il faudra qu'on ait

$$\frac{3y+7}{5}=\frac{18-4y}{7};$$

ce qui prouve immédiatement que la valeur de y devant vérifier cette nouvelle égalité, ne pourra plus être quelconque. Elle sera même unique et, par suite, aussi celle de x.

Si l'on a deux égalités $x^2-y^2=7$, $xy=12$, le nombre des valeurs de x et de y qui vérifieront à la fois ces deux égalités, pourra augmenter; mais il sera toujours limité. Ce que nous venons de dire par rapport à deux inconnues, pourra être répété pour trois, pour quatre ,. . . , pour un nombre quelconque d'inconnues.

En résumé, *une équation à une inconnue est une égalité qui ne se vérifie que pour certaines valeurs particulières de l'inconnue qui y entre.*

Si l'égalité renferme plusieurs inconnues, et si la question proposée ne conduit qu'à cette égalité entre les inconnues cherchées, on peut dire qu'elle représente encore une équation, mais une équation *indéterminée*, susceptible d'être vérifiée par un nombre illimité de valeurs correspondantes des inconnues, mais non par des valeurs tout à fait arbitraires.

Si la question à résoudre conduit à autant d'égalités distinctes qu'elle renferme d'inconnues, ces égalités forment ce qu'on appelle un système d'équations; c'est-à-dire que les valeurs des inconnues qui vérifient les égalités données se partagent en groupes distincts, lesquels conviennent à la fois à toutes les équations, et ces groupes distincts sont en nombre limité.

Si la question à résoudre conduit à moins d'égalités qu'elle ne renferme d'inconnues, on a un système d'équations *indéterminées*, sur lequel on fera une remarque analogue à celle déjà indiquée dans le cas d'une seule équation indéterminée.

106. Deux systèmes d'équations sont *équivalents*, lorsqu'ils admettent les mêmes solutions pour les inconnues qui y entrent. Lorsqu'il ne s'agit que de trouver les valeurs des incon-

mues, on peut remplacer l'un par l'autre deux systèmes équivalents.

Les solutions cherchées, c'est-à-dire les valeurs qui, mises à la place des inconnues, vérifient ou satisfont les équations proposées, s'appellent leurs *racines*.

107. Lorsque les deux membres d'une égalité sont identiques, elle prend le nom d'*identité*.

On appelle encore identité une *équation* qui peut être satisfaite par un nombre quelconque de valeurs de l'inconnue. Ce n'est plus alors une équation : c'est la représentation symbolique d'une règle générale de calcul algébrique. Ainsi

$$(a-x)^2 = a^2 - 2ax + x^2, \quad 0.x = 0.$$

Résoudre une équation ou un système d'équations, c'est chercher les *racines* correspondantes. Pour que les racines soient exactes, elles doivent transformer l'équation ou les équations proposées en égalités proprement dites; puis, tous les calculs étant effectués, en identités.

108. On entend par *degré* d'une équation, la plus grande somme des exposants des inconnues dans un même terme.

L'équation $5x - 7 = 24 + 2x$ est une équation du *premier degré à une inconnue*.

L'équation $15y - 6x = 9$ est une équation du *premier degré à deux inconnues*.

Les équations $8x^2 - 3x = 2$ et $3x^2y - y^3 = 2xy + 5x$ sont : la première une équation du *second degré à une inconnue*, la seconde une équation du *troisième degré à deux inconnues*.

On a classé les équations d'après leur degré, c'est-à-dire d'après la difficulté même de leur résolution.

Principes généraux applicables à la transformation des équations.

109. I. *On ne change ni la valeur ni le nombre des racines d'une équation, en augmentant ou en diminuant ses deux membres d'une même quantité.*

Soit l'équation $A = B$. m étant une quantité quelconque, je dis que les deux équations

$$A = B,$$
$$A + m = B + m,$$

sont équivalentes.

Les racines de la première équation, mises à la place des inconnues qu'elle renferme, donnent $A = B$. Si à ces deux quantités égales, j'ajoute algébriquement (14) une même quantité m, j'obtiendrai deux sommes égales. Les mêmes valeurs des inconnues donnent donc aussi $A + m = B + m$.

Réciproquement, les racines de l'équation $A+m=B+m$ rendent ses deux membres égaux, lorsqu'on les substitue à la place des inconnues qu'elle renferme. Si des deux quantités égales obtenues je retranche algébriquement (15) une même quantité m, j'obtiendrai deux restes égaux. Les valeurs des inconnues qui donnent $A+m=B+m$ donnent donc aussi à leur tour $A=B$, et les deux équations considérées sont bien équivalentes (106).

Il suit du principe démontré, qu'*on peut transporter un terme d'une équation, d'un membre dans l'autre, pourvu qu'on change son signe.*

Soit l'équation

$$3x-8=x+9.$$

On peut ajouter $-x$ aux deux membres de cette équation. On aura

$$3x-x-8=9.$$

Le terme x du second membre passe ainsi dans le premier, mais avec un signe contraire.

110. II. *On ne change ni la valeur ni le nombre des racines d'une équation, en multipliant ou en divisant ses deux membres par une même quantité.*

Soit l'équation $A=B$. m étant une quantité quelconque *différente de zéro,* je dis que les deux équations

$$A=B,$$
$$Am=Bm,$$

sont équivalentes.

Les racines de la première équation, mises à la place des inconnues qu'elle renferme, rendent le facteur A égal au facteur B. Si je multiplie ces deux facteurs égaux par un même facteur m, j'obtiendrai deux produits égaux. Les mêmes valeurs des inconnues rendent donc aussi le produit Am égal au produit Bm.

Réciproquement, les racines de l'équation $Am=Bm$ rendent ses deux membres égaux, lorsqu'on les substitue à la place des inconnues qu'elle renferme. Si je divise les produits égaux obtenus par une même quantité m différente de zéro, j'obtiendrai des quotients égaux. Les valeurs des inconnues qui rendent Am égal à Bm, rendent donc aussi A égal à B, et les deux équations considérées sont bien équivalentes.

On doit faire la restriction indiquée, c'est-à-dire supposer le multiplicateur m différent de zéro, car la multiplication des deux membres d'une équation par zéro la transforme en une identité satisfaite par toutes les valeurs possibles mises à la place des inconnues (107).

Il en résulte que le multiplicateur employé ne doit pas en général renfermer les inconnues. Prenons un exemple très-simple. Soit l'équation.

$$2x+3=x+9.$$

Multiplions ses deux membres par le facteur $x-1$ qui devient nul pour $x=1$; nous aurons

$$(2x+3)(x-1)=(x+9)(x-1).$$

La première équation est évidemment satisfaite par $x=6$; la seconde l'est à la fois par $x=6$ et par $x=1$. On ne peut donc plus dire que ces deux équations sont équivalentes.

En général, lorsqu'on multiplie les deux membres d'une équation par un facteur contenant les inconnues, on augmente le nombre des racines de l'équation, et les solutions étrangères introduites sont précisément celles qui annulent ce facteur. Je suppose ici que l'équation considérée ne renferme pas les inconnues en dénominateur.

Puisqu'on peut multiplier les deux membres d'une équation par une quantité quelconque, on peut aussi les diviser par une quantité quelconque. En effet, la division par un nombre p revient à la multiplication par $\frac{1}{p}$.

Il ne faut pas en général que le diviseur employé renferme les inconnues. Reprenons l'exemple ci-dessus, et soit l'équation

$$(2x+3)(x-1)=(x+9)(x-1).$$

Cette équation admet les racines $x=6$ et $x=1$; si l'on divise ses deux membres par le facteur $x-1$, l'équation obtenue

$$2x+3=x+9$$

n'admet plus que la racine $x=6$.

En divisant les deux membres d'une équation par un facteur contenant les inconnues, on diminue donc le nombre des racines de l'équation, et les solutions supprimées sont précisément celles qui annulent ce facteur. Si l'on a intérêt à le faire disparaître, il faut donc mettre avec soin de côté les racines qui lui correspondent, afin d'en tenir compte une fois la question proposée entièrement résolue.

111. *Le principe démontré permet de faire disparaître tous les dénominateurs d'une équation.*

On cherchera le plus petit multiple commun de tous ces dénominateurs, on multipliera les deux membres de l'équation par le nombre obtenu, et tous ses termes deviendront évidemment entiers.

Je suppose ici que les inconnues n'entrent dans aucun dénominateur, j'examinerai plus loin ce cas particulier.

Soit l'équation

$$\frac{x}{36} - 5 = \frac{3}{14} - \frac{7x}{12}.$$

Le plus petit multiple commun des dénominateurs 36, 14 et 12 est 252. Je multiplie tous les termes de l'équation par 252, en remarquant que pour multiplier, par exemple, $\frac{x}{36}$ par $252 = 36 \times 7$, il suffit de supprimer le dénominateur 36 et de multiplier le numérateur x par 7, quotient de 252 par 36. L'entier -5 devra être multiplié par 252. On supprimera le dénominateur 14 du terme $\frac{3}{14}$, et l'on multipliera son numérateur 3 par 18, quotient de 252 par 14. Il faudra de même multiplier $-7x$ par 21, quotient de 252 par 12, et supprimer le dénominateur 12. L'équation, débarrassée de ses dénominateurs, deviendra

$$7x - 1260 = 54 - 147x.$$

La règle suivie peut être résumée ainsi : *Réduire tous les termes de l'équation au plus petit dénominateur commun, en donnant le dénominatenr* 1 *aux termes entiers, et supprimer ensuite ce plus petit dénominateur commun.*

Le principe démontré permet aussi de *simplifier une équation, en supprimant les facteurs communs que ses deux membres peuvent présenter.*

Si l'on a l'équation

$$81a^3bx + 27a^5b^2 = 54a^2b^3 - 63a^2x,$$

on pourra diviser ses deux membres par le facteur $9a^2$ commun à tous ses termes, et elle deviendra

$$9abx + 3a^3b^2 = 6b^3 - 7x.$$

112. III. *Lorsqu'on élève à une même puissance les deux membres d'une équation, on augmente en général le nombre des racines de l'équation.*

Soit l'équation

$$A = B.$$

En élevant les deux membres à la puissance m, on obtient l'équation

$$A^m = B^m.$$

On peut écrire les deux équations considérées sous la forme

$$A - B = 0,$$
$$A^m - B^m = 0.$$

Nous savons que la quantité $A^m - B^m$ est toujours divisible par la quantité $A - B$ (38). Désignons par Q le quotient de cette division. L'équation $A^m - B^m = 0$ pourra s'écrire

$$(A - B)\,Q = 0.$$

Pour qu'un produit soit nul, il suffit que l'un de ses facteurs soit nul. On satisfera donc à l'équation en posant séparément

$$A - B = 0,$$
$$Q = 0,$$

et l'on voit alors qu'elle admet non-seulement les racines de l'équation $A - B = 0$, mais encore celles de l'équation $Q = 0$.

Si l'on élève, par exemple, l'équation $A = B$ au carré, il vient

$$A^2 = B^2,$$

d'où

$$A^2 - B^2 = 0.$$

Le premier membre étant la différence de deux carrés, je le transforme en un produit de deux facteurs (24, II), et j'obtiens

$$(A + B)\,(A - B) = 0.$$

Le facteur $A - B$ égalé à zéro reproduit l'équation primitive $A = B$, le facteur $A + B$ égalé à zéro fournit les racines ajoutées qui correspondent à l'équation $A = -B$.

Résolution des équations du premier degré à une seule inconnue.

113. Les principes énoncés jusqu'à présent suffisent pour résoudre une équation quelconque du premier degré à une inconnue.

Soit l'équation

$$\frac{3x}{8} - 2 + \frac{x}{2} = \frac{5x}{14} + \frac{3}{7}.$$

On commencera par chasser les dénominateurs, ce qui se fera en réduisant tous les termes au plus petit dénominateur commun 56, et en multipliant les deux membres de l'équation par 56. Il viendra.

$$21x - 112 + 28x = 20x + 24.$$

On réunira alors tous les termes qui contiennent l'inconnue dans le premier membre, et tous ceux qui ne contiennent pas l'inconnue dans le second membre, en les affectant des signes convenables. On aura ainsi

$$21x + 28x - 20x = 112 + 24.$$

En effectuant les opérations indiquées, on trouvera

$$29x = 136.$$

En divisant les deux membres de cette dernière équation par 29, la racine cherchée sera

$$x = \frac{136}{29} = 4 + \frac{20}{29}.$$

En effet, toutes les équations considérées successivement sont équivalentes à la première, et la dernière $x = 4 + \frac{20}{29}$ ne peut être satisfaite que si l'on remplace x par la valeur écrite dans le second membre.

La règle à suivre peut donc être formulée ainsi : *Pour résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue, on fait disparaître les dénominateurs de l'équation; on transpose dans un membre tous les termes qui renferment l'inconnue et dans l'autre tous ceux qui ne renferment pas l'inconnue. On effectue les opérations indiquées dans les deux membres, et l'on divise celui qui ne contient pas l'inconnue par le coefficient de cette inconnue.*

Pour être sûr que la racine obtenue est exacte, il faut *vérifier* cette racine, c'est-à-dire la substituer à la place de l'inconnue dans l'équation donnée : on doit alors, tout calcul fait, arriver à une identité.

On aura

$$\frac{3.136}{8.29} - 2 + \frac{136}{2.29} = \frac{5.136}{14.29} + \frac{3}{7}$$

ou

$$\frac{51}{29} - 2 + \frac{68}{29} = \frac{427}{7.29}.$$

On en déduit

$$\frac{61}{29} = \frac{427}{7.29} \quad \text{et} \quad \frac{427}{29.7} = \frac{427}{7.29}.$$

114. Lorsque l'équation proposée ne renferme qu'une inconnue élevée à la même puissance dans les termes qui la contiennent, on peut la résoudre en suivant une marche identique à celle que nous venons d'indiquer. Soit l'équation

$$9x^3 - 20 = 44 + x^3.$$

On en déduira

$$9x^3 - x^3 = 20 + 44,$$

d'où

$$8x^3 = 64 \quad \text{et} \quad x^3 = 8.$$

Extrayant alors la racine cubique des deux membres, on trouvera

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

115. Proposons-nous, comme exercice, de résoudre l'équation

$$\frac{2x+7b}{2a+b}-1=\frac{x+a}{2a-b}.$$

Nous multiplierons les deux membres par le produit des dénominateurs

$$(2a+b)(2a-b)=4a^2-b^2,$$

et nous aurons

$$(2x+7b)(2a-b)-4a^2+b^2=(x+a)(2a+b),$$

d'où

$$4ax+14ab-2bx-7b^2-4a^2+b^2=2ax+2a^2+bx+ab.$$

En simplifiant, il vient

$$2ax-3bx=6a^2-13ab+6b^2,$$

c'est-à-dire, en mettant x en facteur commun dans le premier membre,

$$(2a-3b)x=6a^2-13ab+6b^2$$

et

$$x=\frac{6a^2-13ab+6b^2}{2a-3b}.$$

Comme $6a^2$ est divisible par $2a$ et $6b^2$ par $-3b$, on est conduit à essayer la division qui réussit et donne pour quotient $3a-2b$. On a donc enfin

$$x=3a-2b.$$

Vérifions cette valeur en la substituant à la place de x dans l'équation donnée. Nous trouverons

$$\frac{6a-4b+7b}{2a+b}-1=\frac{3a-2b+a}{2a-b}$$

ou

$$\frac{6a+3b}{2a+b}-1=\frac{4a-2b}{2a-b},$$

c'est-à-dire

$$\frac{3(2a+b)}{2a+b}-1=\frac{2(2a-b)}{2a-b},$$

égalité évidente.

116. Soit encore l'équation

$$x^2-4=3x+6.$$

On aperçoit immédiatement le facteur $x+2$ commun aux deux membres de cette équation, car on peut l'écrire sous la forme

$$(x+2)(x-2)=3(x+2).$$

Si l'on supprime ce facteur commun, il reste

$$x - 2 = 3,$$

d'où

$$x = 5.$$

Mais comme le facteur supprimé renferme l'inconnue, on doit en outre tenir compte des racines qu'on obtient en l'égalant à zéro. L'équation proposée a donc pour racines

$$x = 5 \quad \text{et} \quad x = -2. \qquad \text{(voir } \mathbf{110}\text{).}$$

117. Soit encore l'équation

$$\sqrt{7 + x} = 3 - \sqrt{x}.$$

Élevons les deux membres de cette équation au carré, afin de faire en partie disparaître les radicaux qu'elle renferme. Il viendra

$$7 + x = 9 - 6\sqrt{x} + x,$$

d'où

$$6\sqrt{x} = 2 \quad \text{et} \quad 3\sqrt{x} = 1.$$

En élevant encore une fois au carré, nous aurons

$$9x = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{9}.$$

La valeur $x = \frac{1}{9}$ est la seule qui puisse vérifier l'équation donnée, mais il n'est pas sûr qu'elle la vérifie, parce qu'on a introduit des solutions étrangères en élevant deux fois de suite au carré (**112**). Il faut donc de toute nécessité contrôler la valeur $x = \frac{1}{9}$; en la substituant dans l'équation proposée, on trouve

$$\sqrt{7 + \frac{1}{9}} = 3 - \sqrt{\frac{1}{9}},$$

d'où

$$\frac{\sqrt{64}}{3} = 3 - \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{8}{3} = 3 - \frac{1}{3},$$

égalité évidente.

Problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

118. *Chercher la formule générale des intérêts simples.* — Désignons par I l'intérêt rapporté par le capital C placé pendant m mois, au taux de t pour 100. Nous savons (*Arith.*, **262**) que

l'intérêt est proportionnel au capital et au temps : il sera donc proportionnel à leur produit (58). On pourra donc poser

$$I = K.Cm.$$

K sera l'intérêt rapporté par 1 franc placé pendant 1 mois (58, note), c'est-à-dire $\frac{t}{100 \times 12}$. La formule générale des intérêts simples sera par suite

$$I = \frac{Ctm}{1200}.$$

Cette formule renferme quatre quantités I, C, t, m. Elle permettra de déterminer l'une quelconque de ces quatre quantités, les trois autres étant données. On en déduira facilement

$$C = \frac{1200I}{tm}, \quad m = \frac{1200I}{Ct}, \quad t = \frac{1200I}{Cm}.$$

Si l'on prenait pour unité de temps l'année, et si l'on désignait par A un nombre quelconque d'années, la formule serait

$$I = \frac{CtA}{100}.$$

Si l'on prenait le jour pour unité de temps, et si l'on désignait par j un nombre quelconque de jours, cette formule deviendrait

$$I = \frac{Ctj}{36000}.$$

119. *Chercher la formule générale de la valeur actuelle d'un billet et celle de l'escompte en dedans* (*Arith.*, 268).

Soit à escompter un billet C, payable dans un nombre de mois représenté par m, le taux étant toujours t pour 100.

Représentons par x la valeur actuelle du billet, c'est-à-dire ce que doit payer le banquier au possesseur du billet. Nous savons que la valeur actuelle augmentée de ses intérêts doit reproduire le montant du billet. En appliquant la formule précédente, on aura donc

$$x + \frac{xtm}{1200} = C,$$

d'où

$$x(1200 + tm) = 1200\,C \quad \text{et} \quad x = \frac{1200\,C}{1200 + tm}.$$

On peut diviser la valeur de x haut et bas par 12 : elle prendra la forme

$$x = \frac{100\,C}{100 + \frac{tm}{12}}.$$

$\frac{tm}{12}$ représente l'intérêt rapporté par 100 francs placés dans les mêmes conditions que la valeur actuelle du billet. Désignons cet intérêt par t', et il viendra

$$x = \frac{100\,C}{100 + t'}.$$

La différence entre le montant du billet et sa valeur actuelle représentant l'escompte en dedans, on aura pour cet escompte E la formule générale

$$E = C - x = C - \frac{100\,C}{100 + t'} = \frac{100\,C + C\,t' - 100\,C}{100 + t'},$$

c'est-à-dire

$$E = \frac{C\,t'}{100 + t'}.$$

Comme application de ces formules, *supposons qu'on doive aujourd'hui une somme* A, *et qu'on veuille s'acquitter au moyen de trois billets égaux payables : le premier dans m mois, le second dans n mois, le troisième dans p mois.* Soit X le montant inconnu de chacun de ces billets : on aura pour la valeur actuelle du premier

$$\frac{100\,X}{100 + t'},$$

en désignant par t' la quantité $\frac{tm}{12}$. En désignant de même par t'' et t''' les quantités $\frac{tn}{12}$ et $\frac{tp}{12}$, les valeurs actuelles des deux autres billets seront représentées par

$$\frac{100\,X}{100 + t''} \quad \text{et} \quad \frac{100\,X}{100 + t'''}.$$

La somme des valeurs actuelles des trois billets doit reproduire la dette actuelle A. L'équation du problème sera donc

$$\frac{100\,X}{100 + t'} + \frac{100\,X}{100 + t''} + \frac{100\,X}{100 + t'''} = A,$$

d'où

$$X = \frac{A}{\frac{100}{100 + t'} + \frac{100}{100 + t''} + \frac{100}{100 + t'''}}.$$

On peut remarquer que les fractions dont la somme forme le dénominateur de l'expression de X, représentent les valeurs actuelles des billets de 1 franc placés dans les conditions des billets qu'on veut souscrire. La règle générale à suivre pour tous les problèmes analogues est donc facile à formuler.

120. *Une montre marque midi, c'est-à-dire que ses deux aiguilles sont l'une sur l'autre. On demande à quelle heure la nouvelle superposition des aiguilles aura lieu.*

Représentons par x le chemin parcouru par la grande aiguille, depuis midi jusqu'à la rencontre cherchée, *ce chemin étant exprimé en divisions du cercle gradué de la montre.* La petite aiguille parcourant 5 divisions en une heure, tandis que a grande aiguille en parcourt 60, la petite aiguille va 12 fois moins vite que la grande. Pendant que la grande aiguille décrira l'arc x, la petite aiguille parcourra donc un arc égal à $\frac{x}{12}$. Il est évident d'ailleurs que la grande aiguille dépassant d'abord la petite aiguille pour venir la recouvrir de nouveau, décrit 60 divisions de plus. On aura, par conséquent, l'équation

$$x - \frac{x}{12} = 60 \quad \text{ou} \quad \frac{11x}{12} = 60$$

On en déduit

$$x = \frac{60 \times 12}{11} = 60 + \frac{60}{11} = 65 + \frac{5}{11}.$$

Les divisions de la montre représentant des minutes, cette valeur de x indique que la rencontre aura lieu à $1^h\ 5^m\ \frac{5}{11}$ ou à $1^h\ 5^m\ 27^s\ \frac{3}{11}$.

Le même intervalle de temps séparera les rencontres successives.

En 12 heures, de midi à minuit, il n'y aura évidemment que 11 rencontres, en ne comptant pas celle de midi et en comptant celle de minuit : en effet, il n'y a pas de rencontre entre midi et 1 heure.

121. *La distance entre Paris et Rouen est égale à* 137 kilom. *Le quintal métrique de charbon coute* $4^{fr},25$ *à Paris et* $4^{fr},75$ *à Rouen. Les frais de transport par le chemin de fer étant évalués à* $0^{fr},09$ *par tonne transportée et par kilomètre parcouru, on demande de déterminer le point du chemin pour lequel il est indifférent de s'approvisionner à Rouen ou à Paris.*

Appelons x la distance du point cherché à Paris, sa distance à Rouen sera en kilomètres exprimée par $137 - x$.

Une tonne de charbon, achetée à Paris, sera payée en ce point

$$42,50 + 0,09 . x.$$

Au même point, une tonne de charbon, achetée à Rouen, sera payée

$$47,50 + 0,09\,(137 - x).$$

x devra donc vérifier l'équation

$$42,50 + 0,09.x = 47,50 + 0,09(137 - x).$$

On en déduit

$$0,18.x = 5 + 0,09.137 = 17,33,$$

d'où

$$x = \frac{17,33}{0,18} = 96^{\text{KM}},277\ldots.$$

On devra donc s'approvisionner à Paris si l'on en est à moins de $96^{\text{KM}},277\ldots$, et, à Rouen, dans le cas contraire.

122. *Soit un nombre x inconnu, correspondant à une grandeur quelconque, à partager de la manière suivante : pour former la première part, on prélève sur x une quantité a, et on ajoute à cette quantité la $n^{\text{ième}}$ partie du reste $x - a$. Pour former la deuxième part, on prélève $2a$ plus la $n^{\text{ième}}$ partie de ce qui reste quand on a diminué x de la première part et de la quantité $2a$; pour former la troisième part, on prélève $3a$ plus la $n^{\text{ième}}$ partie de ce qui reste; et ainsi de suite. Le partage se termine exactement, et toutes les parts se trouvent égales. On demande de déterminer x d'après cette condition, les quantités a et n étant données. On demande aussi le nombre des parts et leur valeur commune.*

La première part est $a + \frac{x-a}{n}$.

Elle doit être égale à l'une quelconque des autres parts, la $(p+1)^{\text{ième}}$ par exemple. Formons l'expression de cette part. Elle sera représentée par $(p+1)a$, plus la $n^{\text{ième}}$ partie de x diminué des p premières parts ou de p fois la première, et encore de $(p+1)a$, c'est-à-dire que l'expression cherchée sera

$$(p+1)a + \frac{x - p\left[a + \frac{x-a}{n}\right] - (p+1)a}{n}.$$

L'équation du problème sera donc

$$a + \frac{x-a}{n} = (p+1)a + \frac{x - p\left[a + \frac{x-a}{n}\right] - (p+1)a}{n}.$$

Si le problème est possible, la quantité indéterminée p, qui caractérise le rang de la part égalée à la première, devra disparaître; en effet, la première part devant être égale à l'une *quelconque* des autres parts, l'expression de l'égalité de ses parts ne peut pas dépendre de leur rang.

En multipliant par n^2 les deux membres de l'équation, on

aura

$$an^2 + nx - an = pan^2 + an^2 + nx - pan - px + pa - pan - an.$$

Si l'on simplifie, il viendra

$$0 = p[an^2 - 2an + a - x],$$

d'où, en divisant les deux membres par p qui ne peut pas être nul,

$$x = an^2 - 2an + a = a[n^2 - 2n + 1] = a(n-1)^2.$$

La première part et toutes les autres seront donc égales à

$$a + \frac{an^2 - 2an + a - a}{n} = a + an - 2a = a(n-1).$$

Le nombre des parts sera par suite égal à

$$\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)} = n - 1.$$

123. Quel que soit le problème proposé, il s'agit toujours de déterminer les inconnues de manière à rendre certaines quantités égales entre elles : on doit donc examiner attentivement l'énoncé, afin de former l'expression de chacune de ces quantités en fonction des inconnues et des données; et en écrivant les égalités correspondantes, on obtiendra les équations du problème.

CHAPITRE II.

DISCUSSION DE LA FORMULE GÉNÉRALE DE RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

124. Quelle que soit l'équation donnée, on pourra toujours, dans chaque membre, réunir respectivement en un seul terme tous les termes qui contiennent l'inconnue et tous ceux qui ne la contiennent pas. De sorte que la forme la plus générale de l'équation du premier degré à une inconnue sera

$$Ax + B = A'x + B'.$$

A, B, A', B' sont des quantités littérales ou numériques, monômes ou polynômes, positives ou négatives. En faisant passer le terme $A'x$ dans le premier membre et le terme B dans le second, on aura

$$Ax - A'x = B' - B,$$

d'où

$$(A - A')x = B' - B$$

et

$$x = \frac{B' - B}{A - A'}.$$

Cette dernière équation, équivalente à l'équation proposée, ne peut être satisfaite que pour la valeur $x = \frac{B' - B}{A - A'}$; telle est donc l'expression générale de la racine cherchée. Cette expression prouve que la racine existe toujours et qu'elle est unique.

On peut, à l'aide de la formule trouvée, résoudre une équation quelconque du premier degré à une inconnue.

Soit l'équation

$$\frac{2x}{7} - \frac{3}{4} = \frac{x}{9} + 1.$$

On a, dans ce cas,

$$A = \frac{2}{7}, \quad B = -\frac{3}{4}, \quad A' = \frac{1}{9}, \quad B' = 1;$$

d'où

$$x = \frac{1 + \frac{3}{4}}{\frac{2}{7} - \frac{1}{9}} = \frac{441}{44}.$$

Mais la résolution directe de l'équation du premier degré à une inconnue est si simple, qu'on n'opère jamais par substitution.

125. Si la formule conduit pour x à une valeur positive ou négative, cette valeur satisfera nécessairement à l'équation, comme on peut s'en convaincre en remarquant que l'expression générale $\frac{B' - B}{A - A'}$, mise à la place de x dans l'équation générale $Ax + B = A'x + B'$, conduit à une identité.

Mais les valeurs mises à la place des lettres A, B, A', B', peuvent conduire pour x à des valeurs *singulières* qu'il s'agit d'interpréter. Ces valeurs particulières se présenteront lorsqu'un des termes de l'expression fractionnaire $\frac{B' - B}{A - A'}$ ou tous les deux deviendront nuls.

1°. Si l'on a $B' - B = 0$, sans que $A - A'$ soit nulle, on trouve $x = 0$. L'équation se réduit dans ce cas à $Ax = A'x$, puisque $B = B'$; et elle ne peut être satisfaite que par la valeur $x = 0$, puisque A est différent de A'. Ce cas rentre dans les solutions

ordinaires. 0 est une racine tout aussi admissible que 1, $\frac{2}{3}$, -3, etc.

2°. Si l'on a $A - A' = 0$, sans que $B' - B$ soit nulle, la valeur de x se présente sous la forme

$$x = \frac{m}{0},$$

en posant $B' - B = m$, quantité positive ou négative différente de 0. Ce symbole $\frac{m}{0}$ n'a aucune signification, si l'on se borne à la définition générale du rapport. Pour pouvoir l'interpréter, remontons à l'équation proposée. Puisque $A = A'$, elle devient dans le cas examiné

$$Ax + B = Ax + B'.$$

Quelle que soit la valeur attribuée à x, le premier terme du premier membre sera égal au premier terme du second membre; mais les seconds termes des deux membres étant différents, on ne pourra jamais arriver à l'égalité. *Le symbole* $\frac{m}{0}$ *indique donc l'impossibilité absolue de satisfaire à l'équation.*

Cherchons à interpréter directement le résultat $\frac{m}{0}$. A la place de 0, mettons le dénominateur $A - A'$. Supposons d'abord que la différence $A - A'$ ne soit pas nulle et qu'elle passe par des valeurs de plus en plus petites 0,1, 0,01, 0,001, ..., 0,000001, etc. x prendra successivement les valeurs de plus en plus grandes

$$\frac{m}{0,1}, \quad \frac{m}{0,01}, \quad \frac{m}{0,001}, \ldots, \quad \frac{m}{0,000001}, \ldots,$$

ou

$$10\,m, \quad 100\,m, \quad 1000\,m, \ldots, \quad 1000000\,m, \ldots.$$

A mesure que $A - A'$ se rapproche de 0, la valeur de x croît donc continuellement de manière à pouvoir surpasser toute quantité donnée. C'est pour cela qu'on donne à la valeur limite $\frac{m}{0}$ le nom de *valeur infinie* ou non susceptible d'expression numérique, parce qu'elle est plus grande que toute quantité donnée. On indique l'*infini* soit par l'expression $\frac{m}{0}$, soit par le signe ∞.

En revenant à l'équation $Ax + B = Ax + B'$, on voit que l'Algèbre ne peut répondre que par un pareil symbole. Si x est infini, les deux membres deviennent infinis, et leur *différence*

relative $\frac{B'-B}{x}$ disparaît. Si l'on a $x+3=x+1$, et si l'on fait $x=1$, la différence des deux membres est 2, et cette différence est considérable, eu égard aux valeurs 4 et 2 des deux membres. Mais si l'on fait $x=1\,000\,000$, la différence des deux membres, toujours égale à 2, est insignifiante eu égard à leurs valeurs 1 000 003 et 1 000 001.

3°. Si l'on a à la fois $B'-B=0$ et $A-A'=0$, la valeur de x se présente sous la forme

$$x=\frac{0}{0}.$$

Ce symbole n'a aucune signification, si l'on se borne à la définition générale du rapport. Pour pouvoir l'interpréter, remontons à l'équation proposée. Puisque l'on a $A=A'$ et $B=B'$, elle devient dans le cas examiné

$$Ax+B=Ax+B.$$

Quelle que soit la valeur attribuée à x, le premier membre sera toujours égal au second; l'équation se transforme en identité, et la valeur de x est complétement arbitraire. *Le symbole* $\frac{0}{0}$ *indique donc l'indétermination.*

On aurait pu interpréter directement ce symbole, en remarquant que le diviseur multiplié par le quotient devant toujours reproduire le dividende, le quotient peut être quelconque lorsque le dividende et le diviseur sont nuls.

126. Il faut bien comprendre que, si l'expression de l'inconnue est fractionnaire, elle peut se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$ sans qu'il y ait *réellement* indétermination. Il suffit qu'on ait oublié un facteur commun aux deux termes de la fraction, et que les hypothèses particulières qu'on a faites le rendent nul, pour que la valeur $\frac{0}{0}$ apparaisse. Si la véritable valeur ainsi masquée n'est pas $\frac{0}{0}$, on dit que l'indétermination n'est qu'*apparente*.

Soit, par exemple, l'expression

$$x=\frac{a^2-b^2}{a-b}.$$

Si l'on suppose $a=b$, elle prend la forme

$$x=\frac{0}{0}.$$

Mais on peut écrire le produit $(a+b)(a-b)$ à la place de a^2-b^2. On voit alors que le facteur $a-b$ est commun aux deux termes de la fraction, et qu'il devient nul pour $a=b$. Si l'on a le soin de le supprimer avant toute substitution, l'expression devient

$$x=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=a+b,$$

et sa véritable valeur pour $a=b$ est

$$x=2a.$$

De même, l'expression $\frac{x^3-5x+4}{x^2+3x+4}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x=1$. Il en résulte que les deux termes de la fraction sont divisibles par le binôme $x-1$ (36), qui prend la valeur 0 pour $x=1$. Si l'on simplifie d'abord la fraction en la divisant haut et bas par $x-1$, elle prend la forme $\frac{x^2+x-4}{x+4}$, et la valeur $x-1$ conduit au résultat $-\frac{2}{5}$.

127. Il est bon de noter que l'indétermination peut affecter d'autres symboles que le symbole $\frac{0}{0}$.

La fraction $\frac{A}{B}$ équivaut à $A\times\frac{1}{B}$. Si l'on suppose $A=0$ et $B=0$, l'expression $\frac{0}{0}$ équivaut donc à l'expression $0\times\frac{1}{0}$ ou $0\times\infty$.

De même la fraction $\frac{A}{B}$ peut encore s'écrire sous la forme $\frac{\frac{1}{B}}{\frac{1}{A}}$, et si l'on suppose $A=0$ et $B=0$, on voit que les expressions $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont encore équivalentes.

Enfin la différence $\frac{A-B}{AB}$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{B}-\frac{1}{A}$, et si l'on suppose encore $A=0$ et $B=0$, on en conclut l'équivalence des expressions $\frac{0}{0}$ et $\infty-\infty$.

128. Les symboles $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, peuvent aussi correspondre à une indétermination apparente qu'on ne pourra plus faire disparaître de la même manière.

Soit, par exemple, l'expression

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 1}{3x^4 - x^2 + 7}.$$

Si l'on suppose que x croisse indéfiniment, les deux termes de la fraction croissent indéfiniment, et, à la limite, l'expression donnée prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour s'assurer de la réalité de l'indétermination, on divise les deux termes par x^4. Il vient

$$\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{3 - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^4}}.$$

Si x augmente alors indéfiniment, tous les termes du numérateur et du dénominateur tendent vers zéro, excepté 1 et 3. La véritable limite de la fraction est donc $\frac{1}{3}$.

Si l'on avait l'expression

$$\sqrt{x^3 + 7x - 5} - x^2,$$

et si l'on faisait croître x indéfiniment, on aurait pour limite l'expression $\infty - \infty$. L'indétermination n'est-elle qu'apparente? pour en juger on multipliera haut et bas l'expression donnée par la somme $\sqrt{x^3 + 7x - 5} + x^2$, et elle deviendra évidemment

$$\frac{x^3 + 7x - 5 - x^4}{\sqrt{x^3 + 7x - 5} + x^2}.$$

En divisant alors ses deux termes par x^4, on trouvera

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^3} - \frac{5}{x^4} - 1}{\sqrt{\frac{1}{x^5} + \frac{7}{x^7} - \frac{5}{x^8}} + \frac{1}{x^2}},$$

en se rappelant que, pour introduire un facteur *sous* un radical, il faut l'élever à une puissance marquée par l'indice du radical. Si l'on suppose maintenant que x augmente indéfiniment, tous les termes du numérateur et du dénominateur tendront vers zéro, sauf le terme -1; de sorte que la véritable limite de l'expression sera $\frac{-1}{0}$ ou $-\infty$.

129. Nous avons réservé (110) le cas où l'inconnue entrait en dénominateur. Nous pouvons maintenant le considérer.

Soit l'équation

$$x - 1 - \frac{2}{x-2} = x + 3.$$

Si l'on suit la règle donnée (**111**) pour faire disparaître les dénominateurs d'une équation, on arrive à l'équation

$$x^2 - 3x + 2 - 2 = x^2 - 2x + 3x - 6 \quad \text{ou} \quad -4x = -6.$$

On peut changer les signes des deux membres de cette équation, ce qui revient à les multiplier par une même quantité -1. On a alors

$$4x = 6, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Mais on a multiplié par la quantité $x - 2$, qui contient l'inconnue, les deux membres de l'équation proposée : on peut donc craindre d'avoir introduit des solutions étrangères (**110**).

Remarquons qu'on peut réunir tous les termes de l'équation dans le premier membre, de manière que le second membre soit 0; puis réduire tous les termes du premier membre au même dénominateur $x - 2$. On mettra ainsi l'équation sous la forme

$$\frac{6 - 4x}{x - 2} = 0.$$

Pour qu'une fraction soit nulle, il faut que son numérateur soit nul sans que son dénominateur le soit, ou bien que son dénominateur soit infini sans que son numérateur le soit (*).

On satisfera donc à l'équation en posant $6 - 4x = 0$, ce qui conduira à la solution déjà trouvée, solution admissible, puisque $x = \frac{3}{2}$ ne rend pas nul le dénominateur $x - 2$.

On y satisfera encore en cherchant les valeurs qui rendent le dénominateur infini. Il n'y a évidemment que la valeur $x = \infty$ qui remplisse cette condition; mais elle rend le numérateur infini. Pour lever l'indétermination (**128**), on divisera les deux termes de la fraction par x, et l'on aura

$$\frac{\frac{6}{x} - 4}{1 - \frac{2}{x}} = 0.$$

En faisant $x = \infty$, on trouve que la fraction a pour limite la

(*) Il est évident qu'une fraction dont le numérateur tend vers une valeur finie et dont le dénominateur peut prendre une valeur plus grande que toute quantité donnée, converge vers zéro.

valeur -4. La valeur $x = \infty$ ne convient donc pas et doit être rejetée.

Cet exemple très-simple montre que la suppression du dénominateur commun, lors même qu'il contient l'inconnue, n'entraîne, en général, la suppression d'aucune véritable solution, et que les solutions qu'on pourrait ainsi négliger sont des solutions infinies que le problème n'admet ordinairement pas. Dans tous les cas, on voit qu'il est facile d'en tenir compte. On peut remarquer que, pour que les solutions infinies soient possibles, il faut que le degré du dénominateur surpasse celui du numérateur.

Soit encore l'équation

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} - 6.$$

En opérant comme nous venons de l'indiquer, on la mettra sous la forme

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x-1} = 0.$$

Si l'on pose le numérateur $x^2 - 7x + 6 = 0$, on trouve pour racines, comme nous le verrons plus tard, les nombres 6 et 1. Mais la solution $x = 1$ rend aussi le dénominateur $x - 1$ égal à zéro, de sorte que la fraction prend la forme $\frac{0}{0}$. On est ainsi averti que ses deux termes admettent le facteur $x - 1$, qu'il faut avant tout faire disparaître. Il reste alors $x - 6 = 0$; ce qui montre que la seule solution admissible est $x = 6$. Il faut donc avoir soin de rejeter les solutions données par le numérateur égalé à zéro, lorsque ces solutions annulent aussi le dénominateur commun.

En resumé, la règle pratique sera de faire disparaître les dénominateurs contenant l'inconnue comme ceux qui ne la contiennent pas, et de supprimer ensuite celles des solutions trouvées qui annuleraient le dénominateur commun obtenu.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ, EN NOMBRE ÉGAL A CELUI DES INCONNUES.

Théorèmes généraux concernant les systèmes équivalents.

130. I. *Deux systèmes d'équations sont équivalents, lorsque le second système ne diffère du premier que par des équations*

obtenues en ajoutant ou en retranchant membre à membre quelques équations du premier système.

Soit le système d'équations $A = B$, $A' = B'$, $A'' = B''$. Pour plus de généralité, multiplions respectivement les deux membres de chacune de ces équations par des quantités quelconques m, n, p, différentes de zéro. Nous savons (**110**) que le système

$$(1)\qquad \begin{cases} Am = Bm, \\ A'n = B'n, \\ A''p = B''p, \end{cases}$$

sera complétement équivalent au système proposé. Je dis alors que le système

$$(2)\qquad \begin{cases} Am = Bm, \\ A'n = B'n, \\ Am + A'n - A''p = Bm + B'n - B''p, \end{cases}$$

est équivalent au système précédent, et par suite au système donné. En effet, les valeurs des inconnues qui vérifient le système (1) vérifient les deux premières équations du système (2). Ces valeurs rendant $Am = Bm$, $A'n = B'n$, $A''p = B''p$, rendent nécessairement la différence $Am + A'n - A''p$ égale à la différence $Bm + B'n - B''p$, c'est-à-dire satisfont aussi à la troisième équation du système (2).

Réciproquement les valeurs des inconnues qui vérifient le système (2) vérifient les deux premières équations du système (1), puisque ces équations sont communes aux deux systèmes; elles rendent donc la somme $Am + A'n$ égale à la somme $Bm + B'n$. Elles rendent de plus la différence $(Am + A'n) - A''p$ égale à la différence $(Bm + B'n) - B''p$. Il faut donc que le terme $A''p$ soit égal au terme $B''p$, c'est-à-dire que les valeurs considérées satisfont aussi à la dernière équation du système (1). Les systèmes (1) et (2) sont par conséquent équivalents.

131. II. *Étant donné un système d'équations, si on résout l'une des équations du système par rapport à l'une des inconnues qui y entrent, c'est-à-dire si on isole cette inconnue dans le premier membre de l'équation considérée, on peut remplacer cette inconnue par la valeur obtenue, dans toutes les autres équations du système.*

Soient les équations $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, contenant, pour fixer les idées, les inconnues x, y, z.

La forme la plus générale d'une équation du premier degré à plusieurs inconnues est évidemment :

$$ax + by + cz + du + \ldots = K.$$

Car on peut toujours réunir dans le premier membre les termes

qui contiennent les inconnues, dans le second membre ceux qui ne les contiennent pas: puis rassembler en un même coefficient numérique ou littéral, monôme ou polynôme, positif ou négatif, toutes les quantités qui multiplient une même inconnue. On peut de même représenter le second membre par une seule lettre.

Ceci posé, si l'on résout la première équation par rapport à x, en regardant x comme seule inconnue, et qu'on obtienne $x = \mathrm{D}$ (D étant une certaine fonction de y et de z), on pourra remplacer x par D dans les deux autres équations du systèm qui deviendront alors $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}'_1$ et $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}'_1$.

Il faut prouver que le système

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}',$$
$$\mathrm{B} = \mathrm{B}',$$
$$\mathrm{C} = \mathrm{C}',$$

et le système

$$x = \mathrm{D},$$
$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}'_1,$$
$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}'_1.$$

sont équivalents.

L'équation $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ et l'équation $x = \mathrm{D}$ sont identiques; car, pour passer de la première à la seconde, on a seulement transporté dans le second membre les termes en y et en z, et l'on a divisé les deux membres par le coefficient de x (113).

Les deux autres équations de chaque système ne diffèrent que par la substitution de D à la place de x ou de x à la place de D; de sorte que ce simple changement permet de passer d'une équation du premier système à l'équation correspondante du second système. Or, remplacer directement x par sa valeur ou remplacer y et z par les leurs, dans une expression D qui se réduit à cette même valeur de x, c'est tout un. Les deux systèmes sont donc bien équivalents.

Remplacer ainsi l'inconnue x par sa valeur D en fonction des autres inconnues y et z, c'est *éliminer* x. D'une manière générale, éliminer une quantité, c'est la faire disparaître des calculs subséquents.

Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues.

132. Soient les deux équations du premier degré à deux inconnues.

$$5x - 3y = 9,$$
$$2x + 7y = 20.$$

Considérons-les un moment sous la forme générale $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$,

$B = B'$. Le système

$$\left.\begin{array}{r} Am = Bm \\ Am - A'n = Bm - B'n \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{c} A = B \\ Am - A'n = Bm - B'n \end{array}\right.$$

sera, d'après ce qui précède (130), équivalent au système proposé; mais l'on peut choisir les multiplicateurs m et n de manière à éliminer l'inconnue x, par exemple. Il suffit de faire en sorte que les coefficients de x soient égaux dans les équations $Am = Bm$, $A'n = B'n$. Si ces coefficients sont de même signe, en retranchant alors les deux équations membre à membre, l'équation résultante $Am - A'n = Bm - B'n$ ne contiendra plus que l'inconnue y dont elle fournira immédiatement l'unique valeur; et cette valeur, mise à la place de y dans l'équation $A = B$, permettra d'en déduire x.

Si les coefficients de x dans les deux équations $Am = Bm$, $A'n = B'n$, étaient de signes contraires, on ajouterait les deux équations.

Revenons aux équations proposées. Je multiplierai les deux membres de la première par 2, coefficient de x dans la seconde, et les deux membres de la seconde par 5, coefficient de x dans la première. J'obtiendrai

$$10x - 6y = 18,$$
$$10x + 35y = 100.$$

Je retrancherai alors membre à membre la première équation de la seconde; l'équation résultante sera

$$35y + 6y = 100 - 18 \quad \text{ou} \quad 41y = 82.$$

On en tire

$$y = \frac{82}{41} = 2.$$

Cette valeur $y = 2$, substituée dans l'équation $5x - 3y = 9$, donne

$$5x - 6 = 9 \quad \text{ou} \quad 5x = 15 \quad \text{et} \quad x = \frac{15}{5} = 3.$$

Les équations proposées sont donc satisfaites pour les valeurs $x = 3$ et $y = 2$, et seulement pour ces valeurs. La vérification réussit :

$$5.3 - 3.2 = 9, \quad 2.3 + 7.2 = 20.$$

La méthode que nous venons d'indiquer a reçu le nom d'*élimination par réduction au même coefficient* ou d'*élimination par addition ou soustraction*. Elle consiste à donner dans les deux équations le même coefficient à la même inconnue. Pour y arriver de la manière la plus simple, il faut opérer

sur les coefficients de l'inconnue considérée comme on opère sur les indices des radicaux qu'on veut réduire au plus petit indice commun ou sur les dénominateurs des fractions qu'on veut réduire au plus petit dénominateur commun.

Soient les équations

$$30x - 37y = 166,$$
$$24x - 25y = 280.$$

Éliminons x. On a

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \quad \text{et} \quad 24 = 2^3 \times 3.$$

Le plus petit multiple commun de ces deux coefficients est donc $2^3 \times 3 \times 5 = 120$. Le quotient de 120 par 30 est 4 : on multipliera les deux membres de la première équation par 4; le quotient de 120 par 24 est 5 : on multipliera les deux membres de la seconde équation par 5. On obtiendra ainsi le système équivalent

$$120x - 148y = 664,$$
$$120x - 125y = 1400.$$

Retranchant la première équation de la seconde, nous aurons

$$-125y + 148y = 1400 - 664 \quad \text{ou} \quad 23y = 736,$$

c'est-à-dire

$$y = \frac{736}{23} = 32.$$

Si l'on substitue cette valeur dans la première équation $30x - 37y = 166$, elle devient

$$30x - 37.32 = 166,$$

d'où

$$30x = 166 + 37.32 = 1350,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{1350}{30} = 45.$$

Les valeurs cherchées sont donc $x = 45$ et $y = 32$, et ce sont les seules qui vérifient les équations proposées.

133. Reprenons les équations

$$2x + 7y = 20,$$
$$5x - 3y = 9,$$

et appliquons à leur résolution une autre méthode très-générale, basée sur le théorème II (**131**).

Résolvons la première équation par rapport à x. Nous aurons

$$x = \frac{20 - 7y}{2}.$$

Substituons cette valeur de x dans la seconde équation qui deviendra

$$5\left(\frac{20-7y}{2}\right)-3y=9.$$

Le système obtenu

$$x=\frac{20-7y}{2},$$

$$5\left(\frac{20-7y}{2}\right)-3y=9,$$

est équivalent au système proposé.

Soient a et b les valeurs qui satisfont au premier système : on aura

$$2a+7b=20,$$
$$5a-3b=9.$$

Substituons ces valeurs dans le second système : il prendra la forme

$$a=\frac{20-7b}{2},$$

$$5\left(\frac{20-7b}{2}\right)-3b=9.$$

Mais l'égalité

$$2a+7b=20$$

et l'égalité

$$a=\frac{20-7b}{2}$$

sont identiques, les valeurs qui satisfont à l'une satisfont donc à l'autre. Dès lors l'égalité

$$5\left(\frac{20-7b}{2}\right)-3b=9$$

est aussi satisfaite par les mêmes valeurs a et b, puisqu'elle devient

$$5a-3b=9.$$

Ceci posé, l'équation

$$5\left(\frac{20-7y}{2}\right)-3y=9,$$

ne contenant plus que y, conduira immédiatement à la valeur de cette inconnue. En suivant la marche indiquée et en effectuant les calculs, on en déduira

$$100-35y-6y=18,$$

d'où

$$-41y=-82 \quad \text{et} \quad y=\frac{82}{41}=2.$$

Transportant cette valeur de y dans l'expression $x = \frac{20 - 7y}{2}$, on aura

$$x = \frac{20 - 14}{2} = 3.$$

Cette seconde méthode porte le nom d'*élimination par substitution*. Elle consiste à résoudre l'une des équations du système par rapport à l'une des inconnues qu'elle contient, et à substituer la valeur obtenue dans l'autre équation qui ne renferme plus alors qu'une inconnue.

Résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré.

134. Nous supposerons d'abord le nombre des équations *égal* au nombre des inconnues.

Soient, pour fixer les idées, six équations à six inconnues x, y, z, u, v, t. On éliminera l'une des inconnues, x par exemple, entre la première équation et chacune des cinq suivantes, en employant l'une des deux méthodes générales que nous venons de développer relativement à un système de deux équations à deux inconnues. On obtiendra ainsi, d'après les théorèmes I et II (**130**, **131**), un système équivalent au système proposé. Ce système équivalent sera formé de six équations, l'une contenant toutes les inconnues et qu'on *réservera* pour la détermination de x, les cinq autres ne contenant plus que les cinq inconnues y, z, u, v, t. On aura donc, en réalité, remplacé le système donné par un système contenant *une équation et une inconnue de moins*. Pour résoudre ce nouveau système, on éliminera de même l'inconnue y par exemple entre la première équation et chacune des quatre autres. Le système équivalent au précédent qu'on obtiendra ainsi, sera formé de cinq équations, l'une contenant les cinq inconnues et qu'on réservera pour la détermination de y, les quatre autres ne contenant plus que les quatre inconnues z, u, v, t. On aura, par suite, remplacé en réalité le second système considéré par un troisième système contenant encore une équation et une inconnue de moins. Chaque nouvelle élimination diminue ainsi la difficulté, et on arrive forcément, en continuant de la même manière, à un cinquième système de deux équations à deux inconnues et à un sixième système ne contenant plus qu'une équation à une inconnue. Le système proposé se trouve alors remplacé par un système équivalent composé de six équations : la première renferme les six inconnues du problème, les suivantes chacune une inconnue de moins, de sorte que la sixième n'en renferme plus qu'une seule t dont elle donne immédiatement

la valeur. En susbtituant cette valeur de t dans l'équation précédente qui contient les inconnues t et v, on détermine v. En substituant les deux valeurs obtenues dans l'équation qui précède l'avant-dernière et qui contient à la fois t, v et u, on détermine u. En continuant ainsi, on arrive à substituer dans la première équation les valeurs de t, v, u, z, y et à en déduire la valeur de la dernière inconnue x. On voit qu'il y a toujours en général un système de valeurs admissibles, mais qu'il est unique puisque la dernière équation à une inconnue ne donne qu'une seule valeur pour cette inconnue.

Nous allons appliquer cette solution générale à plusieurs exemples.

135. Soient les trois équations à trois inconnues

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 6z &= 3,06, \\ 5x + y - 2z &= 0,81, \\ 7x - y + 4z &= 3,64. \end{aligned}$$

Nous emploierons la méthode d'élimination par addition ou soustraction, et le plus simple sera d'éliminer y entre la seconde équation et chacune des deux autres.

Pour cela, je multiplierai d'abord les deux membres de la seconde équation par 2, et j'ajouterai l'équation obtenue membre à membre avec la première équation du système proposé. Il viendra évidemment

$$13x + 2z = 4,68.$$

J'ajouterai ensuite membre à membre la seconde et la troisième équation du système donné, et j'aurai

$$12x + 2z = 4,45.$$

Les équations

$$\begin{aligned} 5x + y - 2z &= 0,81, \\ 13x + 2z &= 4,68, \\ 12x + 2z &= 4,45, \end{aligned}$$

formeront un système équivalent à celui qu'on veut résoudre. La première équation me permettra de déterminer y, quand j'aurai trouvé x et z au moyen des deux autres. J'éliminerai z entre ces deux dernières équations en les retranchant membre à membre, et j'obtiendrai

$$x = 0,23.$$

Le système

$$\begin{aligned} 5x + y - 2z &= 0,81, \\ 12x + 2z &= 4,45, \\ x &= 0,23, \end{aligned}$$

est équivalent au système précédent et, par suite, au système donné. La dernière équation donne

$$x = 0,23,$$

l'avant-dernière donne

$$12.0,23 + 2z = 4,45,$$

c'est-à-dire

$$2z = 4,45 - 2,76 = 1,69 \quad \text{et} \quad z = 0,845.$$

Enfin, la première équation donne

$$5.0,23 + y - 2.0,845 = 0,81,$$

d'où

$$y = 0,81 + 1,69 - 1,15 = 1,35.$$

Les racines cherchées sont donc

$$x = 0,23, \quad y = 1,35, \quad z = 0,845.$$

Ces valeurs vérifient bien les équations proposées.

136. Soient les équations littérales

$$\begin{aligned} x - ay + a^2 z &= a^3, \\ x - by + b^2 z &= b^3, \\ x - cy + c^2 z &= c^3. \end{aligned}$$

Éliminons x entre la première équation et chacune des deux autres. Il viendra, en retranchant ces équations membre à membre,

$$\begin{aligned} -ay + by + (a^2 - b^2)\, z &= a^3 - b^3, \\ -ay + cy + (a^2 - c^2)\, z &= a^3 - c^3. \end{aligned}$$

On peut écrire les équations obtenues comme il suit :

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)\, z - (a - b)\, y &= a^3 - b^3, \\ (a^2 - c^2)\, z - (a - c)\, y &= a^3 - c^3. \end{aligned}$$

On remarque que les deux membres de la première sont divisibles par $a - b$ et les deux membre de la seconde par $a - c$ (38). En supprimant ces deux facteurs communs, les deux équations prennent une forme plus simple et deviennent

$$\begin{aligned} (a + b)\, z - y &= a^2 + ab + b^2, \\ (a + c)\, z - y &= a^2 + ac + c^2. \end{aligned}$$

Pour éliminer y entre ces deux équations, nous les retrancherons membre à membre, et nous aurons

$$(b - c)\, z = a\,(b - c) + b^2 - c^2.$$

Le facteur $b - c$ est commun aux deux membres. En le sup-

primant, on trouve

$$z = a + b + c.$$

Substituons cette valeur de z dans l'équation

$$(a + b)z - y = a^2 + ab + b^2.$$

Il viendra

$$(a + b)(a + b + c) - y = a^2 + ab + b^2.$$

On peut faire passer y dans le second membre, le trinôme $a^2 + ab + b^2$ dans le premier, puis renverser l'ordre des deux membres. Nous aurons

$$y = (a + b)(a + b + c) - (a^2 + ab + b^2),$$

d'où

$$y = (a + b)^2 + (a + b)c - (a^2 + ab + b^2).$$

Si l'on se rappelle la composition du carré d'une somme, il vient immédiatement

$$y = ab + ac + bc.$$

Substituons les valeurs trouvées pour z et pour y dans l'équation

$$x - ay + a^2 z = a^3.$$

Nous aurons

$$x - a(ab + ac + bc) + a^2(a + b + c) = a^3,$$

d'où

$$x = abc.$$

Les trois racines cherchées sont donc

$$x = abc, \quad y = ab + ac + bc, \quad z = a + b + c.$$

Ces racines vérifient les équations données qui se réduisent alors à

$$a^3 = a^3, \quad b^3 = b^3, \quad c^3 = c^3.$$

137. Soient les quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{aligned} 4z - 3x + 2y + u &= 17, \\ x - 2y - z + 5u &= 14, \\ y - 2x + 3z - u &= 5, \\ 2u - 5y + 2x + 3z &= 13. \end{aligned}$$

J'emploierai la méthode d'élimination par substitution. Je résoudrai la troisième équation par rapport à u et j'en déduirai

$$u = y - 2x + 3z - 5.$$

Substituant cette valeur à la place de u dans les trois autres équations, elles deviendront après simplification

$$\begin{aligned} 7z + 3y - 5x &= 22, \\ 14z + 3y + 9x &= 39, \\ 12z - 2y - 4x &= 28. \end{aligned}$$

On peut diviser par 2 les deux membres de la troisième équation; on obtient

$$6z - y - 2x = 14.$$

De cette dernière équation, on déduit, en la résolvant par rapport à y,

$$y = 6z - 2x - 14.$$

Substituant cette valeur à la place de y dans les deux équations précédentes, on trouve après simplification

$$25z - 11x = 64,$$
$$32z - 15x = 81.$$

Je résous la première de ces équations par rapport à x, et je substitue dans la seconde à la place de x la valeur

$$x = \frac{25z - 64}{11}.$$

On obtient ainsi

$$32z - 15 \cdot \frac{25z - 64}{11} = 81,$$

d'où

$$352z - 375z + 960 = 891,$$

c'est-à-dire

$$-23z = -69 \quad \text{et} \quad z = \frac{69}{23} = 3.$$

On a alors

$$x = \frac{25z - 64}{11} = \frac{11}{11} = 1.$$

Il en résulte

$$y = 6z - 2x - 14 = 2,$$

par conséquent,

$$u = y - 2x + 3z - 5 = 4.$$

Les racines cherchées sont donc

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3, \quad u = 4.$$

138. Remarques. — Si le coefficient de l'une des inconnues est égal à l'unité dans l'une des équations données, c'est cette inconnue qu'il faut éliminer de préférence : on a ainsi des calculs plus simples.

Lorsque toutes les inconnues n'entrent pas à la fois dans chacune des équations proposées, on commence par éliminer l'inconnue qui entre dans le plus petit nombre d'équations : on diminue ainsi la longueur des calculs.

Si une inconnue entre dans une seule équation, on réserve cette équation pour la détermination de cette inconnue.

Proposons-nous, par exemple, de résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2u &= 9, \\ 2x + 6z &= 28, \\ 4u - 2y &= 14, \\ 3x + 4u &= 26. \end{aligned}$$

Je simplifie ce système, en divisant par 2 les deux membres des deux équations intermédiaires, et j'ai

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2u &= 9, \\ x + 3z &= 14, \\ 2u - y &= 7, \\ 3x + 4u &= 26. \end{aligned}$$

z entrant seulement dans la seconde équation, on réservera cette équation pour déterminer z. y ayant le coefficient 1 dans la troisième équation, c'est y que j'éliminerai entre la troisième et la première équation. On trouve, en résolvant la troisième équation par rapport à y,

$$y = 2u - 7.$$

La première devient alors

$$4x - 4u = -12 \quad \text{ou} \quad x - u = -3.$$

La quatrième équation $3x + 4u = 26$, jointe à celle qu'on vient d'écrire, permet d'obtenir x et u. On déduit de la première $x = u - 3$. La quatrième, par la substitution de la valeur $u - 3$ à la place de x, devient

$$3u - 9 + 4u = 26,$$

d'où

$$7u = 35 \quad \text{et} \quad u = \frac{35}{7} = 5,$$

par suite,

$$x = u - 3 = 2 \quad \text{et} \quad y = 2u - 7 = 3.$$

L'équation réservée

$$x + 3z = 14$$

donne enfin

$$z = \frac{14 - 2}{3} = 4.$$

Les racines sont donc

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 4, \quad u = 5.$$

139. Il faut remarquer que les deux méthodes générales que nous avons indiquées peuvent être appliquées simultanément si l'on y trouve avantage. On peut éliminer l'une des inconnues par substitution, une autre par voie d'addition ou de

soustraction, revenir pour une troisième à la méthode par substitution, etc.

140. L'emploi d'une inconnue auxiliaire ou d'un théorème particulier de calcul peut dans certains cas rendre la résolution beaucoup plus rapide. Mais cet emploi suppose toujours une certaine symétrie dans la manière dont les inconnues entrent dans les diverses équations. Cette symétrie même suggère la marche à suivre.

Soit le sytème

$$x + y + z = a,$$
$$u + x + y = b,$$
$$z + u + x = c,$$
$$y + z + u = d.$$

On connaît donc les sommes partielles formées par trois quelconques des quatre inconnues. Si l'on connaissait la somme de ces quatre inconnues, en retranchant de cette somme totale les différentes sommes partielles, on obtiendrait successivement les racines. La somme des quatre inconnues est donc ici une inconnue auxiliaire qu'il faut d'abord déterminer. Pour cela, j'ajouterai membre à membre les quatre équations données. Il viendra

$$3(x + y + z + u) = a + b + c + d,$$

d'où

$$x + y + z + u = \frac{a + b + c + d}{3}.$$

On en déduit immédiatement

$$x = \frac{a + b + c + d}{3} - d = \frac{a + b + c - 2d}{3},$$

$$y = \frac{a + b + c + d}{3} - c = \frac{a + b + d - 2c}{3},$$

$$z = \frac{a + b + c + d}{3} - b = \frac{a + c + d - 2b}{3},$$

$$u = \frac{a + b + c + d}{3} - a = \frac{b + c + d - 2a}{3}.$$

Soit encore le système

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$lx + my + nz = p.$$

Je puis multiplier respectivement par l, m, n, les deux ter-

mes de chacun des rapports $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$. On a alors

$$\frac{lx}{la} = \frac{my}{mb} = \frac{nz}{nc}.$$

La somme des numérateurs de ces rapports divisée par la somme de leurs dénominateurs formera un rapport égal à chacun d'eux, puisqu'ils sont égaux. On aura donc

$$\frac{lx}{la} = \frac{my}{mb} = \frac{nz}{nc} = \frac{lx + my + nz}{la + mb + nc}.$$

Mais le numérateur $lx + my + nz$ est égal à p d'après la dernière équation du système. On pourra donc écrire successivement

$$x = \frac{ap}{la + mb + nc},$$

$$y = \frac{bp}{la + mb + nc},$$

$$z = \frac{cp}{la + mb + nc}.$$

141. Les conditions de symétrie permettent, dans certains cas, de déduire de la valeur trouvée pour une seule inconnue les valeurs de toutes les autres.

Soient les équations

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c,$$

$$\frac{c}{z} + \frac{a}{x} = b,$$

$$\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = a.$$

Pour éviter les équations du second degré qu'on trouverait en chassant les dénominateurs, je prends comme inconnues $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$. J'ajoute les deux premières équations membre à membre; je retranche l'équation résultante et la troisième équation donnée membre à membre. J'obtiens ainsi

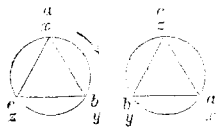
$$\frac{2a}{x} = c + b - a,$$

d'où

$$x = \frac{2a}{c + b - a}.$$

Supposons maintenant qu'on considère les trois lettres a, b, c, ou les trois lettres x, y, z. Plaçons-les sur une circonférence

et aux sommets d'un triangle équilatéral inscrit. Si la circonférence tourne autour de son centre, dans le sens indiqué, d'un tiers de quatre angles droits, la lettre a prendra la place de la lettre b, la lettre b la place de la lettre c, la lettre c la place de la lettre a. De même x, y, z, seront remplacées par z, x, y. On dit alors que les trois lettres a, b, c, ou les trois lettres x, y, z, ont éprouvé une *permutation circulaire*.



Remarquons que si, dans les équations données, on fait subir à la fois aux trois inconnues x, y, z, et aux trois lettres a, b, c, une permutation circulaire, la première équation se transforme en la seconde, la seconde en la troisième, la troisième en la première. Le système proposé reste donc le même, et il est toujours satisfait par les mêmes valeurs. Mais il est évident qu'en faisant subir les mêmes changements aux formules qui donnent x, y, z, on aura les valeurs qui satisfont au système transformé, c'est-à-dire au système donné, puisque ces deux systèmes sont identiques. On passera donc immédiatement de la valeur trouvée pour x à la valeur de z, en remplaçant x par z, et en permutant circulairement les trois lettres a, b, c; puis, de la valeur de z à la valeur de y, en remplaçant z par y, et en faisant éprouver une nouvelle permutation circulaire aux trois lettres a, b, c. La permutation circulaire des lettres x, y, z, existe d'une formule à l'autre; la permutation circulaire des lettres a, b, c, a lieu dans chaque formule. On obtient ainsi immédiatement

$$z = \frac{2c}{b+a-c},$$

$$y = \frac{2b}{a+c-b}.$$

Problèmes conduisant à plusieurs équations du premier degré, en nombre égal à celui des inconnues.

142. *On a deux lingots d'argent, l'un au titre de* 0,820, *l'autre au titre de* 0,950; *former à l'aide de ces deux lingots un alliage pesant* 115 *grammes et au titre de* 0,870. (Arithmétique, **272**.)

Désignons par x et y les nombres de grammes qu'il faut emprunter aux deux lingots pour avoir l'alliage voulu. On aura immédiatement

$$x + y = 115^{gr}.$$

Exprimons que la quantité d'argent contenue dans l'alliage est égale à la somme des quantités d'argent contenues dans les

parties mélangées : on obtiendra comme seconde équation

$$x.0,820+y.0,950=115.0,870.$$

On déduit de la première équation

$$y=115-x.$$

La seconde devient alors

$$x.0,820+(115-x).0,950=115.0,870,$$

d'où

$$x(0,950-0,820)=115(0,950-0,870),$$

c'est-à-dire

$$x.0,130=115.0,080.$$

On en déduit

$$x=\frac{115.0,08}{0,13}=70^{gr},769$$

et

$$y=115-x=44^{gr},231.$$

Ces valeurs vérifient les conditions du problème.

143. *Connaissant les densités d et d' de deux substances et la densité* D *d'une de leurs combinaisons ou d'un de leurs mélanges, déterminer la proportion de chaque substance contenue dans un poids* P *de la combinaison ou du mélange considéré. On admet que la combinaison s'opère sans variation de volume.*

Désignons par x et y les poids des deux substances, et rappelons-nous que le volume est égal au quotient du poids par la densité. On aura

$$x+y=P,$$

$$\frac{x}{d}+\frac{y}{d'}=\frac{P}{D}.$$

La seconde équation exprime que la somme des volumes mélangés ou combinés est égale au volume du mélange ou de la combinaison.

La première équation donne $y=P-x$. La seconde équation devient alors

$$\frac{x}{d}+\frac{P}{d'}-\frac{x}{d'}=\frac{P}{D},$$

d'où

$$x\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d'}\right)=\frac{P}{D}-\frac{P}{d'},$$

c'est-à-dire

$$x\left(\frac{d'-d}{dd'}\right)=\frac{P(d'-D)}{Dd'}.$$

En simplifiant et en changeant les signes dans les deux paren-

thèses, parce que je suppose $d > d'$ et, par suite, $D > d'$, j'aurai

$$x = \frac{Pd(D-d')}{D(d-d')}.$$

Pour trouver y, on peut remarquer que les équations considérées ne changent pas, lorsqu'on y remplace x par y et y par x, d par d' et d' par d. En faisant subir les mêmes changements à la valeur de x, on trouvera donc immédiatement

$$y = \frac{Pd'(D-d)}{D(d'-d)} = \frac{Pd'(d-D)}{D(d-d')}.$$

Je change les signes des deux parenthèses, parce que d est à la fois plus grand que d' et plus grand que D.

On pourra appliquer ces formules au problème de la couronne.

Hiéron, roi de Syracuse, avait remis à un orfévre une certaine quantité d'or, destinée à être transformée en couronne. La couronne achevée, il soupçonna l'orfévre d'avoir remplacé une partie de l'or par un poids égal d'argent. Il consulta Archimède, qui résolut le problème à l'aide du principe dont on lui doit la découverte.

La couronne pesait 7465 grammes. La densité de l'or est 19,26; celle de l'argent 10,47; la densité de la couronne se trouva être égale à 15,98. Pour avoir la quantité d'argent introduite par l'orfévre, il suffira donc de faire dans la formule $y = \frac{Pd'(d-D)}{D(d-d')}$,

$$P = 7465, \quad d = 19,26, \quad d' = 10,47, \quad D = 15,98.$$

144. *La distance entre deux villes placées sur un chemin de fer est a. Un convoi part de la première ville pour la seconde avec une vitesse de v kilomètres par heure. h heures après, un convoi part de la seconde ville pour la première avec une vitesse de v' kilomètres par heure. On demande au bout de combien de temps et à quelle distance de la première ville le croisement des deux convois aura lieu.*

Au point de rencontre, la somme des chemins parcourus par les deux convois est égale à a. Si le chemin décrit par le premier convoi est désigné par x, et si le chemin décrit par le second convoi est désigné par y, on aura

$$x + y = a.$$

Mais le chemin x a été parcouru dans un temps égal à $\frac{x}{v}$, l'unité de temps choisie étant l'heure. De même, le chemin y

a été parcouru dans un temps $\frac{y}{v'}$. De plus, le premier convoi ayant une avance de h heures, la différence des temps considérés doit être égale à h, d'où la seconde équation

$$\frac{x}{v} - \frac{y}{v'} = h.$$

Je remplace y par sa valeur $a - x$ déduite de la première équation. Il vient

$$\frac{x}{v} - \frac{a - x}{v'} = h,$$

d'où

$$v'x - av + vx = vv'h \quad \text{et} \quad x = \frac{v(a + v'h)}{v + v'}.$$

Le temps qui s'écoule entre le départ du premier convoi et la rencontre étant égal à $\frac{x}{v}$, aura pour expression $\frac{a + v'h}{v + v'}$.

145. *La date de l'invention de l'imprimerie par Guttemberg renferme quatre chiffres. Le chiffre des dizaines est moitié de celui des unités, le chiffre des mille est égal à l'excès du chiffre des centaines sur celui des dizaines, la somme des quatre chiffres est égale à* 14; *et si l'on augmente le nombre considéré de* 4095, *on l'obtient renversé. Trouver la date dont il s'agit.*

Si je désigne par les initiales des mots unités, dizaines, centaines, mille, les chiffres correspondants, j'aurai immédiatement d'après l'énoncé les trois équations

$$2d = u,$$
$$m = c - d,$$
$$u + d + c + m = 14.$$

La valeur du nombre cherché est représentée par

$$u + 10d + 100c + 1000m,$$

la valeur du nombre inverse sera

$$1000u + 100d + 10c + m.$$

La dernière condition du problème aura donc pour expression l'équation

$$u + 10d + 100c + 1000m + 4905 = 1000u + 100d + 10c + m.$$

Je simplifie cette équation, et je trouve

$$111u + 10d - 10c - 111m = 545.$$

Je retranche la seconde équation de la troisième, et je trouve

$$u + d + c = 14 - c + d,$$

d'où

$$u = 14 - 2c.$$

La première équation me donne alors

$$2d = u = 14 - 2c,$$

d'où

$$d = 7 - c.$$

Il vient alors

$$m = c - d = c - 7 + c,$$

d'où

$$m = 2c - 7.$$

Je n'ai plus qu'à substituer dans la quatrième équation les valeurs de u, d, m, exprimées en fonction de c. Il vient

$$111(14 - 2c) + 10(7 - c) - 10c - 111(2c - 7) = 545,$$

c'est-à-dire

$$464c = 1856 \quad \text{et} \quad c = \frac{1856}{464} = 4.$$

Il en résulte $u = 6$, $d = 3$, $m = 1$. Par suite, la date de l'invention de l'imprimerie est 1436.

146. *Trois ouvriers* X, Y, Z, *exécutent un certain travail :* X *et* Y *réunis le feraient en a jours,* X *et* Z *en b jours,* Y *et* Z *en c jours. On demande combien il faudrait de jours pour faire le travail :* 1° *à chaque ouvrier travaillant seul;* 2° *aux trois ouvriers réunis.*

Je désigne par x, y, z, les nombres de jours nécessaires à chaque ouvrier travaillant seul pour terminer l'ouvrage. Je désigne par 1 la totalité de l'ouvrage. X et Y font cet ouvrage en a jours; donc en un jour ils en font une fraction représentée par $\frac{1}{a}$. Mais, en un jour, X fait une fraction de l'ouvrage représentée par $\frac{1}{x}$, puisqu'il fait l'ouvrage tout entier en x jours; de même, Y en fait en un jour une fraction $\frac{1}{y}$. On aura donc

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}.$$

On trouve de même

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}.$$

Je regarde $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, comme les inconnues du problème. J'ajoute les deux premières équations membre à membre, je retranche la troisième de leur somme. J'obtiens

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{bc + ac - ab}{abc},$$

d'où

$$x = \frac{2abc}{bc + ac - ab}.$$

Les considérations de symétrie déjà indiquées (**141**) prouvent qu'on passera de la valeur de x à celle de y, en remplaçant x par y et en permutant circulairement les lettres a, c, b. Il viendra

$$y = \frac{2abc}{ac + ab - bc}.$$

On passera de la valeur de y à celle de z de la même manière et l'on trouvera

$$z = \frac{2abc}{ab + bc - ac}.$$

Les trois ouvriers réunis font, en un jour, une fraction de l'ouvrage représentée par $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Ils feront donc tout l'ouvrage en $\dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ jours, c'est-à-dire en $\dfrac{2abc}{ab + ac + bc}$ jours.

147. *Trois joueurs conviennent qu'à chaque partie le perdant doublera l'argent des deux autres. Ils perdent tour à tour une partie, et quittent le jeu avec la même somme a. Quelle était leur mise à chacun au commencement du jeu?*

Je désigne par x, y, z, les trois mises initiales. Si le premier joueur perd la première partie, il ne lui restera plus qu'une somme $x - y - z$; les deux autres joueurs, ayant doublé leurs mises, auront $2y$ et $2z$.

Le second joueur perdant à son tour n'aura plus que $2y - (x - y - z) - 2z$, c'est-à-dire $3y - x - z$; le premier joueur aura une somme $2x - 2y - 2z$, le troisième une somme $4z$.

Enfin, la troisième partie réduira la mise du troisième joueur à $4z - (2x - 2y - 2z) - (3y - x - z)$, c'est-à-dire à $7z - x - y$; les mises du premier et du second joueur deviendront en même temps $4x - 4y - 4z$ et $6y - 2x - 2z$.

D'après l'énoncé, toutes les mises à la fin de la troisième partie sont égales à a. Les trois équations du problème seront

donc

$$4x - 4y - 4z = a,$$
$$6y - 2x - 2z = a,$$
$$7z - x - y = a.$$

On peut simplifier le calcul en remarquant que le jeu ne change pas la somme totale des trois mises, mais seulement leur répartition, et qu'on a dès lors

$$x + y + z = 3a.$$

On pourra remplacer par cette équation auxiliaire l'une quelconque des équations du système : on l'aurait d'ailleurs obtenue, en les ajoutant toutes les trois membre à membre.

Je considérerai donc le système

$$x + y + z = 3a,$$
$$4x - 4y - 4z = a,$$
$$7z - x - y = a.$$

Si j'ajoute membre à membre la première équation et la troisième, j'obtiens

$$8z = 4a,$$

d'où

$$z = \frac{4a}{8}.$$

Les deux premières équations deviendront alors

$$x + y = 3a - z = 3a - \frac{4a}{8} = \frac{20a}{8},$$

$$4x - 4y = a + 4z = a + \frac{16a}{8} = \frac{24a}{8}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de la première par 4, et si on ajoute ensuite membre à membre les deux équations, on trouve

$$8x = \frac{80a}{8} + \frac{24a}{8} = \frac{104a}{8},$$

d'où

$$x = \frac{13a}{8}.$$

La première équation donne alors

$$y = 3a - x - z = 3a - \frac{13a}{8} - \frac{4a}{8} = \frac{7a}{8}.$$

Les trois valeurs cherchées sont donc

$$\frac{13a}{8}, \quad \frac{7a}{8}, \quad \frac{4a}{8}.$$

On peut facilement généraliser la question et trouver les formules qui correspondent au cas de n joueurs, en employant immédiatement l'équation auxiliaire

$$x+y+z+u+v+t+\ldots=na.$$

Ces formules sont :

$$\frac{(1+n.2^{n-1})a}{2^n},\quad \frac{(1+n.2^{n-2})a}{2^n},\quad \frac{(1+n.2^{n-3})a}{2^n},\ldots,\quad \frac{(1+n)a}{2^n}.$$

Cas où le nombre des équations considérées n'est pas égal à celui des inconnues.

148. *Il y a indétermination, lorsque le nombre des équations est inférieur à celui des inconnues.* Supposons qu'on ait m équations et $m+p$ inconnues. Il faudra considérer p des inconnues comme données : on aura alors un système de m équations à m inconnues, qu'on résoudra comme nous l'avons indiqué ; mais les m inconnues trouvées seront exprimées en fonction des p inconnues restantes. On pourra attribuer à ces p inconnues des valeurs arbitraires, et par suite les équations proposées admettront une infinité de racines : elles formeront un système *indéterminé*.

Soient les équations

$$x+y-z=10,$$
$$x-y+5z=24.$$

Je regarde z comme donnée et j'en déduis :

$$x+y=10+z,$$
$$x-y=24-5z.$$

On aura donc (2)

$$x=17-2z,$$
$$y=3z-7.$$

On remplacera z dans ces formules par telles valeurs qu'on voudra.

149. *Lorsque le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, il faut certaines conditions pour que toutes les équations soient satisfaites par les mêmes valeurs des inconnues.* Supposons qu'on ait m inconnues et $m+p$ équations. On choisira m de ces équations renfermant les m inconnues de la manière la plus simple, et on les résoudra d'après les règles précédentes. On trouvera ainsi les valeurs des m inconnues, mais ces valeurs devront en outre satisfaire aux p équations restantes. Si quelques-uns des coefficients des équations proposées sont indéterminés, on pourra alors les calcu-

ler de manière à rendre les p équations satisfaites par les valeurs obtenues pour les m inconnues. Ces p équations seront alors ce qu'on appelle des *équations de condition*.

Supposons qu'on donne les six équations à trois inconnues :

$$x + y + z = 9,$$
$$3x - y + 2z = 10,$$
$$2x + 7y - 3z = 8,$$
$$ax - by + cz = 20,$$
$$ax + by + cz = 44,$$
$$10ax + 3by - cz = 26,$$

et qu'on demande quelles valeurs doivent recevoir les coefficients indéterminés a, b, c, pour que ces six équations soient satisfaites par les mêmes valeurs des inconnues x, y, z.

On résoudra les trois premières équations, qui ne contiennent pas a, b, c, par rapport aux inconnues principales x, y, z.

En ajoutant ces trois premières équations membre à membre, on aura

$$6x + 7y = 27.$$

En multipliant la première équation par 2 et en en retranchant la seconde membre à membre, il viendra

$$-x + 3y = 8,$$

d'où

$$-6x + 18y = 48.$$

Cette dernière équation combinée avec l'équation $6x + 7y = 27$ donne immédiatement

$$25y = 75,$$

d'où

$$y = 3.$$

Il en résulte

$$-x + 9 = 8,$$

d'où

$$x = 1 \quad \text{et} \quad 1 + 3 + z = 9,$$

c'est-à-dire

$$z = 5.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les trois dernières équations, elles deviendront :

$$a - 3b + 5c = 20,$$
$$a + 3b + 5c = 44,$$
$$10a + 9b - 5c = 26.$$

Ces équations de *condition* permettront de calculer les *indéterminées* a, b, c. En retranchant les deux premières membre

à membre, on a

$$6b = 24,$$

d'où

$$b = 4.$$

Les deux dernières équations deviennent alors

$$a + 12 + 5c = 44,$$
$$10a + 36 - 5c = 26.$$

Si on les ajoute membre à membre, on trouve

$$11a + 48 = 70,$$

d'où

$$11a = 22 \quad \text{et} \quad a = 2.$$

L'équation $a - 3b + 5c = 20$ donne alors

$$5c = 20 - 2 + 12 = 30,$$

d'où

$$c = 6.$$

Ainsi, aux valeurs $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$, correspondront les valeurs $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, et les six équations proposées admettront dans ce cas les mêmes racines.

CHAPITRE IV.

FORMATION ET DISCUSSION DES FORMULES GÉNÉRALES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Cas de deux équations à deux inconnues.

150. Quelles que soient les équations données, on pourra toujours, en supposant les deux inconnues représentées par x et y, réunir dans le premier membre de chaque équation les termes en x et en y, et dans le second membre les termes indépendants des inconnues. Si l'on met alors x et y en facteur commun des quantités qui les multiplient, on pourra représenter par

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

un système quelconque de deux équations du premier degré à deux inconnues. a, b, c, a', b', c', sont des quantités numériques ou littérales, monômes ou polynômes, positives ou négatives.

Résolvons ces équations générales. De la première, je déduis

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Je substitue cette valeur de y dans la seconde équation, et elle devient

$$a'x + b' \cdot \frac{c - ax}{b} = c',$$

d'où

$$ba'x + cb' - ab'x = bc'.$$

On en tire

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'.$$

Par suite,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

On a alors

$$y = \frac{c - a \cdot \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}}{b}.$$

Pour simplifier cette expression, je la multiplie haut et bas par $ab' - ba'$, et j'effectue les calculs indiqués. Il vient

$$y = \frac{cab' - cba' - acb' + abc'}{b(ab' - ba')} = \frac{-cba' + abc'}{b(ab' - ba')},$$

c'est-à dire, en divisant haut et bas par b,

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

On serait arrivé plus rapidement à cette valeur de y en remarquant que les équations proposées ne changent pas lorsqu'on change x en y et y en x, a en b et b en a, a' en b' et b' en a'. En opérant les mêmes changements dans la valeur de x, on trouve immédiatement

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

On peut à l'aide des deux formules trouvées

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

résoudre un système quelconque de deux équations du premier degré à deux inconnues. Soient les équations

$$5x - 3y = 9, \quad 2x + 7y = 20.$$

On aura dans ce cas particulier

$$a = 5, \quad b = -3, \quad c = 9, \quad a' = 2, \quad b' = 7, \quad c' = 20.$$

Par suite

$$x = \frac{9.7 - (-3).20}{5.7 - (-3).2} = \frac{63 + 60}{35 + 6} = \frac{123}{41} = 3,$$

$$y = \frac{5.20 - 9.2}{5.7 - (-3).2} = \frac{100 - 18}{35 + 6} = \frac{82}{41} = 2.$$

151. On peut facilement retrouver les deux formules générales qu'on vient d'indiquer.

On remarque que les valeurs de x et de y ont le même dénominateur. On forme ce dénominateur commun comme il suit. On écrit les deux arrangements ab et ba des coefficients des inconnues dans la première équation, on sépare ces arrangements par le signe —, et on accentue la dernière lettre de chacun d'eux : on obtient ainsi $ab' - ba'$.

Pour former le numérateur de chaque inconnue, on n'a qu'à remplacer dans le dénominateur commun les coefficients de cette inconnue par les seconds membres correspondants. Ainsi, pour avoir le numérateur de la valeur de x, on devra remplacer dans le dénominateur $ab' - ba'$ les lettres a et a' par c et c', et l'on obtiendra $cb' - bc'$. De même pour avoir le numérateur de la valeur de y, on devra remplacer dans le même dénominateur les lettres b et b' par c et c', et l'on aura ainsi $ac' - ca'$.

Si les formules générales conduisent pour x et y à des valeurs positives ou négatives, ces valeurs satisferont nécessairement aux équations proposées, comme on peut s'en convaincre en remarquant qu'on arrive à des identités en substituant les valeurs générales de x et de y dans les deux équations $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$.

Mais les valeurs mises à la place des lettres a, b, c, a', b', c', peuvent conduire pour x et y à des valeurs *singulières* qu'il s'agit d'interpréter. Ces valeurs particulières se présenteront lorsque l'un des termes des expressions fractionnaires considérées ou tous les deux deviendront nuls.

152. 1°. *Considérons le cas où l'un des numérateurs ou tous les deux sont nuls, sans que le dénominateur commun le soit et sans que les équations proposées cessent de renfermer deux inconnues.*

Supposons d'abord qu'on ait $cb' - bc' = 0$, en même temps que $ac' - ca'$ et $ab' - ba'$ différents de zéro. La valeur de x sera nulle, la valeur de y sera égale à $\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$.

Revenons aux équations

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Je multiplie la première par b', la seconde par b : il vient

$$ab'x + bb'y = cb',$$
$$ba'x + bb'y = bc'.$$

On voit alors que les termes en y sont identiques dans les deux équations, ainsi que les termes indépendants, tandis que les coefficients de l'inconnue x sont différents. Les deux équations devant être satisfaites par les mêmes valeurs de x et de y, il faut nécessairement que la valeur de x soit égale à zéro.

On a dans ce cas

$$y = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}.$$

Mais si l'on introduit dans la formule générale $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$, la condition $cb' - bc' = 0$, en remplaçant c par $\frac{bc'}{b'}$, il vient aussi

$$y = \frac{ac' - \frac{bc'a'}{b'}}{ab' - ba'} = \frac{ab'c' - ba'c'}{b'(ab' - ba')} = \frac{c'(ab' - ba')}{b'(ab' - ba')} = \frac{c'}{b'}.$$

Les deux numérateurs seraient nuls, sans que le dénominateur commun le fût et sans que les deux équations cessassent de renfermer deux inconnues, si l'on avait

$$c = 0 \quad \text{et} \quad c' = 0.$$

Dans ce cas, les valeurs générales de x et de y seraient nulles toutes les deux. Les équations deviendraient

$$ax + by = 0,$$
$$a'x + b'y = 0.$$

Si l'on multiplie la première par b' et la seconde par b, on a

$$ab'x + bb'y = 0,$$
$$ba'x + bb'y = 0.$$

Les termes en y sont identiques, les coefficients de x sont différents, il faut donc que la valeur de x soit égale à zéro ; mais alors il en est forcément de même pour la valeur de y.

On voit, en résumé, que lorsque les formules générales conduisent à des valeurs nulles, ces valeurs sont admissibles comme toutes les autres valeurs positives ou négatives, et vérifient complétement les équations proposées.

On peut remarquer que les valeurs des inconnues sont nulles, lorsque les seconds membres des équations sont égaux à zéro ; et que la valeur de x seule est nulle, lorsque les coefficients de y et les seconds membres des équations sont proportionnels.

153. 2°. *Supposons maintenant que le dénominateur commun soit nul, sans qu'aucun des numérateurs le soit.*

Les valeurs de x et de y se présentent alors sous la forme

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{n}{0},$$

en posant à part

$$cb' - bc' = m, \quad ac' - ca' = n,$$

m et n étant des quantités positives ou négatives différentes de zéro. Ces symboles réunis n'ont pour nous aucune signification. Pour les interpréter, remontons aux équations. Il faut y introduire la condition

$$ab' - ba' = 0,$$

c'est-à-dire

$$ab' = ba' \quad \text{ou} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Pour cela, nous poserons

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = q,$$

et nous remplacerons dans la première équation a par $a'q$, b par $b'q$. Les équations proposées prendront alors la forme

$$\begin{aligned} a'qx + b'qy &= c, \\ a'x + b'y &= c'. \end{aligned}$$

Le premier membre de la première équation n'est autre chose que le produit par q du premier membre de la seconde. Il faudrait donc qu'on eût entre les seconds membres la même relation; mais puisque m et n sont différents de zéro, on ne peut avoir ni $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$, ni $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$, c'est-à-dire on ne peut pas avoir $\frac{c}{c'} = q$ ou $c = c'q$. Il est donc impossible que les deux équations soient satisfaites par les mêmes valeurs des inconnues. On dit alors qu'elles sont *incompatibles* ou *contradictoires*. Et les symboles $\frac{m}{0}$ et $\frac{n}{0}$ sont encore ici (125) le signe d'une impossibilité absolue.

Il faut remarquer que l'impossibilité tient à la réunion des deux équations; séparément, elles admettront au contraire chacune une infinité de solutions.

On voit que l'incompatibilité des deux équations proposées a lieu, lorsque les coefficients des inconnues dans les deux équations sont proportionnels, les seconds membres de ces équations étant quelconques, c'est-à-dire leur rapport n'étant pas égal au rapport commun des coefficients.

154. 3°. *Considérons enfin le cas où le dénominateur commun est nul, en même temps que l'un des numérateurs.*

Si l'on a

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{et} \quad cb' - bc' = 0,$$

on en déduit

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'},$$

c'est-à-dire qu'on a aussi

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \quad \text{ou} \quad ac' - ca' = 0.$$

La nullité du dénominateur commun, jointe à celle de l'un des numérateurs, entraîne donc en général la nullité du second numérateur; de sorte que les valeurs des deux inconnues se présentent sous la même forme et qu'on a

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Ces symboles réunis n'ont pour nous aucune signification. Pour les interpréter, remontons aux équations. Il faut y introduire les conditions

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{et} \quad cb' - bc' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Représentons cette suite de rapports égaux par q. Nous aurons

$$a = a'q, \quad b = b'q, \quad c = c'q.$$

Les deux équations prendront donc la forme

$$\begin{aligned} a'qx + b'qy &= c'q, \\ a'x + b'y &= c'. \end{aligned}$$

On voit alors que la première équation n'est que la seconde multipliée par q, c'est-à-dire que les deux équations proposées n'en font qu'une seule et rentrent l'une dans l'autre. On dit, dans ce cas, qu'elles sont *indéterminées* ou qu'elles forment un *système indéterminé* (**105**, **148**); et les symboles $\frac{0}{0}$ qu'on a obtenus, sont encore ici (**125**) le signe de l'indétermination.

L'indétermination des équations proposées a lieu, lorsque les coefficients des inconnues forment entre eux et avec les seconds membres une suite de rapports égaux.

Cas de trois équations à trois inconnues.

155. Soient trois équations générales du premier degré à trois inconnues :

$$ax + by + cz = d.$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Nous savons, d'après ce qui précède, que ces équations n'admettent, pour les inconnues x, y, z, qu'un seul système de valeurs. Nous allons trouver ces valeurs, sans les rattacher les unes aux autres, en suivant une nouvelle méthode d'élimination très-remarquable, connue sous le nom de méthode *des indéterminées*.

Multiplions les deux membres de la première équation par une quantité indéterminée m, dont nous nous réservons de fixer convenablement la valeur; multiplions les deux membres de la seconde équation par une seconde indéterminée p; ajoutons ensuite membre à membre les trois équations données. Nous trouverons

$$(am + a'p + a'')x + (bm + b'p + b'')y + (cm + c'p + c'')z$$
$$= dm + d'p + d''.$$

Nous pouvons alors, si nous voulons calculer x, profiter de l'indétermination des deux quantités m et p pour annuler les coefficients de y et de z. Posons

$$bm + b'p = -b'',$$
$$cm + c'p = -c'',$$

et nous trouverons immédiatement

$$x = \frac{dm + d'p + d''}{am + a'p + a''}.$$

Remarquons que le numérateur de la valeur de x ne diffère de son dénominateur que par le changement de a, a', a'', coefficients de x dans les trois équations, en d, d', d'', seconds membres correspondants.

Les deux équations entre m et p donnent d'ailleurs, d'après la règle générale indiquée (**151**),

$$m = \frac{b'c'' - c'b''}{bc' - cb'}, \quad p = \frac{cb'' - bc''}{bc' - cb'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de x et en multipliant les deux termes de cette expression par $bc' - cb'$, il

vient

$$x = \frac{d(b'c''-c'b'')+d'(cb''-bc'')+d''(bc'-cb')}{a(b'c''-c'b'')+a'(cb''-bc'')+a''(bc'-cb')}.$$

En rangeant les lettres d'après le nombre de leurs accents, on trouve

$$x = \frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

On pourait obtenir les valeurs de y et de z en suivant une marche analogue. Mais la forme des équations proposées montre qu'on déduira la valeur de y de celle de x, en *permutant* les lettres a et b sans toucher aux accents; de même la valeur de x donnera celle de z, si l'on permute dans l'expression de x les lettres a et c.

Comme les trois lettres a, b, c, entrent d'une manière identique dans le dénominateur de x, les changements indiqués ne modifieront dans ce dénominateur que l'arrangement des termes et leur signe. Mais on fera disparaître cette différence en changeant à la fois les signes du numérateur et du dénominateur des valeurs de y et de z. Les expressions des trois inconnues auront ainsi le même dénominateur. Les numérateurs de ces trois expressions se déduiront du dénominateur commun en remplaçant successivement les lettres a, b, c, par la lettre d, sans toucher aux accents. On aura

$$y = \frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z = \frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Il est facile de retrouver le dénominateur commun de ces formules générales. On n'a qu'à former les arrangements ab et ba, à faire passer la lettre c à toutes les places dans chacun d'eux : on obtiendra ainsi les termes

$$abc, \quad acb, \quad cab, \quad bac, \quad bca, \quad cba.$$

On devra ensuite affecter d'un accent la seconde lettre de chaque produit, et de deux accents la troisième lettre; puis, donner alternativement le signe + et le signe — aux résultats trouvés. On reformera ainsi le dénominateur commun

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''.$$

Les numérateurs se déduiront ensuite de ce dénominateur commun, en y remplaçant les coefficients de l'inconnue qu'on cherche par les seconds membres correspondants.

La loi qu'on vient d'énoncer est générale et se poursuit pour

un nombre quelconque d'équations du premier degré contenant un pareil nombre d'inconnues.

156. Nous ne discuterons pas les cas particuliers que les formules générales qu'on vient d'établir peuvent présenter. Dans chaque exemple spécial, l'examen des équations proposées permettra une interprétation directe. Nous nous bornerons à considérer le cas où les trois seconds membres sont égaux à zéro. Les équations sont alors

$$a\,x+b\,y+c\,z=0,$$
$$a'\,x+b'\,y+c'\,z=0,$$
$$a''x+b''y+c''z=0.$$

On déduit des deux premières

$$a\,x+b\,y=-cz,$$
$$a'x+b'y=-c'z,$$

d'où, en regardant z comme une quantité connue,

$$x=\frac{(bc'-cb')z}{ab'-ba'},$$
$$y=\frac{(ca'-ac')z}{ab'-ba'}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la troisième équation, elle devient

$$[a''(bc'-cb')+b''(ca'-ac')+c''(ab'-ba')]z=0,$$

c'est-à-dire

$$[ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'']z=0.$$

Si le dénominateur commun, coefficient de z dans l'équation obtenue, n'est pas nul, il faut que z soit égale à zéro, et il en est de même alors des valeurs de y et de x. Les formules générales conduisent au même résultat, puisque tous les termes de leurs numérateurs contiennent l'un des seconds membres d, d', d''.

Si le dénominateur commun est nul, l'équation en z se présente sous la forme $0.z=0$, et la valeur de z est indéterminée : il en est de même alors des valeurs de y et de x. Les formules générales conduisent encore au même résultat.

Ce qu'il faut remarquer, c'est que les valeurs des inconnues étant indéterminées, les rapports de deux d'entre elles à la troisième ne le sont pas. Les valeurs de x et de y écrites précé-

demment, donnent en effet

$$\frac{x}{z} = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

CHAPITRE V.

DISCUSSION DES PROBLÈMES. — INTERPRÉTATION DES VALEURS NÉGATIVES

157. Les valeurs négatives fournies par la résolution des équations satisfont toujours à ces équations, comme nous l'avons vu (**152**). Mais il y a lieu de distinguer entre les équations posées et le problème qui leur a donné naissance, parce que les résultats numériques obtenus à l'aide des équations peuvent n'avoir aucun sens par rapport aux grandeurs considérées dans le problème.

Ainsi, les valeurs positives elles-mêmes peuvent ne pas convenir à la question, si toutes les conditions du problème n'ont pas été introduites dans *la mise en équations*. Par exemple, il est impossible d'écrire que la valeur d'une inconnue doit être entière, précisément à cause de la généralité qui appartient aux symboles algébriques.

Les valeurs négatives peuvent être le signe d'une impossibilité absolue; mais elles sont souvent tout aussi admissibles que les valeurs positives et, dans certains cas, elles seules répondront à la question.

Enfin, les valeurs des inconnues peuvent se présenter sous la forme de symboles généraux qui nécessitent une interprétation particulière (**154, 155**).

Il est donc nécessaire de *discuter* les valeurs obtenues, quelles qu'elles soient, en les comparant à l'énoncé du problème. Cette discussion a de plus, comme nous le verrons, l'avantage de permettre de déduire d'un seul système de formules tous les cas particuliers d'une même question, en introduisant dans ces formules les hypothèses correspondantes.

158. Soit d'abord l'équation du premier degré à une inconnue,

$$Ax + B = A'x + B'.$$

Supposons qu'on trouve en la résolvant $x = -K$. On aura alors

$$A(-K) + B = A'(-K) + B'$$

ou

$$-AK + B = -A'K + B'.$$

Il en résulte que $x = K$ est racine de l'équation

$$-Ax + B = -A'x + B',$$

qui ne diffère de l'équation proposée que par le changement de x en $-x$.

Par suite, *quand deux équations du premier degré à une inconnue ne diffèrent que par le signe de cette inconnue, elles admettent la même racine sauf le signe.*

De même, si le système

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

est satisfait par les valeurs $x = k$, $y = -l$, on a

$$ak + b(-l) = c,$$
$$a'k + b'(-l) = c',$$

ou

$$ak - bl = c,$$
$$a'k - b'l = c'.$$

Il en résulte que $x = k$ et $y = +l$ sont racines du système qui ne diffère du système donné que par le changement de y en $-y$.

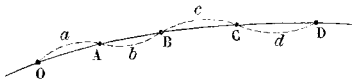
Le résultat indiqué est général. *Toutes les fois que deux systèmes ne diffèrent que par le changement de signe d'une ou de plusieurs inconnues, les racines sont les mêmes en valeur absolue : seulement les valeurs des inconnues qui ont changé de signes, ont aussi des signes différents.*

Mais l'équation ou le système déduit ainsi de l'équation ou du système donné par de simples changements de signes, peut correspondre au problème proposé entendu dans un sens plus général; et l'on voit par là que la possibilité de donner une interprétation rationnelle aux valeurs négatives trouvées, dépendra de la comparaison de l'énoncé avec le système modifié.

Montrons maintenant dans quel cas les valeurs négatives s'interprètent d'une manière toute naturelle et, pour ainsi dire, évidente; et, pour cela, étudions quelques questions particulières.

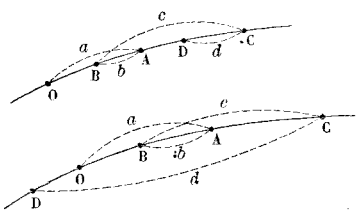
159. I. *Un mobile partant d'un point donné parcourt successivement sur une ligne donnée plusieurs longueurs données. On demande à quelle distance il se trouve, en dernier lieu, du point de départ.*

Supposons d'abord que le mobile parte du point O et qu'il marche, toujours en s'éloignant, à droite de ce point. Si l'on désigne par a, b, c, d, les longueurs OA, AB, BC, CD, successivement parcourues dans le sens indiqué, et par x la distance cherchée, on aura immédiatement



$$x = a + b + c + d.$$

Si, au contraire, le mobile marche tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, s'il parcourt la distance a en s'éloignant du point O, puis la distance b en s'en rapprochant, la distance c en s'en éloignant encore, et la distance d en revenant une seconde fois sur ses pas, la formule sera



$$x = a - b + c - d.$$

La valeur de x sera encore *positive*, si la dernière position D du mobile se trouve toujours *à droite* du point O ; mais cette valeur sera au contraire *négative* et évidemment égale à —OD, si le point D est à *gauche* du point O.

Ainsi, le point D étant à *droite* de l'origine *choisie* O, la valeur de l'inconnue x est *positive ;* le point D étant à *gauche* de l'origine *choisie*, la valeur de l'inconnue est *négative :* le changement de *signe* correspond au changement de *sens.*

La valeur négative s'introduit ici par le jeu même du calcul et alors elle a un sens tout aussi net que la valeur positive. On demande de compter une distance à partir d'un point donné : *c'est la position du point donné qui entraîne la possibilité d'une valeur négative.* En effet, si au lieu de prendre le point O pour origine, *on choisissait* un point S assez éloigné vers la gauche du point O, pour que le mobile dans ses plus grands écarts à gauche de ce point ne pût jamais dépasser la nouvelle origine, on n'obtiendrait jamais de solution négative. Appelons S la distance OS. Si l'on désigne toujours par x la distance finale du mobile au point O et par X sa distance finale au point S, on aura dans le premier cas considéré

$$X = S + x = S + a + b + c + d = S + OD,$$

et, dans le dernier,

$$X = S + x = S + a - b + c - d = S - OD.$$

Car, quand le mobile s'éloigne du point S, on doit ajouter la distance qu'il parcourt à la distance précédente ; et quand il

s'en rapproche, on doit la retrancher. La valeur de X est d'ailleurs toujours positive, puisque OD, par hypothèse, ne peut jamais égaler S lorsque le point D est situé à gauche du point O; la valeur de X est seulement plus grande ou plus petite que S. C'est-à-dire que la valeur de x est *additive* ou *soustractive*, suivant qu'elle est comptée à *droite* ou à *gauche* du point O. L'introduction d'une origine fictive S montre bien, dans ce cas, la dépendance qui existe entre le signe de l'inconnue et le sens dans lequel elle doit être comptée.

Nous dirons donc d'une manière générale que *lorsqu'une longueur est susceptible d'être comptée sur une même ligne, à partir d'un même point fixe, dans deux sens nettement différents, le changement de sens sera indiqué algébriquement par le changement de signe; de sorte que si l'on regarde et si l'on écrit comme positives dans les équations les longueurs comptées dans un certain sens, d'ailleurs arbitraire, les résultats négatifs indiqueront des longueurs comptées en sens contraire.*

Ainsi, le *zéro* du thermomètre étant pris pour point de départ des températures, $+25^\circ$ signifient 25 degrés *au-dessus* de zéro, et -25° signifient 25 degrés *au-dessous* de zéro.

De même, l'*équateur terrestre* étant considéré comme point de départ des latitudes, $+40^\circ$ de latitude signifient 40 degrés de latitude *Nord*, et -40° signifient 40 degrés de latitude *Sud*.

Si l'on applique ce qui précède, non-seulement aux inconnues, mais aux quantités données, on pourra réunir dans une seule formule les cas particuliers d'une même question; et les deux formules précédentes.

$$x = a + b + c + d,$$
$$x = a - b + c - d,$$

pourront être remplacées par la formule unique

$$x = a + b + c + d,$$

pourvu qu'on convienne de regarder comme négatives les quantités données ou inconnues, lorsqu'elles sont comptées vers la gauche, par exemple, et comme positives celles qui sont comptées vers la droite.

160. II. *On donne l'âge d'un père et celui de son fils : on demande à quelle époque le rapport des deux âges sera égal à m.*

J'appelle a l'âge du père, b celui du fils, x le nombre d'années cherché. L'équation du problème sera évidemment

$$\frac{a+x}{b+x} = m,$$

d'où

$$a + x = bm + mx \quad \text{ou} \quad x = \frac{a - bm}{m - 1}.$$

Le dénominateur de la valeur de x sera toujours positif, m étant toujours supérieur à 1; mais le numérateur de cette valeur sera positif ou négatif, et par suite la valeur de x sera positive ou négative suivant qu'on aura $a > bm$ ou $a < bm$.

Si l'on a $a > bm$, on aura aussi $\frac{a}{b} > m$. Or $\frac{a}{b}$ étant une expression fractionnaire, c'est-à-dire une quantité plus grande que 1, si l'on *augmente* ses deux termes d'une même quantité x, elle diminuera et, d'abord plus grande que m, pourra devenir égale à m : la solution aura lieu dans *l'avenir*, et x sera *positif*.

Si l'on a, au contraire, $a < bm$, on en déduira $\frac{a}{b} < m$. Si l'on ajoute aux deux termes de l'expression fractionnaire $\frac{a}{b}$ une même quantité, cette expression diminuera; actuellement plus petite que m, elle s'écartera de plus en plus de cette valeur à mesure qu'on marchera vers l'avenir. Mais, si l'on *retranche* une même quantité x aux deux termes de $\frac{a}{b}$, cette expression augmentera et, d'abord plus petite que m, pourra devenir égale à m. La solution correspondra donc à un temps *passé*, et x sera *négatif*.

Ainsi, l'époque demandée étant *postérieure* au moment présent, la valeur de x est *positive;* cette époque étant *antérieure* au moment présent, la valeur de x est *négative*.

La valeur négative s'introduit encore ici par le jeu même du calcul, et alors présente un sens tout aussi net que la valeur positive. On demande de compter les années à partir d'un instant donné : c'est le *choix* de cet instant qui entraîne la possibilité d'une valeur négative. En effet, si au lieu de prendre pour origine des temps le moment présent, on *choisissait* une ère quelconque rejetée assez loin dans le passé, on ne trouverait jamais pour x de valeur négative. Si le nombre d'années qui sépare l'ère adoptée du moment présent est représenté par N et si X est le nombre d'années qui sépare cette ère de l'instant cherché, on aura

$$X = N + x = N + \frac{a - bm}{m - 1}.$$

Si a est $> bm$, x sera *positif*, on *s'éloignera* de l'ère choisie. Si a est $< bm$, x sera *négatif*, on se *rapprochera* de la nouvelle origine; mais la valeur de X restera toujours positive, puisque par hypothèse la valeur absolue de x ne peut jamais égaler N. X sera seulement plus grand ou plus petit que N, c'est-à-dire que la valeur de x sera additive ou soustractive.

suivant qu'elle sera comptée vers l'avenir ou vers le passé. L'introduction d'une origine fictive montre encore bien dans ce cas la dépendance qui existe entre le signe de l'inconnue et le sens dans lequel elle doit être comptée.

Ainsi, *lorsqu'il s'agit d'un temps susceptible d'être compté vers l'avenir ou vers le passé, à partir d'un moment donné, l'Algèbre indique encore l'opposition de sens par l'opposition de signe.*

161. De là une règle fondamentale extrêmement importante, sur laquelle Descartes a basé sa géométrie analytique. Lorsqu'on se trouve dans les conditions indiquées plus haut, le changement de signe correspond au changement de sens, et réciproquement. Cette règle ne peut être directement démontrée ; mais elle se vérifie d'une manière constante, dans toutes les branches des sciences mathématiques.

162. Si la quantité considérée n'est pas susceptible d'être comptée en deux sens nettement différents, et si le signe + est affecté au seul sens rationnel, une solution négative correspond à une impossibilité absolue.

Soit le problème suivant : *Un chemin de fer prend a francs par tonne transportée et par kilomètre parcouru ; on paye en outre par wagon de p kilogrammes un droit fixe de a' francs : à quelle distance peut-on transporter c tonnes pour* A *francs ?*

J'appelle x la distance cherchée. On devra payer d'abord pour cette distance et pour les c tonnes transportées une somme acx. De plus, le quotient de c par p indiquera le nombre de wagons nécessaires au transport, quotient qu'il faudra multiplier par le droit fixe a'. On aura donc l'équation

$$acx + \frac{c}{p}.a' = \mathrm{A}.$$

On en déduit

$$x = \frac{\mathrm{A} - \frac{c}{p}.a'}{ac}.$$

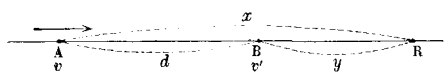
Si A est inférieur à $\frac{c}{p}.a'$, la valeur de x est négative et indique une impossibilité absolue, c'est-à-dire une absurdité dans l'énoncé. En effet, il s'agit d'une distance parcourue *commercialement*, et le *sens* de cette distance ne peut rien changer aux conditions fixées; le chemin de fer perçoit les mêmes droits, qu'il s'agisse d'un convoi *montant* ou *descendant*. Donner $\mathrm{A} < \frac{c}{p}.a'$, c'est donner pour acquitter la somme due au chemin de fer moins qu'il ne faut pour acquitter seulement

le droit fixe qui correspond au nombre de wagons demandé : l'absurdité est manifeste.

163. La convention générale indiquée (**161**), convention qui résulte des faits, simplifie extrêmement la résolution des problèmes. C'est ce que nous allons développer sur un exemple. Cet exemple renferme en outre tous les cas que la discussion spéciale d'un problème peut présenter.

Deux courriers sont en marche sur une même route depuis un temps indéterminé. Ils se trouvent à un même instant, l'un en un point A, *l'autre en un point* B *de cette route. On connaît la distance* AB $= d$, *on sait que le premier courrier parcourt* v *kilomètres par heure, que le second courrier en parcourt* v' *dans le même temps. On demande de déterminer l'instant et le lieu de la rencontre des deux courriers.*

Je supposerai qu'on compte les distances en kilomètres à partir du point A, et les temps en heures à partir du moment où les deux courriers sont ensemble, l'un au point A, l'autre au point B. Admettons que les deux courriers marchent dans le



même sens, de A vers B et au delà de B, et que leur rencontre ait lieu en R, à droite du point A. Désignons AR par x et BR par y; désignons par t le temps pendant lequel ces parcours s'effectuent. Puisque le premier courrier fait v kilomètres par heure, il parcourra en t heures vt kilomètres. On aura donc

$$x = vt.$$

On trouvera de même

$$y = v't.$$

Il est évident qu'on a d'ailleurs dans l'hypothèse admise :

$$x - y = d.$$

Substituons les valeurs de x et de y exprimées en fonction de t dans la troisième équation; elle deviendra

$$vt - v't = d,$$

d'où

$$t = \frac{d}{v - v'}.$$

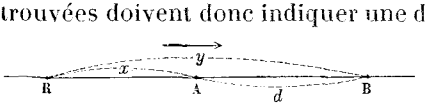
Par suite,

$$x = \frac{vd}{v - v'},$$

$$y = \frac{v'd}{v - v'}.$$

1°. Si l'on a $v > v'$, ces valeurs sont positives et satisfont à la fois aux équations et au problème. En effet, le premier courrier marchant plus vite que le second et gagnant sur lui, pour chaque heure écoulée, $v - v'$ kilomètres, finira nécessairement par l'atteindre en un point R situé à droite des deux points A et B où les deux courriers se trouvent simultanément à l'instant considéré.

2°. Si l'on a $v < v'$, les valeurs trouvées sont négatives : elles satisfont nécessairement aux équations; satisfont-elles au problème? Elles ne satisfont pas évidemment au problème tel qu'il est posé. Si v est $< v'$, le premier courrier marche moins rapidement que le second, l'avance que le second a déjà sur lui s'accroît, pour chaque heure écoulée de $v' - v$ kilomètres : les deux courriers ne pourront donc jamais se rencontrer à droite du point A et à partir de l'instant considéré. Mais on remarque que la distance du point de rencontre R aux points A et B est susceptible d'être comptée à droite ou à gauche de ces points, que l'instant de la rencontre peut de même être postérieur ou antérieur à l'instant considéré. Les valeurs négatives trouvées doivent donc indiquer une distance mesurée à gauche du point A ou du point B, un temps compté vers le passé. C'est ce que nous allons vérifier, en remettant le problème en équation dans cette nouvelle hypothèse. En conservant les mêmes notations, on aura dans ce cas



$$x = vt,$$
$$y = v't,$$
$$y - x = d.$$

Si l'on compare ce système au précédent

$$x = vt,$$
$$y = v't,$$
$$x - y = d,$$

on voit que les deux systèmes ne diffèrent que par le changement de signe des inconnues. En changeant x en $-x$, y en $-y$, t en $-t$, dans le premier système, on reproduit le second. Les valeurs négatives qui satisfont au premier système trouvé, satisferont donc au second système lorsqu'on les prendra positivement (158); c'est-à-dire qu'il y a bien eu une rencontre à gauche du point A et avant l'instant considéré.

Il sera en général inutile de faire la rectification indiquée, dans les cas analogues à celui que nous venons de traiter. *Il suffira de s'assurer que les changements de sens supposés ne*

font varier, dans les équations obtenues, que les signes des inconnues correspondantes, pour pouvoir interpréter immédiatement les solutions négatives.

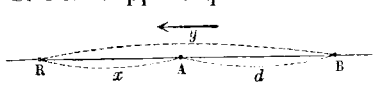
3°. Si l'on a $v = v'$, les valeurs trouvées se présentent toutes les trois sous la forme $\frac{m}{0}$. Si l'on considère alors les conditions du problème, on voit qu'il ne peut exister aucune réponse à la question. Car les deux courriers marchant aussi vite l'un que l'autre, seront toujours et ont toujours été séparés par la distance d. Leur rencontre n'a donc jamais eu lieu et ne sera jamais possible. *Le symbole* $\frac{m}{0}$ *est en général un signe d'impossibilité pour les équations et pour les problèmes qui leur ont donné naissance.*

4°. Si l'on a à la fois $v = v'$ et $d = 0$, les valeurs trouvées se présentent toutes les trois sous la forme $\frac{0}{0}$. Si l'on considère alors les conditions du problème, on voit que la réponse à la question est complétement arbitraire ou indéterminée. Car les deux courriers marchant aussi vite l'un que l'autre et se trouvant ensemble au point A, ont toujours été et seront toujours ensemble; de sorte que leur rencontre a lieu en un point quelconque et à un instant quelconque. *En général, le symbole* $\frac{0}{0}$ *est un signe d'indétermination pour les équations et pour les problèmes qui leur ont donné naissance.*

164. *Si les cas particuliers qu'on veut examiner ne diffèrent les uns des autres que par le changement de sens de certaines données, il suffit de trouver les formules qui résolvent un seul cas. En y changeant ensuite les signes des quantités qui changent de sens, on obtient les formules qui conviennent aux cas caractérisés par ces variations. Seulement, lorsque les valeurs des inconnues changent de signe, il faut les porter en sens contraire.*

Reprenons le problème précédent, et admettons que les distances positives correspondent toujours à la droite des points A et B, et les temps positifs à l'avenir.

Si l'on suppose que les deux courriers marchent dans le même sens, en se dirigeant de B vers A et au delà de A, au lieu de se diriger de A vers B, on devra dans les premières formules



changer v en $-v$, et v' en $-v'$, d conservera son signe. On obtiendra

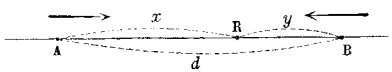
$$t = \frac{d}{v' - v},$$
$$x = \frac{-vd}{v' - v},$$
$$y = \frac{-v'd}{v' - v}.$$

Si v' est $> v$, t sera *positif*, x et y auront des valeurs *négatives :* la rencontre aura lieu *après* l'instant considéré et à *gauche* du point A.

Si v' est $< v$, t sera *négatif*, x et y auront des valeurs *positives :* la rencontre aura lieu *avant* l'instant considéré et à *droite* du point A.

C'est ce qu'on peut facilement vérifier en traitant directement la question.

Admettons en dernier lieu que les deux courriers marchent en sens contraires, le premier de A vers B, le second de B vers A. On

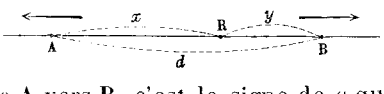


devra dans les formules initiales changer le signe de v' ; d et v conserveront les mêmes signes. Il viendra

$$t = \frac{d}{v + v'},$$
$$x = \frac{vd}{v + v'},$$
$$y = \frac{-v'd}{v + v'}.$$

t et x seront positifs, y sera négative. La rencontre aura toujours lieu *après* l'instant considéré, à *droite* du point A, à *gauche* du point B.

Si les deux courriers marchent en sens contraires, mais en se tournant le dos à partir des points A et B, c'est-à-dire si le premier courrier marche dans le sens de B vers A et le second dans le sens



de A vers B, c'est le signe de v qu'on devra changer. On obtiendra

$$t = \frac{d}{-(v + v')},$$
$$x = \frac{-vd}{-(v + v')} = \frac{vd}{v + v'},$$
$$y = \frac{v'd}{-(v + v')}.$$

t et y seront toujours négatifs, x toujours positive : la rencontre aura toujours lieu *avant* l'instant considéré, à *gauche* du point B et à *droite* du point A.

Les derniers résultats énoncés sont évidents.

165. En résumé : 1°. *Les solutions positives répondront généralement à la question, si le problème a été complétement mis en équations, c'est-à-dire si cette mise en équations renferme toutes les conditions de l'énoncé.*

2°. *Les solutions négatives indiquent généralement un changement de direction, de la droite vers la gauche ou de l'avenir vers le passé, lorsque les quantités considérées sont susceptibles d'une opposition parfaitement tranchée, comme dans les exemples qui précèdent.*

3°. *Les solutions négatives indiquent une impossibilité absolue et un vice dans l'énoncé, lorsque les quantités considérées ne sont pas susceptibles d'un changement de sens.*

4°. *Le symbole* $\frac{m}{0}$ *correspond à une impossibilité absolue et indique un vice dans l'énoncé.*

5°. *Le symbole* $\frac{0}{0}$ *correspond à une indétermination complète* (**126**).

6°. *Enfin, un problème ayant été résolu dans une certaine hypothèse, la formule trouvée permet de résoudre immédiatement les autres cas particuliers du même problème, lorsqu'ils ne diffèrent du premier cas résolu que par le changement de sens de certaines données : on n'a qu'à changer dans la formule obtenue les signes des quantités qui changent de sens. Si l'on trouve alors pour les inconnues des valeurs ayant des signes différents de ceux qui les affectaient d'abord, il faut porter ces valeurs en sens contraire du sens d'abord adopté, pourvu que ce changement de direction soit compatible avec la nature des grandeurs considérées* (**161, 162**).

166. Note. Nous avons dit que le symbole $\frac{m}{0}$ indiquait en général une impossibilité absolue. Dans certains cas cependant, il est une réponse très-nette à la question, précisément à cause de son caractère d'impossibilité.

Ainsi, si l'on applique l'Algèbre à la résolution d'un problème de Géométrie, et si l'on demande de déterminer la distance du point d'intersection de deux droites à un point donné sur l'une d'elles, le symbole $\frac{m}{0}$ indiquera le transport du point de rencontre à une distance infiniment grande, c'est-à-dire le *parallélisme* des deux droites (*voir* la *Géométrie plane*).

De même, si, cherchant analytiquement l'angle V de deux droites déterminées de direction par les constantes a et a', on trouve

$$\operatorname{tang} V = \frac{a' - a}{1 + aa'},$$

et si les constantes a et a' satisfont à la relation $1 + aa' = 0$, on aura

$$\operatorname{tang} V = \frac{a' - a}{0} = \infty ;$$

ce qui indiquera que l'angle des lignes considérées est *droit* (*voir* la *Trigonométrie*).

167. Il est important de remarquer que, quel que soit le nombre des inconnues d'un problème et quelle que soit la simplicité des relations qui peuvent exister entre quelques-unes d'entre elles, il faut se garder de faire l'élimination de tête de manière à réduire immédiatement le nombre des inconnues et des équations. Le calcul n'en est presque pas plus simple, les erreurs sont plus faciles à commettre et, c'est là une raison décisive pour ne pas employer cette prétendue simplification, la discussion du problème devient plus obscure et plus pénible à cause des équations et des inconnues supprimées.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES INÉGALITÉS.

Principes généraux relatifs aux inégalités.

168. On dit que la quantité A est plus grande que la quantité B, lorsque la différence de ces deux quantités est positive. Dans le cas contraire, la quantité A est plus petite que la quantité B.

Il résulte de cette définition que *toute quantité positive est plus grande que zéro, que toute quantité négative est plus petite que zéro, et d'autant plus petite, qu'elle est plus grande en valeur absolue.*

Ainsi, l'on aura $5 > 0$; $-3 < 0$; $-3 > -7$; parce que

$$5 - 0 = 5; \quad -3 - 0 = -3; \quad -3 - (-7) = 4.$$

Nous allons parcourir les principes généraux auxquels le calcul des inégalités se trouve soumis.

169. I. *On peut ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres d'une inégalité, sans en changer le sens.*

Si l'on a $A > B$, on aura $A + m > B + m$; car si la différence $A - B$ est positive, il en sera de même de la différence $(A + m) - (B + m)$.

II. *On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par une quantité positive, sans en changer le sens.*

Si l'on a $A > B$, on aura $Am > Bm$, m étant une quantité positive. En effet, si l'on a $A - B > 0$, on aura aussi $(A - B)m$ ou $Am - Bm > 0$, puisqu'on ne change pas le signe d'une quantité en la multipliant par une quantité positive.

Le cas de la multiplication renferme celui de la division : multiplier par $\frac{1}{p}$ revient à diviser par p.

III. *Si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres d'une inégalité par une quantité négative, il faut renverser le sens de l'inégalité.*

Si l'on a $A - B > 0$ et si m est une quantité négative on aura

$$(A - B)m < 0,$$

parce que le produit $(A - B)m$ aura un signe contraire à celui de $A - B$.

170. IV. *On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens, on ne peut pas les retrancher.*

Si l'on a $A > B$ et $C > D$, on en déduira

$$A + C > B + D;$$

car on a

$$A - B > 0 \quad \text{et} \quad C - D > 0,$$

d'où

$$(A - B) + (C - D) > 0,$$

c'est-à-dire

$$(A + C) - (B + D) > 0.$$

Si l'on retranche membre à membre les deux inégalités proposées, pour savoir le sens de l'inégalité résultante, il faut opérer sur un exemple numérique On ne sait pas d'avance dans quel rapport la différence $A - C$ peut être avec la différence $B - D$.

V. *On peut retrancher membre à membre deux inégalités de sens contraire, on ne peut pas les ajouter.*

Si l'on a $A > B$ et $C < D$, je dis qu'on aura

$$A - C > B - D.$$

En effet, puisqu'on a $A - B > 0$ et $D - C > 0$, on a aussi

$$(A - B) + (D - C) > 0,$$

c'est-à-dire

$$(A - C) - (B - D) > 0.$$

Si l'on ajoute membre à membre les deux inégalités considérées, pour savoir le sens de l'inégalité résultante, il faut opérer sur un exemple numérique ; car on ne sait pas d'avance si $A + C$ l'emportera sur $B + D$ ou si l'inverse aura lieu.

171. VI. *On peut multiplier membre à membre plusieurs inégalités de même sens, pourvu qu'elles aient lieu entre quantités positives.*

Si l'on a $A > B$, $A' > B'$, $A'' > B''$, on en déduira

$$AA'A'' > BB'B''.$$

En effet, considérons d'abord les deux premières inégalités. On en tire $A - B > 0$ et $A' - B' > 0$. Par suite, on a

$$(A - B)A' > 0 \quad \text{et} \quad (A' - B')B > 0.$$

Il en résulte

$$(A - B)A' + (A' - B')B > 0,$$

c'est-à-dire

$$AA' - BB' > 0.$$

Si l'on a $AA' > BB'$ et $A'' > B''$, on en déduira alors

$$AA'A'' > BB'B''.$$

On voit que la démonstration serait en défaut, si les quantités considérées n'étaient pas toutes positives.

Comme rien n'empêche de supposer tous les premiers membres des inégalités données égaux entre eux, ainsi que leurs seconds membres, on voit qu'on peut élever à une même puissance les deux membres d'une inégalité lorsqu'ils sont positifs. De $A > B$ on déduira $A^m > B^m$.

Réciproquement, de $A^m > B^m$ on pourra déduire $A > B$, en supposant A et B pris positivement.

On ne peut pas multiplier membre à membre deux inégalités de sens contraire. Si l'on $A > B$ et $C < D$, on ne sait pas d'avance si AC sera supérieur ou inférieur à BD.

VII. *On peut diviser membre à membre deux inégalités de sens contraire, lorsqu'elles ont lieu entre quantités positives.*

Si l'on a $A > B$ et $C < D$, on en déduit

$$AD > BC \quad \text{et} \quad \frac{AD}{CD} > \frac{BC}{CD},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A}{C} > \frac{B}{D}.$$

La démonstration serait en défaut si les quantités considérées n'étaient pas toutes positives.

On ne peut pas diviser membre à membre deux inégalités de même sens. Si l'on a $A > B$ et $C > D$, on ne sait pas d'avance si $\frac{A}{C}$ l'emportera ou non sur $\frac{B}{D}$.

172. Comme application, proposons-nous de démontrer que *si les expressions* $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, $\frac{a'''}{b'''}$, *sont rangées par ordre de grandeur croissante, l'expression* $\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}$ *tombe entre les expressions extrêmes* $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'''}{b'''}$.

Je supposerai que les dénominateurs b, b', b'', b''', sont tous positifs, condition qu'on peut toujours remplir, en changeant, s'il est nécessaire, les signes des deux termes de l'expression fractionnaire considérée.

Ceci admis, posons $\frac{a}{b} = q$. On aura

$$\frac{a'}{b'} > q, \quad \frac{a''}{b''} > q, \quad \frac{a'''}{b'''} > q.$$

Il en résulte

$$a = bq, \quad a' > b'q, \quad a'' > b''q, \quad a''' > b'''q,$$

puisqu'on peut multiplier par une même quantité positive les deux membres d'une inégalité.

On peut ajouter membre à membre les trois inégalités qu'on vient d'écrire, puisqu'elles sont de même sens; on peut ajouter aussi une même quantité $a = bq$ aux deux membres de l'inégalité résultante. On a donc le droit de poser

$$a + a' + a'' + a''' > (b + b' + b'' + b''')q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''} > q \quad \text{ou que} \quad \frac{a}{b}.$$

En posant $\frac{a'''}{b'''} = q'$, d'où l'on déduirait

$$\frac{a}{b} < q', \quad \frac{a'}{b'} < q', \quad \frac{a''}{b''} < q',$$

on prouverait de même qu'on a

$$\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''} < q' \quad \text{ou que} \quad \frac{a'''}{b'''}.$$

Inégalités du premier degré à une ou deux inconnues.

173. Lorsqu'une égalité renferme une inconnue au premier degré, on peut déduire de cette inégalité une *limite* supérieure ou inférieure que l'inconnue considérée ne devra pas dépasser dans un sens ou dans l'autre.

Il est évident qu'on ne change pas les valeurs des inconnues qui satisfont à une inégalité donnée, en lui faisant subir les changements précédemment indiqués (**169**). Par conséquent, on pourra, pour ces inégalités comme pour les équations, transposer des termes d'un membre dans l'autre à la condition de changer leurs signes; on pourra aussi chasser les dénominateurs ou supprimer les facteurs communs de la même manière, en ayant soin de renverser le sens de l'inégalité si le dénominateur commun ou le facteur commun supprimé est négatif. Nous supposons que le dénominateur commun ou le facteur commun ne renferme pas les inconnues.

174. Quelle que soit l'inégalité proposée, on pourra toujours la ramener à la forme

$$Ax + B > A'x + B'.$$

On en déduira

$$Ax - A'x > B' - B,$$

d'où

$$(A - A')x > B' - B,$$

c'est-à-dire

$$x > \frac{B' - B}{A - A'}, \quad \text{si } A \text{ est supérieur à } A',$$

et

$$x < \frac{B' - B}{A - A'}, \quad \text{si } A \text{ est inférieur à } A'.$$

Dans le premier cas, $\frac{B' - B}{A - A'}$ est une *limite inférieure* de x : x peut recevoir toutes les valeurs plus grandes, mais aucune plus petite. On dit alors que $\frac{B' - B}{A - A'}$ est un *minimum* de x.

Dans le second cas, $\frac{B' - B}{A - A'}$ est une limite supérieure de x : x peut recevoir toutes les valeurs plus petites, mais aucune plus grande. On dit alors que $\frac{B' - B}{A - A'}$ est un *maximum* de x.

175. Si x doit satisfaire à plusieurs inégalités et si elles donnent des limites de même sens, on n'a évidemment besoin

que de considérer la plus petite ou la plus grande de ces limites. Si l'on trouve $x > a$, $x > b$, $x > c$, et si c est la plus grande des trois quantités a, b, c, la valeur c représentera le minimum de x. Si l'on trouve au contraire $x < a'$, $x < b'$, $x < c'$, et si c' est la plus petite de ces trois quantités, pour que toutes les conditions imposées soient remplies, il faut regarder c' comme le maximum de x.

Si l'on obtient à la fois $x > m$ et $x < p$, et si p surpasse m, on en conclut que x ne peut recevoir que les valeurs *comprises* entre ces deux limites : m est son minimum, p son maximum.

Si l'on obtient à la fois $x > m$ et $x < p$, mais si p est inférieur à m, les deux conditions imposées sont *contradictoires :* il n'y a pour x aucune valeur possible.

176. S'il s'agit de deux inégalités du premier degré à deux inconnues, il faut remarquer que l'on peut bien conclure, des inégalités $A > B$ et $C > D$, l'inégalité

$$A + C > B + D;$$

c'est-à-dire que les valeurs des inconnues qui rendent $A > B$ et $C > D$ rendront aussi $A + C > B + D$. Mais l'on ne peut pas affirmer que les deux systèmes

$$A > B,$$
$$C > D,$$

d'une part, et

$$A > B,$$
$$A + C > B + D,$$

de l'autre, soient équivalents, parce qu'on ne peut pas conclure du second système la condition $C > D$ (**170**, IV). *On ne pourra donc plus opérer comme pour les équations, par voie d'addition ou de soustraction.*

Si l'on a, par exemple, les deux inégalités

$$4x - 3y > 11,$$
$$7y - 2x > 3,$$

on en déduira :

$$x > \frac{11 + 3y}{4} \quad \text{et} \quad x < \frac{7y - 3}{2}.$$

On pourra donc donner à y une valeur arbitraire, à la condition de ne donner en même temps à x qu'une valeur comprise entre les deux limites indiquées.

Pour que ces deux limites ne soient pas contradictoires, il

faut d'ailleurs qu'on ait

$$\frac{7y-3}{2} > \frac{11+3y}{4},$$

d'où

$$14y-6 > 11+3y \quad \text{et} \quad y > \frac{17}{11}.$$

y pourra donc passer par toutes les valeurs plus grandes que $\frac{17}{11}$ et, pour chaque valeur de y, on sera maître de remplacer x par toutes les valeurs comprises entre les deux limites $\frac{11+3y}{4}$ et $\frac{7y-3}{2}$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Un renard poursuivi par un lévrier a 60 sauts d'avance : il en fait 9 pendant que le lévrier en fait 6; mais 3 sauts du lévrier en valent 7 du renard. Au bout de combien de sauts le lévrier atteindra-t-il le renard? (72 sauts.)

Il faut prendre pour unité de longueur le saut du lévrier.

II. Trouver une proportion dont les quatre termes surpassent quatre nombres donnés a, b, c, d, d'une même quantité.

III. Trouver une fraction telle, que si l'on augmente ses deux termes de 3, elle devienne égale à $\frac{5}{7}$, et que si on les diminue de 1, elle devienne égale à $\frac{2}{3}$. $\left(\frac{17}{25}.\right)$

IV. Trouver un nombre qui soit un multiple de 7 plus 2, un multiple de 9 moins 5, et tel, que son quotient par 7 surpasse de 3 unités son quotient par 9. (121.)

V. Un bassin est alimenté par deux tuyaux de conduite. Le premier coulant pendant 7 heures et le second pendant 9 heures, on obtient 189 mètres cubes d'eau. Si l'on ouvre le premier tuyau pendant 4 heures et le second pendant 5 heures, on obtient 107 mètres cubes d'eau. On demande la quantité d'eau fournie par chaque tuyau en 1 heure. (18 mètres cubes, 7 mètres cubes.)

VI. Résoudre le système

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58,$$

$$\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76,$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7z}{40}=\frac{174}{5}.$$

($x = 10,6$. $y = 41,9$. $z = 182,1$.)

VII. Résoudre le système

$$3,14x - 7,13y + 2,05z = 7,431,$$
$$0,9\ x + 4,21y - 1,04z = 3,993,$$
$$2,57x - 0,84y + 2,11z = 10,418.$$

$(x = 2,94, \quad y = 0,73, \quad z = 1,62.)$

VIII. Résoudre le système

$$ax + by = 2ab,$$
$$bx + ay = a^2 + b^2.$$

$(y = a, \quad x = b.)$

IX. Résoudre le système

$$ax - by + cz = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$bx + ay - cz = a^2 + b^2 - c^2,$$
$$-ax + by + cz = c^2 - a^2 - b^2.$$

$(x = a + b, \quad y = a - b, \quad z = c.)$

X. Pour qu'une fraction de la forme $\frac{Ax + B}{A'x + B'}$ soit indépendante de x, quelle relation doit exister entre les coefficients constants?

XI. Pour qu'une fraction de la forme $\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'}$ soit indépendante de x et de y, à quelles relations doivent satisfaire les coefficients constants?

XII. Inscrire un rectangle de périmètre donné $2p$ dans un triangle de base b et de hauteur h.

XIII. Deux points F, F′, étant situés à une distance $2c$ l'un de l'autre, et un point M satisfaisant à la condition

$$FM + F'M = 2a,$$

a étant une constante supérieure à c, trouver entre quelles limites peut varier FM.

XIV. Résoudre le système

$$ax - by = 2(a^2 + b^2),$$
$$(a - b)(x - a) + (a + b)(y + b) = 2(a^2 - b^2),$$

et vérifier les valeurs obtenues.

$(x = 2a + b, \quad y = a - 2b.)$

LIVRE TROISIÈME.

LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

Transformation des expressions irrationnelles du second degré.

177. Nous rappellerons plusieurs règles connues, en les appliquant aux radicaux du second degré.

1°. On élève un monôme au carré en élevant son coefficient au carré et en doublant les exposants des lettres qui y entrent; on extrait la racine carrée d'un monôme en extrayant la racine carrée de son coefficient et en divisant par 2 les exposants des lettres qui y entrent.

2°. On élève au carré un produit de plusieurs facteurs, en élevant chacun d'eux au carré; on extrait la racine carrée d'un produit de plusieurs facteurs, en extrayant la racine carrée de chacun d'eux.

3°. On fait entrer un facteur sous un radical carré en élevant ce facteur au carré; on fait sortir un facteur d'un radical carré, en extrayant la racine carrée de ce facteur.

4°. On élève une fraction au carré, en élevant ses deux termes au carré; on en extrait la racine carrée, en extrayant la racine carrée de ses deux termes.

5°. On élève un radical carré à une puissance, en élevant à cette puissance la quantité qu'il recouvre.

6°. On extrait la racine d'un radical carré, en multipliant son indice par celui de la racine à extraire.

7°. On élève un binôme au carré, en formant le carré du premier terme, le double produit du premier terme par le second, le carré du second terme. Il en résulte qu'*on peut trouver les deux termes d'un binôme, lorsqu'on connaît les deux premiers termes de son carré. On obtient le premier terme du binôme, en extrayant la racine carrée du premier terme de son carré; on obtient son second terme en divisant le second terme de son carré par le double de la racine carrée du premier terme de ce carré.*

Ainsi, les deux premiers termes du carré d'un binôme étant x^2+px, le premier terme du binôme sera $\sqrt{x^2}$ ou x, le second terme sera $\frac{px}{2x}$ ou $\frac{p}{2}$.

8°. Le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités. On a

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b.$$

9°. La racine carrée d'une quantité positive est susceptible d'un double signe. On a $\sqrt{4}=\pm 2$, parce que $+2$ ou -2 élevé au carré reproduit 4.

10°. La racine carrée d'une quantité négative n'est susceptible d'aucune expression positive ou négative : c'est une quantité *imaginaire*. $\sqrt{-4}$ est une quantité imaginaire. On peut l'écrire $\sqrt{4\times -1}$. Si l'on convient alors d'appliquer aux expressions de cette forme les mêmes règles de calcul qu'aux radicaux carrés recouvrant des quantités positives, on pourra extraire séparément la racine de chaque facteur et poser

$$\sqrt{4\times -1}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}.$$

On voit qu'on peut ainsi toujours réduire le signe d'imaginarité au symbole $\sqrt{-1}$. On représente généralement ce symbole par la lettre i. On a donc

$$\sqrt{-4}=2i.$$

178. Lorsqu'il s'agit d'expressions fractionnaires irrationnelles, on les transforme ordinairement de manière que leur dénominateur soit rationnel (*Arith.*, 208, 219).

Soit l'expression $\frac{a}{m\sqrt{b}}$. On multipliera haut et bas par $\sqrt{b}$: il viendra $\frac{a\sqrt{b}}{mb}$.

Soit l'expression $\frac{a}{m\sqrt{b}+p\sqrt{c}}$. On multipliera haut et bas par $m\sqrt{b}-p\sqrt{c}$. Il viendra

$$\frac{a(m\sqrt{b}-p\sqrt{c})}{(m\sqrt{b}+p\sqrt{c})(m\sqrt{b}-p\sqrt{c})}=\frac{a(m\sqrt{b}-p\sqrt{c})}{m^2b-p^2c}\ (177,\ 8°).$$

Soit enfin l'expression $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$. On multipliera haut et

bas par $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Il viendra

$$\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{a+2\sqrt{ab}+b-c}.$$

On multipliera encore les deux termes de l'expression obtenue par $a+b-c-2\sqrt{ab}$: on trouvera

$$\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c+2\sqrt{ab})(a+b-c-2\sqrt{ab})},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

La marche que nous venons d'indiquer est évidemment générale.

Formules générales de résolution des équations du second degré à une inconnue.

179. Une équation du second degré à une inconnue peut contenir des termes en x^2, des termes en x, des termes indépendants de x; si l'on réunit dans le premier membre de l'équation tous les termes, la forme la plus générale d'une équation du second degré à une inconnue sera

$$ax^2+bx+c=0.$$

a, b, c, sont des quantités positives ou négatives, littérales ou numériques, monômes ou polynômes.

Considérons d'abord le cas où l'on a $b=0$. Il reste

$$ax^2+c=0,$$

d'où

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Puisque l'inconnue x élevée au carré doit reproduire $-\frac{c}{a}$, x représente la racine carrée de $-\frac{c}{a}$; on a donc (**177**, 9°)

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Les deux solutions obtenues sont les *racines* de l'équation

$$ax^2+c=0:$$

on voit maintenant pourquoi on a employé cette expression pour désigner les solutions des équations de tous les degrés.

180. Passons à l'équation générale, et ramenons sa résolution à celle de l'équation précédente. On peut diviser les deux membres de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

par le coefficient a du premier terme : il vient

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Posons $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$. L'équation prend la forme

$$x^2 + px + q = 0.$$

Faisons passer le terme indépendant dans le second membre, nous aurons

$$x^2 + px = -q.$$

On peut toujours considérer les deux termes $x^2 + px$ comme les deux premiers termes du carré d'un binôme facile à former (**177**, 7°). Ce binôme est égal à $x + \frac{p}{2}$. Complétons dans le premier membre le carré de ce binôme en ajoutant aux deux membres de l'équation la quantité $\frac{p^2}{4}$. Il viendra

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

c'est-à-dire

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

L'équation est ainsi ramenée à la forme précédemment examinée (**179**). $\left(x + \frac{p}{2}\right)$ élevée au carré doit reproduire la quantité $\frac{p^2}{4} - q$; on a donc

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

d'où

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Lorsque l'équation du second degré à une inconnue est considérée sous la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

la règle à suivre pour obtenir les racines de l'équation est donc celle-ci :

L'expression de x est égale à la moitié du coefficient du second terme de l'équation pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du carré de cette moitié diminué du terme indépendant pris avec son signe.

Si l'on applique cette règle à l'équation

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

on obtient immédiatement

$$x = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3;$$

désignons par x' et x'' les deux racines; nous aurons en les séparant

$$x' = 1 \quad \text{et} \quad x'' = -5.$$

181. Si l'on veut trouver une formule générale qui réponde à la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

il suffit de remplacer p par $\frac{b}{a}$ et q par $\frac{c}{a}$ dans la formule précédente. Il vient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

c'est-à-dire

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Par conséquent, lorsque l'équation est sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la valeur de x est égale au coefficient du second terme de l'équation pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du carré de ce même coefficient diminué du quadruple produit du terme indépendant par le coefficient du premier terme, le tout divisé par le double de ce coefficient.

Si l'on applique cette règle à l'équation

$$2x^2 + x - 6 = 0,$$

on obtient immédiatement

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}.$$

Désignons par x' et x'' les deux racines; nous aurons en les

séparant

$$x' = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

$$x'' = \frac{-8}{4} = -2.$$

182. Lorsque, dans l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le coefficient b est divisible par 2, la formule précédente est susceptible d'une petite simplification. Posons $b = 2b'$, la formule deviendra

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}.$$

On pourra diviser alors par 2 les deux termes de cette expression; pour diviser le radical par 2, il faudra diviser par 4 la quantité placée sous ce signe. On aura

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Si l'on applique cette formule à l'équation

$$4x^2 - 8x - 21 = 0,$$

on obtient immédiatement

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{4} = \frac{4 \pm 10}{4}.$$

Désignons par x' et x'' les deux racines; nous aurons en les séparant

$$x' = \frac{14}{4} = \frac{7}{2},$$

$$x'' = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

183. On peut résoudre directement l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Faisons passer le terme indépendant dans le second membre, nous aurons

$$ax^2 + bx = -c.$$

Les deux termes $ax^2 + bx$ peuvent être considérés comme les deux premiers termes du carré du binôme $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$. Complétons dans le premier membre le carré de ce binôme en

ajoutant aux deux membres de l'équation la quantité $\frac{b^2}{4a}$: il viendra

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2}{4a} - c,$$

d'où

$$\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

On en déduit

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}},$$

c'est-à-dire

$$x\sqrt{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

On doit supposer, en effectuant ce calcul, que le coefficient a est positif; ce qui est toujours permis, puisqu'on le rendra tel, s'il est négatif, en changeant les signes de tous les termes de l'équation.

Remarques sur la nature des racines des équations du second degré.

184. Considérons la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

qui correspond à la forme

$$x^2 + px + q = 0.$$

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q > 0$, les deux racines

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{et} \quad x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

seront évidemment *réelles et inégales*. (Les quantités positives et négatives constituent les quantités algébriques réelles par opposition aux quantités imaginaires.) Dans ce cas, *le premier membre de l'équation équivaut à la différence de deux carrés*.

En effet, si $\frac{p^2}{4} - q$ est plus grand que zéro, on peut poser

$$\frac{p^2}{4} - q = K^2,$$

quantité positive quel que soit K, pourvu qu'il soit réel. On dé-

duit de cette relation

$$q = \frac{p^2}{4} - K^2,$$

et l'équation proposée devient

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - K^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - K^2 = 0.$$

On peut l'écrire alors sous la forme

$$\left(x + \frac{p}{2} + K\right)\left(x + \frac{p}{2} - K\right) = 0.$$

Pour qu'un produit soit nul, il suffit que l'un de ses facteurs soit nul, les autres ayant des valeurs finies. On est ainsi conduit aux relations

$$x + \frac{p}{2} + K = 0, \quad x + \frac{p}{2} - K = 0;$$

ce qui ramène aux racines déjà trouvées.

185. Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q = 0$, les deux racines x' et x'' se réduisent à $x = -\frac{p}{2}$: elles deviennent *égales*. On continue de dire cependant que l'équation admet deux racines. Dans ce cas, *le premier membre de l'équation est un carré parfait*, puisqu'on obtient, en remplaçant q par sa valeur $\frac{p^2}{4}$,

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0.$$

On peut écrire alors l'équation sous la forme

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0,$$

et les deux facteurs égalés à zéro donnent tous deux

$$x = -\frac{p}{2}.$$

186. Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q < 0$, les deux racines x' et x'' sont *imaginaires*, puisque la quantité placée sous le radical est négative.

Le premier membre de l'équation équivaut alors à la somme de deux carrés. En effet, si $\frac{p^2}{4} - q$ est plus petit que zéro, on

peut poser

$$\frac{p^2}{4} - q = -K^2,$$

quantité essentiellement négative quel que soit K, pourvu qu'il soit réel. On déduit de cette relation $q = \frac{p^2}{4} + K^2$, et l'équation devient

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + K^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + K^2 = 0.$$

La somme de ces deux carrés sera toujours positive, quelle que soit la valeur réelle attribuée à x. On voit pourquoi l'Algèbre conduit dans ce cas aux symboles imaginaires.

Si dans la formule générale

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

on remplace $\frac{p^2}{4} - q$ par $-K^2$, on obtient

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-K^2} = -\frac{p}{2} \pm K\sqrt{-1},$$

c'est-à-dire

$$x = -\frac{p}{2} \pm K i \quad (\mathbf{177}, 10^\circ).$$

On voit que les quantités imaginaires du second degré sont de la forme $x = a \pm bi$, a et b étant des quantités réelles quelconques. On soumet ces expressions aux mêmes règles de calcul que les expressions réelles, en convenant seulement de remplacer dans les résultats obtenus i^2 par -1 : c'est étendre à $\sqrt{-1}$ la définition ordinaire de la racine carrée d'un nombre.

187. Si l'on avait considéré la formule plus générale

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

on aurait été conduit à des conclusions identiques à celles que nous venons d'indiquer, en considérant successivement les conditions

$$b^2 - 4ac > 0, \quad b^2 - 4ac = 0, \quad b^2 - 4ac < 0.$$

En résumé, l'équation du second degré à une inconnue a toujours deux racines. Ces racines peuvent être : 1° *réelles et inégales ;* 2° *réelles et égales ;* 3° *imaginaires.*

Exemples.

188. 1°. *Soit proposé de résoudre l'équation*

$$\frac{a+b}{x-a}+\frac{a-b}{x-3b}=\frac{3}{2}.$$

Je chasse les dénominateurs; mais j'ai soin de conserver à part le dénominateur commun $2(x-a)(x-3b)$. Il vient

$$2(a+b)(x-3b)+2(a-b)(x-a)=3(x-a)(x-3b),$$

d'où

$$\begin{aligned}&2ax+2bx-6ab-6b^2+2ax-2bx-2a^2+2ab\\&\quad=3x^2-3ax-9bx+9ab.\end{aligned}$$

En simplifiant et en ramenant l'équation à la forme générale, on a

$$3x^2-(7a+9b)x+2a^2+13ab+6b^2=0,$$

d'où

$$x=\frac{7a+9b\pm\sqrt{(7a+9b)^2-4.3.(2a^2+13ab+6b^2)}}{6}.$$

En effectuant les calculs sous le radical, on trouve

$$x=\frac{7a+9b\pm\sqrt{25a^2-30ab+9b^2}}{6}.$$

La quantité placée sous le radical étant le carré du binôme $5a-3b$, on a enfin

$$x=\frac{7a+9b\pm(5a-3b)}{6}.$$

En séparant les racines, on peut écrire

$$x'=2a+b,\quad x''=\frac{a+6b}{3}.$$

Ces valeurs n'annulent pas le dénominateur commun supprimé $2(x-a)(x-3b)$, elles vérifient d'ailleurs l'équation proposée : ce sont donc les racines cherchées (**129**).

2°. *Soit proposé de résoudre l'équation*

$$\sqrt{a+x}=1+\sqrt{b+x},$$

et d'appliquer la formule générale obtenue aux données

$$a=7,\quad b=2.$$

Pour faire disparaître les radicaux, il faut élever deux fois de suite au carré. On obtient d'abord

$$a+x=1+b+x+2\sqrt{b+x},$$

d'où

$$2\sqrt{b+x} = a - b - 1.$$

En élevant encore au carré, il vient

$$4(b+x) = (a-b-1)^2,$$

d'où

$$x = \frac{(a-b-1)^2 - 4b}{4}.$$

Comme nous avons élevé au carré, la racine trouvée pourrait ne pas satisfaire à l'équation proposée (**112**, **117**). Vérifions cette racine. Si on la substitue à la place de x dans l'équation, on a

$$\sqrt{a + \frac{(a-b-1)^2 - 4b}{4}} = 1 + \sqrt{b + \frac{(a-b-1)^2 - 4b}{4}}.$$

Le premier radical revient à

$$\sqrt{\frac{4a - 4b + (a-b-1)^2}{4}} \quad \text{ou à} \quad \sqrt{\frac{4(a-b) + (a-b-1)^2}{4}}.$$

Si l'on considère $(a-b-1)^2$ comme le carré du binôme $(a-b)-1$, il viendra

$$\sqrt{\frac{4(a-b) + (a-b)^2 - 2(a-b) + 1}{4}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2 + 2(a-b) + 1}{4}}.$$

La quantité placée sous le radical représente le carré de $\frac{(a-b)+1}{2}$, c'est-à-dire que ce radical équivaut à la fraction $\frac{a-b+1}{2}$. Le second radical $\sqrt{b + \frac{(a-b-1)^2 - 4b}{4}}$ n'est évidemment autre chose que la fraction $\frac{a-b-1}{2}$. On doit donc avoir

$$\frac{a-b+1}{2} = 1 + \frac{a-b-1}{2},$$

égalité évidente.

Si l'on fait dans la formule générale $a = 7$ et $b = 2$, la valeur particulière de x est

$$x = \frac{(7-2-1)^2 - 8}{4} = 2.$$

Substituée dans l'équation

$$\sqrt{7+x} = 1 + \sqrt{2+x},$$

elle donne l'identité

$$\sqrt{9} = 1 + \sqrt{4}.$$

3°. *Résoudre l'équation*

$$(x^2+2x-35)(x^2-x-6)=0.$$

Il suffit évidemment de poser successivement

$$x^2+2x-35=0 \quad \text{et} \quad x^2-x-6=0.$$

La première équation donne

$$x=-1\pm\sqrt{1+35}=-1\pm 6, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x'=5 \\ x''=-7. \end{cases}$$

La seconde équation donne à son tour

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x'''=3 \\ x^{\text{IV}}=-2. \end{cases}$$

Les quatre racines cherchées sont $5, -7, 3, -2$.

4°. *Résoudre l'équation*

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7.$$

En élevant une première fois au carré, on trouve

$$x+5+2x+8+2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=49,$$

d'où

$$2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x.$$

Si l'on élève une seconde fois au carré, il vient

$$4(x+5)(2x+8)=(36-3x)^2,$$

d'où

$$x^2-288x+1136=0.$$

Cette équation donne

$$x=144\pm\sqrt{144^2-1136}=144\pm\sqrt{19600}.$$

Par suite

$$x'=284, \quad x''=4.$$

Nous devons vérifier ces racines. La première conduit à

$$\sqrt{289}+\sqrt{576}=7,$$

résultat inadmissible : elle ne vérifie pas l'équation donnée. La seconde racine conduit à

$$\sqrt{9}+\sqrt{16}=7,$$

c'est-à-dire à une identité : elle seule vérifie donc l'équation proposée.

Si l'on prenait le premier radical avec le signe —, la première racine conviendrait au contraire, et la seconde racine ne satisferait plus. Il faut remarquer à ce sujet que les signes particuliers des radicaux disparaissant dans l'élévation au carré,

l'équation finale répond à toutes les combinaisons de signes de ces radicaux : une racine qui ne satisfait point au premier abord peut donc convenir si l'on fait sur les signes des radicaux l'hypothèse convenable.

5°. *Résoudre l'équation*

$$\sqrt{28+2x}=\sqrt{21+x}+1.$$

J'élève les deux membres au carré, j'obtiens

$$28+2x=21+x+2\sqrt{21+x}+1,$$

d'où

$$6+x=2\sqrt{21+x}.$$

J'élève une seconde fois au carré, et je trouve

$$36+12x+x^2=84+4x,$$

d'où

$$x^2+8x-48=0.$$

On en déduit

$$x=-4\pm\sqrt{16+48}=-4\pm 8.$$

On a donc

$$x'=4 \quad \text{et} \quad x''=-12.$$

La première valeur substituée dans l'équation donne

$$\sqrt{36}=\sqrt{25}+1.$$

La seconde conduit à

$$\sqrt{4}=\sqrt{9}+1.$$

La première vérifie l'équation telle qu'elle est posée; la seconde ne la vérifie que si l'on prend les deux radicaux avec le signe —.

6°. *Résoudre l'équation*

$$\sqrt{14+x}+\sqrt{5+2x}=1.$$

En élevant au carré, on a

$$14+x+2\sqrt{(14+x)(5+2x)}+5+2x=1,$$

d'où

$$2\sqrt{(14+x)(5+2x)}=-18-3x.$$

En élevant une seconde fois au carré, il vient

$$4(14+x)(5+2x)=(18+3x)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^2-24x+44=0.$$

On en déduit

$$x=12\pm\sqrt{144-44}=12\pm 10.$$

On a donc

$$x=22 \quad \text{et} \quad x=2.$$

La vérification donne

$$\sqrt{36}+\sqrt{49}=1,$$
$$\sqrt{16}+\sqrt{9}\ =1;$$

c'est-à-dire qu'aucune des racines trouvées ne satisfait. Pour qu'il y ait vérification, il faut prendre d'abord le premier radical avec le signe — et le second avec le signe +; puis faire l'inverse.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ. — INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ. — PROBLÈMES.

Relations entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré.

189. Reprenons la formule générale

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

séparons les deux racines : nous aurons

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Si l'on ajoute ces deux relations, il vient

$$x'+x''=-p.$$

Si on les multiplie, on trouve

$$x'x''=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).$$

C'est là le produit d'une somme par une différence; on peut le remplacer par la différence des carrés des quantités considérées. On aura donc

$$x'x''=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right),$$

c'est-à-dire

$$x'x''=q.$$

On est donc conduit à ces deux propriétés très-importantes. Dans toute équation du second degré de la forme $x^2+px+q=0$:

1° *La somme des racines est égale au coefficient du second*

terme pris en signe contraire; 2° le produit des racines est égal au terme indépendant pris avec son signe.

Si l'on considère l'équation du second degré sous la forme plus générale

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on a

$$x' + x'' = -p = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = q = \frac{c}{a}.$$

Les mêmes propriétés subsistent, sauf la division par le coefficient du terme en x^2.

Soit l'équation

$$x^2 - 3x - 5 = 0.$$

La somme des racines sera

$$x' + x'' = 3;$$

leur produit sera

$$x'x'' = -5.$$

Soit l'équation

$$7x^2 + 10x + 4 = 0.$$

La somme des racines sera

$$x' + x'' = -\frac{10}{7};$$

leur produit sera

$$x'x'' = \frac{4}{7}.$$

190. Ce qui précède permet de résoudre immédiatement cette question : *Trouver deux nombres dont la somme et le produit sont donnés.* Ces deux nombres sont nécessairement les racines d'une équation du second degré, dont le premier terme a pour coefficient l'unité, dont le second terme a pour coefficient la somme donnée prise en signe contraire, et dont le terme indépendant est le produit donné.

Si la somme donnée est S et le produit donné P, les deux nombres cherchés seront les racines de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

puisqu'on a, en désignant ces racines par x' et x'',

$$x' + x'' = S, \quad x'x'' = P.$$

On peut facilement vérifier ce théorème usuel. Si l'on appelle x l'un des deux nombres demandés, l'autre sera $S - x$, et l'on devra avoir

$$x(S - x) = P;$$

d'où

$$Sx - x^2 = P \quad \text{ou} \quad x^2 - Sx + P = 0.$$

x représentant l'un quelconque des deux nombres, les racines de cette équation sont les deux nombres cherchés.

Trouver deux nombres dont la somme soit 15 *et le produit* 56. On aura

$$x^2 - 15x + 56 = 0;$$

d'où

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{2} = \frac{15 \pm 1}{2},$$

c'est-à-dire

$$x' = 8, \quad x'' = 7.$$

191. Il est facile, d'après ce qui précède, d'indiquer la nature des racines d'une équation du second degré sans la résoudre. Prenons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$; on peut toujours supposer a positif. Nous distinguerons trois cas.

1°. Si c est *positif*, le terme $-4ac$, placé sous le radical dans la formule générale $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, est négatif. *On ne peut donc savoir d'avance la nature des racines qu'en formant la quantité* $b^2 - 4ac$.

Si l'on a $b^2 - 4ac < 0$, les racines sont imaginaires; aucune recherche ultérieure n'est nécessaire.

Si l'on a $b^2 - 4ac = 0$, les racines sont réelles et égales. On a immédiatement $x = -\frac{b}{2a}$, puisque le radical s'annule. D'ailleurs, les deux racines étant égales, chacune d'elles est la moitié de leur somme $-\frac{b}{a}$.

Si l'on a $b^2 - 4ac > 0$, les deux racines sont réelles et inégales. Elles sont de même signe, puisque leur produit $\frac{c}{a}$ est positif. Leur somme étant $-\frac{b}{a}$, elles sont positives si b est négatif, négatives si b est positif, c'est-à-dire qu'elles sont de signe contraire à b.

2°. Si c est *négatif*, le terme $-4ac$, placé sous le radical de la formule générale $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, est positif; la quantité placée sous le radical est alors toujours positive, c'est-à-dire que *les racines sont toujours réelles*. Leur produit $\frac{c}{a}$ étant négatif, elles ont des signes contraires : l'une est positive, l'autre est négative; la plus grande des deux donne

son signe à la somme des racines, c'est-à-dire qu'elle est de signe contraire à b, puisque cette somme est $-\frac{b}{a}$.

3°. Si c est *nul*, le terme $-4ac$ s'évanouit, et l'on a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b \pm b}{2a}.$$

L'une des racines est nulle, l'autre est $-\frac{b}{a}$. En effet, le produit des racines étant nul, sans que leur somme le soit, l'une d'elles est nulle, et l'autre est égale à leur somme. C'est encore ce qu'indique immédiatement l'équation

$$ax^2 + bx = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x(ax + b) = 0.$$

En résumé, *si c est positif, et qu'on ait $b^2 - 4ac > 0$, les racines seront toutes deux réelles et de signe contraire à b. Si c est négatif, les racines seront toujours réelles; elles seront affectées de signes contraires, et la plus grande sera de signe contraire à b.*

Soit l'équation

$$3x^2 + 2x + 7 = 0.$$

On a ici

$$b^2 - 4ac = 4 - 4.3.7;$$

les racines sont imaginaires.

Soit l'équation

$$4x^2 - 8x + 4 = 0.$$

On a

$$b^2 - 4ac = 64 - 4.4.4 = 0.$$

Les racines sont toutes deux égales à $\frac{8}{2.4}$ ou à 1.

Soit l'équation

$$5x^2 - 13x + 8 = 0.$$

On a

$$b^2 - 4ac = 169 - 4.5.8 = 9.$$

Les racines sont réelles et inégales. Elles sont toutes deux positives.

Soit l'équation

$$7x^2 - 3x - 5 = 0.$$

c est négatif; les racines sont nécessairement réelles. Elles sont de signes contraires : la plus grande est positive, parce que b est négatif.

Décomposition d'un trinôme du second degré en facteurs du premier degré.

192. Soit un trinôme du second degré x^2+px+q, x peut recevoir dans ce trinôme toutes les valeurs possibles. Égalons-le à zéro : il en résultera pour x deux valeurs spéciales, x' et x'', qui seront les racines de l'équation obtenue $x^2+px+q=0$. On aura (189)

$$p=-(x'+x'') \quad \text{et} \quad q=x'x''.$$

Si l'on substitue à la place de p et de q ces valeurs, le trinôme deviendra

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''.$$

Ce ne sera là qu'une forme identique à la forme x^2+px+q : on pourra de nouveau attribuer à x dans ce trinôme toutes les valeurs possibles. Mais on a évidemment

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=x^2-x'x-x''x+x'x''.$$

Le second membre de cette égalité revient à

$$x(x-x')-x''(x-x'),$$

c'est-à-dire à

$$(x-x')(x-x'').$$

On a donc finalement

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x''),$$

et, dans les deux membres de cette égalité, on peut donner à x toutes les valeurs possibles, de sorte que cette égalité est une véritable identité.

On arrive donc à ce théorème, dont on fait un usage continuel : *Tout trinôme du second degré de la forme x^2+px+q est égal au produit de deux facteurs du premier degré, formés en retranchant successivement du symbole x chacune des racines x', x'', obtenues en égalant le trinôme à zéro.*

Si le trinôme se présente sous la forme plus générale

$$ax^2+bx+c,$$

on peut écrire

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2+px+q).$$

En remplaçant x^2+px+q par $(x-x')(x-x'')$, il vient

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'').$$

Le théorème est donc le même, sauf la multiplication par le coefficient a du premier terme du trinôme.

Si l'on demande de transformer le trinôme $x^2 - 5x + 6$, on posera

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = 3, \\ x'' = 2. \end{cases}$$

Par suite, $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, quel que soit x.

Si l'on demande de transformer le trinôme $2x^2 + 5x - 63$, on posera

$$2x^2 + 5x - 63 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 504}}{4} = \frac{-5 \pm 23}{4} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = 4{,}5, \\ x'' = -7. \end{cases}$$

Par suite,

$$2x^2 + 5x - 63 = 2(x - 4{,}5)(x + 7),$$

quel que soit x.

193. Le théorème précédent est si important, que nous en donnerons une seconde démonstration directe.

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$. On a identiquement

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

On ne changera rien à la quantité renfermée entre parenthèses, en l'augmentant et en la diminuant à la fois du terme $\frac{b^2}{4a^2}$. On aura alors

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right];$$

mais $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ représente le carré du binôme $x + \frac{b}{2a}$, et la différence $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ est le carré de $\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$. On peut donc écrire

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2\right].$$

La différence des deux carrés renfermés entre parenthèses peut être remplacée par le produit de la somme de leurs

racines par la différence de ces mêmes racines; d'où

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right) \times \left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right).$$

Mais si l'on se souvient que l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

a précisément pour racines

$$x' = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \quad \text{et} \quad x'' = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

on aura en réalité

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

194. Appliquons directement au trinôme $ax^2 + bx + c$ les considérations déjà développées (**184**, **185**, **186**), et considérons l'expression

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right].$$

Si l'on a $b^2 - 4ac > 0$, c'est-à-dire si les racines x' et x'' sont réelles et inégales, on aura aussi, en divisant par $4a^2$,

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} > 0.$$

On peut alors poser $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = K^2$ et regarder la parenthèse comme la différence de deux carrés. Donc, *lorsque le trinôme $ax^2 + bx + c$, égalé à zéro, conduit à des racines réelles et inégales, on peut le regarder comme le produit de la différence de deux carrés par le coefficient a.*

Si l'on a $b^2 - 4ac = 0$, c'est-à-dire si les racines x' et x'' se confondent, on a aussi $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$, et il reste

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Le trinôme $ax^2 + bx + c$, égalé à zéro, conduisant à des racines réelles et égales, on peut le regarder comme le produit d'un carré par le coefficient a.

Enfin, si l'on a $b^2 - 4ac < 0$, c'est-à-dire si les racines x' et x'' sont imaginaires, on a aussi $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} < 0$. On peut alors

poser $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = -K^2$ et regarder la parenthèse

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

comme la somme de deux carrés. Par suite, *le trinôme $ax^2 + bx + c$, égalé à zéro, conduisant à des racines imaginaires, on peut le regarder comme le produit de la somme de deux carrés par le coefficient a.*

Dans les deux derniers cas, la parenthèse ayant, quel que soit x, une valeur positive, c'est le coefficient a qui donne son signe aux valeurs du trinôme.

En résumé, suivant qu'on a $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac < 0$, on peut écrire :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - K^2\right],$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right].$$

Inégalités du second degré.

195. La forme la plus générale d'une inégalité du second degré est celle-ci :

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c < 0.$$

On peut toujours supposer a positif. Si ce coefficient était négatif, on multiplierait par -1 les deux membres de l'inégalité et on en renverserait le sens (**169, III**).

Si les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, obtenue en égalant le premier membre de l'inégalité à zéro, sont imaginaires ou bien si elles sont réelles et égales, les valeurs du trinôme seront toujours de même signe que a (**194**), par conséquent toujours positives. On satisfera nécessairement à la relation

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

en donnant à x une valeur réelle quelconque; mais on ne pourra jamais satisfaire à la relation

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Si les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont réelles et inégales, on pourra mettre le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous la forme $a(x - x')(x - x'')$, x' et x'' étant les racines obtenues.

Pour qu'on ait $a(x-x')(x-x'')>0$, a étant toujours supposé positif, il faudra que le produit des deux facteurs $x-x'$ et $x-x''$ soit positif, c'est-à-dire il faudra que ces deux facteurs soient de même signe : tous deux positifs ou tous deux négatifs. On devra donc avoir $x>x'$, $x>x''$, ou bien $x<x'$, $x<x''$. On pourra donc donner à x toutes les valeurs réelles plus grandes ou plus petites que les deux racines, mais on ne pourra lui en donner aucune comprise entre les deux racines.

Si l'on veut au contraire satisfaire à l'inégalité

$$ax^2+bx+c<0 \quad \text{ou} \quad a(x-x')(x-x'')<0,$$

a étant toujours positif, les deux facteurs $x-x'$ et $x-x''$ devront être de signes contraires, pour que le premier membre de l'inégalité soit négatif. En désignant par x' la plus grande racine, on devra donc avoir $x<x'$ en même temps que $x>x''$, c'est-à-dire que x n'admettra que les valeurs réelles comprises entre les deux racines.

En résumé et a étant supposé positif, *on peut toujours satisfaire à l'inégalité $ax^2+bx+c>0$: 1° en donnant à x une valeur réelle quelconque, lorsque les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont réelles et égales ou imaginaires; 2° en donnant à x une valeur réelle quelconque, pourvu qu'elle ne soit pas comprise entre les deux racines, dans le cas où ces dernières sont réelles et inégales.*

On ne peut satisfaire à l'inégalité $ax^2+bx+c<0$ que dans le cas où les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont réelles et inégales, et alors il faut que la valeur réelle donnée à x soit comprise entre ces deux racines.

Si a était négatif, il suffirait d'appliquer ce qu'on vient de dire pour l'inégalité $ax^2+bx+c<0$ à l'inégalité $ax^2+bx+c>0$, et réciproquement.

En d'autres termes, *lorsque les racines de l'équation obtenue en égalant le premier membre de l'inégalité à zéro sont réelles et égales ou imaginaires, les valeurs du trinôme ont toujours le signe de a.*

Lorsque les racines sont réelles et inégales, les valeurs du trinôme ont le signe de a, lorsque x n'est pas compris entre les racines; ces valeurs sont de signes contraires à a, lorsque x est compris entre les racines.

Soit l'inégalité

$$-3x^2+7x-5<0.$$

Les racines de l'équation

$$-3x^2+7x-5=0$$

étant imaginaires, cette inégalité sera satisfaite pour toutes les valeurs réelles de x.

Soit l'inégalité

$$4x^2 - 3x - 1 < 0.$$

Les racines de l'équation

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

étant 4 et -1, cette inégalité ne sera satisfaite que pour les valeurs de x comprises entre 4 et -1.

Soit l'inégalité

$$-3x^2 + 7x - 1 > 0.$$

Les racines de l'équation

$$-3x^2 + 7x - 1 = 0$$

étant 6 et 1, cette inégalité ne sera satisfaite que pour les valeurs de x comprises entre 6 et 1.

Soit l'inégalité

$$3x^2 - 10x + 3 > 0.$$

Les racines de l'équation

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

étant 3 et $\frac{1}{3}$ on pourra donner à x une valeur réelle quelconque, pourvu qu'elle ne tombe pas entre 3 et $\frac{1}{3}$.

Problèmes du second degré.

196. I. *Trouver sur la droite qui passe par deux points donnés* A *et* B, *un point dont la distance au point* A *soit moyenne proportionnelle* (voir la Géométrie) *entre la longueur* AB *et la distance du point cherché au point* B.

Pour mettre le problème en équation, je suis obligé d'assigner une position quelconque au point cherché. Je supposerai d'abord ce point, que je désignerai par C, entre les points A et B. J'appelle x la longueur AC, et a la longueur AB. J'aurai, d'après l'énoncé du problème,

$$x^2 = a(a - x).$$

De cette équation, je tire

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

La quantité sous le radical revient à $\frac{5a^2}{4}$, et l'on peut extraire

la racine carrée de $\frac{a^2}{4}$: on aura donc

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Le signe + du radical correspond à une racine positive, plus petite que a, de sorte qu'entre A et B il y a bien un point C répondant à la question.

Le signe — du radical correspond à une racine négative. Cette racine négative indique un point C′, placé à *gauche* du point A, puisque le point C est à *droite* du même point, et répondant aussi à la question; car l'énoncé permet évidemment de compter l'inconnue x, à partir du point A, à droite ou à gauche de ce point, et l'Algèbre par l'opposition de signe indique l'opposition de sens (**161**): c'est ce que nous allons vérifier.

En désignant AC′ par x et AB par a, on devra avoir

$$x^2 = a(a + x).$$

Si l'on compare cette équation à l'équation précédente

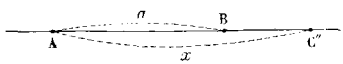
$$x^2 = a(a - x),$$

on voit que ces deux équations ne diffèrent que par le changement de x en $-x$; donc les racines de la seconde équation seront celles de la première, changées de signes (**158**), c'est-à-dire

$$x = \frac{a}{2}(1 \mp \sqrt{5}).$$

La racine positive de cette équation correspond au point C′, et la racine négative au point C déjà obtenu. Les deux équations posées se vérifient mutuellement, et la première suffit pour trouver les deux solutions du problème.

Si l'on suppose enfin le point cherché placé en C″ à droite du point A, mais au delà du point B, l'inconnue x sera la distance AC″, et l'on aura pour



équation du problème

$$x^2 = a(x - a),$$

d'où

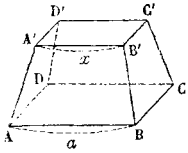
$$x^2 - ax + a^2 = 0.$$

En formant la quantité $\frac{p^2}{4} - q$, on voit immédiatement que les

racines de cette équation sont imaginaires : ce qui indique l'absurdité de l'hypothèse. Et, en effet, AC″ étant à la fois supérieure à AB et à BC″, il est impossible que AC″ soit une moyenne proportionnelle entre les deux distances énoncées.

197. II. *Étant donnés le volume et la hauteur d'un tronc de pyramide à bases carrées et parallèles, et le côté d'une de ces bases, trouver le côté de l'autre base.*

Désignons par V et H le volume et la hauteur donnés, par a le côté connu de la grande base, par x le coté cherché de la petite base. La géométrie donne immédiatement



$$V = \frac{H}{3}(a^2 + x^2 + ax).$$

On en déduit

$$x^2 + ax + a^2 - \frac{3V}{H} = 0.$$

Cette équation donne

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a^2 + \frac{3V}{H}},$$

c'est-à-dire

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{3V}{H} - \frac{3a^2}{4}}.$$

L'une des racines est négative, elle ne peut convenir au point de vue géométrique, et nous devons la rejeter. D'ailleurs, pour que les racines soient réelles, il faut qu'on ait

$$\frac{V}{H} > \frac{a^2}{4} \quad \text{ou} \quad V > \frac{a^2 H}{4}.$$

Ce n'est pas tout : il faut que la première racine soit positive, sans quoi le problème n'admettrait aucune solution. On devra donc avoir

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{3V}{H} - \frac{3a^2}{4}} > 0.$$

Cette inégalité revient, en faisant passer $-\frac{a}{2}$ dans le second membre et en élevant ensuite les deux membres au carré, à

$$\frac{3V}{H} - \frac{3a^2}{4} > \frac{a^2}{4},$$

d'où

$$\frac{3V}{H} > a^2 \quad \text{et} \quad V > \frac{a^2 H}{3}.$$

Cette condition, qui renferme la précédente, suffit donc pour

assurer la possibilité du problème. Et, en effet, elle exprime que le terme indépendant de l'équation considérée est négatif : dans ce cas, les racines sont toujours réelles. Nous aurions pu poser immédiatement cette condition de possibilité du problème.

On peut facilement interpréter le résultat trouvé. $\frac{a^2 H}{3}$ représente le volume d'une pyramide ayant même base ABCD et même hauteur que le tronc proposé : or il est évident que le volume de ce tronc doit être plus grand que le volume de cette pyramide qui est l'une des trois qui le composent. Si l'on avait

$$V = \frac{a^2 H}{3}$$

on trouverait

$$x = 0,$$

et le tronc se confondrait avec la pyramide.

Si l'Algèbre nous a donné une racine négative que nous avons dû rejeter, c'est qu'un problème d'Algèbre pure, admettant indifféremment la solution positive ou négative, conduit à une équation identique à celle qu'on vient de traiter. Ainsi on peut demander, étant donnés les nombres V, H et a, de trouver un nombre x qui satisfasse à la condition

$$V = \frac{H}{3}(a^2 + x^2 + ax).$$

La valeur négative fournie par cette équation est la plus grande des deux racines ; le terme x^2 restera toujours positif et compensera l'accroissement du terme ax devenu négatif, de sorte que la condition imposée sera aussi bien vérifiée par la racine négative que par la racine positive.

198. III. *Calculer la profondeur d'un puits, connaissant le nombre* T *de secondes qui s'est écoulé entre l'instant où l'on a laissé tomber une pierre dans ce puits, et celui où le bruit qu'elle a fait en touchant le fond est revenu frapper l'oreille : on néglige la résistance de l'air.*

Nous représenterons par x la profondeur du puits.

Le temps T se décompose en deux périodes : le temps t mis par la pierre pour parcourir en descendant l'espace x ; le temps t' mis par le *son* pour parcourir le même espace en remontant.

La chute d'un corps dans le vide a lieu d'un mouvement uniformément varié dont l'accélération est représentée par $g = 9^m,8088$. La Mécanique donne donc

$$x = \frac{1}{2} g t^2,$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

La vitesse du son dans l'air est constante et égale à 333 mètres par seconde. Si nous la représentons par v, on aura donc aussi

$$x = vt',$$

d'où

$$t' = \frac{x}{v}.$$

Il viendra par conséquent

$$T = t + t' = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v},$$

d'où

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = T - \frac{x}{v}.$$

En élevant les deux membres au carré, on trouvera

$$\frac{2x}{g} = T^2 - \frac{2T}{v}.x + \frac{x^2}{v^2}.$$

On obtient donc l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{v^2} - 2\left(\frac{T}{v} + \frac{1}{g}\right)x + T^2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont réelles, car on a

$$4\left(\frac{T}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - 4\frac{T^2}{v^2} > 0 \quad (191).$$

Elles sont donc toutes deux positives, puisque leur produit est égal à $T^2 v^2$ et, leur somme, à $2\left(\frac{T}{v} + \frac{1}{g}\right).v^2$. Une seule cependant peut convenir : le puits n'a pas deux profondeurs différentes.

En appliquant la formule générale (182), on a

$$x = \frac{\frac{T}{v} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{T^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}.$$

La première racine surpasse évidemment $\frac{\frac{T}{v}}{\frac{1}{v^2}}$, c'est-à-dire vT : c'est donc cette racine qu'il faut rejeter, car en vertu de la relation $x = vt'$, t' étant plus petit que T, on a aussi $x < vT$. Nous conserverons donc seulement la seconde solution.

Remarquons que nous avons été obligé d'élever au carré l'équation

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = \mathrm{T} - \frac{x}{v}.$$

Nous avons ainsi introduit une solution étrangère (**112**), celle qui correspond à l'équation

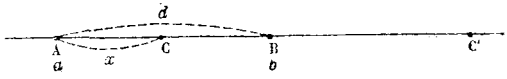
$$-\sqrt{\frac{2x}{g}} = \mathrm{T} - \frac{x}{v}.$$

La singularité de deux racines positives dont une seule répond à la question, se trouve ainsi expliquée de la même manière que précédemment.

199. IV. *Deux foyers lumineux d'intensité différente se trouvent en* A *et en* B; *trouver sur la droite qui joint ces foyers, un point également éclairé par chacun d'eux.*

Nous représenterons par d la distance AB. Désignons par a et b les *intensités* des deux lumières, c'est-à-dire les quantités de lumière qu'elles envoient au point situé, par rapport à chacune d'elles, à l'unité de distance. La physique nous apprend que la quantité de lumière émise par un foyer relativement à un point donné, varie en raison inverse du carré de la distance de ce point au foyer.

Ceci posé, admettons que le point cherché soit en C, entre A et B. Un point situé à l'unité de distance de A recevrait une quantité de lumière a; s'il était à 2^{M}, il recevrait une quantité de lumière $\frac{a}{4}$; à 3^{M}, une quantité de lumière $\frac{a}{9}$; enfin, à



x mètres, en appelant x la distance AC, la quantité de lumière reçue par le point C sera $\frac{a}{x^2}$. De même, la distance BC étant égale à $d - x$, le point C recevra du foyer B une quantité de lumière $\frac{b}{(d-x)^2}$. L'équation du problème sera donc

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Le plus simple est de déduire immédiatement de cette relation

$$\frac{\sqrt{a}}{x} = \frac{\pm\sqrt{b}}{d-x},$$

c'est-à-dire

$$x = d.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}.$$

Supposons $a > b$.

La première racine

$$x' = d.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

indique l'existence d'un point C répondant à la question et compris entre A et B. En effet, a étant $>$ que b, l'expression $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ tombe entre 1 et $\frac{1}{2}$. x' est donc plus petite que d et plus grande que $\frac{d}{2}$: le point C est plus éloigné de A que de B.

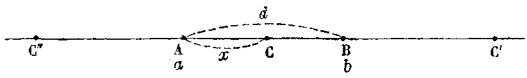
La seconde racine

$$x'' = d.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

indique l'existence d'un point C', toujours placé à droite du point A, mais au delà du point B, et répondant aussi à la question. En effet, l'expression $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ est positive et plus grande que 1, de sorte que x'' surpasse d.

Si l'on avait au contraire $a < b$, x' tomberait entre 0 et $\frac{1}{2}d$, parce que l'expression $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ tomberait entre 0 et $\frac{1}{2}$; ce qui indiquerait l'existence d'un point C répondant à la question et compris entre A et B, mais plus rapproché du point A que du point B.

La seconde racine x'' serait alors négative, ce qui indique-



rait l'existence d'un point C'' répondant à la question, mais placé à gauche du point A.

Les points C' et C'' peuvent répondre à la question, parce que l'intensité plus grande de l'une ou de l'autre lumière se trouve compensée par l'accroissement égal à d de sa distance au point considéré.

Si l'on a $a = b$, la première racine x' devient égale à $\frac{d}{2}$: le point C se trouve à égale distance des deux foyers. La seconde

racine x'' se présente sous la forme $\frac{m}{0}$, et est en effet inadmissible; puisque l'intensité des deux lumières est la même, aucun point C′ ou C″, situé à droite ou à gauche des points A et B, ne peut recevoir des foyers placés en ces points la même quantité de lumière.

Enfin, si l'on a en même temps $a = b$ et $d = 0$, on trouve $x' = 0$ et $x'' = \frac{0}{0}$, ce qui correspond bien à l'indétermination complète et évidente du problème.

200. Reprenons le cas où, dans le problème précédent, on a $a = b$. L'équation du problème

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}$$

peut se mettre sous la forme

$$a(d-x)^2 = bx^2,$$

c'est-à-dire

$$(b-a)x^2 + 2adx - ad^2 = 0.$$

On en déduit

$$x = \frac{-ad \pm \sqrt{a^2d^2 + ad^2(b-a)}}{b-a}.$$

Si l'on suppose alors $a = b$ dans cette formule, il vient

$$x = \frac{-ad \pm ad}{0},$$

d'où

$$x' = \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-2ad}{0}.$$

Si l'on remonte alors à l'équation

$$(b-a)x^2 + 2adx - ad^2 = 0,$$

on voit que l'hypothèse $b = a$ la réduit à

$$2adx - ad^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{d}{2}.$$

On retrouve ainsi la racine $x' = \frac{d}{2}$ obtenue précédemment (199).

Comme l'équation considérée s'abaisse réellement au premier degré, la formule générale de résolution des équations du second degré pourrait être en défaut; mais nous allons montrer que, même dans ce cas particulier, elle conserve

toute son exactitude. La racine x'', qui se présente sous la forme ∞, correspond à l'abaissement du degré de l'équation. La racine $x' = \frac{0}{0}$ est égale à $\frac{d}{2}$, et l'indétermination qu'elle accuse n'est qu'apparente. En effet, reprenons la valeur

$$x = \frac{-ad + \sqrt{a^2d^2 + ad^2(b-a)}}{b-a}$$

Multiplions les deux termes de la fraction du second membre par $-ad - \sqrt{a^2d^2 + ad^2(b-a)}$. Il viendra évidemment

$$x = \frac{(-ad)^2 - \left[\sqrt{a^2d^2 + ad^2(b-a)}\right]^2}{(b-a)\left[-ad - \sqrt{a^2d^2 + ad^2(b-a)}\right]},$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{-ad^2(b-a)}{(b-a)\left[-ad - \sqrt{a^2d^2 + ad^2(b-a)}\right]}.$$

Supprimons le facteur commun $b - a$, qui s'annule pour $b = a$, et nous aurons

$$x = \frac{-ad^2}{-ad - \sqrt{a^2d^2 + ad^2(b-a)}}.$$

Si l'on fait maintenant $b = a$, il vient

$$x = \frac{-ad^2}{-ad - ad} = \frac{-ad^2}{-2ad} = \frac{d}{2}.$$

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR DONT LA RÉSOLUTION SE RAMÈNE AU SECOND DEGRÉ.

Équations trinômes.

201. On peut ramener au second degré la résolution de toute équation trinôme de la forme

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0.$$

On voit que les exposants de l'inconnue dans les termes qui la renferment, sont doubles l'un de l'autre. On peut alors poser $x^m = y$, et l'on en déduit $x^{2m} = y^2$; de sorte qu'on transforme l'équation proposée en équation du second degré

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Cette équation du second degré donne

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mais la relation $x^m = y$ revient à $x = \sqrt[m]{y}$. Par conséquent

$$x = \sqrt[m]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

En laissant de côté l'examen de toutes les valeurs qui correspondent à cette formule, c'est-à-dire en lui conservant un caractère arithmétique, proposons-nous de l'appliquer à l'exemple suivant :

$$5x^6 - 7x^3 - 264 = 0.$$

On posera $x^3 = y$, d'où $x^6 = y^2$, et l'équation deviendra

$$5y^2 - 7y - 264 = 0.$$

On en déduit

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 5280}}{10} = \frac{7 \pm 73}{10},$$

c'est-à-dire

$$y' = 8 \quad \text{et} \quad y'' = -6,6.$$

Par conséquent, puisque $x^3 = y$, on aura

$$x = \sqrt[3]{y}$$

ou

$$x = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{et} \quad x = \sqrt[3]{-6,6} = -1,876$$

à moins de 0,001 par excès.

Équations bi-carrées.

202. Quand on a $m = 2$, l'équation trinôme prend le nom d'équation bi-carrée et devient

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Posons $x^2 = y$, on aura

$$x^4 = y^2.$$

Par suite, il faudra comme précédemment résoudre l'équation

$$ay^2 + by + c = 0.$$

On en déduira

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mais on a $x^2 = y$, d'où $x = \pm\sqrt{y}$ et par conséquent

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

En assemblant les signes de toutes les manières possibles, on trouve pour x quatre valeurs, *deux à deux égales et de signes contraires*. Ces valeurs sont

$$x' = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x'' = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x''' = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x^{\text{IV}} = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

On voit qu'on a $x' = -x''$ et $x''' = -x^{\text{IV}}$: on pouvait prévoir ce résultat. Cette propriété n'appartient pas seulement à l'équation bi-carrée, elle appartient à toute équation qui ne renferme que des puissances paires de l'inconnue. Dans ce cas, en effet, si la racine $x = +\alpha$ convient, la racine $x = -\alpha$ convient aussi; car $(+\alpha)^{2p} = (-\alpha)^{2p}$, p étant un entier quelconque.

203. Cherchons à reconnaître la nature des racines de l'équation bi-carrée sans la résoudre. Désignons par y' et y'' les racines de l'équation $ay^2 + by + c = 0$; les racines de l'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ seront

$$x = \pm\sqrt{y'}, \quad x = \pm\sqrt{y''}.$$

1°. Les quatre racines de l'équation bi-carrée seront réelles si l'on a $y' > 0$ et $y'' > 0$, c'est-à-dire si les racines de l'équation $ay^2 + by + c = 0$ sont positives. Il faut pour cela qu'on ait $b^2 - 4ac > 0$, $c > 0$ et $b < 0$ (**191**, 1°), en supposant a positif, ce qui est toujours permis.

2°. L'équation bi-carrée admet deux racines réelles et deux racines imaginaires, lorsqu'on a, par exemple, $y' > 0$ et $y'' < 0$. Pour cela, il faut que les racines de l'équation $ay^2 + by + c = 0$ soient réelles et de signes contraires : la seule condition nécessaire est alors $c < 0$ (**191**, 2°).

3°. Les quatre racines de l'équation bi-carrée seront imaginaires si l'on a $y' < 0$ et $y'' < 0$. Les racines de l'équation $ay^2 + by + c = 0$ doivent alors être toutes les deux négatives; ce qui entraîne les conditions $b^2 - 4ac > 0$, $c > 0$ et $b > 0$ (**191**, 1°).

4°. Si l'on a $b^2 - 4ac = 0$, il vient $y' = y''$. Les racines de l'équation bi-carrée, égales deux à deux, sont réelles si l'on

a $y' > 0$ ou $b < 0$, imaginaires si l'on a $y' < 0$ ou $b > 0$. Dans ce cas, $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ (191, 1°).

5°. Si l'on a $b^2 - 4ac < 0$, les racines y' et y'' sont imaginaires, et il en est de même des racines de l'équation bi-carrée (*voir* 208).

204. Le premier membre de l'équation $ay^2 + by + c = 0$ peut se mettre sous la forme $a(y - y')(y - y'')\ldots$ (192). Mais on a d'une manière générale $x^2 = y$, en même temps que $x'^2 = y'$ et $x'''^2 = y''$. Par suite on peut poser

$$ay^2 + by + c \quad \text{ou} \quad ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - x'^2)(x^2 - x'''^2).$$

On a évidemment

$$x^2 - x'^2 = (x - x')(x + x') \quad \text{et} \quad x^2 - x'''^2 = (x - x''')(x + x''').$$

On peut remplacer d'ailleurs la racine x' par la racine x'' prise en signe contraire, c'est-à-dire par $-x''$; de même, x''' est égale à $-x^{\text{IV}}$. On a alors

$$x^2 - x'^2 = (x - x')(x - x'') \quad \text{et} \quad x^2 - x'''^2 = (x - x''')(x - x^{\text{IV}}),$$

c'est-à-dire

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x')(x - x'')(x - x''')(x - x^{\text{IV}}).$$

Et l'on voit bien sous cette forme, pourquoi l'équation bi-carrée admet quatre racines et pourquoi elle ne peut en admettre davantage.

205. Soit proposé de résoudre l'équation suivante

$$x^4 - 12,49x^2 + 23,04 = 0.$$

En appliquant la formule générale, on a immédiatement

$$x = \pm\sqrt{\frac{12,49 \pm \sqrt{12,49^2 - 4.23,04}}{2}},$$

d'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{12,49 \pm 7,99}{2}},$$

c'est-à-dire

$$x = \pm\sqrt{10,24} = \pm 3,2 \quad \text{et} \quad x = \pm\sqrt{2,25} = \pm 1,5.$$

Soit encore l'équation

$$x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (b^2 - a^2)^2 = 0.$$

En appliquant la formule générale, on a

$$x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (b^2 - a^2)^2}},$$

c'est-à-dire

$$x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab},$$

d'où

$$x = \pm\sqrt{(a+b)^2} = \pm(a+b) \quad \text{et} \quad x = \pm\sqrt{(a-b)^2} = \pm(a-b).$$

Transformation des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

206. La résolution des équations bi-carrées nous a conduit à des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. On peut, dans certains cas, transformer ces expressions en une somme ou une différence de deux radicaux simples du second degré; et cette transformation, outre son importance au point de vue théorique, facilite la réduction des formules en nombres. Nous supposons que A et B sont des quantités rationnelles, et, de plus, que B est positif.

Posons donc à la fois

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$
$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Nous aurons ainsi deux équations pour déterminer les quantités x et y. Si nous ajoutons ces équations et si nous les retranchons successivement membre à membre, nous aurons

$$2\sqrt{x} = \sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}},$$
$$2\sqrt{y} = \sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}}.$$

En élevant au carré les deux membres des équations obtenues, il viendra

$$4x = 2A + 2\sqrt{A^2 - B} \quad \text{et} \quad 4y = 2A - 2\sqrt{A^2 - B}.$$

On en déduit

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

La transformation n'a d'utilité pratique que si x et y sont des quantités rationnelles. *Il faut pour cela que la quantité* $A^2 - B$ *soit un carré parfait.*

Si nous désignons ce carré par C^2, on aura

$$x = \frac{A + C}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{A - C}{2}.$$

Par suite,

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}},$$
$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} - \sqrt{\frac{A - C}{2}}.$$

Comme $\sqrt{B}$ est supposée dans ces deux formules une quantité positive, on doit regarder les radicaux du second membre comme affectés du même signe dans la première formule, et comme affectés de signes différents dans la seconde formule. En effet, il faut qu'en élevant les relations trouvées au carré, on reproduise dans le second membre de la première relation $+\sqrt{B}$ et, dans le second membre de la seconde, $-\sqrt{B}$.

Soit l'équation

$$x^4 - 8x + 9 = 0.$$

Elle donne

$$x = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{16 - 9}} = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{7}}.$$

On a ici

$$A = 4 \quad \text{et} \quad B = 7.$$

Par suite

$$A^2 - B = 16 - 7 = 9.$$

On a donc

$$C^2 = 9, \quad \text{c'est-à-dire} \quad C = 3.$$

La transformation précédente est possible, et l'on a

$$x = \pm\left(\sqrt{\frac{7}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

207. Il est à remarquer que l'équation

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

aurait suffi pour déterminer les deux inconnues x et y, à cause d'une circonstance particulière sur laquelle il est utile d'insister.

Élevons au carré les deux membres de cette équation; nous aurons

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy},$$

d'où

$$\sqrt{B} = (x + y - A) + 2\sqrt{xy}.$$

Si l'on élève de nouveau au carré, il viendra

$$B = (x + y - A)^2 + 4\sqrt{xy}(x + y - A) + 4xy.$$

Le premier membre est rationnel, il faut que le second membre le soit. Le terme de ce second membre, qui contient le facteur irrationnel $\sqrt{xy}$, doit donc disparaître; ce qui exige qu'on ait

$$x + y = A.$$

Il reste alors

$$B = 4xy \quad \text{ou} \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{xy}.$$

On voit, par suite, que l'équation

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy},$$

composée en partie de termes rationnels et en partie de termes irrationnels, se partage nécessairement en deux autres équations formées en égalant d'une part les quantités rationnelles et, de l'autre, les quantités irrationnelles des deux membres. C'est là une règle générale.

Ayant les équations

$$x + y = A \quad \text{et} \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{xy},$$

c'est-à-dire

$$x + y = A \quad \text{et} \quad B = 4xy,$$

en convenant que les deux membres de l'équation $\sqrt{B} = 2\sqrt{xy}$ sont affectés du même signe, on voit qu'on connaît la somme A des inconnues et leur produit $\frac{B}{4}$. Ces inconnues seront donc les racines de l'équation du second degré (**190**)

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0,$$

qui donne

$$z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

et qui conduit aux mêmes résultats que précédemment.

208. Lorsque la quantité $A^2 - B$ n'est pas un carré parfait, la transformation indiquée est encore possible, en ce sens que les deux expressions comparées sont toujours équivalentes; mais elle n'a plus d'utilité puisqu'elle remplace l'expression proposée par une expression plus compliquée.

Cependant nous considérerons le cas où $\sqrt{B}$ représente une quantité imaginaire. On peut alors poser $B = -K^2$, de sorte qu'on a $\sqrt{B} = K\sqrt{-1}$; et l'expression considérée prend la forme $\sqrt{A \pm K\sqrt{-1}}$.

Nous allons prouver que la racine carrée de l'expression imaginaire $A \pm Ki$ est une expression imaginaire de même forme (**203**, 5°).

On peut reproduire les calculs précédents, et partout B devra être remplacé par $-K^2$, de sorte qu'on arrivera à

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 + K^2}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 + K^2}}{2}.$$

La valeur de x est positive, celle de y est négative; on peut

poser $x = a^2$ et $y = -b^2$. On a alors

$$\sqrt{A \pm Ki} = a \pm bi.$$

On pourrait arriver à cette conclusion en posant directement $\sqrt{A + Ki} = a + bi$, et en cherchant les valeurs réelles de a et de b qui satisfont à cette égalité. On remarquerait, après avoir élevé au carré, que l'équation ayant lieu entre quantités réelles et quantités imaginaires, se partage immédiatement en deux autres équations obtenues en égalant les quantités réelles du premier membre aux quantités réelles du second, les quantités imaginaires du premier membre aux quantités imaginaires du second.

Systèmes d'équations à plusieurs inconnues, renfermant au moins une équation de degré supérieur au premier.

209. Considérons d'abord le système général formé d'une équation du premier degré à deux inconnues et d'une équation complète du second degré à deux inconnues. Ce système aura évidemment la forme

$$ax + by - c = 0,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

On déduira de la première équation $y = \frac{c - ax}{b}$. Si l'on substitue cette valeur dans la seconde équation, on aura

$$Ax^2 + Bx\left(\frac{c - ax}{b}\right) + C\left(\frac{c - ax}{b}\right)^2 + Dx + E\left(\frac{c - ax}{b}\right) + F = 0.$$

En effectuant les calculs, on trouvera une équation du second degré qu'on pourra ramener à la forme

$$Mx^2 + Nx + P = 0.$$

Cette équation conduira à deux racines x' et x'', et ces racines, substituées dans l'expression $y = \frac{c - ax}{b}$, donneront les valeurs correspondantes y' et y'' de y.

Appliquons à quelques exemples ces indications générales.

210. 1°. *Soit à résoudre le système*

$$2y + 3x = 1,7$$
$$y^2 + 3x^2 - x = 0,26.$$

La première équation donnera

$$y = \frac{1,7 - 3x}{2},$$

de sorte que la seconde deviendra

$$\left(\frac{1,7-3x}{2}\right)^2+3x^2-x=0,26,$$

d'où

$$21x^2-14,2x+1,85=0.$$

On en déduit

$$x=\frac{7,1\pm\sqrt{50,41-38,85}}{21}=\frac{7,1\pm3,4}{21},$$

c'est-à-dire

$$x'=0,5 \quad \text{et} \quad x''=0,1762$$

à moins de 0,0001 par excès.

En substituant ces valeurs de x dans la valeur de y, on aura

$$y'=\frac{1,7-1,5}{2}=0,1 \quad \text{et} \quad y''=\frac{1,7-0,5286}{2}=0,5857$$

à moins de 0,0001 par excès.

2°. *Soit à résoudre le système*

$$y-x=a,$$
$$xy=b.$$

On posera $x=-x'$. Le système deviendra

$$y+x'=a,$$
$$x'y=-b.$$

On connaît la somme et le produit des deux quantités y et x'; ces quantités seront donc les racines de l'équation du second degré (190)

$$z^2-az-b=0,$$

d'où

$$z=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Par suite,

$$y=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{et} \quad x'=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2},$$

c'est-à-dire

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

On peut échanger les valeurs de y et de x', les deux équations considérées étant *symétriques* par rapport à y et à x'. On aura donc, pour second couple de valeurs,

$$y=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{et} \quad x=\frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

3°. *Soit à résoudre le système*

$$y + ax = m + an,$$
$$y^2 + x^2 = m^2 + n^2.$$

On voit immédiatement que ce système est satisfait pour les valeurs $y = m$ et $x = n$: il s'agit donc seulement de trouver le second couple de valeurs. La première équation donne

$$y = m + an - ax.$$

La seconde devient alors

$$(m + an - ax)^2 + x^2 = m^2 + n^2,$$

d'où

$$(a^2 + 1)x^2 - 2a(m + an)x + 2amn + n^2(a^2 - 1) = 0.$$

Le produit des racines x' et x'' a pour expression

$$x'x'' = \frac{2amn + n^2(a^2 - 1)}{a^2 + 1}.$$

La racine x' étant égale à n, on aura

$$x'' = \frac{2am + n(a^2 - 1)}{a^2 + 1}.$$

Si l'on substitue cette valeur de x'' dans la valeur de y, on trouvera

$$y'' = m + an - \frac{2a^2m + an(a^2 - 1)}{a^2 + 1} = \frac{2an - m(a^2 - 1)}{a^2 + 1}.$$

4°. *Soit à résoudre le système*

$$x + y = a,$$
$$x^2 + y^2 = b^2.$$

La première équation donne $y = a - x$. La seconde devient donc

$$x^2 + (a - x)^2 = b^2,$$

c'est-à-dire

$$2x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 + 2b^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}.$$

Par suite,

$$y = \frac{a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}.$$

On doit prendre ensemble dans ces formules les signes supérieurs et les signes inférieurs. Les valeurs de x et de y sont les mêmes, sauf l'ordre dans lequel on doit les considérer, parce

que les équations proposées sont symétriques en x et en y. Pour que les valeurs des inconnues soient réelles, il faut qu'on ait $2b^2 > a^2$.

5°. *Soit à résoudre le système*

$$x + y = a,$$
$$x^3 + y^3 = b^3.$$

La première équation donne

$$y = a - x,$$

et la seconde devient

$$x^3 + (a - x)^3 = b^3,$$

d'où

$$x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = b^3,$$

c'est-à-dire

$$3ax^2 - 3a^2x + a^3 - b^3 = 0$$

et

$$x = \frac{3a^2 \pm \sqrt{9a^4 - 12a(a^3 - b^3)}}{6a} = \frac{3a^2 \pm \sqrt{12ab^3 - 3a^4}}{6a}.$$

On en déduit

$$y = \frac{3a^2 \mp \sqrt{12ab^3 - 3a^4}}{6a}.$$

La symétrie des équations explique la coïncidence des valeurs de x et de y. Pour que les valeurs des inconnues soient réelles, il faut qu'on ait $12ab^3 > 3a^4$ ou $4b^3 > a^3$.

6°. *Soit à résoudre le système*

$$x + y = a,$$
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = b.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, la seconde équation devient

$$x^2 + y^2 = bxy.$$

La première équation donne

$$y = a - x.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$x^2 + (a - x)^2 = bx(a - x),$$

d'où

$$(2 + b)x^2 - a(2 + b)x + a^2 = 0$$

et

$$x = \frac{a(2 + b) \pm \sqrt{a^2(2 + b)^2 - 4a^2(2 + b)}}{2(2 + b)}.$$

En faisant sortir a^2 du radical et en simplifiant sous ce radical, on obtient

$$x = \frac{a(2+b) \pm a\sqrt{b^2-4}}{2(2+b)}.$$

On peut alors diviser haut et bas par $2+b$, en remarquant que pour diviser le radical par $2+b$ il faut diviser sous le radical par $(2+b)^2$, et que b^2-4 revient à $(b+2)(b-2)$; si l'on met en outre $\frac{a}{2}$ en facteur commun, on arrive à la formule

$$x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right).$$

On aura, par suite,

$$y = \frac{a}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right).$$

La condition de réalité des racines sera $b > 2$, en valeur absolue.

211. Considérons maintenant le système général formé de deux équations complètes du second degré à deux inconnues; ce système sera de la forme

$$a x^2 + b xy + c y^2 + d x + e y + f = 0,$$
$$a' x^2 + b' xy + c' y^2 + d' x + e' y + f' = 0.$$

Je multiplierai les deux membres de la première équation par c', les deux membres de la seconde par c; les deux termes en y^2 auront le même coefficient cc'. Si l'on retranche alors membre à membre les deux équations obtenues, les termes en y^2 disparaîtront, de sorte que l'équation résultante pourra être représentée par

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0.$$

On en déduira facilement

$$y = -\frac{\mathrm{A}x^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{F}}{\mathrm{B}x + \mathrm{E}}.$$

Cette valeur de y, substituée dans l'une des équations données, conduira généralement à une équation complète du quatrième degré de la forme

$$\mathrm{M}x^4 + \mathrm{N}x^3 + \mathrm{P}x^2 + \mathrm{Q}x + \mathrm{R} = 0;$$

car le terme ax^2, par exemple, devra être multiplié par le dénominateur de la valeur de y^2, c'est-à-dire par $(\mathrm{B}x + \mathrm{E})^2$: ce qui conduira à des termes en x^4, en x^3 et en x^2.

Si, par suite des données particulières, on a $\mathrm{N} = 0$ et $\mathrm{Q} = 0$, l'équation deviendra bi-carrée, et nous pourrons la résoudre,

Elle s'abaissera au second degré, si l'on a $M = 0$ et $N = 0$. Si l'on a $M = 0$ et $R = 0$ ou bien $Q = 0$ et $R = 0$, on pourra diviser les deux membres de l'équation par x ou par x^2, ce qui indiquera une ou deux racines nulles; et les autres racines seront données par une équation du second degré.

On peut, dans la pratique, simplifier la résolution du système à l'aide de certains artifices de calcul : nous en indiquerons quelques-uns.

1°. *Soit à résoudre le système*

$$x^2 + y^2 = a^2,$$
$$xy = b^2.$$

Je multiplie les deux membres de la seconde équation par 2, j'obtiens

$$2xy = 2b^2.$$

En ajoutant et en retranchant successivement membre à membre cette équation et la première du système, on trouve

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 2b^2,$$
$$x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - 2b^2;$$

c'est-à-dire

$$(x + y)^2 = a^2 + 2b^2,$$
$$(x - y)^2 = a^2 - 2b^2.$$

On en déduit

$$x + y = \pm\sqrt{a^2 + 2b^2},$$
$$x - y = \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}.$$

Il en résulte immédiatement

$$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} \pm \sqrt{a^2 - 2b^2}\right),$$

$$y = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} \mp \sqrt{a^2 - 2b^2}\right).$$

On doit prendre dans ces formules les signes supérieurs ensemble et les signes inférieurs ensemble; on aura

$$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{a^2 - 2b^2}\right)$$

avec $y = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2 - 2b^2}\right)$

et

$$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2 - 2b^2}\right)$$

avec $y = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{a^2 - 2b^2}\right).$

Les valeurs de x et de y sont les mêmes, sauf l'ordre dans lequel on doit les assembler, par suite de la symétrie des équations. On évitera les fautes de signes en remarquant que le produit xy doit toujours être égal à b^2.

2°. *Soit à résoudre le système*

$$x^3 + y^3 = 35,$$
$$xy = 6.$$

On déduit de la seconde équation $y = \frac{6}{x}$. La première devient

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35,$$

d'où

$$x^6 - 35\,x^3 + 216 = 0.$$

Posons $x^3 = z$ et $x^6 = z^2$. L'équation prendra la forme

$$z^2 - 35\,z + 216 = 0,$$

d'où

$$z = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 864}}{2} = \frac{35 \pm 19}{2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z' = 27, \\ z'' = 8. \end{cases}$$

On a

$$x^3 = z,$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{z},$$

c'est-à-dire

$$x' = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{et} \quad x'' = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Puisqu'on a

$$y = \frac{6}{x},$$

il viendra ensuite

$$y' = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{et} \quad y'' = \frac{6}{2} = 3.$$

On aurait pu immédiatement indiquer ces dernières valeurs, en remarquant la symétrie des équations par rapport à x et à y.

On aurait obtenu plus rapidement l'équation en z, en élevant au cube les deux membres de l'équation $xy = 6$. On aurait eu alors les deux équations

$$x^3 + y^3 = 35,$$
$$x^3 y^3 = 216.$$

Ces équations montrent que x^3 et y^3 sont les racines de l'équation du second degré $z^2 - 35\,z + 216 = 0$. Le reste du calcul s'achève comme précédemment.

3°. *Soit à résoudre le système*

$$x^3 + y^3 = a^3,$$
$$x^2 y^2 = b^2.$$

On déduira de la seconde équation

$$xy = \pm b,$$

c'est-à-dire

$$x^3 y^3 = \pm b^3.$$

Par conséquent, les valeurs de x^3 et de y^3 seront les racines des deux équations du second degré

$$z^2 - a^3 z + b^3 = 0,$$
$$u^2 - a^3 u - b^3 = 0;$$

on rentre donc dans le cas précédent.

4°. *Soit à résoudre le système*

$$x^{\frac{m}{2}} + x^{\frac{m}{4}} y^{\frac{m}{4}} + y^{\frac{m}{2}} = a,$$
$$x^m + x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}} + y^m = b.$$

Posons

$$x^{\frac{m}{2}} = u \quad \text{et} \quad y^{\frac{m}{2}} = v.$$

Les équations proposées deviendront alors (77)

$$u + \sqrt{uv} + v = a,$$
$$u^2 + uv + v^2 = b.$$

La seconde équation revient à

$$(u + v)^2 - uv = b,$$

c'est-à-dire à

$$(u + v + \sqrt{uv})(u + v - \sqrt{uv}) = b.$$

En remplaçant le premier facteur du premier membre par sa valeur a, on aura

$$u + v - \sqrt{uv} = \frac{b}{a}.$$

On connaîtra donc la somme et la différence des quantités $u + v$ et $\sqrt{uv}$. Par suite, on pourra écrire

$$u + v = \frac{a}{2} + \frac{b}{2a} = \frac{a^2 + b}{2a},$$

$$\sqrt{uv} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a} = \frac{a^2 - b}{2a}, \quad \text{d'où} \quad uv = \frac{(a^2 - b)^2}{4a^2}.$$

La question sera ainsi ramenée à trouver deux quantités u

et v, connaissant leur somme et leur produit (190). On aura ensuite :

$$x = \sqrt[m]{u^2}, \quad y = \sqrt[m]{v^2}.$$

212. Passons à des systèmes renfermant plus de deux inconnues. On cherchera à éviter la formation d'équations de degré supérieur au second.

1°. *Soit à résoudre le système*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2.$$

Un théorème de calcul (44) nous donnera immédiatement :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Par suite

$$x = \frac{ad}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y = \frac{bd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad z = \frac{cd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2°. *Soit à résoudre le système*

$$(x + y + z)^2 = 5y^2 + 8(x + z),$$
$$x^2 = y + z,$$
$$z^2 = x^2 + y^2.$$

On peut écrire comme il suit les deux dernières équations :

$$z + y = x^2,$$
$$z^2 - y^2 = x^2.$$

Si l'on divise membre à membre ces deux équations, on en déduit

$$z - y = 1.$$

En combinant ce résultat avec l'équation $z + y = x^2$, on trouve

$$z = \frac{x^2 + 1}{2},$$
$$y = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Remplaçons dans le premier membre de l'équation

$$(x + y + z)^2 = 5y^2 + 8(x + z), \quad y + z \text{ par } x^2,$$

et dans le second membre, y et z par les valeurs qu'on vient d'obtenir. Cette équation deviendra

$$(x+x^2)^2 = 5\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2 + 8\left(x+\frac{x^2+1}{2}\right).$$

Dans le premier membre, on peut faire sortir x de la parenthèse en l'élevant au carré. On peut multiplier les deux membres par le dénominateur 4. On peut enfin, dans le second membre, remplacer x^2-1 par le produit $(x+1)(x-1)$, et comme x^2-1 est élevé au carré, il faudra aussi élever ce produit au carré. On obtiendra ainsi

$$4x^2(x+1)^2 = 5(x+1)^2(x-1)^2 + 16(2x+x^2+1).$$

Le dernier terme du second membre n'est autre chose que $16(x+1)^2$. En faisant passer tous les termes dans le premier membre, on pourra donc mettre $(x+1)^2$ en facteur commun, et l'on aura

$$(x+1)^2[4x^2-5(x-1)^2-16] = 0.$$

Le facteur $x+1$ égalé à zéro donne $x=-1$; les valeurs correspondantes de y et de z sont $y=0$ et $z=1$. Le facteur $4x^2-5(x-1)^2-16$ égalé à zéro conduit à l'équation du second degré

$$x^2-10x+21=0,$$

d'où

$$x = 5 \pm \sqrt{25-21},$$

c'est-à-dire

$$x=7 \quad \text{et} \quad x=3.$$

Les valeurs correspondantes de y sont $y=24$ et $y=4$; celles de z sont $z=25$ et $z=5$. Les quatre groupes de valeurs forment le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
x' = -1, & x'' = -1, & x''' = 7, & x^{\text{IV}} = 3. \\
y' = 0, & y'' = 0, & y''' = 24, & y^{\text{IV}} = 4. \\
z' = 1, & z'' = 1, & z''' = 25, & z^{\text{IV}} = 5.
\end{array}$$

3°. *Soit à résoudre le système*

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-z^2-u^2 &= a, \\
x+y+z+u &= b, \\
y^2 &= xz, \\
zy &= ux.
\end{aligned}$$

Je mets dans le premier membre de la première équation et dans le premier membre de la seconde x^2 et x en facteur com-

mun. J'obtiens ainsi

$$x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}-\frac{z^2}{x^2}-\frac{u^2}{x^2}\right)=a,$$
$$x\left(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{u}{x}\right)=b.$$

Je pose $\frac{y}{x}=t$, et je vais chercher à exprimer les rapports $\frac{z}{x}$ et $\frac{u}{x}$ en fonction de t. Je ramènerai de cette manière la question à la résolution de deux équations en x et en t.

Si je divise par x^2 les deux membres de l'équation $y^2=xz$, je trouve $\frac{y^2}{x^2}=\frac{z}{x}=t^2$. Si je divise par x^2 les deux membres de l'équation $zy=ux$, je puis écrire $\frac{z}{x}\cdot\frac{y}{x}=\frac{u}{x}=t^3$. J'ai donc

$$\frac{y}{x}=t,\quad \frac{z}{x}=t^2,\quad \frac{u}{x}=t^3.$$

Par suite, les deux premières équations deviennent

$$x^2(1+t^2-t^4-t^6)=a,$$
$$x\,(1+t+t^2+t^3)=b.$$

La première peut se mettre sous la forme

$$x^2\left[1+t^2-t^4(1+t^2)\right]=a,$$

d'où

$$x^2(1+t^2)(1-t^4)=a.$$

La seconde peut se mettre sous la forme

$$x.\frac{1-t^4}{1-t}=b,$$

en se rappelant que $1+t+t^2+t^3=\frac{1-t^4}{1-t}$ (38).

Si l'on divise alors membre à membre les deux équations considérées, on obtient

$$x(1+t^2)(1-t)=\frac{a}{b},$$

d'où

$$x=\frac{a}{b(1+t^2)(1-t)}.$$

Si l'on substitue cette valeur de x dans l'équation $x.\frac{1-t^4}{1-t}=b$, on obtient

$$\frac{a(1-t^4)}{b(1+t^2)(1-t)^2}=b.$$

Si l'on remplace $1-t^4$ par $(1+t^2)(1-t^2)$ et $1-t^2$ par $(1+t)(1-t)$, on trouve

$$\frac{a(1+t^2)(1+t)(1-t)}{b(1+t^2)(1-t)^2}=b.$$

On peut alors supprimer à la fois le facteur $1+t^2$ et le facteur $1-t$, communs aux deux termes du premier membre, et l'équation devient

$$\frac{a(1+t)}{b(1-t)}=b.$$

On en déduit

$$a(1+t)=b^2(1-t),$$

d'où

$$t=\frac{b^2-a}{b^2+a},$$

Il en résulte

$$1+t^2=\frac{2(b^4+a^2)}{(b^2+a)^2} \quad \text{et} \quad 1-t=\frac{2a}{b^2+a}.$$

Par suite,

$$x=\frac{a}{b(1+t^2)(1-t)}=\frac{(b^2+a)^3}{4b(b^4+a^2)}.$$

On aura donc

$$y=tx=\frac{(b^2+a)^2(b^2-a)}{4b(b^4+a^2)},$$

$$z=t^2x=\frac{(b^2+a)(b^2-a)^2}{4b(b^4+a^2)},$$

$$u=t^3x=\frac{(b^2-a)^3}{4b(b^4+a^2)}.$$

Ces valeurs sont faciles à vérifier.

Problèmes.

213. *Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme* 27 *des extrêmes, la somme* 23 *des moyens, et celle* 754 *des carrés des quatre termes.*

Représentons par $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$ la proportion cherchée. L'énoncé et la propriété fondamentale des proportions fourniront les quatre équations suivantes :

$$x+t=27,$$
$$y+z=23,$$
$$x^2+y^2+z^2+t^2=754,$$
$$xt=yz.$$

Si l'on connaissait le produit $xt=yz$, la question serait im-

médiatement résolue. Pour déterminer ce produit, ajoutons membre à membre les deux premières équations après les avoir élevées au carré; nous aurons

$$x^2 + 2tx + t^2 + y^2 + 2yz + z^2 = 1258.$$

Mais la troisième équation du système permet de remplacer $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ par 754; de plus, xt étant égal à yz, on a

$$2xt + 2yz = 4xt.$$

Par suite, l'équation considérée prend la forme

$$754 + 4xt = 1258,$$

d'où

$$xt = yz = 126.$$

Les deux équations

$$x + t = 27 \quad \text{et} \quad xt = 126$$

prouvent que x et t sont les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - 27u + 126 = 0,$$

d'où

$$u = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 504}}{2} = \frac{27 \pm 15}{2},$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = 21, \\ t = 6, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} x = 6, \\ t = 21. \end{matrix}$$

Les deux équations

$$y + z = 23 \quad \text{et} \quad yz = 126$$

prouvent de même que y et z sont les racines de l'équation du second degré

$$v^2 - 23v + 126 = 0,$$

d'où

$$v = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{2} = \frac{23 \pm 5}{2},$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y = 14, \\ z = 9, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} y = 9, \\ z = 14. \end{matrix}$$

On pourra assembler comme on voudra les différents couples de valeurs. Si l'on choisit les deux premiers, la proportion cherchée aura la forme $\frac{21}{14} = \frac{9}{6}$. On peut dans cette proportion changer les moyens de place entre eux sans changer leur somme; de même pour les extrêmes. On retrouve ainsi les autres couples de valeurs.

214. *Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant son périmètre et sa surface.*

Je représente par $2p$ le périmètre du triangle et par s^2 sa surface. Je désigne par x et y les deux côtés de l'angle droit, par z l'hypoténuse. L'énoncé et la propriété fondamentale du triangle rectangle donnent immédiatement

$$x + y + z = 2p,$$
$$xy = 2s^2,$$
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

La surface d'un triangle rectangle est en effet égale, soit à la moitié du produit des côtés de l'angle droit, soit à la moitié du produit de l'hypoténuse par la hauteur correspondante.

Je déduis de la première équation

$$y + z = 2p - z.$$

J'élève les deux membres au carré, j'obtiens

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4p^2 - 4pz + z^2.$$

Je remplace dans le premier membre $x^2 + y^2$ par z^2 et $2xy$ par $4s^2$: il vient

$$z^2 + 4s^2 = 4p^2 - 4pz + z^2.$$

z^2 disparaît dans les deux membres, l'équation s'abaisse au premier degré et donne

$$z = \frac{4p^2 - 4s^2}{4p} = \frac{p^2 - s^2}{p}.$$

Pour que le problème soit possible, une première condition est donc qu'on ait $p^2 - s^2 > 0$ ou $p^2 > s^2$.

La première équation du système proposé donne

$$x + y = 2p - z = \frac{p^2 + s^2}{p},$$

on a d'ailleurs

$$xy = 2s^2.$$

Par conséquent, x et y sont les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - \frac{p^2 + s^2}{p} u + 2s^2 = 0.$$

Si les racines de cette équation sont réelles, elles seront positives (**191**). La seconde condition de possibilité du problème est donc

$$\left(\frac{p^2 + s^2}{p}\right)^2 - 8s^2 > 0.$$

Cette condition revient à

$$(p^2 + s^2)^2 > 8p^2s^2 \quad \text{ou} \quad p^2 + s^2 > 2ps\sqrt{2}.$$

Cherchons de quelle manière p et s peuvent varier l'un par rapport à l'autre, et posons $\frac{p}{s} = \mathrm{K}$.

L'inégalité trouvée, qu'on peut écrire

$$p^2 - 2ps\sqrt{2} + s^2 > 0,$$

donne

$$\frac{p^2}{s^2} - 2\frac{p}{s}\sqrt{2} + 1 > 0,$$

ou

$$\mathrm{K}^2 - 2\mathrm{K}\sqrt{2} + 1 > 0.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{K}^2 - 2\mathrm{K}\sqrt{2} + 1 = 0,$$

on trouve

$$\mathrm{K} = \sqrt{2} \pm 1.$$

On pourra remplacer le premier membre de l'inégalité considérée (**192**), par le produit $(\mathrm{K} - \mathrm{K}')(\mathrm{K} - \mathrm{K}'')$, c'est-à-dire par $[\mathrm{K} - (\sqrt{2} + 1)][\mathrm{K} - (\sqrt{2} - 1)]$. Il faudra donc qu'on ait

$$\mathrm{K} > \sqrt{2} + 1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{K} < \sqrt{2} - 1.$$

Mais nous avons déjà trouvé

$$p^2 > s^2 \quad \text{ou} \quad \frac{p^2}{s^2} > 1,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{K}^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{K} > 1.$$

Il faut donc rejeter la condition $\mathrm{K} < \sqrt{2} - 1$. De sorte que l'unique condition de possibilité du problème sera

$$\mathrm{K} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{s} > \sqrt{2} + 1.$$

On en déduit

$$p > s(\sqrt{2} + 1) \quad \text{ou} \quad s < \frac{p}{\sqrt{2} + 1}.$$

Ces inégalités indiquent quel est le *minimum* du périmètre d'un triangle rectangle de surface donnée, et quel est le *maximum* de la surface d'un triangle rectangle de périmètre donné. Comme l'inégalité considérée se change à la limite en une égalité, on voit que dans les deux cas indiqués le triangle est isocèle, puisque l'équation qui donne x et y satisfait alors à la condition générale $b^2 - 4ac = 0$.

215. *Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant son périmètre et la somme formée par son hypoténuse et la hauteur correspondante.*

Soient x et y les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse, u la hauteur inconnue correspondante. On aura évidemment les quatre équations suivantes entre les quatre inconnues du problème

$$x + y + z = 2p,$$
$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$z + u = a,$$
$$xy = zu,$$

en désignant par $2p$ le périmètre du triangle, et par a la somme de l'hypoténuse z et de la hauteur u.

J'élève la première équation au carré, après avoir fait passer z dans le second membre, j'obtiens

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4p^2 - 4pz + z^2.$$

Je remplace $x^2 + y^2$ par z^2, il vient

$$2xy = 4p^2 - 4pz.$$

Je remplace $2xy$ par $2zu$ et u par $a - z$; je trouve

$$2z(a - z) = 4p^2 - 4pz,$$

d'où

$$z^2 - (2p + a)z + 2p^2 = 0.$$

Si les racines de cette équation sont réelles, elles seront positives. Il faut donc qu'on ait

$$(2p + a)^2 - 8p^2 > 0,$$

d'où

$$(2p + a)^2 > 8p^2 \quad \text{et} \quad 2p + a > 2p\sqrt{2}.$$

La première condition de possibilité du problème revient donc à

$$a > 2p(\sqrt{2} - 1).$$

L'équation

$$z^2 - (2p + a)z + 2p^2 = 0$$

donne

$$z = \frac{(2p + a) \pm \sqrt{(2p + a)^2 - 8p^2}}{2}.$$

Une seule racine peut convenir. En effet, pour les admettre toutes les deux, il faudrait qu'elles fussent toutes les deux plus petites que a en vertu de la relation $z + u = a$. Or il est évident que a est une quantité inférieure au périmètre $2p$. Il en résulte que la somme des racines de l'équation en z étant égale à $2p + a$, si l'une est plus petite que a, l'autre sera plus

grande que $2p$ ou que a : elle devra donc être rejetée. On ne pourra donc admettre que la plus petite des deux racines, celle qui correspond au signe — du radical; et encore faudra-t-il qu'elle soit plus petite que a. On doit donc satisfaire à la condition

$$\frac{2p+a-\sqrt{(2p+a)^2-8p^2}}{2} < a,$$

c'est-à-dire

$$a > 2p-\sqrt{(2p+a)^2-8p^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{(2p+a)^2-8p^2} > 2p-a.$$

J'élève les deux membres de cette inégalité au carré, j'obtiens

$$(2p+a)^2-8p^2 > (2p-a)^2,$$

d'où

$$8ap > 8p^2,$$

c'est-à-dire

$$a > p.$$

La condition $a > p$ renferme évidemment la condition précédente $a > 2p(\sqrt{2}-1)$: c'est donc l'unique condition de possibilité du problème.

Connaissant z, on a

$$u = a - z;$$

connaissant z et u, on a

$$x+y = 2p-z \quad \text{et} \quad xy = zu.$$

Par suite, on trouvera x et y au moyen de l'équation du second degré

$$V^2-(2p-z)V+zu = 0.$$

Appliquons les formules trouvées aux données suivantes :

$$2p = 12, \quad a = 7,4.$$

La condition $a > p$ est ici satisfaite, et le problème est possible. On a

$$z = \frac{12+7,4-\sqrt{19,4^2-8.36}}{2},$$

d'où

$$z = 5 \quad \text{et} \quad u = 7,4-5 = 2,4.$$

x et y seront les racines de l'équation

$$V^2-7V+12 = 0,$$

d'où

$$V = \frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2} = \frac{7\pm 1}{2}.$$

Par conséquent, si x est le plus grand côté, on aura

$$x = 4 \quad \text{et} \quad y = 3.$$

216. *Déterminer les dimensions d'un parallélipipède rectangle, dont on connaît la diagonale, la surface totale, et dont l'une des arêtes est moyenne arithmétique entre les deux autres.*

En appelant x, y, z, les trois dimensions du parallélipipède, en représentant sa surface totale par s^2, et en désignant par d sa diagonale, on aura évidemment

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2,$$
$$2xy + 2xz + 2yz = s^2,$$
$$2x = y + z.$$

La seconde équation peut se mettre sous la forme

$$2x(y+z) + 2yz = s^2.$$

$y + z$ étant égale à $2x$, on en déduit

$$4x^2 + 2yz = s^2.$$

Mais la première équation donne

$$y^2 + z^2 = d^2 - x^2.$$

Si l'on ajoute membre à membre cette équation et la précédente, il vient

$$4x^2 + (y+z)^2 = s^2 + d^2 - x^2.$$

Je remplace $y + z$ par $2x$, et j'obtiens

$$4x^2 + 4x^2 = s^2 + d^2 - x^2,$$

d'où

$$9x^2 = s^2 + d^2 \quad \text{et} \quad x = \frac{\sqrt{s^2 + d^2}}{3}.$$

Le radical doit être pris avec le signe $+$.

On a alors

$$y + z = 2x = \frac{2\sqrt{s^2 + d^2}}{3} \quad \text{et} \quad 4x^2 + 2yz = s^2,$$

c'est-à-dire

$$2yz = s^2 - 4x^2,$$

d'où

$$yz = \frac{5s^2 - 4d^2}{18}.$$

y et z étant des quantités positives, il faut qu'on ait $s^2 > \frac{4d^2}{5}$: c'est là la première condition de possibilité du problème.

Connaissant la somme $y + z$ et le produit yz, y et z seront

les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - \frac{2\sqrt{s^2+d^2}}{3}u + \frac{5s^2-4d^2}{18} = 0.$$

Si les racines de cette équation sont réelles, elles seront positives. On doit donc avoir

$$\frac{4(s^2+d^2)}{9} - 4 \cdot \frac{5s^2-4d^2}{18} > 0.$$

On en déduit facilement

$$s^2 < 2d^2:$$

c'est là la seconde condition de possibilité du problème. Pour que le problème soit possible, d étant donnée, s^2 doit varier entre $2d^2$ et $\frac{4d^2}{5}$. Si s^2 est donnée, d doit varier entre $\frac{s\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{s\sqrt{2}}{2}$.

On a

$$u = \frac{\sqrt{s^2+d^2}}{3} \pm \sqrt{\frac{s^2+d^2}{9} - \frac{5s^2-4d^2}{18}},$$

d'où

$$u = \frac{\sqrt{s^2+d^2}}{3} \pm \sqrt{\frac{2d^2-s^2}{6}}.$$

Si y est la plus grande des deux arêtes y et z, on aura

$$y = \frac{\sqrt{s^2+d^2}}{3} + \sqrt{\frac{2d^2-s^2}{6}} \quad \text{et} \quad z = \frac{\sqrt{s^2+d^2}}{3} - \sqrt{\frac{2d^2-s^2}{6}}.$$

217. Nous terminerons ces applications en traitant le système suivant

$$x + y = a,$$
$$x^4 + y^4 = b^4.$$

Nous ferons usage d'un artifice de calcul utile à connaître.

La somme des quantités x et y étant égale à a, ces quantités seront racines d'une équation du second degré de la forme

$$z^2 - az + q = 0.$$

q qui représente le produit xy est inconnu et doit prendre les valeurs nécessaires pour que les équations en z correspondantes donnent toutes les valeurs de x et de y.

Étant donnée l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

on a, d'une manière générale, en désignant par x' et x'' les

racines de cette équation,

$$x' + x'' = -p, \quad x'x'' = q.$$

Il en résulte

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = p^2 - 2q.$$

De même,

$$x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = -p^3 + 3pq.$$

Enfin

$$x'^4 + x''^4 = (x'^2 + x''^2)^2 - 2x'^2x''^2 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2,$$

c'est-à-dire

$$x'^4 + x''^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$$

Si l'on revient maintenant à l'équation

$$z^2 - az + q = 0$$

dont les racines sont x et y, ces racines devront donc satisfaire à la relation

$$x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2q + 2q^2,$$

puisqu'on a dans le cas considéré $p = -a$. En vertu de l'équation

$$x^4 + y^4 = b^4,$$

on aura donc

$$a^4 - 4a^2q + 2q^2 = b^4,$$

et l'on pourra déterminer q.

L'équation précédente, mise sous la forme

$$2q^2 - 4a^2q + a^4 - b^4 = 0,$$

donne

$$q = \frac{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 2a^4 + 2b^4}}{2} = \frac{2a^2 \pm \sqrt{2(a^4 + b^4)}}{2}.$$

Supposons qu'on ait

$$x + y = 7,$$
$$x^4 + y^4 = 641.$$

Il faudra faire

$$a = 7 \quad \text{et} \quad b^4 = 641.$$

On aura

$$q = \frac{98 \pm \sqrt{2(2401 + 641)}}{2} = \frac{98 \pm 78}{2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} q' = 88, \\ q'' = 10. \end{cases}$$

Les valeurs de x et de y seront donc déterminées par les deux équations

$$z^2 - 7z + 88 = 0,$$
$$z^2 - 7z + 10 = 0.$$

La première donne

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4.88}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{-303}}{2},$$

d'où

$$x = \frac{7 + \sqrt{-303}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{7 - \sqrt{-303}}{2},$$

ou

$$x = \frac{7 - \sqrt{-303}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{7 + \sqrt{-303}}{2}.$$

La seconde équation donne

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4.10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

d'où

$$x = 5 \quad \text{et} \quad y = 2,$$

ou

$$x = 2 \quad \text{et} \quad y = 5.$$

CHAPITRE IV.

QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

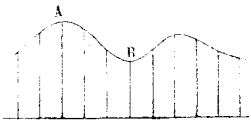
218. Lorsqu'une grandeur *variable*, après avoir augmenté d'une manière continue pendant un certain temps, diminue ensuite de la même manière, elle passe par une valeur *plus grande* que celles qui précèdent ou qui suivent immédiatement. On dit alors que la grandeur considérée passe par un *maximum*.

Lorsqu'une grandeur variable, après avoir diminué d'une manière continue pendant un certain temps, augmente ensuite de la même manière, elle passe par une valeur *plus petite* que celles qui précèdent ou qui suivent immédiatement. On dit alors que la grandeur considérée passe par un *minimum*.

Supposons, par exemple, la section d'un terrain accidenté par un plan vertical, et rapportons les différents points du profil obtenu à une horizontale prise pour axe de comparaison, en abaissant des perpendiculaires des différents points du profil sur l'horizontale choisie.

Si l'on regarde comme grandeur variable la perpendiculaire qui représente la hauteur d'un point quelconque du

profil au-dessus de l'axe de comparaison, on verra que le sommet d'une colline correspondra à un maximum, le fond d'une vallée à un minimum. Le point A répond à un maximum, le point B à un minimum.



Remarquons que, d'après l'exemple même qu'on a choisi, une grandeur variable peut présenter plusieurs maximums et plusieurs minimums : un certain minimum peut donc être plus grand qu'un certain maximum. Il faut bien comprendre; en effet, que le maximum ou le minimum d'une grandeur n'est relatif qu'à la série des valeurs *voisines*, c'est-à-dire celles qui viennent immédiatement avant ou après.

Les Mathématiques supérieures donnent une théorie générale des maximums et des minimums. Nous traiterons seulement quelques questions qui peuvent se résoudre à l'aide des équations du second degré ou des équations bi-carrées.

219. I. *La somme de deux facteurs étant constante, chercher entre quelles limites peut varier leur produit.*

Nous allons appliquer à cette question déjà résolue (**24**, **III**), le procédé régulier que nous voulons indiquer.

Soit a la somme donnée, représentons par x et par y les deux facteurs, désignons par z leur produit *variable*. On aura les deux équations

$$x + y = a,$$
$$xy = z.$$

x et y seront donc les racines de l'équation

$$u^2 - au + z = 0,$$

d'où

$$u = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}.$$

x et y étant des quantités supposées réelles, il faut que l'équation en u ait des racines réelles; ce qui entraîne la condition

$$\frac{a^2}{4} - z > 0 \quad \text{ou} \quad z < \frac{a^2}{4}.$$

Le produit $xy = z$ devant toujours être inférieur à $\frac{a^2}{4}$, a pour limite supérieure ou pour *maximum* cette même quantité. Lorsqu'on a $z = \frac{a^2}{4}$, les racines de l'équation en u deviennent égales, puisque la condition $a^2 - 4z = 0$ se trouve remplie. Par conséquent, *le produit de deux facteurs dont la somme est constante est maximum, lorsque ces deux facteurs sont*

égaux entre eux, c'est-à-dire lorsque chacun d'eux est égal à la moitié de la somme donnée.

Si l'on veut chercher les valeurs de x et de y qui répondent à un produit donné, il suffira de remplacer z par la valeur correspondante dans la formule

$$u = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}.$$

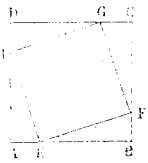
Il n'y a pas de produit *minimum*. En effet, la somme des deux facteurs étant a, si l'on fait croître le facteur x au delà de a, le facteur y deviendra négatif et d'autant plus grand en valeur absolue que x sera plus grand. Le produit z devient alors négatif et peut, par conséquent, décroître algébriquement (168) au delà de toute limite, sans que la condition de réalité des racines de l'équation en u cesse d'être vérifiée.

220. La question que nous venons de résoudre fournit la solution immédiate d'un grand nombre de problèmes de géométrie. Nous citerons les suivants.

1°. *De tous les rectangles de même périmètre $2p$, quel est le plus grand?*

La somme de la base x et de la hauteur y du rectangle étant constamment égale à p, le produit xy de ces deux dimensions est maximum, lorsqu'on a $x = y = \frac{p}{2}$, c'est-à-dire lorsque le rectangle devient un carré,

2°. *Inscrire dans un carré donné le carré minimum.* Soit le carré ABCD. Si je prends sur les différents côtés et dans le même sens quatre longueurs égales AE, BF, CG, DH, la figure inscrite EFGH sera un carré. En effet, tous les triangles rectangles EBF, FCG, GDH, HAE, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux : leurs hypoténuses sont donc toutes égales. De plus, les angles FEB et AEH sont complémentaires : l'angle HEF est donc droit, et la figure EFGH est un carré. Ceci posé, la surface de ce carré sera *minimum*, lorsque la somme des triangles rectangles qui, ajoutés à ce carré, complètent le carré donné, sera *maximum*. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que l'un de ces triangles soit maximum. Or la somme BE + BF est constante et égale au côté du carré donné. Le produit EB × BF ou la surface du triangle EBF sera donc maximum, lorsqu'on aura EB = BF. Il faut donc que les points E, F, G, H, soient les milieux des côtés du carré donné.



221. Le théorème précédent peut être étendu à un nombre quelconque de facteurs *positifs*. *Autant de facteurs qu'on*

voudra ayant une somme constante, leur produit sera maximum lorsqu'ils seront tous égaux entre eux.

Supposons qu'on ait

$$x + y + z + u + v + \ldots = a.$$

Admettons, pour un instant, que le produit $xyzuv\ldots$ soit maximum. Je dis qu'il est impossible de supposer que deux facteurs quelconques x et y, par exemple, soient inégaux. En effet, on pourrait alors remplacer chacun d'eux par leur demi-somme sans changer la somme a; mais on aurait en même temps, d'après ce qui vient d'être démontré (**218**),

$$xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

c'est-à-dire

$$xyzuv\ldots < \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)zuv\ldots.$$

Si l'on a n facteurs, chacun d'eux devra donc être égal à $\frac{a}{n}$, si l'on veut former le produit maximum.

On peut déduire de là que la racine $n^{ième}$ d'un produit de n facteurs, c'est-à-dire leur *moyenne géométrique*, est inférieure à la $n^{ième}$ partie de leur somme, c'est-à-dire à leur *moyenne arithmétique*, pourvu que deux au moins des facteurs considérés soient inégaux.

En effet, on a nécessairement

$$xyzuv\ldots < \left(\frac{x+y+z+u+v+\ldots}{n}\right)^n,$$

en prenant chaque facteur égal à la $n^{ième}$ partie de la somme qu'ils forment tous ensemble; et il en résulte

$$\sqrt[n]{xyzuv\ldots} < \frac{x+y+z+u+v+\ldots}{n}.$$

222. Dans certains cas, ce n'est pas la somme des facteurs dont on demande le produit maximum qui est constante, mais bien celle de leurs carrés ou de leurs cubes, etc. La réponse à la question est encore la même.

Supposons qu'on veuille *inscrire dans un cercle donné un rectangle dont l'aire soit maximum.*

Si l'on désigne par x et y les dimensions du rectangle et par z sa surface variable, on aura

$$xy = z.$$

De plus, la diagonale du rectangle étant nécessairement un

diamètre du cercle circonscrit, on aura aussi

$$x^2 + y^2 = D^2,$$

en désignant ce diamètre par D.

On remarque alors que si z est maximum, z^2 l'est aussi. On a d'ailleurs $x^2y^2 = z^2$. La somme des deux facteurs x^2 et y^2 étant constante, leur produit sera maximum lorsque la condition $x^2 = y^2$ ou $x = y$ sera remplie. Le rectangle inscrit maximum se confond donc avec le carré inscrit.

223. II. *Décomposer un nombre donné en deux facteurs dont la somme soit minimum.*

Désignons par a le nombre donné, par x et y les deux facteurs, par z leur somme variable. On aura

$$xy = a,$$
$$x + y = z.$$

x et y seront donc les racines de l'équation

$$u^2 - z.u + a = 0.$$

x et y étant des quantités réelles, il faut que les racines de cette équation soient réelles, c'est-à-dire qu'on ait

$$z^2 - 4a > 0 \quad \text{ou} \quad z > 2\sqrt{a}.$$

La somme variable z ou $x + y$ devant toujours être supérieure à $2\sqrt{a}$, a pour limite inférieure ou pour *minimum* cette même quantité. Les racines de l'équation en u deviennent égales quand z atteint son minimum, et l'on a

$$x = y = \frac{z}{2} = \sqrt{a}.$$

La somme de deux facteurs formant un produit constant est donc minimum, lorsque chacun de ces facteurs est égal à la racine carrée du produit donné.

Il n'y a pas de *maximum* absolu. En effet, l'un des facteurs devenant très-grand, l'autre devient très-petit : x devenant $m\sqrt{a}$, y devient $\frac{\sqrt{a}}{m}$. La somme $x + y$ peut donc devenir aussi grande qu'on voudra, positivement ou négativement. Par rapport à la série des valeurs négatives, $z = -2\sqrt{a}$ est un maximum.

On peut étendre le théorème qu'on vient de démontrer au cas d'un nombre quelconque de facteurs. Supposons qu'on ait

$$xyzuv\ldots = a.$$

Je dis que si la somme $x + y + z + u + v + \ldots$ est suppo-

sée minimum, il est impossible d'admettre que deux facteurs quelconques, x et y par exemple, soient inégaux. Je suppose ici tous les facteurs positifs. En effet, si les deux facteurs considérés n'étaient pas égaux, on pourrait remplacer chacun d'eux par la racine carrée du produit xy sans rien changer au produit a; mais, d'après ce qui précède, on aurait alors

$$x+y>\sqrt{xy}+\sqrt{xy}$$

et, par suite,

$$x+y+z+u+v+\ldots>\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+z+u+v+\ldots.$$

Si l'on a n facteurs, chacun d'eux devra donc être égal à $\sqrt[n]{a}$, si l'on veut former la somme minimum.

224. III. *La somme de deux nombres positifs x et y étant donnée, trouver le maximum du produit $x^p y^q$, p et q étant des nombres entiers positifs.*

Supposons qu'on ait $x+y=a$. Je ne changerai rien au produit $x^p y^q$ en le multipliant et en le divisant à la fois par p^p et q^q. J'aurai alors

$x^p y^q = p^p q^q \frac{x^p}{p^p} \cdot \frac{y^q}{q^q} = p^p q^q \left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\frac{y}{q}\right)^q$. Le maximum du second membre ne peut dépendre de la quantité constante $p^p q^q$. Cherchons donc celui du produit $\left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\frac{y}{q}\right)^q$. Ce produit est composé de p facteurs égaux à $\frac{x}{p}$ et de q facteurs égaux à $\frac{y}{q}$. La somme de ces $p+q$ facteurs est donc égale à $p \cdot \frac{x}{p} + q\frac{y}{q}$, c'est-à-dire à $x+y$ ou a. Le produit sera donc maximum, lorsque tous les facteurs considérés seront égaux entre eux (**220**), c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}.$$

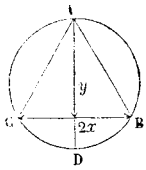
Cette relation, jointe à l'équation $x+y=a$, permettra de déterminer x et y.

On voit que le produit est maximum, lorsque les facteurs x et y sont proportionnels à leurs exposants p et q.

A l'aide de ce théorème, on peut résoudre un grand nombre de questions géométriques. Nous en indiquerons quelques-unes.

1°. *Inscrire dans un cercle donné le triangle isocèle de surface maximum.* Je mène un diamètre AD; d'un point C quelconque, pris sur la circonférence, j'abaisse sur ce diamètre la perpendiculaire CB : le triangle CAB est isocèle. Si le point C choisi se

confond avec le point A ou avec le point D, la surface du triangle est égale à zéro. Entre ces deux résultats, il y a un maximum. Je désigne par $2x$ la base CB du triangle et par y sa hauteur. Si j'appelle S^2 sa surface variable, j'aurai



$$xy = S^2.$$

J'exprimerai ensuite que le triangle est inscrit dans le cercle de rayon R, en posant

$$x^2 = y(2R - y).$$

Il revient au même de chercher le maximum de xy ou celui de x^2y^2. Chercher le maximum de x^2y^2, c'est chercher celui de $y^2(2R - y)^2$, en remplaçant x^2 par sa valeur en fonction de y. Je remarque alors que la somme des deux facteurs $y + (2R - y)$ est égale à la quantité constante $2R$. Par suite, la valeur de y qui correspond au maximum satisfera à la relation

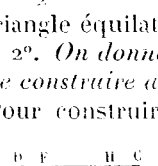
$$\frac{y}{2R - y} = \frac{3}{1},$$

d'où

$$y = \frac{3R}{2}.$$

La hauteur du triangle isocèle cherché doit donc être égale aux $\frac{3}{2}$ du rayon, c'est-à-dire que ce triangle se confond avec le triangle équilatéral inscrit.

2°. *On donne une feuille de carton carrée, et l'on demande de construire avec cette feuille la boîte de volume maximum.* Pour construire une boîte de volume quelconque, il faudra mener quatre parallèles EF, GH, IK, LM à égale distance des quatre côtés du carré ABCD. On enlèvera les quatre carrés Aa, Bb, Cc, Dd, déterminés sur les angles; et en relevant les parties rectangulaires, on formera une boîte ayant pour fond le carré $abcd$. Appelons $2l$ le côté AB et x la distance AE.



Le volume variable V de la boîte, qui est un parallélipipède rectangle de base $abcd$ et de hauteur x, aura pour expression

$$V = (2l - 2x)^2 . x = 4(l - x)^2 . x.$$

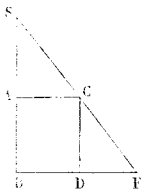
La somme des facteurs $(l - x)$ et x étant égale à la quantité constante l, la valeur de x qui correspond au maximum de V devra satisfaire à la relation

$$\frac{l - x}{x} = \frac{1}{1}$$

d'où

$$x = \frac{l}{3} = \frac{2l}{6}.$$

3°. *Circonscrire à un cylindre donné le cône de volume minimum.* Soit le rectangle ABCD, soit aussi le triangle rectangle SBF. Pendant que le rectangle en tournant autour de AB engendre un cylindre, le triangle engendre un cône circonscrit au cylindre obtenu. Si SF se confond avec CD ou avec AC, le volume de ce cône devient infini; entre ces deux valeurs infinies, il y a un minimum.



Désignons par h la hauteur du cylindre et par r le rayon de sa base; appelons y la hauteur du cône et x le rayon de sa base. Son volume variable sera

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Mais les triangles semblables SBF et CDF donneront

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{x - r},$$

d'où

$$x = \frac{ry}{y - h}.$$

Il viendra par suite

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{y^3}{(y-h)^2}.$$

Chercher le minimum de V, c'est chercher le minimum de

$$\frac{y^3}{(y-h)^2} = \frac{y^3}{y^2 - 2hy + h^2} = \frac{1}{\frac{1}{y} - \frac{2h}{y^2} + \frac{h^2}{y^3}}.$$

On peut mettre cette dernière expression sous la forme

$$\frac{1}{\frac{1}{y}\left(1 - \frac{2h}{y} + \frac{h^2}{y^2}\right)} = \frac{h}{\frac{h}{y}\left(1 - \frac{h}{y}\right)^2}.$$

Le minimum de cette fraction, dont le numérateur est constant, correspond au maximum de son dénominateur. La somme des facteurs $\frac{h}{y}$ et $1 - \frac{h}{y}$ étant égale à la quantité constante 1, la valeur de y qui rendra le dénominateur maximum sera

donnée par la relation

$$\frac{\frac{h}{y}}{1-\frac{h}{y}}=\frac{1}{2},$$

d'où

$$y=3h.$$

La hauteur du cône de volume minimum est donc égale à trois fois celle du cylindre donné.

225. Proposons maintenant la question suivante : *Étudier la série des valeurs du trinôme du second degré ax^2+bx+c, lorsqu'on fait passer x par toutes les valeurs réelles possibles.*

1°. *Cas des racines réelles et inégales.* Supposons qu'en égalant le trinôme ax^2+bx+c à zéro, on trouve deux racines réelles et inégales x' et x''. On pourra alors mettre le trinôme, soit sous la forme (**193**)

$$a(x-x')(x-x''),$$

soit sous la forme (**194**)

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-K^2\right],$$

K^2 représentant la quantité $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ ou $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Les valeurs du trinôme auront le signe de a, lorsque x sera plus grand que la plus grande racine x' ou plus petit que la plus petite x'' ; les valeurs du trinôme auront un signe contraire à celui de a, lorsque x tombera entre x' et x'' (**195**).

Pour fixer les idées, supposons a positif. Si l'on fait croître x depuis $-\infty$ jusqu'à la plus petite racine x'', le trinôme décroîtra, en restant toujours positif, depuis $+\infty$ jusqu'à zéro. C'est ce que montre l'expression $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-K^2\right]$, jusqu'à ce qu'on arrive à faire $x=x''$. Pour cette valeur, le trinôme s'annule en vertu de l'expression $a(x-x')(x-x'')$, et il n'a pu s'annuler pour aucune autre valeur.

Si l'on continue à faire croître x, le trinôme change de signe et devient négatif, puisque x tombe entre x' et x''. Le trinôme redevient nul pour $x=x'$: il change donc deux fois de signe en passant par zéro. Mais dans l'intervalle, partant de zéro pour revenir à zéro, il a dû passer par une valeur négative plus grande que toutes les autres en valeur absolue, c'est-à-dire par un minimum algébrique. Ce minimum correspond évidemment à la plus petite valeur du terme $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ dans l'ex-

pression $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-K^2\right]$, valeur qui est zéro pour $x=-\frac{b}{2a}$ ou pour $x=\frac{x'+x''}{2}$. Ce minimum est donc $-aK^2$ ou $-a.\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

x croissant au delà de x' jusqu'à $+\infty$, le trinôme, redevenu positif, croît depuis zéro jusqu'à $+\infty$.

Si a est négatif et égal à $-a'$, il faut prendre l'inverse de tout ce qui précède. x croissant depuis $-\infty$ jusqu'à x'', le trinôme croîtra depuis $-\infty$ jusqu'à zéro. x continuant de croître depuis x'' jusqu'à x', le trinôme deviendra positif et atteindra son maximum $a'K^2$ ou $-a.\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a}$ pour $x=\frac{x'+x''}{2}$. Au delà de $x=x'$, le trinôme redeviendra négatif et décroîtra depuis zéro jusqu'à $-\infty$.

2°. *Cas des racines égales.* Dans ce cas, le trinôme peut se mettre sous la forme

$$a(x-x')^2 \quad \text{ou} \quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Il conserve toujours le signe de a et admet le minimum ou le maximum zéro, suivant que a est positif ou négatif. Ce minimum ou ce maximum correspond à $x=x'$ ou à $x=-\frac{b}{2a}$.

3°. *Cas des racines imaginaires.* Si les racines sont imaginaires, on peut mettre le trinôme sous la forme

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+K^2\right],$$

K^2 étant ici égal à $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ ou à $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ (**194**). Le trinôme conserve donc toujours le signe de a. Si a est positif, il est susceptible d'un minimum $aK^2=\frac{4ac-b^2}{4a}$, qui correspond à $x=-\frac{b}{2a}$. Si a est négatif, le trinôme est susceptible d'un maximum qui a la même expression algébrique que le minimum précédent, et qui correspond aussi à $x=-\frac{b}{2a}$.

226. Comme dernier exercice, *cherchons si l'expression générale* $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ *est susceptible d'un maximum et d'un minimum*, et dans quels cas il en est ainsi.

Je pose

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=y,$$

d'où

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'y=0.$$

x devant être une quantité réelle, on doit avoir

$$(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)>0,$$

d'où

$$(b'^2-4a'c')y^2-2(bb'-2ac'-2ca')y+b^2-4ac>0.$$

Égalons à zéro le premier membre de cette inégalité, nous en déduirons

$$y=\frac{bb'-2ac'-2ca'\pm\sqrt{(bb'-2ac'-2ca')^2-(b'^2-4a'c')(b^2-4ac)}}{b'^2-4a'c'},$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$y=\frac{bb'-2ac'-2ca'\pm2\sqrt{(ac'-ca')^2+(cb'-bc')(ab'-ba')}}{b'^2-4a'c'}.$$

1°. *Si l'on suppose* $b'^2-4a'c'>0$, le premier terme de l'inégalité en y est positif.

Par conséquent, si les racines y' et y'' sont imaginaires ou égales, c'est-à-dire si l'on a

$$(ac'-ca')^2+(cb'-bc')(ab'-ba')<0,$$

ou

$$(ac'-ca')^2+(cb'-bc')(ab'-ba')=0,$$

l'inégalité considérée sera satisfaite pour toutes les valeurs réelles attribuées à y (195), et par suite l'expression générale donnée ne sera susceptible d'aucun maximum ou d'aucun minimum autre que $+\infty$ ou $-\infty$.

Si les racines y' et y'' sont réelles et inégales, c'est-à-dire si l'on a

$$(ac'-ca')^2+(cb'-bc')(ab'-ba')>0,$$

on pourra donner à y toutes les valeurs possibles, pourvu que ces valeurs ne tombent pas entre y' et y'' (195). Si y' est la plus grande racine, on devra donc avoir $y>y'$ et $y<y''$. Par conséquent, y' représente un minimum et y'' représente un maximum. y' est un minimum par rapport à la série des valeurs de la fonction proposée qui, commençant à y', se termine à $+\infty$. y'' est un maximum par rapport à la série des valeurs de la fonction proposée qui, commençant à y'', se termine à $-\infty$. Le minimum est plus grand que le maximum, parce qu'il s'agit d'un minimum et d'un maximum relatif (217).

La valeur de x qui correspond au minimum est évidem-

ment $x' = \frac{b'y' - b}{2(a - a'y')}$, et celle qui correspond au maximum est $x'' = \frac{b'y'' - b}{2(a - a'y'')}$. En effet, pour les valeurs y' et y'', le premier membre de l'inégalité en y s'annule, et les racines de l'équation en x deviennent égales.

2°. *Si l'on suppose* $b'^2 - 4a'c' < 0$, le premier terme de l'inégalité en y est négatif.

Par conséquent, lorsque les racines y' et y'' sont réelles et inégales, on peut satisfaire à l'inégalité considérée pourvu que les valeurs de y tombent entre y' et y'' (195). Dans ce cas, y' représente le maximum de la fonction considérée, y'' représente son minimum. Le maximum est nécessairement plus grand que le minimum, parce qu'ils font partie de la même série de valeurs, et qu'il n'y a pas entre eux de lacune ou d'alternatives de croissance et de décroissance.

Lorsque les racines y' et y'' sont égales, l'inégalité ne peut être satisfaite que pour la valeur $y = y'$ (195), et l'expression proposée doit, par la suppression d'un facteur commun, se réduire à cette valeur.

Enfin il est impossible, dans le cas considéré, que les racines y' et y'' soient imaginaires; car aucune valeur de y ne pourrait satisfaire à l'inégalité (195), de sorte que y ne pourrait prendre aucune valeur. Cette conclusion est évidemment absurde en vertu de l'équation $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = y$.

3°. *Si l'on suppose* $b'^2 - 4a'c' = 0$, l'inégalité en y s'abaisse au premier degré, et l'on en déduit facilement le maximum *ou* le minimum de la fonction.

227. Appliquons à des exemples la solution générale que nous venons d'indiquer, et remarquons qu'il n'y a de maximum et de minimum que lorsque les racines de l'équation en y sont réelles et inégales. Si $b'^2 - 4a'c'$ est une quantité positive, la plus grande racine est un minimum, la plus petite est un maximum. Si $b'^2 - 4a'c'$ est une quantité négative, c'est l'inverse qui a lieu.

1°. *Cherchons le maximum et le minimum de la fonction*

$$\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14}.$$

Égalons cette expression à y. Nous aurons

$$\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14} = y,$$

d'où

$$x^2 - (2 + 3y)x + 21 + 14y = 0.$$

La condition de réalité de x donne

$$(1+3y)^2-21-14y>0,$$

d'où

$$9y^2-8y-20>0.$$

J'égale le premier membre de l'inégalité à zéro. J'obtiens pour racines

$$y=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{9}=\frac{4\pm 14}{9}\begin{cases}y'=2,\\ y''=-\dfrac{10}{9}.\end{cases}$$

On a ici $b'^2-4a'c'>0$, puisque a' est nul. Par suite, le minimum des valeurs positives sera $y'=2$, et le maximum des valeurs négatives sera $y''=-\frac{10}{9}$. Les valeurs de y ne pourront pas tomber entre 2 et $-\frac{10}{9}$. Les valeurs de x qui correspondront au minimum et au maximum seront

$$x'=1+3y'=7 \quad \text{et} \quad x''=1+3y''=-\frac{7}{3}.$$

2°. *Cherchons le maximum et le minimum de la fonction*

$$\frac{11x^2+x-4}{6x^2+x+1}.$$

Égalons cette expression à y. Nous aurons

$$\frac{11x^2+x-4}{6x^2+x+1}=y,$$

d'où

$$(11-6y)x^2+(1-y)x-(4+y)=0.$$

La condition de réalité de x donne

$$(1-y)^2+4(11-6y)(4+y)>0,$$

d'où

$$-23y^2-54y+177>0.$$

J'égale le premier membre de l'inégalité à zéro. J'obtiens pour racines

$$y=\frac{-27\pm\sqrt{729+23\times 177}}{23}=\frac{-27\pm 10\sqrt{48}}{23}=\frac{-27\pm 69,282}{23},$$

c'est-à-dire

$$y'=1,8383 \quad \text{et} \quad y''=-4,1861,$$

à moins de 0,0001.

On a ici $b'^2-4a'c'<0$. Par suite le maximum de la fonction est $y'=1,8383$; le minimum est $y''=-4,1861$. y ne peut recevoir que des valeurs comprises entre ces deux limites. Les valeurs de x qui correspondent au maximum et au mini-

mum sont

$$x' = \frac{y' - 1}{2(11 - 6y')} = -14,06, \quad x'' = \frac{y'' - 1}{2(11 - 6y'')} = -0,071.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Résoudre les équations $xy = 17$ et $x^2 + y^2 = 132,65$.

$(x = \pm 11,42, \quad y = \pm 1,49, \quad x = \pm 1,49, \quad y = \pm 11,42.)$

II. Déterminer le terme q de l'équation $x^2 - 13x + q = 0$, de manière que la différence des carrés des deux racines soit égale à 39. $(q = 40.)$

III. Résoudre l'équation $\frac{a-b}{4(x-a)} + \frac{x+2b}{a+b} = 2$.

$$\left(x' = \frac{3a+b}{2}, \quad x'' = \frac{3a-b}{2}.\right)$$

IV. Former une équation qui admette les solutions $x = 0$, $x = \pm(a+b)$, $x = \pm(a-b)$. Résoudre ensuite l'équation obtenue

$$[x^5 - 2(a^2+b^2)x^3 + (a^2-b^2)^2 x = 0].$$

V. Résoudre l'équation $\frac{4a^2x}{3x-a} = \frac{b^2(3x+a)}{x-b}$. Comparer les résultats fournis par l'équation et la formule de résolution, lorsqu'on suppose $3b = 2a$.

VI. Les quatre points A, B, A′, B′, devant être sur une circonférence, et C étant le point de rencontre des droites AB et A′B′, on donne les longueurs des cordes $AB = b$, $A'B' = b'$, et la distance $CA = a$. On demande de calculer la distance $CA' = x$ à moins de $0^M,0005$, en appliquant la formule trouvée aux données suivantes : $b = 2^M,008$, $a = 0^M,5$, $b' = 2^M,6$. $(x = 0^M,417.)$

VII. Résoudre les deux équations $x + y = 2a$ et $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$.

$$\left[x' = a+b, \quad y' = a-b, \quad x'' = \frac{a(b-a)}{b}, \quad y'' = \frac{a(b+a)}{b}.\right]$$

VIII. Résoudre le système $x + y = 11$, $x^3 + y^3 = 341$.

$(x' = 6, \quad y' = 5, \quad x'' = 5, \quad y'' = 6.)$

IX. Résoudre le système $x^3 - y^3 = 24a^2b + 2b^3$, $x - y = 2b$.

$(x = \pm 2a + b, \quad y = \pm 2a - b.)$

X. Déterminer le coefficient p dans l'équation $x^2 - px + 15 = 0$, de manière que la différence entre les carrés des deux racines soit égale à 16.

$(p = \pm 8, \quad p = \pm 2i.)$

XI. Résoudre le système $y - x = a + b$, $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{a^2-b^2}{ab}$.

$$\left[x' = \frac{b(a+b)}{a-b}, \quad y' = \frac{a(a+b)}{a-b}, \quad x'' = -a, \quad y'' = b.\right]$$

XII. Trouver quatre nombres proportionnels aux nombres 2, 5, 9, 11, sachant que la somme des carrés des trois premiers nombres demandés est égale à 2750. $(x = 10, \quad y = 25, \quad z = 45, \quad u = 55.)$

XIII. Résoudre le système $xy = 108$, $3xy - x^2 + y^2 = 36$, et vérifier les solutions obtenues.

$$(x = \pm 18, \quad y = \pm 6, \quad x = \pm 6i, \quad y = \mp 18i.)$$

XIV. Résoudre l'équation $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$.

(On posera $2x^2 + 3x = z$.)

XV. Résoudre le système $x - y + \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y}$, $x^2 + y^2 = 34$.

XVI. Démontrer que abc est plus grand que le produit

$$(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a),$$

quels que soient les nombres positifs a, b, c.

XVII. Prouver que la somme $x + y = a$ étant donnée, la règle qui conduit au maximum du produit $x^p y^q$ est encore applicable au cas où p et q sont fractionnaires.

XVIII. Parmi les parallélipipèdes rectangles de même surface, quel est celui qui a le volume maximum? (Le cube.)

XIX. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la somme obtenue en ajoutant la hauteur correspondante aux deux côtés de l'angle droit.

XX. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la hauteur et la somme des côtés de l'angle droit.

XXI. Chercher le minimum de l'expression $\dfrac{(x-a)(x-b)}{x}$.

$$\left[y' = -(a+b) + 2\sqrt{ab}, \quad x' = \sqrt{ab}.\right]$$

XXII. Dans un demi-cercle, inscrire un trapèze de périmètre maximum. (Ce trapèze est un demi-hexagone régulier.)

XXIII. Inscrire dans un cône donné le cylindre de volume maximum (la hauteur du cylindre doit être le tiers de celle du cône).

XXIV. Inscrire dans une sphère donnée un cône dont la surface latérale soit un maximum (la hauteur du cône cherché est les $\frac{4}{3}$ du rayon de la sphère).

XXV. Inscrire dans une sphère donnée un cylindre dont la surface totale soit un maximum.

LIVRE QUATRIÈME.

(SUITE DU CALCUL ALGÉBRIQUE.)

LA FORMULE DU BINOME ET LA THÉORIE DES LOGARITHMES.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULE DU BINOME.

228. Le développement d'une puissance quelconque, entière et positive, d'un binôme $x + a$, est l'une des formules les plus importantes et les plus usuelles de l'analyse. Pour l'établir, nous nous occuperons d'abord de la théorie élémentaire des combinaisons dont la connaissance nous sera nécessaire.

Théorie des combinaisons.

229. Étant donnés m objets, on appelle *arrangements n à n* de ces m objets, les différents groupes qu'on peut former en assemblant n de ces m objets de toutes les manières possibles : deux arrangements quelconques doivent différer au moins par la place d'une lettre.

Si, parmi les arrangements obtenus, on ne compte que ceux qui diffèrent au moins par l'un des objets qui les composent, on a *les combinaisons n à n* des m objets considérés.

230. *Nombre des arrangements.* Pour fixer les idées, supposons que les objets qu'on veut grouper soient les lettres de l'alphabet $a, b, c, d, \ldots, h, l$.

Si l'on a m lettres et qu'on veuille les arranger *une à une*, le nombre des arrangements sera évidemment égal à m : en désignant ce nombre par A_1, on aura donc

$$A_1 = m.$$

Pour former les arrangements *deux à deux*, on écrira successivement, après chaque lettre $a, b, c, \ldots$, les $m - 1$ autres lettres. On aura ainsi

$$\begin{array}{llll} ab, & ba, & ca, \ldots, & la, \\ ac, & bc, & cb, \ldots, & lb, \\ ad, & bd, & cd, \ldots, & lc, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ al, & bl, & cl, \ldots, & lh, \end{array}$$

Aucun arrangement 2 à 2 n'aura été omis, aucun n'aura été répété. Aucun arrangement n'aura été omis, car l'ordre suivi épuise toutes les dispositions possibles, soit relativement aux lettres employées, soit relativement aux places qu'elles occupent. Aucun arrangement n'aura été répété, car les arrangements qui sont dans une même colonne verticale diffèrent par la lettre qui les termine, et ceux qui ne sont pas dans une même colonne diffèrent par la lettre qui les commence. On a formé m colonnes, puisqu'il y a m lettres; chacune contient $m-1$ arrangements. En désignant par A_2 le nombre des arrangements 2 à 2, on aura donc

$$A_2 = m(m-1).$$

Pour avoir les arrangements *trois à trois*, on écrira de même successivement, après chaque arrangement 2 à 2, les $m-2$ lettres qui n'entrent pas dans l'arrangement considéré. On aura ainsi

$$\begin{array}{lllll}
abc, & acb, & adb,\ldots, & dab,\ldots, & lab,\ldots, \\
abd, & acd, & adc,\ldots, & dac,\ldots, & lac,\ldots, \\
abe, & ace, & ade,\ldots, & dae\ldots, & lad,\ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
abl, & acl, & adl,\ldots, & dal,\ldots, & lah,\ldots.
\end{array}$$

Aucun arrangement 3 à 3 n'aura été omis, l'ordre suivi épuisant toutes les dispositions possibles; aucun n'aura été répété, puisque les arrangements d'une même colonne verticale diffèrent par la lettre qui les termine, tandis que ceux qui n'appartiennent pas à la même colonne diffèrent au moins par l'ordre des deux premières lettres. On a formé $m(m-1)$ colonnes, puisqu'il y a $m(m-1)$ arrangements 2 à 2; chacune contient $m-2$ arrangements. En désignant par A_3 le nombre des arrangements 3 à 3, on aura

$$A_3 = m(m-1)(m-2).$$

La loi est évidente; mais nous allons démontrer directement la formule générale sans avoir recours à l'induction. Soit A_{n-1} le nombre des arrangements $n-1$ à $n-1$. Pour avoir les arrangements n à n, il faudra écrire successivement, après chaque arrangement $n-1$ à $n-1$, les $m-(n-1)$ ou les $m-n+1$ lettres qui n'y entrent pas. Tous les arrangements n à n seront obtenus, car on peut former un arrangement n à n quelconque, en plaçant le $n^{\text{ième}}$ objet considéré à la suite de l'arrangement formé par les $n-1$ autres objets. Tous les arrangements obtenus seront distincts; car ils différeront par le dernier objet s'ils correspondent à un même arrangement $n-1$ à $n-1$, et si la lettre qui les termine est la

même, ils différeront au moins par l'ordre de leurs $n-1$ premières lettres, puisqu'ils appartiendront à deux arrangements $n-1$ à $n-1$ différents. Chaque arrangement $n-1$ à $n-1$ donnant lieu à $m-n+1$ arrangements n à n, on aura la formule

$$A_n = A_{n-1} \cdot (m-n+1),$$

A_n représentant le nombre des arrangements n à n. Supposons successivement dans cette formule $n=2$, $n=3$, $n=4, \ldots,$ $n=n$: il viendra

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1(m-1), \\ A_3 &= A_2(m-2), \\ A_4 &= A_3(m-3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= A_{n-1}(m-n+1). \end{aligned}$$

Si nous multiplions toutes ces égalités membre à membre et si nous remarquons que le premier membre de chaque égalité est égal au premier facteur du second membre de l'égalité suivante, nous aurons, en opérant les réductions et en remplaçant A_1 par sa valeur m,

$$A_n = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1).$$

Cette formule, qui donne le nombre des arrangements n à n de m objets quelconques, est composée de n facteurs : le premier facteur est m, les autres facteurs diminuent successivement d'une unité jusqu'au $n^{ième}$ qui est $m-n+1$.

231. *Nombre des permutations.* Si l'on fait $n=m$ dans la formule précédente, on a le nombre des arrangements de m objets pris m à m. Ces arrangements où entrent tous les objets donnés, ont reçu le nom de *permutations*. Si l'on désigne leur nombre par P_m et si l'on renverse l'ordre des facteurs du second membre, on aura

$$P_m = 1.2.3.4.5\ldots m.$$

Les facteurs du second membre forment la suite naturelle des nombres entiers, depuis 1 jusqu'à m.

232. *Nombre des combinaisons.* Supposons qu'on ait formé les combinaisons n à n de m objets, c'est-à-dire les arrangements n à n de ces m objets, qui diffèrent au moins par l'un des objets qui y entrent. En prenant toutes ces combinaisons dont je désignerai le nombre par C_n, et en effectuant les permutations des n objets qui composent chacune d'elles, j'obtiendrai tous les arrangements n à n des m objets donnés. En effet, chaque permutation me donnera un arrangement n à n. Aucun arrangement ne sera omis, car chaque combinaison

correspond à un certain arrangement, en laissant de côté l'ordre des objets qui y entrent; et en effectuant toutes les permutations de ces objets, je trouverai l'arrangement particulier qu'on a en vue. Aucun arrangement ne sera répété; car ceux qui proviennent d'une même combinaison diffèrent par l'ordre des objets, et ceux qui proviennent de deux combinaisons diverses diffèrent au moins par l'un des objets qui les composent.

Chaque combinaison contenant n lettres donnera lieu à un nombre P_n de permutations, qui sera égal à $1.2.3\ldots n$. On a d'ailleurs, d'après ce qu'on vient de dire,

$$A_n = C_n \times P_n.$$

On en déduit

$$C_n = \frac{A_n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ldots\quad n}.$$

Cette formule générale renferme n facteurs au numérateur et n au dénominateur. Les premiers vont en décroissant depuis m jusqu'à $m-n+1$, les seconds vont en croissant depuis 1 jusqu'à n.

Le nombre des combinaisons possibles étant nécessairement entier, la formule démontre ce théorème :

Le produit de n nombres entiers consécutifs quelconques est toujours divisible par le produit des n premiers nombres entiers.

On peut donner à la formule considérée une autre expression qui est quelquefois plus commode. Complétons les facteurs du numérateur jusqu'à 1, en multipliant les deux termes de la fraction du second membre par $1.2.3\ldots(m-n)$. Il viendra

$$C_n = \frac{1.2.3.4\ldots(m-2)(m-1)m}{1.2.3.4\ldots n \times 1.2.3.4\ldots(m-n)}.$$

Le numérateur contient alors m facteurs qui sont les nombres entiers de 1 à m; le dénominateur en contient aussi m qui sont les nombres entiers de 1 à n et de 1 à $m-n$.

233. *Le nombre de combinaisons de m objets pris n à n est égal au nombre de combinaisons de m objets pris $m-n$ à $m-n$.*

En effet, quand on a formé une combinaison n à n, les $m-n$ objets restants forment une combinaison $m-n$ à $m-n$. Les deux nombres de combinaisons sont donc identiques.

La formule, sous la dernière forme indiquée, le prouve aussi immédiatement; car si l'on change n en $m-n$, on a

$$C_{m-n} = \frac{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots(m-n)\times 1.2.3\ldots n}.$$

Il n'y a pas d'autre changement, si l'on compare l'expression de C_{m-n} à celle de C_n, que le renversement des deux séries $1.2.3\ldots n$ et $1.2.3\ldots(m-n)$ au dénominateur.

Ainsi, le nombre des combinaisons de 12 objets pris 5 à 5 est égal au nombre des combinaisons de 12 objets pris 7 à 7, parce que $5+7=12$.

234. *On peut demander parmi les combinaisons n à n de m objets, combien il y en a qui contiennent p objets déterminés.* En ôtant ces p objets, il en reste $m-p$. Si l'on forme les combinaisons $n-p$ à $n-p$ de ces $m-p$ objets, et si l'on range à la droite de chacune d'elles les p objets laissés de côté, on aura évidemment toutes les combinaisons n à n qui contiennent ces p objets. Le nombre demandé est donc C_{n-p}^{m-p}, en indiquant ainsi le nombre de combinaisons de $m-p$ objets pris $n-p$ à $n-p$.

Si l'on demande, au contraire, parmi les combinaisons n à n de m objets, combien il y en a qui ne contiennent aucun objet choisi parmi p objets déterminés, on verra qu'en mettant à part ces p objets, il en restera $m-p$. Le nombre de combinaisons demandé sera donc celui de $m-p$ objets pris n à n ou C_n^{m-p}.

Enfin, si l'on veut savoir, parmi les combinaisons n à n de m objets, combien il y en a qui contiennent au moins un objet choisi parmi p objets déterminés, on commencera par former le nombre C_n^{m-p} des combinaisons qui ne contiennent aucun des p objets désignés, et on le retranchera du nombre C_n^m des combinaisons considérées.

235. La *probabilité* d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables ou des cas désignés au nombre des cas possibles, lorsqu'ils sont tous également possibles. Si une urne renferme 20 boules, 12 blanches et 8 noires, la probabilité sera, pour la sortie d'une boule blanche, représentée par $\frac{12}{20}$ ou $\frac{3}{5}$ et, pour la sortie d'une boule noire, représentée par $\frac{8}{20}$ ou $\frac{2}{5}$. C'est-à-dire que, sur 5 boules successives, il est *probable* que l'on en retirera 3 blanches et 2 noires.

La roue de la *Loterie* pouvait amener 90 numéros, sur lesquels il en sortait 5 au hasard. Prendre un *extrait*, c'était désigner un numéro qui devait se trouver parmi les 5 sortants pour qu'on eût gagné. Le nombre des cas possibles était égal au

nombre de combinaisons de 90 objets pris 5 à 5, c'est-à-dire à

$$\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}.$$

Le nombre des cas favorables était celui des combinaisons de 90 objets pris 5 à 5, qui contiennent un objet déterminé (234), c'est-à-dire celui des combinaisons de 89 objets pris 4 à 4 ou

$$\frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}.$$

La probabilité de gagner l'extrait était donc égale au quotient des deux expressions précédentes ou à $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$. Sur 18 cas possibles, il y en avait donc 1 favorable à la personne qui prenait l'extrait, et 17 à la loterie. On pariait 1 contre 17. Lorsqu'on gagnait l'extrait, la loterie payait 15 fois la mise.

Lorsqu'on désignait *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq* numéros, on prenait un *ambe*, un *terne*, un *quaterne* ou un *quine*. En raisonnant, comme pour l'extrait, on trouverait :

Pour la probabilité favorable à la sortie d'un ambe donné $\frac{2}{801}$; la loterie payait 270 fois la mise.

Pour la probabilité favorable à la sortie d'un terne donné $\frac{1}{11748}$; la loterie payait 5500 fois la mise.

Pour la probabilité favorable à la sortie d'un quaterne donné $\frac{1}{511038}$; la loterie ne payait que 75000 fois la mise.

Pour la probabilité favorable à la sortie d'un quine donné $\frac{1}{43949268}$; la loterie avait supprimé le quine.

Formule du binôme.

236. Nous avons vu (23) que le produit de n polynômes s'obtenait en formant *tous les produits n à n* des termes des polynômes proposés, c'est-à-dire que, dans chaque terme du produit, il devait entrer comme facteurs un terme du premier polynôme, un terme du second, un terme du troisième,..., un terme du $n^{\text{ième}}$.

Appliquons cette règle à la formation du produit des m binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l),$$

et supposons qu'on ordonne le produit par rapport aux puissances décroissantes de x.

En prenant les m premiers termes des m binômes, on aura évidemment x^m.

En prenant, dans $m-1$ binômes, leur premier terme x, et dans le $m^{ième}$ binôme, son second terme qui sera a, b, c,..., ou l, on obtiendra des termes de la forme ax^{m-1}; et la somme de tous ces termes sera

$$(a+b+c+\ldots+l)\,x^{m-1}.$$

Tel sera le terme en x^{m-1} du développement. Si l'on représente par S_1 la somme de tous les seconds termes des binômes, le terme en x^{m-1} prendra la forme $S_1 x^{m-1}$.

En prenant, dans $m-2$ binômes, leur premier terme x, et dans les deux binômes restants leurs seconds termes qui seront a et b, a et c, a et d,..., ou l et h, on obtiendra des termes de la forme abx^{m-2}, et la somme de tous ces termes sera

$$(ab+ac+ad+\ldots+lh)\,x^{m-2}.$$

Tel sera le terme en x^{m-2} du développement. Si l'on représente par S_2 la somme des produits 2 à 2 des seconds termes des binômes, le terme en x^{m-2} prendra la forme $S_2 x^{m-2}$.

On verra de même que le terme en x^{m-3} sera de la forme $S_3 x^{m-3}$, S_3 représentant la somme des produits 3 à 3 des seconds termes des binômes.

D'une manière générale, si l'on prend dans $m-n$ binômes leur premier terme x, et dans les n binômes restants leur second terme, on obtiendra des termes en x^{m-n}; et la somme de tous ces termes ou le terme en x^{m-n} du développement aura pour expression $S_n x^{m-n}$, en représentant par S_n la somme des produits n à n des seconds termes des binômes.

On obtiendra enfin le terme de degré 0 par rapport à x, en prenant les m seconds termes des m binômes. Ce terme, le dernier du développement, sera $abcd\ldots hl$, et nous le représenterons par S_m, produit des m seconds termes des binômes. Le développement cherché pourra donc s'écrire :

$$\begin{aligned} &x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + S_3 x^{m-3} + \ldots \\ &\quad + S_n x^{m-n} + \ldots + S_{m-1} x + S_m. \end{aligned}$$

237. Supposons maintenant, dans l'égalité

$$\begin{aligned} &(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l) \\ &= x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + S_3 x^{m-3} + \ldots \\ &+ S_n x^{m-n} + \ldots + S_{m-1} x + S_m, \end{aligned}$$

tous les seconds termes des binômes égaux à a. Le premier membre deviendra $(x+a)^m$. Il faut chercher ce que deviendront dans le second membre les quantités S_1, S_2, S_3,..., S_n,..., S_m.

S_1 est la somme des seconds termes des binômes; ces seconds termes devenant tous égaux à a, puisqu'il y a m binômes, on aura

$$S_1 = ma.$$

S_2 est la somme des produits 2 à 2 des seconds termes des m binômes ou la somme des combinaisons 2 à 2 formées avec ces seconds termes. Tous ces seconds termes étant égaux à a, toutes les combinaisons deviendront égales à a^2. S_2 est donc égale à a^2 multiplié par le nombre de combinaisons de m objets pris 2 à 2, qui est $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$. On aura donc

$$S_2 = \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^2.$$

De même, S_3 sera égale à $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^3$.

D'une manière générale, S_n est la somme des produits n à n des seconds termes des m binômes ou la somme des combinaisons n à n de ces seconds termes. Tous ces seconds termes étant égaux à a, toutes les combinaisons deviendront égales à a^n. S_n sera donc égale à a^n multiplié par le nombre de combinaisons de m objets pris n à n, qui est $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ n}$.

On aura donc

$$S_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ n} a^n.$$

Enfin S_m, représentant le produit des m seconds termes des binômes, deviendra égale à a^m, et l'on pourra écrire :

$$\begin{aligned}(x+a)^m = x^m &+ \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^2 x^{m-2} + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ n} a^n x^{m-n} + \ldots \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} x + a^m.\end{aligned}$$

On voit que ce développement contient $m+1$ termes. Les termes extrêmes sont x^m et a^m. Dans les termes intermédiaires, l'exposant de x va en diminuant et l'exposant de a en croissant d'une unité, en passant d'un terme au suivant, de sorte que, dans chaque terme, la somme des exposants des deux lettres est toujours égale à m.

Quant aux coefficients, les termes extrêmes ont pour coefficients l'unité, et les termes intermédiaires les différents nombres de combinaisons qu'on peut former en prenant m objets 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ..., n à n, ..., $m-1$ à $m-1$.

238. *Les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux.* En effet, le terme qui en a n avant lui, a pour coefficient C_n; le terme qui en a n après lui en a $m-n$ avant lui, puisque le développement contient $m+1$ termes : il a donc pour coefficient C_{m-n}. Et nous avons démontré (233) qu'on avait

$$C_n = C_{m-n}.$$

239. En examinant les termes successifs du développement de $(x+a)^m$, on voit que, *pour déduire un terme du précédent, il suffit de multiplier le coefficient du dernier terme formé par l'exposant de x dans ce terme et de le diviser par le rang de ce terme ou par l'exposant de a dans le terme qu'on veut écrire. Quant aux exposants, on ajoute* 1 *à celui de a, on retranche* 1 *de celui de x.*

Ainsi, le terme général étant

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m+n+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\quad n}a^n x^{m-n},$$

le terme suivant du développement est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\quad n\quad (n+1)}a^{n+1} x^{m-n-1}.$$

D'après cela, on écrira immédiatement

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$$

Si l'on avait à opérer le développement d'une puissance quelconque, entière et positive, d'un binôme de forme quelconque comme $8a^3 + 5a^2b$, on poserait

$$8a^3 = A, \quad 5a^2b = B,$$

et l'on déterminerait d'après la règle précédente la puissance correspondante du binôme $A+B$. On exprimerait ensuite les différentes puissances de A et de B, en fonction de a et de b.

La formule trouvée étant vraie quel que soit a, ne dépend pas du signe de a. Si a change de signe, l'égalité démontrée subsistera, et dans le second membre, les termes qui contiennent a à des puissances impaires changeront seuls de signe, c'est-à-dire que les signes + et — alterneront. On aura

$$(x-a)^7 = x^7 - 7ax^6 + 21a^2x^5 - 35a^3x^4 + 35a^4x^3 - 21a^5x^2 + 7a^6x - a^7.$$

240. Nous avons vu (238) que les coefficients des termes à égale distance des extrêmes étaient égaux.

Par conséquent, si m est *impair*, le nombre des termes du

développement $m+1$ est *pair*, et tous les coefficients se reproduisent deux fois. *Il suffit alors de calculer la moitié des coefficients, puis de les répéter dans l'ordre inverse.* Ainsi

$$(x+a)^9 = x^9 + 9ax^8 + 36a^2x^7 + 84a^3x^6 + 126a^4x^5 + 126a^5x^4 + 84a^6x^3 + 36a^7x^2 + 9a^8x + a^9.$$

Si m est *pair*, le nombre des termes $m+1$ est *impair*, de sorte qu'il y a au milieu un terme dont le coefficient ne se reproduit pas. *Il faut alors calculer la moitié des coefficients plus un.* Ainsi

$$(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 + 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x + a^8.$$

Ce qui précède indique de quelle manière il faut combiner des objets donnés, pour obtenir le plus grand nombre possible de combinaisons. Si l'on a 9 objets, il faudra les combiner 4 à 4 ou 5 à 5 : le nombre des combinaisons est alors 126; c'est ce qu'indique le développement de $(x+a)^9$. Si l'on a 8 objets, il faudra les combiner 4 à 4 : le nombre des combinaisons est alors 70, d'après le développement de $(x+a)^8$.

On peut préciser davantage les remarques qu'on vient de faire. Le coefficient du *terme général* du développement est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}.$$

Ce coefficient croîtra tant que la fraction $\frac{m-n+1}{n}$ sera plus grande que 1. De l'inégalité $\frac{m-n+1}{n} > 1$ on déduit

$$m+1 > 2n.$$

$m+1$ représente le nombre des termes du développement, n représente le nombre des termes qui précèdent celui qu'on considère, de sorte que $n+1$ est le rang de ce terme.

On voit par là que les coefficients augmenteront, tant que le nombre des termes du développement surpassera le double du nombre des termes déjà écrits.

Supposons m *impair*, $m+1$ sera *pair*, et l'on pourra poser $m+1=2p$. L'inégalité deviendra alors $p>n$. A la limite, on aura $p=n$, et la fraction $\frac{m-n+1}{n}$ deviendra égale à 1. *Il y aura donc deux coefficients identiques à la suite l'un de l'autre, et ils se présenteront quand on aura déjà écrit la moitié des termes du développement.*

Si m est *pair*, $m+1$ sera *impair*, et l'on pourra poser $m+1=2p+1$. L'inégalité deviendra $2p+1>2n$, d'où

$p+\frac{1}{2}>n$. Comme il s'agit de nombres entiers, on ne pourra jamais avoir $p+\frac{1}{2}=n$. La fraction $\frac{m-n+1}{n}$ ne sera donc jamais égale à 1 et, par conséquent, il n'y aura jamais à la suite l'un de l'autre deux coefficients identiques. On atteindra le plus grand coefficient, celui qui ne se répète pas, quand n sera égal à p; et alors le rang du terme où le coefficient est le plus grand possible, est représenté par $p+1$: *ce terme est donc le terme du milieu.*

Si m est *impair*, le terme de rang $p=\frac{m+1}{2}$ a le même coefficient que le terme suivant. Or, dans le terme de rang p, l'exposant de a est $p-1$, c'est-à-dire $\frac{m+1}{2}-1=\frac{m-1}{2}$; tandis que l'exposant de x est $m-(p-1)=m+1-p=\frac{m+1}{2}$. La différence de ces deux exposants est égale à 1. *On sera donc averti qu'on est arrivé à la moitié du développement, lorsque l'exposant de x surpassera celui de a d'une unité.*

Si m est *pair*, le terme de rang $p+1$ est seul de son espèce, et ce n'est qu'au delà de ce terme que les coefficients se répètent. Dans ce terme, l'exposant de a est $p=\frac{m}{2}$. La somme des exposants de x et de a devant être égale à m dans un terme quelconque, l'exposant de x sera aussi égal à $\frac{m}{2}$ dans le terme considéré. *On sera donc averti qu'on est arrivé au terme du milieu, lorsque les exposants de x et de a se trouveront égaux.*

241. Si dans le développement de $(x+a)^m$ on suppose $x=1$ et $a=1$, il vient

$$2^m=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ n}+\ldots+1.$$

La somme des coefficients du développement est donc égale à 2^m. Le premier coefficient ne désigne pas un nombre de combinaisons. Si on le retranche des deux membres, il vient

$$2^m-1=C_1+C_2+C_3\ldots+C_n+\ldots+C_m.$$

Ainsi, la somme des combinaisons qu'on peut faire avec m objets en les prenant de toutes les manières possibles, c'est-à-dire 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3,..., n à n,..., m à m, est égale à 2^m-1.

Si l'on fait $x=1$ et $a=1$, dans le développement de $(x-a)^m$, on obtient dans le second membre la différence qui existe entre la somme des coefficients de rang impair et la somme des coefficients de rang pair : cette différence est donc nulle quel que soit m.

242. On donne souvent à l'expression $(x+a)^m$ la forme $x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$, en faisant sortir x de la parenthèse, pour mettre en évidence le rapport $\frac{a}{x}$. Posons $\frac{a}{x}=z$; nous aurons

$$x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m=x^m(1+z)^m$$

et

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}z^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ n}z^n+\ldots+z^m.$$

CHAPITRE II.

THÉORIE DES LOGARITHMES.

De l'expression a^x.

243. Nous avons déjà démontré (*Arith.*, **189**, note) : 1° *que les puissances successives d'une quantité positive plus grande que* 1, *croissaient avec l'exposant de manière à devenir plus grandes que toute quantité donnée ;* 2° *que les puissances successives d'une quantité positive plus petite que* 1, *diminuaient à mesure que l'exposant croissait, de manière à tomber au-dessous de toute quantité donnée.* Mais ces démonstrations supposaient l'exposant entier et positif.

Considérons le cas où cet exposant est fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$. L'expression $a^{\frac{p}{q}}$ revient à $\sqrt[q]{a^p}$. *Si a est plus grand que* 1, a^p sera plus grand que 1 et il en sera de même de $\sqrt[q]{a^p}$; car une quantité plus petite que 1 élevée à la puissance q, donnerait un

résultat inférieur à 1. De plus, si l'on fait croître $\frac{p}{q}$, il en sera de même évidemment de $a^{\frac{p}{q}}$ (*).

Si p est égal à 1 et si l'on a $a^{\frac{1}{q}}$, à mesure que q augmentera, $a^{\frac{1}{q}}$ diminuera en restant supérieur à 1, mais en en approchant autant qu'on voudra. Posons, par exemple, $a^{\frac{1}{q}} < 1 + \alpha$, α étant une quantité aussi petite qu'on voudra. En élevant les deux membres de l'inégalité à la puissance q, nous aurons

$$a < (1 + \alpha)^q,$$

condition à laquelle on peut toujours satisfaire puisque $1 + \alpha$ surpasse 1 (*Arith.*, 189, note).

Si a est plus petit que 1, l'expression $a^{\frac{p}{q}}$ ou $\sqrt[q]{a^p}$ est inférieure à 1. En effet, a^p est inférieur à 1, il en est donc de même de $\sqrt[q]{a^p}$; car une quantité plus grande que 1 élevée à la puissance q, ne pourrait donner qu'un résultat supérieur à 1. De plus, si l'on fait croître $\frac{p}{q}$, il est évident que $a^{\frac{p}{q}}$ diminuera (**).

Si p est égal à 1, et si l'on a $a^{\frac{1}{q}}$, à mesure que q augmentera, $a^{\frac{1}{q}}$ augmentera en restant inférieur à 1, mais en en approchant autant qu'on voudra. En effet, a étant plus petit que 1, on peut

---

(*) Si l'on a

$$\frac{p'}{q'} > \frac{p}{q},$$

on en déduit

$$p'q > pq'.$$

Par suite

$$a^{p'q} > a^{pq'} \quad \text{et} \quad \sqrt[qq']{a^{p'q}} > \sqrt[qq']{a^{pq'}},$$

c'est-à-dire

$$a^{\frac{p'}{q'}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

(**) Si l'on a

$$\frac{p'}{q'} > \frac{p}{q},$$

on en déduit

$$p'q > pq'.$$

Par suite

$$a^{p'q} < a^{pq'} \quad \text{et} \quad \sqrt[qq']{a^{p'q}} < \sqrt[qq']{a^{pq'}},$$

c'est-à-dire

$$a^{\frac{p'}{q'}} < a^{\frac{p}{q}}.$$

poser $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à 1. On a alors

$$a^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{a'^{\frac{1}{q}}}.$$

A mesure que q augmente, $a'^{\frac{1}{q}}$ diminue en restant supérieur à 1, mais en en approchant autant qu'on veut. Il en est donc de même de $a^{\frac{1}{q}}$, qui reste seulement inférieur à 1.

Si a reçoit un exposant négatif $-m$, on aura l'expression

$$a^{-m} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m.$$

Si a est plus grand que 1, $\frac{1}{a}$ sera plus petit que 1; si a est plus petit que 1, $\frac{1}{a}$ sera plus grand que 1. On retrouvera donc inversement les mêmes résultats que précédemment.

244. Nous pouvons maintenant considérer la *fonction exponentielle* a^x. La fonction considérée a reçu cette qualification, parce que l'inconnue ou la variable indépendante y est en exposant (**11**).

Je vais démontrer que *x variant d'une manière continue, la fonction a^x variera elle-même d'une manière continue.*

Je supposerai d'abord $a > 1$.

Donnons à x un accroissement h aussi petit qu'on voudra. La fonction deviendra a^{x+h} et prendra un accroissement représenté par la différence

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Quel que soit h, $a^h - 1$ est positif, puisque a étant plus grand que 1, il en est de même de a^h (**243**). Par conséquent, la fonction croît en même temps que x, comme nous l'avons déjà indiqué.

Je dis maintenant qu'on peut donner à h une valeur telle, qu'on ait $a^h - 1 < \frac{\alpha}{a^x}$, α étant tout ce que l'on voudra supposer de plus petit. h est une quantité de la forme $\frac{1}{q}$, q étant aussi grand que possible. Donc (**243**), a^h pourra différer de 1 d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{a^x}$ si l'on donne à q une valeur convenable. On aura alors

$$a^x(a^h - 1) < a^x \cdot \frac{\alpha}{a^x} \quad \text{ou} \quad a^{x+h} - a^x < \alpha.$$

Ainsi, l'accroissement de la variable tendant vers zéro, il en

sera de même de l'accroissement de la fonction; ce qui prouve sa continuité. En d'autres termes, la fonction passe d'une valeur à une autre en parcourant tous les degrés intermédiaires; sans quoi, pour une variation insensible ou infiniment petite de la variable, elle éprouverait une variation brusque ou finie.

Si l'on suppose $a < 1$, on posera $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à 1. On en déduira $a^x = \frac{1}{a'^x}$. a'^x variant d'une manière continue avec x, il en sera de même de $\frac{1}{a'^x}$ ou de a^x.

245. Supposons $a > 1$ et faisons croître, dans l'expression a^x, x d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Pour $x = -\infty$, on a $a^x = \frac{1}{a^\infty} = 0$.

Pour $x = 0$, on a $a^x = a^0 = 1$.

Pour $x = +\infty$, on a $a^x = a^\infty = \infty$.

La fonction croît d'ailleurs d'une manière continue (**244**). Par conséquent, x parcourant toute l'échelle des grandeurs *réelles* depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, a^x parcourt toute l'échelle des grandeurs *positives* depuis 0 jusqu'à $+\infty$. Les valeurs négatives de x correspondent aux valeurs de $a^x < 1$ et les valeurs positives de x aux valeurs de $a^x > 1$.

Si l'on suppose $a < 1$ ou $a = \frac{1}{a'}$, a' étant plus grand que 1, on a $a^x = \frac{1}{a'^x}$.

Pour $x = -\infty$, on a $a^x = \frac{1}{a'^{-\infty}} = \infty$.

Pour $x = 0$, on a $a^x = \frac{1}{a'^0} = 1$.

Pour $x = +\infty$, on a $a^x = \frac{1}{a'^\infty} = 0$.

La fonction décroît d'ailleurs d'une manière continue (**244**). Par conséquent, x parcourant toute l'échelle des grandeurs *réelles* depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, a^x parcourt toute l'échelle des grandeurs *positives* depuis $+\infty$ jusqu'à 0. Les valeurs négatives de x correspondent aux valeurs de $a^x > 1$ et les valeurs positives de x aux valeurs de $a^x < 1$.

246. Les notions données en Arithmétique (**199**) sont applicables aux exposants incommensurables. Si x est incommensurable, a^x tombera entre deux puissances fractionnaires $a^{\frac{p}{q}}$

et $a^{\frac{p+1}{q}}$, de sorte que x lui-même tombera entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$.

A mesure que $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$ se rapprocheront en comprenant toujours x, on obtiendra deux séries de puissances fractionnaires correspondantes, et la limite commune de ces deux séries sera a^x.

Définition et propriétés des logarithmes.

247. Si l'on a l'expression $a^x = b$, x est appelé le *logarithme* de b. *Le logarithme d'un nombre b est donc l'exposant qu'il faut donner à un nombre a, pour reproduire b. Le nombre a, supposé constant, s'appelle la base du système.*

Il y a une infinité de systèmes de logarithmes : on les distingue entre eux par leurs bases. *Dans tout système, la base a pour logarithme l'unité.*

Nous venons de voir (**244**) que x passant par tous les degrés de grandeur possibles, a^x parcourt toute l'échelle des grandeurs positives. *Tous les nombres positifs ont donc des logarithmes, les nombres négatifs n'en ont pas.*

Si a est > 1, les nombres > 1 ont des logarithmes positifs, et les nombres < 1 des logarithmes négatifs. Si a est < 1, les nombres > 1 ont des logarithmes négatifs, et les nombres < 1 des logarithmes positifs.

Si l'on a $a^x = b$, on indique que x est le logarithme de b en écrivant $x = \log b$.

On voit qu'on a (**245**) dans tous les systèmes :

$$\text{Si } a \text{ est} > 1 \quad \begin{cases} \log 0 = -\infty \\ \log 1 = 0 \\ \log \infty = \infty . \end{cases}$$

$$\text{Si } a \text{ est} < 1 \quad \begin{cases} \log 0 = +\infty \\ \log 1 = 0 \\ \log \infty = -\infty . \end{cases}$$

Le logarithme de l'unité est toujours égal à zéro.

248. Voyons quelles sont les propriétés des logarithmes. La propriété fondamentale est la suivante :

1°. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de tous les facteurs.*

Supposons qu'on ait

$$\begin{array}{lcl} a^x = b, & & x = \log b, \\ a^{x'} = b', & \text{c'est-à-dire} & x' = \log b', \\ a^{x''} = b'', & & x'' = \log b''. \end{array}$$

Si l'on multiplie les premières égalités membre à membre, il vient

$$a^x . a^{x'} . a^{x''} = bb'b'' \quad \text{ou} \quad a^{x+x'+x''} = bb'b''.$$

On en déduit

$$x + x' + x'' = \log bb'b'' \quad \text{ou} \quad \log bb'b'' = \log b + \log b' + \log b''.$$

249. 2°. *Le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

Soient

$$a^x = b, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \log b,$$
$$a^{x'} = b', \qquad\qquad x' = \log b'.$$

Si l'on divise membre à membre les deux premières égalités, il vient

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = \frac{b}{b'} \quad \text{ou} \quad a^{x-x'} = \frac{b}{b'},$$

c'est-à-dire

$$x - x' = \log \frac{b}{b'} \quad \text{ou} \quad \log \frac{b}{b'} = \log b - \log b'.$$

250. 3°. *Le logarithme d'une puissance est égal au logarithme du nombre élevé à la puissance, multiplié par l'exposant de la puissance.*

Soit

$$a^x = b \quad \text{ou} \quad x = \log b.$$

Elevons les deux membres de la première égalité à la $m^{ième}$ puissance. Nous aurons

$$(a^x)^m = b^m \quad \text{ou} \quad a^{xm} = b^m,$$

c'est-à-dire

$$xm = \log b^m \quad \text{ou} \quad \log b^m = m \log b.$$

251. 4°. *Le logarithme d'un radical est égal au logarithme de la quantité placée sous le radical, divisé par l'indice du radical.*

Soit

$$a^x = b \quad \text{ou} \quad x = \log b.$$

Extrayons la racine $m^{ième}$ des deux membres de la première égalité. On aura

$$a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{b},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{m} = \log \sqrt[m]{b}, \quad \text{ou} \quad \log \sqrt[m]{b} = \frac{\log b}{m}.$$

252. Comme nous l'avons indiqué en Arithmétique, il y a six opérations fondamentales sur les nombres : trois directes,

trois indirectes. Dans l'ordre de leur difficulté, les trois opérations directes sont : l'addition, la multiplication, l'élévation aux puissances; les trois opérations indirectes sont : la soustraction, la division, l'extraction des racines. L'addition et la soustraction sont des opérations très-simples; la multiplication et la division sont plus compliquées; l'élévation aux puissances et l'extraction des racines sont extrêmement longues et pénibles, pour peu que l'exposant ou l'indice s'élève. On conçoit qu'à l'aide des logarithmes, on pourra ramener la multiplication et la division à l'addition et à la soustraction; l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, à une multiplication et à une division généralement très-simples. Il suffira, pour cela, de construire une table qui, en face des nombres, donne leurs logarithmes. Je veux extraire la racine d'un nombre, je cherche son logarithme dans la table, je le divise par l'indice du radical : j'obtiens ainsi le logarithme de la racine. En face de ce logarithme, la table m'indiquera la racine cherchée. On comprend par là toute l'utilité des logarithmes.

253. On peut prouver que, *lorsque des nombres sont en progression par quotient, leurs logarithmes sont en progression par différence.*

Si l'on a la progression par quotient quelconque

$$\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots : aq^n,$$

les logarithmes des nombres qui la composent seront

$$\log a, \quad \log a + \log q, \quad \log a + 2\log q, \quad \ldots, \quad \log a + n\log q,$$

c'est-à-dire formeront une progression arithmétique dont la raison sera $\log q$.

Cette remarque est prise souvent pour point de départ de la théorie des logarithmes : nous ne nous y arrêterons pas (*voir* la Note III à la fin du volume).

Passage d'un système de logarithmes à un autre. — Module. — Logarithmes népériens.

254. Soient deux systèmes de logarithmes définis par les bases a et A. Soient x le logarithme du nombre b dans le premier système, et X son logarithme dans le second système. On aura

$$a^x = b \quad \text{et} \quad A^X = b,$$

d'où

$$a^x = A^X.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de cette dernière égalité dans le système dont la base est a, et rappelons-nous

qu'on a alors $\log a = 1$. Il viendra (*)

$$x = X \log_a A, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{1}{\log_a A} x.$$

Par suite, pour passer de la table de logarithmes du premier système à la table de logarithmes du second système, il suffira de multiplier successivement tous les logarithmes du premier système par le facteur constant $\frac{1}{\log_a A}$, $\log_a A$ étant le logarithme de la seconde base dans le premier système. Ce facteur constant a reçu le nom de *module du premier système par rapport au second*.

Si l'on avait pris les logarithmes des deux membres de l'égalité $a^x = A^X$ dans le système dont la base est A, on aurait eu

$$X = x \log_A a.$$

Le module du premier système par rapport au second est donc encore égal à $\log_A a$, qui est le logarithme de la première base dans le second système.

Il est bien évident qu'on a

$$\frac{1}{\log_a A} = \log_A a,$$

c'est-à-dire

$$\log_A a . \log_a A = 1.$$

On peut d'ailleurs vérifier cette égalité comme il suit. Posons

$$\log_a A = p \quad \text{et} \quad \log_A a = q.$$

Nous aurons

$$a^p = A \quad \text{et} \quad A^q = a.$$

Si l'on remplace, dans la première égalité, a par sa valeur A^q, il vient

$$A^{pq} = A,$$

ce qui entraîne la condition $pq = 1$.

255. *Néper*, inventeur des logarithmes (1614), prit pour base du système particulier qu'il considéra le nombre incommensurable 2,7182818... qu'on désigne en mathématiques par la lettre e. Ce système s'appelle système des logarithmes *népériens* ou *hyperboliques*. On les distingue des logarithmes *vulgaires*, en les indiquant par la seule lettre initiale l.

On appelle d'une manière générale *module* d'un système quelconque de logarithmes, le facteur constant par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour passer au sys-

(*) Nous indiquons par $\log_a$ un logarithme pris dans le système dont la base est a.

tème donné. En appelant a la base du système considéré, et M son module, on aura, d'après ce qui précède (254),

$$M = \frac{1}{la} = \log_a e.$$

Ainsi, *le module d'un système de logarithmes est l'inverse du logarithme népérien de sa base ou le logarithme de la base népérienne dans le système considéré.* Lorsqu'on considère le système vulgaire, *celui dont la base est* 10, on a

$$M = \log e = 0,434294482\ldots.$$

Pour passer du système vulgaire au système népérien, il faudra, au contraire, multiplier les logarithmes du système vulgaire par $\frac{1}{\log e}$, c'est-à-dire par 2,30259.

Des logarithmes vulgaires.

256. Les logarithmes vulgaires, c'est-à-dire ayant pour base 10, sont en complète harmonie avec notre système de numération ; il en résulte plusieurs simplifications très-importantes au point de vue du calcul.

Les logarithmes sont exprimés en décimales et se composent par conséquent d'une partie entière et d'une partie décimale. La partie entière porte le nom de *caractéristique;* on donne souvent à la partie décimale le nom de *mantisse.*

Dans tout système, les puissances successives de la base ont pour logarithmes les nombres entiers 1, 2, 3, 4, ... Dans le système vulgaire, les logarithmes des puissances de 10 qui reviennent constamment dans les applications se trouveront donc immédiatement connus.

De plus, on pourra à la seule inspection d'un nombre indiquer la caractéristique de son logarithme.

Le logarithme d'un nombre qui tombe entre 1 et 10 ou qui a *un* chiffre à sa partie entière, tombe entre 0 et 1 (247) ; la caractéristique de ce logarithme est donc 0.

Le logarithme d'un nombre qui tombe entre 10 et 100 ou qui a *deux* chiffres à sa partie entière, tombe entre 1 et 2 ; la caractéristique de ce logarithme est donc 1.

Le logarithme d'un nombre qui tombe entre 100 et 1000 ou qui a *trois* chiffres à sa partie entière, tombe entre 2 et 3 ; la caractéristique de ce logarithme est donc 2....

Le logarithme d'un nombre qui tombe entre 10^{n-1} et 10^n ou qui a n chiffres à sa partie entière, tombe entre $n-1$ et n; la caractéristique de ce logarithme est donc $n-1$.

Ainsi, d'une manière générale, *la caractéristique du loga-*

rithme d'un nombre plus grand que 1 *renferme autant d'unités qu'il y a de chiffres moins* 1 *dans la partie entière de ce nombre.*

Si l'on multiplie ou si l'on divise un nombre par une puissance quelconque de 10, *il suffit d'augmenter ou de diminuer la caractéristique de son logarithme de l'exposant de cette puissance de* 10.

On a (248, 249

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n,$$

$$\log\left(\frac{a}{10^n}\right) = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

On voit par là que *la mantisse du logarithme d'un nombre reste la même, quelle que soit la place qu'on fasse occuper dans ce nombre à la virgule qui sépare la partie entière de la partie décimale : le changement porte seulement sur la caractéristique.*

On aura, par exemple,

$$\begin{aligned}
\log\ 356,4 &= 3,5519377,\\
\log\ 356,4 &= 2,5519377,\\
\log\ 35,64 &= 1,5519377,\\
\log\ 3,564 &= 0,5519377,\\
\log\ 0,3564 &= 0,5519377 - 1,\\
\log 0,03564 &= 0,5519377 - 2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dans le cas où le logarithme est négatif, il est beaucoup plus commode de conserver la partie décimale positive et de ne faire porter la soustraction que sur la caractéristique. On indique qu'il en est ainsi en surmontant la caractéristique du signe —, et l'on écrit

$$\begin{aligned}
\log\ 0,3564 &= \bar{1},5519377,\\
\log 0,03564 &= \bar{2},5519377,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les nombres plus petits que 1, c'est-à-dire sans partie entière, ont alors des logarithmes *à caractéristiques négatives :* la mantisse continue d'être positive. On voit que *la caractéristique négative contient nécessairement autant d'unités qu'il y a de zéros avant le premier chiffre décimal significatif.*

Usage des tables de logarithmes.

237. Les tables de logarithmes les plus usitées sont les petites tables de *De Lalande* à *cinq* décimales et les grandes tables de *Callet* à *sept* décimales.

Les tables de De Lalande contiennent les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000, exprimés avec cinq décimales. Chaque page est divisée en trois colonnes verticales : la première contient les nombres, la seconde leurs logarithmes, la troisième les différences qui existent entre deux logarithmes consécutifs, exprimées en unités du cinquième ordre décimal.

Les tables de Callet renferment les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 108000. Les logarithmes des 1200 premiers nombres sont exprimés avec huit décimales : en face de chaque nombre se trouve son logarithme. Les logarithmes sont donnés sans caractéristique : on la connaît à la seule inspection du nombre. Après cette première partie, la table donne les logarithmes des nombres depuis 1020 jusqu'à 108000. Jusqu'à 100000, les logarithmes sont exprimés avec sept décimales ; à partir de 100000, avec huit décimales. Dans la colonne verticale intitulée N, on trouve les dizaines des nombres considérés. Cette colonne est suivie d'autres colonnes verticales intitulées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui correspondent aux unités du nombre donné. Si l'on veut, par exemple, le logarithme du nombre 31756, on cherchera 3175 dans la colonne intitulée N. On trouvera dans la colonne 0 les trois premiers chiffres de la mantisse qui sont 501 et qui, appartenant à plusieurs logarithmes successifs, ne sont pas répétés en face de tous ces logarithmes. On suivra, en face de 3175, jusqu'à la colonne qui correspond au chiffre 6, et l'on aura les quatre derniers chiffres décimaux 8258 du logarithme. La caractéristique est d'ailleurs 4, puisque 31756 contient cinq chiffres entiers. On aura ainsi $\log 31756 = 4,5018258$. Une dernière colonne contient les différences qui existent entre deux logarithmes consécutifs, et qui ne changent pas pendant un intervalle plus ou moins long. Au-dessous de chaque différence, se trouve une table de *parties proportionnelles* indiquant les produits de cette différence par 0,1, 0,2, 0,3, ..., jusqu'à 0,9.

Les deux questions à résoudre au moyen des tables sont celles-ci :

1°. Étant donné un nombre, trouver son logarithme ;

2°. Étant donné un logarithme, trouver le nombre correspondant.

258. *Trouver le logarithme d'un nombre quelconque.*

Si le nombre est un nombre de la table, il n'y a aucune difficulté. Supposons donc un nombre qui ne soit pas dans la table, comme 356789.

Si l'on opère avec les petites tables, on fait toujours en sorte que la partie entière du nombre considéré ait 4 chiffres. Si

l'on opère avec les tables de Callet, cette partie entière doit contenir cinq chiffres.

Dans le premier cas, nous remplacerons donc le nombre donné par le nombre 3567,89. Nous avons seulement changé la place de la virgule, la partie décimale du logarithme restera donc la même. Les tables donnent

$$\log 3567 = 3,55230.$$

La colonne des différences prouve que si, en cet endroit, deux nombres diffèrent d'une unité simple, leurs logarithmes différeront de 12 unités du cinquième ordre décimal. L'examen des tables montre que, dans des limites peu éloignées, on peut admettre la proportionnalité des accroissements des nombres et des accroissements des logarithmes. En appelant x la quantité à ajouter au logarithme de 3567 pour passer à celui de 3567,89, on aura donc

$$\frac{x}{12} = \frac{0,89}{1},$$

d'où

$$x = 12 \times 0,89.$$

Ainsi, *pour avoir x, il faudra toujours multiplier la différence tabulaire par l'accroissement du nombre.* Rappelons-nous que le multiplicande 12 représente *des cent-millièmes*, et nous trouverons $x = 0,00011$ par excès. Par suite, on aura à moins d'une unité du dernier ordre

$$\log 3567,89 = 3,55241.$$

On indique généralement le calcul comme il suit :

$$\begin{array}{rr} \log 3567 = & 3,55230 \\ \text{pour } 0,89 & \underline{\quad 11} \\ \log 3567,89 = & 3,55241 \\ \log\ 356789 = & 5,55241 \end{array}$$

Si l'on fait usage des tables de Callet, on cherchera le logarithme de 35678,9. On trouvera

$$\log 35678 = 4,5524005.$$

La différence tabulaire est 122, et la table des parties proportionnelles donne immédiatement $122 \times 0,9 = 110$. On écrira donc

$$\begin{array}{rr} \log 35678 = & 4,5524005 \\ \text{pour } 0,9 & \underline{\quad 110} \\ \log 35678,9 = & 4,5524115 \\ \log\ 356789 = & 5,5524115 \end{array}$$

Si l'on veut trouver le logarithme du nombre 56789241 8, on

cherchera, avec les petites tables, celui de 5678,92418. On aura

$$\log 5678 = 3,75420.$$

La différence tabulaire étant 7, il faut multiplier 7 par 0,92418 : on obtient 6,46926; l'augmentation du logarithme est 0,00006. Si l'on avait multiplié 7 par 0,92, on aurait trouvé 6,44. *Il est inutile avec les petites tables de tenir compte de plus de deux chiffres décimaux, souvent un seul suffit : les autres chiffres décimaux n'ont aucune influence sur les derniers chiffres du logarithme eu égard à l'ordre d'approximation adopté.* Nous aurons

$$\begin{array}{rr} \log 5678 = & 3,75420 \\ \text{pour } 0,9 & 6 \\ \hline \log 5678,92418 = & 3,75426 \\ \log\ 56789 2418 = & 8,75426 \end{array}$$

Si l'on emploie les tables de Callet, il faudra chercher le logarithme du nombre 56789,2418. On trouvera

$$\log 56789 = 4,7542642.$$

La différence tabulaire est 77, et la table des parties proportionnelles donne immédiatement

$$77 \times 0,2418 = 15 + 3,1 + 0,08 + 0,062 = 18,242.$$

Le calcul direct donnerait 18,6186. L'augmentation du logarithme est 0,0000018. Si l'on avait multiplié 77 par 0,241, la table aurait donné 18,18 et le calcul direct 18,557. *Il est inutile avec les tables de Callet de tenir compte de plus de trois chiffres décimaux, les différences tabulaires n'atteignant pas plus de trois chiffres, et le plus souvent deux suffisent : les autres chiffres décimaux n'ont aucune influence sur les derniers chiffres du logarithme eu égard à l'ordre d'approximation adopté.* Nous aurons

$$\begin{array}{rr} \log 56789 = & 4,7542642 \\ \text{pour } 0,2 & 15 \\ \text{pour } 0,04 & 3 \\ \hline \log 56789,2418 = & 4,7542660 \\ \log\ 56789 2418 = & 8,7542660 \end{array}$$

Si l'on avait à chercher le logarithme de 56,7892418, on opérerait absolument de la même manière ; seulement, la caractéristique du logarithme serait 1.

Si l'on avait à chercher le logarithme de 0,0056789 2418, on suivrait encore la même marche ; seulement, la caractéristique

du logarithme serait une caractérisque négative et deviendrait égale à $\overline{3}$.

239. *Étant donné un logarithme quelconque, trouver le nombre correspondant.*

Si le logarithme tombe exactement dans la table, on trouve en face le nombre cherché. Sinon, on opère comme il suit :

Soit $\log x = 2,71456$.

Si l'on se sert des petites tables, on cherche le logarithme qui approche le plus *par défaut* du logarithme donné, *en opérant dans la partie de la table où les nombres ont quatre chiffres.* On trouve ainsi

$$\log 5182 = 3,71450.$$

La différence tabulaire est 8. Si l'on admet comme précédemment la proportionnalité des accroissements très-petits des nombres et des accroissements correspondants de leurs logarithmes, il faudra chercher quel doit être l'accroissement du nombre pour un accroissement du logarithme égal à 6, différence de $\log x$ et de $\log 5182$. En appelant y cet accroissement inconnu, on aura

$$\frac{y}{1} = \frac{6}{8},$$

d'où

$$y = \frac{6}{8}.$$

Pour avoir y, il faudra donc toujours diviser la différence des logarithmes considérés par la différence tabulaire. On trouve

$$y = 0,75,$$

d'où

$$\log 5182,75 = 3,71456 \quad \text{et} \quad x = 518,275.$$

On ne doit pas compter, dans la division qui donne y, sur plus d'une ou deux décimales, suivant le nombre de chiffres de la différence tabulaire, puisqu'en repassant du nombre au logarithme, on devrait négliger les autres décimales (238). On prendra donc

$$x = 518,27.$$

Si l'on opère avec les tables de Callet, et si l'on a

$$\log x = 2,7145632,$$

on trouvera, en cherchant dans la partie de la table où les nombres ont cinq chiffres, et en prenant le logarithme qui approche le plus de $\log x$ par *défaut*,

$$\log 51807 = 4,7145561.$$

La différence des deux logarithmes est 71 unités du septième ordre. La différence tabulaire est 84, et la table des parties proportionnelles montre que l'accroissement du logarithme étant 67, l'accroissement du nombre est 0,8. Il reste à tenir compte d'une augmentation de 71 — 67 ou de 4 unités du dernier ordre. La table montre que l'accroissement du logarithme étant 42, celui du nombre est 0,5; par suite, l'accroissement du logarithme étant 4, celui du nombre sera très-approximativement 0,05. On aura donc

$$\log 51827,85 = 4,7145632 \quad \text{et} \quad x = 518,2785.$$

On ne doit pas tenir compte, à l'aide de la table des parties proportionnelles, de plus de deux ou trois chiffres décimaux (258). On indiquera le calcul comme il suit :

$$\begin{array}{rr}
\log x = & 2,7145632 \\
\log 51827 = & 4,7145561 \\
\hline
 & 71 \\
\text{pour } 0,8 & 67 \\
\text{pour } 0,05 & 4 \\
x = 518,2785. &
\end{array}$$

La marche à suivre sera toujours la même. Si l'on a

$$\log x = 0,7145632,$$

on en déduira

$$x = 5,182785.$$

Si l'on a

$$\log x = \bar{3},7145632,$$

on en déduira

$$x = 0,005182785.$$

La seule difficulté, après avoir trouvé les chiffres significatifs du nombre proposé, chiffres qui ne dépendent que de la mantisse du logarithme, sera de placer convenablement la virgule dans le nombre obtenu, de manière à reproduire la caractéristique indiquée.

260. En examinant la table, on voit les différences tabulaires aller constamment en diminuant. En effet, soient N et N + 1 deux nombres entiers consécutifs. On aura

$$\log(N+1) - \log N = \log \frac{N+1}{N} = \log\left(1 + \frac{1}{N}\right).$$

A mesure que N augmente, $\frac{1}{N}$ diminue; l'expression $1 + \frac{1}{N}$ converge vers 1, et $\log\left(1 + \frac{1}{N}\right)$ converge vers zéro.

Si l'on donne un accroissement δ au nombre N, puis un accroissement 2δ, on aura

$$\log(N+\delta)-\log N=\log\frac{N+\delta}{N}=\log\left(1+\frac{\delta}{N}\right),$$

$$\log(N+2\delta)-\log N=\log\frac{N+2\delta}{N}=\log\left(1+\frac{2\delta}{N}\right).$$

Les accroissements des nombres considérés $N+\delta$ et $N+2\delta$ présentent ici le rapport 2; la proportion admise précédemment (258, 259) exigerait qu'on eût alors

$$\log\left(1+\frac{2\delta}{N}\right)=2\log\left(1+\frac{\delta}{N}\right)\quad\text{ou}\quad 1+\frac{2\delta}{N}=\left(1+\frac{\delta}{N}\right)^2,$$

ce qui est impossible. Mais, si l'on opère dans la partie la plus élevée des tables, le terme $\frac{\delta^2}{N^2}$ du second membre, qui empêche l'égalité posée d'être vraie, n'aura aucune influence sur les décimales conservées; et la proportion sera exacte pourvu qu'on ne dépasse pas la cinquième ou la septième décimale.

Calculs par logarithmes.

261. *Remarque sur les logarithmes à caractéristiques négatives.* On aura à ajouter avec d'autres logarithmes des logarithmes à caractéristiques négatives. Il faudra alors, en additionnant la colonne des caractéristiques, faire une opération analogue à celle que nous avons indiquée relativement aux coefficients des termes semblables des polynômes (9).

Passons aux logarithmes soustractifs. Soit à retrancher de a le logarithme 3,57821. On aura évidemment

$$a-3{,}57821=a-4+(1-0{,}57821).$$

La partie entre parenthèses n'est autre chose que le *complément* à 1 de la partie décimale du logarithme (*Arith.*, 30). On formera ce complément en retranchant de 9 tous les chiffres significatifs de cette partie décimale, sauf le dernier qu'on retranchera de 10. On aura alors à ajouter un logarithme dont la partie décimale sera devenue positive et dont la caractéristique sera négative. Ainsi

$$a-3{,}57821=a+\bar{4},42179.$$

Soit à retrancher de a le logarithme $\bar{5},17098$. On aura évidemment

$$a-\bar{5},17098=a+4+(1-0{,}17098).$$

d'où

$$a - \bar{5},17098 = a - 4,82902.$$

On a alors à ajouter un logarithme tout entier positif.

Aux logarithmes ainsi transformés, nous donnerons le nom de logarithmes *préparés*, et nous les indiquerons par la lettre initiale $\bar{\mathrm{L}}$, surmontée du signe —.

Pour *préparer* un logarithme, c'est-à-dire pour ramener sa soustraction à une addition dans laquelle la soustraction, si elle existe, ne portera que sur la caractéristique, *il faut augmenter sa caractéristique prise avec son signe d'une unité, changer le signe du résultat obtenu, et écrire à la suite le complément de la partie décimale donnée.*

Dans le premier exemple, nous avons augmenté la caractéristique 3 d'une unité, et nous avons pris négativement le résultat 4 obtenu.

Dans le second exemple, nous avons augmenté la caractéristique $\bar{5}$ d'une unité, et nous avons pris positivement le résultat $\bar{4}$ obtenu.

Il vaut bien mieux opérer comme on vient de l'indiquer, que de prendre le complément à 10; *et cette simplification est essentielle dès qu'on a à considérer plus de deux logarithmes.*

Si l'on a à *multiplier* par un nombre entier un logarithme à caractéristique négative (250), il faut seulement, en multipliant la caractéristique négative, tenir compte des retenues positives fournies par le chiffre des plus hautes unités de la mantisse; on aura

$$\bar{3},71249 \times 7 = \overline{17},98743.$$

Si l'on a à *diviser* par un nombre entier un logarithme à caractéristique négative (251), il faut nécessairement ajouter à la caractéristique autant d'unités qu'il est nécessaire pour qu'elle devienne un multiple du diviseur. Par compensation, on ajoutera au chiffre des dixièmes de la mantisse autant de dizaines positives qu'on aura ajouté d'unités négatives à la caractéristique. Si l'on a, par exemple, le logarithme $\bar{2},91025$ à diviser par 5, on regardera la caractéristique comme égale à $\bar{5}$, et son quotient par 5 sera $\bar{1}$. Puis, au lieu de diviser 9 dixièmes par 5, on divisera 39 dixièmes par 5, de sorte que le chiffre des dixièmes du quotient sera 7, etc. On trouvera

$$\frac{\bar{2},91025}{5} = \bar{1},78205.$$

262. *Lorsqu'on a à calculer une formule par logarithmes, il faut faire en sorte de ne passer aux nombres que le moins de fois possible.*

Une formule n'est directement calculable par logarithmes que lorsqu'elle ne contient aucun signe + ou —.

Une formule telle que $\sqrt{a^2 - b^2}$ n'est pas directement calculable par logarithmes, parce que, pour appliquer les logarithmes, il faut commencer par calculer les carrés a^2 et b^2. Si on les calcule par logarithmes, on remontera donc trois fois aux nombres au lieu d'une seule : une fois pour a^2, une fois pour b^2, une dernière fois pour calculer $\sqrt{a^2 - b^2}$. Dans un cas aussi simple, on lève immédiatement la difficulté en remplaçant $a^2 - b^2$ par le produit $(a + b)(a - b)$. Mais il faut calculer séparément $a + b$ et $a - b$. Oublier les simplifications analogues à celle que nous venons de rappeler, ce serait commettre une faute de calcul grossière. Il faut donc toujours chercher à rendre, par des artifices convenables, la formule proposée directement calculable par logarithmes.

Soit demandé, par exemple, le volume d'un tronc du cône. La Géométrie donnera immédiatement la formule (*voir* la Géométrie)

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Ajoutons et retranchons dans la parenthèse le produit Rr. Il viendra

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + 2Rr + r^2 - Rr),$$

c'est-à-dire

$$V = \frac{\pi H}{3}[(R + r)^2 - Rr].$$

Posons $Rr = a^2$, de manière à introduire la différence de deux carrés; nous aurons

$$V = \frac{\pi H}{3}[(R + r)^2 - a^2] = \frac{\pi H}{3}[(R + r + a)(R + r - a)].$$

On calculera préalablement a à l'aide de l'égalité $a^2 = Rr$ qui, traitée par logarithmes, donne

$$2\log a = \log R + \log r,$$

d'où

$$\log a = \frac{\log R + \log r}{2};$$

puis, on appliquera la formule. On remontera ainsi aux nombres deux fois; mais il aurait fallu y passer quatre fois sans la marche suivie : une fois pour R^2, une fois pour r^2, une fois pour Rr, une fois pour V.

On trouvera en Trigonométrie un grand nombre d'exemples de ces sortes de transformations.

263. 1°. *Soit à calculer l'expression*

$$x = \frac{2 \times 32,9797 \times 11,0203}{3}.$$

Nous aurons, en employant les tables de De Lalande,

$$\log x = \log 2 + \log 32,9797 + \log 11,0203 + \overline{\mathrm{L}}.3.$$

Voici le type du calcul :

$$\begin{array}{r} \log 2 = 0,30103 \\ \log 32,9797 = 1,51824 \\ \log 11,0203 = 1,04219 \\ \overline{\mathrm{L}}3 = \overline{1},52288 \\ \hline \log x = 2,38434 \\ x = 242,29. \end{array}$$

2°. *Calculons le rayon de la sphère dont la surface a* 1^{Mq}. La Géométrie donne, en appelant R le rayon cherché (*voir* la Géométrie)

$$1^{\mathrm{Mq}} = 4\pi \mathrm{R}^2, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{R}^2 = \frac{1^{\mathrm{Mq}}}{4\pi} \quad \text{et} \quad \mathrm{R} = \frac{1^{\mathrm{M}}}{2\sqrt{\pi}}.$$

On aura donc

$$\log \mathrm{R} = \log 1 + \overline{\mathrm{L}}2 + \overline{\mathrm{L}}\sqrt{\pi}.$$

Il faudra donc chercher le logarithme de $\sqrt{\pi}$ qu'on trouve immédiatement à la fin de la table, et le préparer. Si ce logarithme n'était pas directement dans la table, on y trouverait celui de π, on le diviserait par 2, et l'on préparerait ensuite le logarithme obtenu. Le logarithme de 1 étant toujours 0, le calcul se réduit à ce qui suit :

$$\begin{array}{r} \overline{\mathrm{L}}2 = \overline{1},69897 \\ \overline{\mathrm{L}}\sqrt{\pi} = \overline{1},75143 \\ \hline \log \mathrm{R} = \overline{1},45040 \\ \mathrm{R} = 0^{\mathrm{M}},2821. \end{array}$$

3°. *Soit à calculer l'expression*

$$x = \frac{\sqrt[3]{0,082} \cdot (0,048)^4}{(0,0051)^3 \cdot \sqrt{0,0072}}.$$

On aura

$$\log x = \frac{1}{3} \log 0,082 + 4 \log 0,048 + \overline{\mathrm{L}}0,0051^3 + \overline{\mathrm{L}}.\sqrt{0,0072}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\log x = \frac{1}{3} \log 0,082 + 4 \log 0,048 + 3\overline{\mathrm{L}}0,0051 + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{L}}0,0072.$$

Il faudra donc chercher le logarithme de 0,0051, le tripler et préparer le résultat obtenu; de même, on cherchera le logarithme de 0,0072, on en prendra la moitié, et l'on préparera le résultat obtenu. On aura

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{3}\log 0{,}082 = \bar{1},63794 & \qquad \log 0{,}082 = \bar{2},91381, \\ 4\log 0{,}048 = \bar{6},72496 & \qquad \log 0{,}048 = \bar{2},68124, \\ \overline{\mathrm{L}}\, 0{,}0051^3 = 6{,}87729 & \qquad \log 0{,}0051 = \bar{3},70757, \\ \overline{\mathrm{L}}.\sqrt{0{,}0072} = 1{,}07134 & \qquad \log 0{,}0072 = \bar{3},85733. \\ \hline \log x = 2{,}31153 & \\ x = 204{,}89. & \end{array}$$

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DES LOGARITHMES.

Équations exponentielles.

264. On appelle équation *exponentielle*, une équation dans laquelle l'inconnue se trouve en exposant. La plus simple des équations exponentielles est

$$a^x = b;$$

a et b sont deux quantités positives données. En prenant les logarithmes des deux membres, il vient

$$x \log a = \log b,$$

d'où

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Résoudre cette équation, c'est, en réalité, chercher le logarithme du nombre b dans le système qui a pour base le nombre a, à l'aide de la table des logarithmes vulgaires.

Si l'on a l'équation

$$a^{(b^x)} = c,$$

a, b, c, étant des quantités positives données, on en conclura d'abord

$$b^x \log a = \log c, \quad \text{puis,} \quad b^x = \frac{\log c}{\log a};$$

d'où

$$x \log b = \log \frac{\log c}{\log a} \quad \text{et} \quad x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$$

265. 1°. *Soit à résoudre le système*

$$x + y = a,$$
$$\log x + \log y = b.$$

La seconde équation peut se mettre sous la forme

$$\log xy = b, \quad \text{d'où} \quad xy = 10^b,$$

la base du système vulgaire étant 10. La question est ainsi ramenée à trouver deux nombres, connaissant leur somme et leur produit (**190**).

2°. *Soit encore à résoudre l'équation*

$$16^x + 16^{1-x} = 10.$$

Posons $16^x = y$; il en résultera

$$16^{1-x} = \frac{16}{16^x} = \frac{16}{y}.$$

l'équation donnée deviendra donc

$$y + \frac{16}{y} = 10,$$

d'où

$$y^2 - 10y + 16 = 0.$$

On en déduit

$$y = 5 \pm \sqrt{25 - 16} = 5 \pm 3, \quad \begin{cases} y' = 8, \\ y'' = 2. \end{cases}$$

Par suite, l'équation $16^x = y$ donnant

$$x \log 16 = \log y,$$

on aura

$$x' = \frac{\log y'}{\log 16} = \frac{\log 8}{\log 16} = 0,75 = \frac{3}{4},$$
$$x'' = \frac{\log y''}{\log 16} = \frac{\log 2}{\log 16} = 0,25 = \frac{1}{4}.$$

Ces valeurs vérifient bien l'équation. On a, en effet,

$$\sqrt[4]{16^3} + \sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16^2 . 16}} + 2 = \sqrt{16\sqrt{16}} + 2 = \sqrt{64} + 2 = 10.$$

Questions d'intérêt composé.

266. Généralement, les intérêts d'un capital prêté constituent une rente payable tous les ans (*Arithm.*); mais on peut aussi laisser les intérêts annuels s'ajouter au capital dû pour porter à leur tour intérêt. On *capitalise* alors les intérêts, on prête *à intérêts composés*.

Nous appellerons *taux*, dans les questions d'intérêt composé,

l'intérêt rapporté par 1 franc placé pendant un an, et nous désignerons cet intérêt par r. Si le capital est prêté à 5 pour 100, r est égal à 0,05.

Le capital 1 franc, placé à intérêts composés, vaut à la fin de la première année, $1 + r$. Le capital C vaudra donc, à la fin de la même année, $C(1 + r)$. Il y a en effet proportionnalité entre les capitaux et les intérêts, et, par suite, entre les capitaux et ces mêmes capitaux augmentés de leurs intérêts.

Pour savoir ce que devient un capital au bout d'une année, il suffit donc de le multiplier par le facteur constant $1 + r$.

Le capital $C(1 + r)$ deviendra, par suite, au bout de la seconde année, $C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2$.

De même, au bout d'une troisième année, le capital $C(1 + r)^2$ deviendra $C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3 \ldots$

En général, au bout de n années, le capital C placé à intérêts composés, deviendra $C(1 + r)^n$ et, en appelant A le capital produit, on aura la formule fondamentale

$$A = C(1 + r)^n.$$

Si l'on prend les logarithmes des deux membres, il vient

$$\log A = \log C + n \log(1 + r).$$

Cette formule logarithmique renferme les quatre quantités A, C, n et r; elle permettra donc de trouver l'une quelconque de ces quatre quantités quand on connaîtra les trois autres, ce qui correspondra à quatre problèmes particuliers.

267. 1°. *Cherchons ce que devient un capital de* 50000 *fr., placé pendant* 40 *ans à intérêts composés, le taux de l'intérêt étant fixé à* 4,5 *pour* 100.

On aura

$$r = 0,045,$$

et la formule donnera

$$\log x = \log 50000 + 40 \log 1,045.$$

$$\begin{aligned} \log 50000 &= 4,6989700 \\ 40 \log 1,045 &= 0,7646516 \\ \hline \log x &= 5,4636216 \\ x &= 290818^{\text{fr}}. \end{aligned}$$

268. 2°. *Pendant combien d'années faut-il placer un capital à intérêts composés, pour qu'il acquière une valeur double?*

On a ici

$$A = 2C,$$

et la formule $A = C(1+r)^n$ devient

$$2 = (1+r)^n,$$

d'où

$$\log 2 = n \log(1+r) \quad \text{et} \quad n = \frac{\log 2}{\log(1+r)}.$$

Cette valeur de n sera généralement *fractionnaire*. A ce sujet, il faut remarquer que la formule des intérêts composés ayant été établie en considérant un nombre *entier* d'années, le calcul doit se faire de la manière suivante, quand n est fractionnaire.

Si C est le capital considéré et p le plus grand nombre entier contenu dans n, on calculera d'abord

$$C' = C(1+r)^p.$$

Puis, par la formule des intérêts simples (**118**), on calculera l'intérêt I rapporté par C', placé pendant la fraction d'année $n-p$. Le capital cherché sera exactement $C' + I$.

Désignons par j le nombre de jours contenu dans $n-p$. On aura

$$I = \frac{C'tj}{36000} \quad \text{ou} \quad I = \frac{C'rj}{360},$$

puisque $t = 100\,r$. Par conséquent, le capital cherché A sera égal à

$$C(1+r)^p + C(1+r)^p \cdot \frac{rj}{360},$$

c'est-à-dire que, dans le cas de n fractionnaire, on aura la formule

$$A = C(1+r)^p\left(1+\frac{rj}{360}\right).$$

Si l'on admet que le principe des intérêts composés peut s'étendre aux fractions d'année, ce qui est beaucoup plus rationnel, on prouvera facilement que la formule $A = C(1+r)^n$ est générale, quel que soit n, entier, fractionnaire ou même négatif (*). Quoi qu'il en soit, les résultats donnés par les deux

---

(*) Si n est fractionnaire, j'appelle x l'intérêt rapporté par 1 franc en $\frac{1}{k}$ d'année. Au bout de ce temps, 1 franc sera devenu $1+x$ et, au bout de $\frac{k}{k}$ d'année, c'est-à-dire au bout d'un an, 1 franc sera devenu... $(1+x)^k$. Mais $(1+x)^k$ doit être égal à $1+r$. On en déduit

$$1+x = (1+r)^{\frac{1}{k}} \quad \text{et} \quad (1+x)^p = (1+r)^{\frac{p}{k}}.$$

Mais $(1+x)^p$ représente ce que devient 1 franc au bout de $\frac{p}{k}$ d'année. Une

formules présenteront des différences en général négligeables (*).

Revenons à la question proposée. On a, en employant la formule rationnelle,

$$n = \frac{\log 2}{\log 1,05},$$

si l'on suppose le capital placé à 5 pour 100. Il en résulte

$$n = \frac{0,30103}{0,02119} = 14,207 \text{ environ},$$

ce qui revient à 14 ans 75 jours.

En employant la formule

$$A = C(1+r)^p\left(1+\frac{rj}{360}\right),$$

et en y faisant $A = 2C$, $r = 0,05$, $p = 14$, il vient

$$2 = 1,05^{14}\left(1+\frac{0,05\,j}{360}\right),$$

c'est-à-dire

$$\log 2 = 14\log 1,05 + \log\left(1+\frac{j}{7200}\right),$$

d'où

$$\log\left(1+\frac{j}{7200}\right) = \log 2 - 14\log 1,05 = 0,00437.$$

---

somme C au bout du même temps deviendra donc $C(1+x)^p$ ou $C(1+r)^{\frac{p}{k}}$.

Si l'on demande quel capital C a produit en n années un capital A, on aura

$$A = C(1+r)^n,$$

d'où

$$C = \frac{A}{(1+r)^n} = A(1+r)^{-n}.$$

Sous ce point de vue, n peut donc recevoir aussi des valeurs négatives.

(*) n est égal à $p + \frac{j}{360}$. La formule générale peut donc s'écrire

$$A = C(1+r)^{p+\frac{j}{360}} = C(1+r)^p(1+r)^{\frac{j}{360}}.$$

On voit alors que la différence des deux formules provient de celle des deux facteurs $1+\frac{rj}{360}$ et $(1+r)^{\frac{j}{360}}$. Ces deux facteurs ne sont pas égaux; car le second, développé suivant la formule du binôme étendue au cas des exposants fractionnaires, donne d'abord les deux termes qui composent le premier facteur, plus une série d'autres termes.

Il en résulte

$$1 + \frac{j}{7200} = 1,0101,$$

d'où

$$j = 73 \text{ jours au lieu de } 75;$$

la différence est insignifiante. En résumé, on fera bien, dans les applications, de se servir de la formule rationnelle.

269. 3°. *On place deux sommes C et C' à intérêts composés, la première au taux r, la seconde au taux r' : on demande dans combien de temps ces deux sommes auront produit le même capital.*

Soit x le temps cherché. Le capital A produit par C sera $A = C(1+r)^x$; le capital A' produit par C' sera $A' = C'(1+r')^x$. A devant être égal à A', on aura

$$C(1+r)^x = C'(1+r')^x,$$

d'où, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\log C + x \log(1+r) = \log C' + x \log(1+r')$$

et

$$x = \frac{\log C' - \log C}{\log(1+r) - \log(1+r')}.$$

270. 4°. *La population d'un État est aujourd'hui de N habitants; elle s'accroît tous les ans de $\frac{1}{K}$ de sa valeur : on demande quel chiffre elle atteindra au bout de n années?*

A la fin de la première année, la population sera devenue $N + \frac{N}{K}$ ou $N\left(1 + \frac{1}{K}\right)$. La question proposée rentre donc dans les questions d'intérêt composé : le facteur constant $1 + r$ est remplacé par le facteur constant $1 + \frac{1}{K}$. La formule cherchée sera, en désignant par x la population inconnue,

$$x = N\left(1 + \frac{1}{K}\right)^n = N\left(\frac{K+1}{K}\right)^n.$$

Si l'on considérait deux populations N et N', ayant pour accroissements relatifs $\frac{1}{K}$ et $\frac{1}{K'}$, et si l'on demandait au bout de combien d'années elles doivent devenir égales, l'équation du problème serait donc, en désignant par y le nombre d'années inconnu,

$$N\left(\frac{K+1}{K}\right)^y = N'\left(\frac{K'+1}{K'}\right)^y,$$

d'où

$$\log N + y \log \frac{K+1}{K} = \log N' + y \log \frac{K'+1}{K'},$$

c'est-à-dire

$$y = \frac{\log N' - \log N}{\log \frac{K+1}{K} - \log \frac{K'+1}{K'}}$$

$$= \frac{\log N' - \log N}{\log (K+1) + \overline{L}K + \overline{L}(K'+1) + \log K'}.$$

271. 5°. *Pendant n années, on place chaque année une somme a ; on laisse les intérêts résultant de ces placements successifs s'accumuler avec les capitaux : on demande la somme produite au bout des n années.*

La première somme a, *placée aujourd'hui*, vaut au bout de n années,

$$a(1+r)^n.$$

La seconde somme a, placée à la fin de la première année, reste placée pendant $n-1$ années, et vaut par conséquent

$$a(1+r)^{n-1}.$$

La troisième somme a, placée pendant $n-2$ années, vaut de même

$$a(1+r)^{n-2} \ldots.$$

La dernière somme a, placée seulement pendant un an, vaut enfin

$$a(1+r).$$

En ajoutant tous ces résultats et en désignant par A le capital cherché, il vient

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r)^2 + a(1+r),$$

ou, en mettant $a(1+r)$ en facteur commun,

$$A = a(1+r)[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + (1+r)^{n-3} + \ldots + (1+r) + 1].$$

La parenthèse représente la somme des n premiers termes d'une progression par quotient, dont le premier terme est $(1+r)^{n-1}$ et dont la raison est $\frac{1}{1+r}$, ou encore le quotient $\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1}$ (28), c'est-à-dire $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Par suite,

$$A = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Cette formule n'est pas directement calculable par logarithmes. On cherchera à part $(1+r)^n$.

On aura, en posant $(1+r)^n = b$,

$$n \log(1+r) = \log b.$$

b sera donc connu, et la formule deviendra

$$A = \frac{a(1+r)(b-1)}{r}.$$

Si l'on place, par exemple, *tous les ans* 2000 *francs à intérêts composés et à* 5 *pour* 100, *quelle est, au bout de* 20 *ans, la somme produite?*

On aura d'abord

$$\log b = 20 \log 1,05 = 0,42378,$$

d'où

$$b = 2,6532 \quad \text{et} \quad b - 1 = 1,6532.$$

La formule sera donc

$$A = \frac{2000 . 1,05 . 1,6532}{0,05} = 400 . 105 . 1,6532,$$

c'est-à-dire

$$\log A = \log 400 + \log 105 + \log 1,6532.$$

$$\begin{aligned} \log 400 &= 2,60206 \\ \log 105 &= 2,02119 \\ \log 1,6532 &= 0,21832 \\ \hline \log A &= 4,84157 \\ A &= 69433^{\text{fr}}. \end{aligned}$$

Questions d'annuités et d'amortissement.

272. Une *annuité* est une somme qu'on paye pendant un nombre déterminé d'années, pour éteindre une certaine dette.

Si l'on veut exécuter un travail utile qui exige un capital considérable, on emprunte ce capital pour un temps donné, et l'on convient de le rembourser au bout du temps fixé en tenant compte des intérêts accumulés. On peut alors, au lieu d'effectuer intégralement le remboursement à l'époque indiquée, s'acquitter d'avance en payant tous les ans une même somme. Cette somme ou annuité devra être calculée de telle sorte que les deux manières d'opérer le remboursement soient identiques. Les profits du travail exécuté permettent de servir l'annuité, et la nécessité de la servir est une condition d'ordre et d'économie.

Désignons par A le capital prêté pour n années; au bout des n années, la somme due sera $A(1+r)^n$.

Soit maintenant a l'annuité nécessaire. La première annuité,

payée à la fin de la première année, pourrait être placée à intérêts composés par le débiteur pendant $n-1$ années. Elle vaut donc réellement pour le créancier $a(1+r)^{n-1}$.

La seconde annuité, payée à la fin de la seconde année, restera $n-2$ années entre les mains du créancier et vaudra par conséquent $a(1+r)^{n-2}$....

L'avant-dernière annuité ne restera qu'un an entre les mains du créancier et vaudra pour lui $a(1+r)$.

Enfin, la dernière annuité, payée à la fin de la $n^{ième}$ année, vaudra seulement a.

La somme de tous ces payements sera donc

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots+a(1+r)+a$$

ou, en mettant a en facteur commun,

$$a[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\ldots+(1+r)+1].$$

La parenthèse représente, comme nous venons de le rappeler (271), le quotient $\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1}$, c'est-à-dire $\frac{(1+r)^n-1}{r}$.

On devra donc avoir

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}=A(1+r)^n,$$

d'où

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Cette formule n'est pas directement calculable par logarithmes. Nous poserons

$$(1+r)^n=b,$$

d'où

$$\log b=n\log(1+r).$$

b étant connu, nous aurons

$$a=\frac{Arb}{b-1}.$$

Si n devenait infini, b deviendrait aussi infini. En divisant d'abord les deux termes de l'expression fractionnaire qui représente a, par b, il viendra

$$a=\frac{Ar}{1-\frac{1}{b}},$$

et en faisant $b=\infty$, il restera

$$a=Ar.$$

Cette valeur représente alors la *rente perpétuelle* à payer pour le capital prêté A. L'État emprunte de cette manière, c'est-

à-dire qu'il s'oblige à servir perpétuellement la rente, sans rembourser jamais le capital.

Cherchons l'annuité nécessaire pour éteindre une dette de 200000 *francs, au bout de* 50 *ans, au taux de* 5,60 *pour* 100. On aura

$$A = 200000, \quad n = 50, \quad r = 0,056.$$

Par suite,

$$\log b = 50 \log 1,056 = 1,18319 \quad \text{et} \quad b = 15,247.$$

On pourra donc écrire

$$a = \frac{200000 . 0,056 . 15,247}{14,247} = \frac{112 . 1524,7}{14,247},$$

$$\begin{aligned} \log 112 &= 2,04922 \\ \log 1524,7 &= 3,18318 \\ \overline{\mathrm{L}}14,247 &= \overline{2},84628 \\ \hline \log a &= 4,07868 \\ a &= 11986^{\text{fr}}. \end{aligned}$$

273. Si n était inconnu, on déduirait de la relation

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

$$(1+r)^n(a - Ar) = a,$$

d'où

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar}.$$

Par suite,

$$n \log(1+r) = \log a - \log(a - Ar),$$

c'est-à-dire

$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}.$$

Il faut, pour que la question soit possible, qu'on ait $a > Ar$: car les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes. Cette condition est d'ailleurs évidente à priori : si l'annuité ne surpasse pas la rente annuelle, il ne reste rien pour *amortir* le capital.

Si l'on trouve pour n une valeur *fractionnaire*, cela signifie que le plus grand nombre entier contenu dans n correspond à un nombre insuffisant d'annuités, et que ce nombre entier augmenté de 1 correspond à un nombre d'annuités plus que suffisant pour couvrir la dette. On pourra donc choisir entre les deux nombres entiers qui comprennent n, et calculer l'annuité correspondante qui s'écartera peu de celle dont on pouvait disposer.

274. Si r était inconnu, on déduirait de la formule

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

$$Ar(1+r)^n = a(1+r)^n - a,$$

d'où

$$r = \frac{a}{A} - \frac{a}{A(1+r)^n}.$$

On devrait alors calculer r par la méthode *des approximations successives* sur laquelle nous reviendrons (*voir* t. II); c'est-à-dire que le second terme du second membre étant évidemment très-petit à côté du premier, on le négligerait d'abord; puis, on se servirait de la valeur inexacte obtenue $r = \frac{a}{A}$, pour en trouver une seconde plus approchée en tenant compte du terme négligé, etc.

275. Les questions d'*amortissement* rentrent dans les questions d'annuités.

L'État base ses emprunts sur le système des rentes perpétuelles; mais il conserve la faculté de racheter ces mêmes rentes qu'il vient d'aliéner à tout jamais. Pour arriver à l'extinction ou à la diminution progressive de la *dette*, on a constitué une caisse d'amortissement dont la dotation primitive a été de 40 millions et produite par la vente d'une partie des forêts de l'État. En outre, cette caisse reçoit une dotation annuelle.

Les fonds de la Caisse d'Amortissement servent à racheter chaque année des rentes qui viennent, par leurs intérêts composés d'année en année, augmenter les ressources de la caisse en lui permettant de racheter de nouvelles rentes. Quand l'État aura racheté toutes les rentes, la dette publique sera *éteinte* ou *amortie*.

On appelle *taux d'amortissement* le rapport du capital affecté à l'amortissement au capital emprunté ou, en d'autres termes, le fonds d'amortissement pour 1 franc. Si l'emprunt est de 250 millions, dire que le taux d'amortissement est $\frac{3}{100}$, c'est dire que le fonds d'amortissement est les $\frac{3}{100}$ de 250 millions ou 7500000 francs. Avec ce fonds, si l'intérêt est fixé à 5 pour 100, on achètera une rente de 375000 francs, dont on jouira à la fin de la première année; on pourra donc disposer alors de 7875000 francs. De même, à la fin de la seconde année, on aura à sa disposition un capital de 8268750 francs; etc.

Désignons par A la dette; la rente annuelle sera Ar. Soient n le nombre d'années nécessaires pour éteindre la dette, t le taux d'amortissement, r l'intérêt rapporté par 1 franc en un an.

Le premier fonds d'amortissement sera une fraction de A représentée par At. Cette somme At permettra de racheter la *rente* Atr, puisque 1 franc correspond au rachat de la rente r. L'année suivante, le fonds sera devenu $At + Atr$ ou $At(1+r)$, et permettra de racheter la rente $Atr(1+r)$. La troisième année, ce fonds sera devenu $At(1+r) + Atr(1+r)$ ou $At(1+r)(1+r)$, c'est-à-dire $At(1+r)^2$, et il permettra de racheter la rente $Atr(1+r)^2 \ldots$. La $n^{ième}$ année, le fonds d'amortissement atteindra la valeur $At(1+r)^{n-1}$ et permettra de racheter la rente $Atr(1+r)^{n-1}$. La somme de tous ces rachats successifs doit constituer la rente Ar. On devra donc avoir

$$Atr + Atr(1+r) + Atr(1+r)^2 + \ldots + Atr(1+r)^{n-1} = Ar,$$

d'où

$$t\left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \ldots + (1+r)^{n-1}\right] = 1.$$

Cette équation revient à

$$t \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 1.$$

On en déduit

$$(1+r)^n = \frac{r+t}{t} = 1 + \frac{r}{t} \quad \text{et} \quad n \log(1+r) = \log\left(1 + \frac{r}{t}\right),$$

d'où

$$n = \frac{\log\left(1 + \frac{r}{t}\right)}{\log(1+r)} = \frac{\log(t+r) - \log t}{\log(1+r)}.$$

On voit que n ne dépend pas du capital A.

Si l'on fait dans cette formule, pour revenir à l'exemple posé,

$$t = 0{,}03, \quad r = 0{,}05,$$

il viendra

$$n = \frac{\log 0{,}08 - \log 0{,}03}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}42597}{0{,}02219} = 19{,}19.$$

Ainsi, dans le cas considéré, la dette serait éteinte en moins de 20 ans.

276. La Société de *Crédit foncier* opère par amortissement. Elle prête sur hypothèque immobilière, pour 50 ans au plus. La dette contractée est remboursable par semestre, et le payement doit comprendre un intérêt de 4,25 pour 100, l'amortis-

sement nécessaire et des frais d'administration fixés à $0^{fr},60$ pour 100.

Il faut d'abord employer la formule précédente sous la forme

$$\log\left(1+\frac{r}{t}\right)=n\log(1+r);$$

on en déduit facilement le fonds d'amortissement t pour 1 franc ou $100t$ pour 100 francs, en remarquant que n indique le nombre des payements semestriels. On ajoute à cet amortissement semestriel $\frac{4,25+0,60}{2}$, et l'on obtient la rente à payer chaque semestre pour 100 francs prêtés. Si l'on suppose $n=100$, on trouve pour cette rente $2^{fr},72061$. Le capital avancé étant A, la rente correspondante est donnée par une simple règle de trois.

(*Voir*, pour la théorie de la *règle à calcul*, la Note IV à la fin du volume).

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Résoudre le système $x^2+y^2=a^2$, $\log x+\log y=b$.

II. Résoudre le système $x^4+y^4=a^4$, $\log x+\log y=b$.

III. Calculer les dimensions du litre destiné à la mesure des liquides et celles du litre destiné à la mesure des matières sèches. (On trouve dans le premier cas $h=0^M,172$ et $d=0^M,086$; dans le second, $h=d=0^M,1084$.)

IV. On emprunte 1 000 000 francs payables dans 29 ans à 5 pour 100; quelle annuité faut-il donner pour éteindre progressivement la dette? (66 046 francs.)

V. On place 100 000 francs à 4,5 pour 100 par an. On retire chaque année 2 000 francs d'intérêt, et on laisse le reste des intérêts dus s'accumuler avec le capital. Au bout de 20 ans, après le prélèvement de la dernière annuité de 2 000 francs, à quelle somme a-t-on droit? Établir la formule générale qui correspond à ce problème. (178 429 francs.)

VI. A quel taux faut-il placer un capital pour qu'il soit triplé au bout de 25 ans? (4,5 ou $r=0,045$.)

VII. Une compagnie emprunte un capital C qu'elle doit rembourser en payant tous les six mois une annuité a. Le taux de l'intérêt est fixé à i pour 1 franc et pour 6 mois. Au bout de combien de semestres l'emprunt sera-t-il amorti?

Établir la formule générale, en vérifier l'exactitude dans l'hypothèse $a=C(1+i)$, et l'appliquer aux données suivantes :

$$C=6000000,\quad i=0,0225,\quad a=0,03C.$$

NOTES.

NOTE I.

REMARQUE SUR LA DIVISION.

Nous avons indiqué en Arithmétique (48, *voir* la note) un moyen assez simple d'essayer les chiffres du quotient sans rien écrire. Voici un procédé qui semble préférable et dont nous devons la connaissance à l'obligeance de M. Belanger.

Soit à diviser, par exemple, 28239 par 7315. L'application de la règle ordinaire conduit à essayer le chiffre 4. Ce chiffre, quotient de 28 par 7, est *exact* ou *trop fort*. S'il est exact, le dividende est au moins égal à 4 fois le diviseur et, par conséquent, son quart est au moins égal à 7315. On prendra donc le quart du dividende et, si ce quart est moindre que le diviseur, on en conclura que le chiffre 4 est trop fort. On n'aura donc qu'à comparer les chiffres qu'on trouvera successivement, avec les chiffres correspondants du diviseur.

Le quart de 28 est 7, et il reste 0. Le quart de 2 est 0, tandis que le chiffre suivant du diviseur est 3. Le chiffre 4 est donc trop fort, et il faut essayer le chiffre 3.

Ce procédé sera surtout avantageux, lorsque les chiffres successivement obtenus seront tous égaux aux chiffres correspondants du diviseur, parce qu'on trouvera immédiatement le reste de la division partielle entreprise.

Soit, par exemple, à diviser 65652 par 9378. Il faut essayer le chiffre 7, quotient de 65 par 9. Le septième de 65 est 9, et il reste 2; le septième de 26 est 3, et il reste 5; le septième de 55 est 7, et il reste 6, le septième de 62 est 8, et il reste 6. Le chiffre 7 est donc exact, et le *reste* de l'opération est 6.

La remarque que nous venons de présenter permettra d'essayer rapidement, à partir du second, les chiffres trouvés dans l'extraction d'une racine carrée.

NOTE II.

EMPLOI DE L'ALGÈBRE EN CHIMIE.

Nous voulons, dans cette Note, appeler l'attention des élèves sur l'utilité du calcul en Chimie. Au point de vue pratique, le passage des *formules* chimiques aux poids des éléments qu'elles renferment est indispensable, et faute de s'y exercer au commencement de leurs études, les élèves comprennent souvent mal le sens de ces symboles qui peignent si admi-

rablement l'ensemble des réactions opérées et permettent de les retenir sans peine. Quelques exemples très-simples rempliront le but que nous nous proposons.

1°. *Supposons qu'on veuille préparer* 1 *mètre cube d'oxygène à l'aide du bioxyde de manganèse, et qu'on demande quelle proportion de ce dernier composé on doit employer.*

La *formule* du bioxyde de manganèse est MnO^2, ce qui veut dire qu'il se compose de *un équivalent* de manganèse pour *deux équivalents* d'oxygène. En d'autres termes, sur $43^{\text{parties}},87$ le bioxyde de manganèse renferme $27^{\text{parties}},87$ de manganèse (27,87 *est l'équivalent de ce corps*) et 16 parties d'oxygène (16 *représente* 2 *fois l'équivalent de ce gaz*).

Par la calcination, le bioxyde abandonne une partie de son oxygène et passe à l'état d'oxyde inférieur. La formule de ce nouvel oxyde est $MnO^{\frac{4}{3}}$ ou Mn^3O^4. On voit par là que, sur 2 équivalents d'oxygène, $\frac{2}{3}$ sont mis en liberté, c'est-à-dire que le bioxyde cède *le tiers* de son oxygène.

Ceci posé, je me sers de l'égalité

$$MnO^2 = MnO^{\frac{4}{3}} + O^{\frac{2}{3}},$$

qui rend compte de la réaction qui s'est opérée.

1 mètre cube d'oxygène renfermant 1000 litres, on veut en obtenir un poids égal à $1^{\text{Kg}},430$. Il faut donc que la quantité de bioxyde employée contienne au moins $1^{\text{Kg}},430 \times 3$ ou $4^{\text{Kg}},29$ d'oxygène. Mais, d'après la composition indiquée, $43^{\text{Kg}},87$ de bioxyde contiennent 16 kilogrammes d'oxygène. Il suffira donc de poser la proportion

$$\frac{x}{4,29} = \frac{43,87}{16},$$

d'où

$$x = 11^{\text{Kg}},76.$$

Par suite, le poids de bioxyde à employer sera au moins égal à $11^{\text{Kg}},76$. Ce poids devra être notablement plus élevé, parce qu'on perd les premières parties du gaz qui sont mêlées d'air, et que la décomposition du bioxyde n'est jamais complète.

Le résultat obtenu indique quelles dimensions on doit donner à la cornue et au fourneau.

2°. *Supposons qu'on ait un mélange de chlorure et d'iodure d'argent pesant* 10 *kilogrammes; on fait passer sur ce mélange un courant d'hydrogène et l'on obtient* $6^{\text{Kg}},8$ *d'argent métallique. On demande le poids de chacun des composés mélangés?*

Appelons x le poids du chlorure d'argent, y le poids de l'iodure. On aura

$$(1) \qquad x + y = 10.$$

Maintenant la formule du chlorure d'argent est AgCl, celle de l'iodure d'argent est AgI. L'équivalent de l'argent est 108, ceux du chlore et de l'iode sont 35,43 et 126. Sur $143^{\text{parties}},43$ de chlorure d'argent, il y en a donc 108 d'argent et, sur 1 partie de chlorure d'argent, il y en a $\frac{108}{143,43}$ d'argent. Sur x kilogrammes de chlorure d'argent, la quantité d'argent sera donc $\frac{108}{143,43}x$. De même, sur y kilogrammes d'iodure d'ar-

gent, la quantité d'argent sera $\frac{108}{234}y$. On devra donc avoir

$$(2)\qquad \frac{108}{143,43}x + \frac{108}{234}y = 6,8.$$

En résolvant les équations (1) et (2), on trouve

$$x = 7^{\text{kg}},495 \quad \text{et} \quad y = 2^{\text{kg}},505.$$

3°. *On dissout dans l'eau un mélange de sulfate neutre de potasse et de sulfate neutre de soude pesant* $3^{\text{kg}},267$. *Si l'on traite la liqueur par l'azotate de baryte, on obtient* $4^{\text{kg}},797$ *de sulfate de baryte insoluble. On demande combien la dissolution renfermait de sulfate de soude et de sulfate de potasse.*

Je désigne par x le poids du sulfate de potasse, par y celui du sulfate de soude. On a d'abord

$$(1)\qquad x + y = 3,267.$$

Maintenant, la formule du sulfate de baryte est BaO, SO^3. L'équivalent de l'oxygène est 8, celui du barium est 68,64, celui du soufre est 16. Par conséquent, l'équivalent de la baryte est 76,64, celui de l'acide sulfurique est 40, et celui du sulfate de baryte est 116,64. Sur $116^{\text{parties}},64$ de sulfate de baryte, il y en a 40 d'acide sulfurique; par conséquent, sur $4^{\text{kg}},797$ de sulfate de baryte, il existe une quantité z d'acide sulfurique, qui sera donnée par la proportion

$$\frac{z}{4,797} = \frac{40}{116,64},$$

d'où

$$z = 1^{\text{kg}},645.$$

Cette valeur représente la quantité totale d'acide sulfurique renfermée dans le mélange donné.

La formule du sulfate de potasse est KO, SO^3, celle du sulfate de soude est NaO, SO^3. L'équivalent du potassium étant 39,14 et celui du sodium étant 23, l'équivalent du sulfate de potasse sera 87,14 et celui du sulfate de soude sera 71.

Sur $87^{\text{parties}},14$, le sulfate de potasse renferme 40 parties d'acide sulfurique; sur 1 partie, il en renfermera $\frac{40}{87,14}$. Par suite, la quantité x de sulfate de potasse correspondra à $\frac{40}{87,14}x$ d'acide sulfurique. De même, le poids y de sulfate de soude renfermera $\frac{40}{71}y$ d'acide sulfurique. On aura donc pour seconde équation

$$(2)\qquad \frac{40}{87,14}x + \frac{40}{71}y = z = 1,645.$$

En résolvant les équations (1) et (2), on trouve

$$x = 1^{\text{kg}},87; \quad \text{et} \quad y = 1^{\text{kg}},397.$$

NOTE III.

SUR UN AUTRE MODE D'EXPOSITION DE LA THÉORIE DES LOGARITHMES.

Nous voulons, dans cette Note, donner succinctement une idée de la marche suivie par l'inventeur des logarithmes : Neper, en effet, déduisit leurs propriétés de la *Théorie des Progressions*.

Soient deux progressions croissantes, l'une par quotient, l'autre par différence. Supposons que la première contienne le terme 1, la seconde le terme 0, et admettons que ces deux termes *se correspondent* dans les deux progressions. *On appellera* LOGARITHMES *des nombres inscrits dans la progression par quotient, les nombres qui leur correspondront dans la progression par différence; et les deux progressions considérées constitueront un système de logarithmes.*

Le nombre des termes d'une progression étant toujours limité, si l'on veut que tous les nombres aient des logarithmes, il faut généraliser cette première définition.

On remarque alors qu'on peut *insérer un même nombre de moyens* entre les différents termes de la progression par quotient et entre les différents termes de la progression par différence. On obtiendra deux nouvelles progressions (*Alg.*, 93, 99), satisfaisant à la condition imposée, *c'est-à-dire dans lesquelles les termes* 1 *et* 0 *continueront de se correspondre; et l'on appellera logarithmes des nouveaux nombres introduits dans la progression par quotient, les nouveaux nombres qui leur correspondront dans la progression par différence.*

Mais il faut encore aller plus loin. Quel que soit, en effet, le nombre des moyens insérés, on ne pourra jamais introduire tous les nombres dans la progression par quotient.

Soient q et r les raisons des deux progressions primitives. Ces progressions seront évidemment de la forme :

$$\begin{gathered} \div \ldots q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots q^m : \ldots q^n : \ldots \\ \div \ldots -3r . -2r . -r . 0 . r . 2r . 3r \ldots . mr . \ldots nr \ldots . \end{gathered}$$

Insérons $p-1$ moyens entre les différents termes des deux progressions. La raison de la nouvelle progression par quotient sera $\sqrt[p]{q}$, celle de la nouvelle progression par différence sera $\frac{r}{p}$ (*Alg.*, 93, 99). On voit, d'après cela, que les termes de la nouvelle progression par différence croîtront par degrés aussi nuancés qu'on voudra : il suffira de faire p assez grand. Il en sera de même pour les termes de la nouvelle progression par quotient. La différence de deux termes consécutifs de cette progression sera, en effet, égale à

$$q^{m+\frac{x+1}{p}} - q^{m+\frac{x}{p}},$$

x étant moindre que p. On peut écrire cette différence comme il suit :

$$q^{m+\frac{x}{p}}\left(q^{\frac{1}{p}} - 1\right).$$

Or, on peut toujours prendre p assez grand pour que $\sqrt[p]{q}$ ou $q^{\frac{1}{p}}$ diffère

aussi peu qu'on voudra de l'unité; car, q étant plus grand que 1 et δ représentant une quantité aussi petite que possible, on pourra déterminer p de manière à avoir

$$\sqrt[p]{q} < 1 + \delta \quad \text{ou} \quad (1+\delta)^p > q \quad (\textit{Arith.}, 189, \text{note}).$$

Dès lors l'un des facteurs de la différence considérée pouvant être rendu aussi petit qu'on voudra, il en sera de même de cette différence.

Ceci posé, et les termes des deux progressions pouvant varier aussi lentement qu'on voudra, *on définira le logarithme d'un nombre qui ne fait pas partie de la progression par quotient, en disant que le logarithme de ce nombre tombe entre ceux des nombres de la progression par quotient qui le comprennent.* Dès lors, les logarithmes des nombres qui n'entrent pas dans la progression par quotient, pourront être déterminés avec telle approximation qu'il sera nécessaire, cette approximation ayant pour limite supérieure $\frac{r}{p}$.

Soit, par exemple, un nombre N compris entre les termes consécutifs de la progression par quotient, qui ont pour expressions

$$q^{m+\frac{x}{p}} \quad \text{et} \quad q^{m+\frac{x+1}{p}}.$$

Son logarithme tombera par définition entre les deux logarithmes

$$mr + \frac{rx}{p} \quad \text{et} \quad mr + \frac{r(x+1)}{p},$$

qui diffèrent de $\frac{r}{p}$.

Si $r = 1$ et si $p = 1000000$, on aura donc le logarithme de N à 0,000001 près ou avec six décimales, en prenant pour ce logarithme soit $mr + \frac{rx}{p}$, soit $mr + \frac{r(x+1)}{p}$.

Nous pouvons maintenant établir le théorème fondamental, relatif au logarithme d'un produit.

Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.

Désignons $\sqrt[p]{q}$ par α et $\frac{r}{p}$ par β; les deux nouvelles progressions considérées seront :

$$\begin{array}{l} \div \ldots \alpha^{-m} : \ldots \alpha^{-3} : \alpha^{-2} : \alpha^{-1} : 1 : \alpha : \alpha^2 : \alpha^3 : \ldots \alpha^m : \ldots \alpha^n \ldots \\ \div \ldots -m\beta \ldots : -3\beta . -2\beta . -\beta . 0 . \alpha . 2\beta . 3\beta \ldots m\beta \ldots n\beta \ldots \end{array}$$

Et l'on voit que *l'exposant d'un terme de la progression par quotient est le coefficient du terme correspondant de la progression par différence.*

Si l'on considère alors le produit $\alpha^m \alpha^n$, on aura

$$\log \alpha^m . \alpha^n = \log \alpha^{m+n} = (m+n)\beta = m\beta + n\beta.$$

Mais

$$m\beta = \log \alpha^m \quad \text{et} \quad n\beta = \log \alpha^n.$$

Par suite

$$\log \alpha^m . \alpha^n = \log \alpha^m + \log \alpha^n.$$

Si les nombres donnés n'entrent pas dans la progression par quotient, on raisonnera de cette manière :

Soit un nombre N tombant entre α^m et α^{m+1}, soit un nombre N' tom-

bant entre α^m et α^{m+1}. On aura

$$\alpha^m < N < \alpha^{m+1},$$
$$\alpha^n < N' < \alpha^{n+1}.$$

On en déduit

$$\alpha^{m+n} < NN' < \alpha^{m+n+2},$$

et il en résultera

$$(m+n)\beta < \log NN' < (m+n+2)\beta.$$

Mais on a d'autre part par définition,

$$m\beta < \log N < (m+1)\beta,$$
$$n\beta < \log N' < (n+1)\beta,$$

d'où

$$(m+n)\beta < \log N + \log N' < (m+n+2)\beta.$$

Les deux quantités $\log NN'$ et $\log N + \log N'$ sont donc comprises entre les mêmes limites. Ces limites diffèrent de $2\beta = \frac{2r}{p}$, quantité aussi petite qu'on voudra. Par conséquent, on pourra poser

$$\log NN' = \log N + \log N'.$$

Le théorème énoncé est donc complétement général. On l'étendra facilement au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

Soit maintenant *un quotient* $\frac{a}{b} = q$. On aura

$$a = bq,$$

d'où

$$\log a = \log b + \log q \quad \text{et} \quad \log q = \log a - \log b.$$

Donc *le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.*

Soit *une puissance* a^m. On aura

$$a^m = a.a.a\ldots,$$

d'où

$$\log a^m = \log a + \log a + \log a + \ldots = m \log a.$$

Donc *le logarithme d'une puissance est égal au logarithme du nombre élevé à la puissance, multiplié par l'exposant de cette puissance.*

Enfin, soit *un radical* $\sqrt[m]{a}$. Posons

$$\sqrt[m]{a} = x.$$

Nous en déduirons

$$a = x^m,$$

d'où

$$\log a = m \log x \quad \text{et} \quad \log x = \log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

C'est-à-dire que *le logarithme d'un radical est égal au logarithme du nombre placé sous le radical, divisé par l'indice de ce radical.*

Pour qu'un système de logarithmes soit déterminé complétement, il suffit d'indiquer le nombre qui a un logarithme donné. Si le nombre q a pour logarithme le nombre r, les deux progressions qui définiront le

système de logarithmes seront :

$$\begin{array}{l} \vdots \ldots q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^m : \ldots q^n : \ldots \\ \vdots \ldots -3r, -2r, -r, 0, r, 2r, 3r \ldots mr \ldots nr \ldots \end{array}$$

De quelque manière qu'on introduise alors un nombre dans la progression par quotient, il aura toujours le même logarithme. Ainsi, supposons qu'on puisse l'introduire en insérant $p-1$ moyens, aussi bien qu'en en insérant $p'-1$; je dis qu'il aura, dans les deux cas, le même logarithme. En effet, si l'on insère $p-1$ moyens, la raison de la nouvelle progression sera $\sqrt[p]{q}$; et si l'on en insère *ensuite* $p'-1$, la raison de la seconde progression ainsi obtenue sera $\sqrt[p']{\sqrt[p]{q}}$ ou $\sqrt[pp']{q}$. Ce qui montre que, *pour insérer $pp'-1$ moyens, on peut commencer par en insérer $p-1$, puis après, encore $p'-1$; ou bien, en insérer d'abord $p'-1$, puis après, $p-1$* (*). Or, que le nombre considéré soit introduit lors de la première opération ou lors de la seconde, il fera toujours partie des nombres introduits en insérant directement $pp'-1$ moyens et, par conséquent, *son logarithme restera toujours le même.*

On indique ordinairement le nombre du système qui a pour logarithme l'*unité*, et ce nombre est appelé la *base* du système.

On voit que *le logarithme de* 1 *est toujours* 0.

Il est facile de prouver que *le rapport des logarithmes de deux nombres* N *et* N′ *reste constant, quand on passe d'un système à un autre.*

Supposons qu'on ait, dans le système dont la base est a,

$$\frac{\log_a N}{\log_a N'} = \frac{m}{n}.$$

$\frac{m}{n}$ étant un rapport commensurable. On en déduira

$$n \log_a N = m \log_a N' \quad \text{ou} \quad \log_a N^n = \log_a N'^m;$$

c'est-à-dire

$$N^n = N'^m.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de cette égalité dans le système dont la base est A. Il viendra

$$n \log_A N = m \log_A N',$$

d'où

$$\frac{\log_A N}{\log_A N'} = \frac{m}{n}.$$

Par suite,

$$\frac{\log_a N}{\log_a N'} = \frac{\log_A N}{\log_A N'}.$$

On étendrait facilement la démonstration au cas où le rapport $\frac{m}{n}$ serait incommensurable.

De l'égalité précédente, on déduit

$$\frac{\log_A N}{\log_A N'} = \frac{\log_A N'}{\log_A N} = \text{const.}$$

(*) Le même théorème est également applicable aux progressions par différence.

Donc *on passera du logarithme d'un nombre quelconque pris dans le système dont la base est a, au logarithme de ce nombre pris dans le système dont la base est* A, *en multipliant le premier logarithme par une quantité constante.*

Désignons cette quantité constante par M : on aura, en considérant les bases A et a elles-mêmes,

$$\frac{\log_A A}{\log_a A} = \frac{\log_A a}{\log_a a} = M.$$

Mais

$$\log_A A = \log_a . a = 1.$$

Par suite,

$$M = \frac{1}{\log_a A} = \log_A a;$$

ce qui ramène à une remarque déjà connue (*Alg.*, 254).

Ce qui resterait à dire pour achever cette exposition, est identique aux indications données en Algèbre (nos 256 et suivants).

NOTE IV.

THÉORIE ET USAGE DE LA RÈGLE A CALCUL.

Description de la règle. — Dans tout ce qui va suivre, nous supposons que le lecteur a entre les mains une règle à calcul, soit la règle en bois construite par *M. Gravet-Lenoir*, soit la règle à enveloppe de verre de *M. Léon Lalanne*.

L'instrument se compose d'une partie fixe ou *règle* proprement dite et d'une partie mobile ou *réglette*. La règle présente en son milieu une rainure dans laquelle la réglette, qu'on fait mouvoir à l'aide d'un petit bouton métallique, glisse à frottement doux.

La règle présente, *sur sa face antérieure*, deux *échelles principales*, l'une *au-dessus*, l'autre *au-dessous* de la réglette. L'échelle *supérieure* est formée de deux échelles identiques placées à la suite l'une de l'autre ; l'échelle *inférieure* est la reproduction de chacune d'elles, mais elle a une longueur *double*.

L'une des faces *latérales* de la règle est divisée en centimètres et en millimètres, depuis o jusqu'à 26 centimètres. Cette division se continue dans le fond de la rainure, de 26 à 52 centimètres, ce qu'on aperçoit en enlevant la réglette. La règle peut donc servir à la fois d'instrument de calcul et d'instrument de mesure. Lorsque la longueur à mesurer est comprise entre 26 et 52 centimètres, on fait glisser la réglette vers la droite de manière que la règle plus la partie de la réglette qui la dépasse, équivalent à la longueur donnée. On lit alors la mesure cherchée au fond de la rainure, au point où commence la réglette.

Sur la partie *postérieure* de la règle, est adaptée une table de nombres usuels, qui renferme tous les éléments de la conversion des mesures anciennes en nouvelles.

La réglette porte *deux échelles identiques* à l'échelle *supérieure* de la

règle, de sorte qu'il y a coïncidence parfaite entre les divisions supérieures de la règle et celles de la réglette, quand on fait correspondre exactement le n° 1 de la réglette avec le n° 1 de la règle.

Ceci posé, les divisions des échelles de la règle et de la réglette sont *proportionnelles* aux logarithmes des nombres à partir de 1. On marque, à chaque division obtenue, *non le logarithme, mais le nombre correspondant*. Ainsi, l'intervalle compris entre le log de 1 ou 0 et le log. de 10 ou 1, étant égal à l'unité, les chiffres

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

correspondront à des distances de l'origine 1 égales à

log 2, log 3, log 4, log 5, log 6, log 7, log 8, log 9, log 10,

ou

0,301, 0,477, 0,602, 0,699, 0,778, 0,845, 0,903, 0,954, 1.

L'échelle *supérieure* de la règle se compose, comme nous l'avons dit, de deux parties identiques qui vont toutes les deux de 1 à 10. Comme le logarithme de 20 est égal au logarithme de 10 augmenté du logarithme de 2, que le logarithme de 30 est égal au logarithme de 10 augmenté du logarithme de 3, etc., il vaudrait mieux numéroter les divisions de la seconde partie : 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 (c'est ce qu'a fait M. Léon Lalanne).

Les neuf divisions de chaque moitié de l'échelle supérieure de la règle sont subdivisées chacune en *dix* parties, de manière que les distances des *nouveaux* points de division à l'origine 1 soient *proportionnelles* aux logarithmes des nombres

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5...
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5...
.....				
9,1	9,2	9,3	9,4	9,5...
11	12	13	14	15...
21	22	23	24	25...
.....				
91	92	93	94	95...

Enfin, on a subdivisé les subdivisions obtenues elles-mêmes, en *cinq* parties de 1 à 2, et en *deux* parties de 2 à 5, de manière que les distances des *nouveaux* points de division à l'origine 1 soient *proportionnelles* aux logarithmes des nombres

1,02	1,04	1,06	1,08...
2,05	2,15	2,25	2,35...
.....			
4,05	4,15	4,25	4,35...
10,2	10,4	10,6	10,8....
20,5	21,5	22,5	23,5....
.....			
40,5	41,5	42,5	43,5....

Les échelles de la réglette sont, nous le répétons, identiques à l'échelle supérieure de la règle.

Les divisions *principales* sont indiquées par des traits plus longs que les subdivisions du *premier ordre*, et celles-ci par des traits plus longs que les subdivisions du *second ordre*.

En résumé, on voit que la règle présente comme une *table de logarithmes* dont les nombres varient de *deux centièmes* de 1 à 2, de *cinq centièmes* de 2 à 5, de *un dixième* de 5 à 10, de *deux dixièmes* de 10 à 20, de *cinq dixièmes* de 20 à 50, et de *une unité* de 50 à 100.

Comme la partie décimale d'un logarithme ne dépend que de la valeur absolue des chiffres qui composent le nombre correspondant, on peut dire encore que la table inscrite sur la règle renferme les parties décimales des logarithmes des nombres variant successivement d'*une unité* entre 1 et 100, celles des logarithmes des nombres variant de *deux unités* entre 100 et 200, celles des logarithmes des nombres variant de *cinq unités* entre 200 et 500, et enfin celles des logarithmes des nombres variant de *dix unités* entre 500 et 1000.

Pour les nombres non compris dans la table, il faudra donc *interpoler*, c'est-à-dire suppléer aux divisions qui manquent sur la règle par une estimation à vue, nécessairement *approximative*.

L'échelle *inférieure* de la règle est divisée d'une façon analogue; mais, comme les divisions principales y ont une longueur double, on a pu multiplier les subdivisions de manière à avoir la partie décimale des logarithmes des nombres qui varient de *un centième* entre 1 et 2, de *deux centièmes* entre 2 et 4, de *cinq centièmes* entre 4 et 10.

Lecture d'un nombre sur la règle ou sur la réglette. — On pourra faire cette lecture, sans se préoccuper de la place de la virgule dans le nombre proposé, puisque la caractéristique de son logarithme étant connue d'avance (*Alg.* 256), il ne s'agit que d'en déterminer la partie décimale.

Soit à lire un nombre de *trois* chiffres, tel que 172. Ce nombre tombant entre 100 et 200, se trouve sur la règle. On peut le lire *à volonté* sur la partie de gauche ou sur la partie de droite de l'échelle supérieure. On peut en effet supposer que la partie de gauche succède à une première échelle identique, qui serait formée, par exemple, en faisant glisser la réglette vers la gauche et en faisant coïncider le premier 10 de son échelle supérieure avec l'origine 1 de la règle. 1 ou 10 représentera le premier chiffre 1 de 172, le 7 correspondra à la septième subdivision du premier ordre qui vient après, et le 2 à la première subdivision du second ordre qui succède à celle-ci.

Soit le nombre 27,45. On cherchera à lire sur la règle le nombre 27,45 ou le nombre 2,745. Le chiffre 2 correspondra à la division 2 de la règle, le chiffre 7 à la septième subdivision du premier ordre qui vient après; mais il faudra estimer *à vue* l'intervalle à ajouter pour les chiffres suivants 4 et 5. Si l'on avait à lire 2,75, on s'arrêterait à la première subdivision du second ordre qui suit la septième du premier ordre : on s'arrêtera donc un peu avant, en estimant à vue les $\frac{9}{10}$ *environ* de la subdivision considérée.

Si l'on veut enfin lire le nombre 5478,12, on négligera les deux chiffres décimaux, et l'on cherchera à lire seulement 5,478 ou 54,78 ou 547,8. On prendra le chiffre 5 de la règle, la quatrième subdivision suivante du

premier ordre correspondra au chiffre 4. Quant à l'intervalle à ajouter pour les derniers chiffres 7 et 8, il faudra l'estimer à vue en prenant environ les $\frac{8}{10}$ ou les $\frac{4}{5}$ de la subdivision du second ordre qui vient après celle qu'on a d'abord considérée.

En résumé, on lit *exactement* sur la règle les nombres de un ou de deux chiffres et les nombres de trois chiffres inférieurs à 200. Pour les nombres de trois chiffres supérieurs à 200 ou pour les nombres de quatre chiffres, on est le plus souvent obligé d'estimer approximativement l'intervalle qui correspond au dernier ou aux deux derniers chiffres à droite. On ne peut pas lire sur la règle les nombres qui ont plus de quatre chiffres.

USAGE DE LA RÈGLE.

Multiplication. — Nous savons (*Alg.* 248) que si l'on considère un produit de deux facteurs a et b, on a

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Au moyen des échelles identiques tracées sur la règle et sur la réglette, l'addition des deux logarithmes se fait immédiatement, de sorte qu'on peut lire en même temps sur la règle le produit cherché.

En effet, on n'a qu'à amener *l'indicateur* (*) de la réglette *sous* le premier facteur *lu sur la règle :* le produit se trouve alors *sur la règle, au-dessus* du second facteur *lu sur la réglette*. En opérant ainsi, la distance de l'origine de la règle au point où on lit le produit est bien égale à la somme des logarithmes des deux facteurs.

Une remarque est essentielle. On peut toujours, par le déplacement de la virgule, ramener les deux facteurs à n'avoir qu'un chiffre à leur partie entière. On n'ajoute alors, à l'aide de la règle, que les parties décimales des deux logarithmes. On reconnaîtra que la somme de ces parties est plus petite ou plus grande que l'unité, en voyant si l'expression du produit tombe sur la règle entre 1 et 10 ou, au delà, sur la seconde partie de l'échelle supérieure. On pourra d'après cela déterminer à priori la caractéristique exacte du produit cherché, et l'on pourra alors, sans difficulté, marquer dans ce produit la place de la virgule.

Soit à multiplier 234 *par* 716. On multipliera 2,34 par 7,16. Le produit approximatif 16,8 se trouvant sur la seconde partie de la règle, la somme des parties décimales des logarithmes des deux facteurs est plus grande que 1. Il en résulte que la caractéristique du produit (qui se compose de la somme des caractéristiques des logarithmes des deux facteurs et de la retenue entière fournie par la somme des parties décimales de ces logarithmes), est ici égale à 5 : le produit contient donc *six* chiffres, et ce produit approché sera 168000. Le produit réel est 167544. L'erreur par excès est ici égale à 456. L'erreur relative est, par suite, $\frac{456}{168000}$ ou $\frac{1}{368}$ environ.

Règle générale (Arith. 40), *le produit aura autant de chiffres que les deux facteurs ou autant moins* 1, *suivant qu'il tombera dans la seconde ou dans la première partie de la règle.*

(*) Pour plus de rapidité, nous appelons *indicateur* l'origine ou le n° 1 de la réglette.

Soit encore à multiplier 0,0275 *par* 45,8. Nous chercherons le produit de 2,75 par 4,58. La règle donne 12,6, Ce produit se trouve sur la seconde partie de la règle. La caractéristique du produit sera donc égale à $\bar{2}+1+1$ ou à 0 : il n'aura, par suite, qu'un chiffre à sa partie entière et sera 1,260. Le produit réel est 1,2595. Nous avons trouvé le produit cherché, à l'aide de la règle, à 0,0005 près par excès : cette approximation est tout à fait accidentelle.

Si l'on avait à multiplier 3,78094 par 0,0074583, on multiplierait 3,78 par 7,46.

Si l'on a à multiplier un même nombre par une série de facteurs différents, on place l'indicateur sous le multiplicande constant et l'on cherche sur la règle, au-dessus des facteurs considérés lus sur la réglette, les multiples demandés.

On peut opérer la multiplication, en *renversant* la réglette, c'est-à-dire en l'engageant dans la rainure de manière que le bouton métallique se trouve à gauche de l'opérateur, au lieu d'être à droite.

Il est visible que, dans cette position, si l'on fait correspondre le multiplicateur lu sur la réglette renversée au multiplicande lu sur la règle, le produit répondra sur la règle à l'indicateur ou, sur la réglette, à l'origine de la règle; car l'intervalle qui séparera l'origine de la règle de l'indicateur sera égal au logarithme du multiplicande lu sur la règle de gauche à droite, augmenté du logarithme du multiplicateur lu sur la réglette renversée de droite à gauche.

Cette seconde méthode nous conduit naturellement au meilleur procédé à suivre pour effectuer une division à l'aide de la règle.

Division. — Le dividende représente le produit du diviseur par le quotient. Par conséquent, *la réglette étant supposée renversée*, si l'on amène l'indicateur *sous le dividende lu sur la règle*, le quotient se trouvera *sur la réglette au-dessous du diviseur lu aussi sur la règle ;* ou bien, le quotient se trouvera *sur la règle, au-dessus du diviseur lu sur la réglette*. En effet, dans un cas comme dans l'autre, on retranchera du logarithme du dividende le logarithme du diviseur, c'est-à-dire qu'on satisfera à la condition

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Une remarque est essentielle. On peut toujours, par le déplacement de la virgule, ramener le dividende et le diviseur à n'avoir qu'un chiffre entier. En opérant ainsi, on ne changera rien à la partie décimale des deux logarithmes; on rendra seulement égale à 0 la caractéristique de chacun d'eux, de sorte qu'on ne retranchera à l'aide de la règle que leurs parties décimales. Ceci posé, si le diviseur modifié est plus petit que le dividende modifié, la soustraction sera directement possible, et la caractéristique du quotient sera réellement égale à la différence des caractéristiques du dividende et du diviseur. *Dans ce cas, on trouve le quotient sur la règle, à gauche du dividende.*

Si, au contraire, le diviseur modifié surpasse le dividende modifié (pour s'en assurer, il suffit de comparer leurs premiers chiffres significatifs sur la gauche), *on ne pourra lire le diviseur sur la réglette qu'au delà de l'origine de la règle*. Cette circonstance indiquera que la soustraction des parties décimales des deux logarithmes n'est pas directement possible, et la caractérisque du quotient sera réellement égale à la différence des ca-

ractéristiques du dividende et du diviseur, moins 1. Pour rendre la soustraction possible, on augmentera d'une unité la partie décimale du logarithme du dividende, *en portant l'indicateur sous le dividende lu sur la seconde partie de la règle ;* et, au-dessus du diviseur lu sur la réglette, on trouvera le quotient (ou le nombre qui correspond, quant aux chiffres qui le composent, à la partie décimale du logarithme du quotient). *Dans ce cas, on voit que le quotient se trouve sur la première partie de la règle, à droite du dividende lu sur cette même partie.*

Soit à diviser 357 par 829. Nous diviserons 3,57 par 8,29. Le premier chiffre à gauche du diviseur l'emporte sur le premier chiffre à gauche du dividende. Il faudra donc lire le dividende sur la seconde partie de la règle, et amener l'indicateur au-dessous de lui. On trouvera alors 432 pour quotient. La caractéristique du logarithme du quotient est, d'après ce qui précède, égale à $2 - 2 - 1$ ou à $\bar{1}$; le premier chiffre significatif du quotient est, par suite, un chiffre de dixièmes, c'est-à-dire que ce quotient est 0,432. Le quotient réel est 0,431. L'erreur est de 0,001 par excès, l'erreur relative est $\frac{1}{432}$.

Soit encore à diviser 9,8088 par 0,994. On divisera 9,81 par 9,94. Le premier chiffre significatif à gauche du dividende est égal au premier chiffre significatif à gauche du diviseur; mais le chiffre suivant du diviseur l'emporte sur le chiffre suivant du dividende : il faudra donc chercher encore le dividende sur la seconde partie de la règle. On trouvera 985 pour quotient. La caractéristique réelle du logarithme de ce quotient est $0 - \bar{1} - 1$ ou 0, c'est-à-dire qu'il n'a qu'un chiffre à sa partie entière : il est, par suite, égal à 9,85. Le véritable quotient est 9,86.

Si l'on ne voulait pas renverser la réglette, on amènerait l'indicateur sous le diviseur lu sur la règle et on lirait sur la réglette le quotient au-dessous du dividende.

Dans une position quelconque de la réglette *non renversée,* vers la droite, le nombre de la règle placé au-dessus de l'indicateur indique *le rapport constant* des nombres qui se correspondent deux à deux sur la règle et sur la réglette; car le logarithme du nombre lu au-dessus de l'indicateur, augmenté du logarithme du nombre pris comme diviseur sur la réglette, reproduit le logarithme du nombre pris comme dividende sur la règle. *Si l'on a un diviseur constant et des dividendes variables,* il vaut donc mieux ne pas renverser la réglette. On amène l'indicateur sous le diviseur constant et, au-dessous des dividendes successifs lus sur la règle, on lit évidemment sur la réglette les quotients correspondants. Au contraire, il faut renverser la réglette, *si l'on a un dividende constant et des diviseurs variables.* On amène l'indicateur sous le dividende constant et, au-dessus des diviseurs successifs lus sur la réglette renversée, on lit sur la règle les quotients correspondants.

Remarque. — On peut, *à l'aide d'une seule lecture,* effectuer une multiplication et une division, c'est-à-dire multiplier un nombre donné par un rapport donné. Soit

$$x = \frac{a \times b}{c}.$$

On amènera le diviseur c lu sur la réglette au-dessous du facteur a lu sur la règle : puis, au-dessus du facteur b lu sur la réglette, on trouvera x.

En effet, le logarithme de x est égal à la différence $\log a - \log c$, augmenté de $\log b$. Si la réglette sort *vers la gauche*, la différence $\log a - \log c$ est négative.

Si l'on voulait opérer en *renversant* la réglette, on amènerait le facteur b lu sur la réglette au-dessous du facteur a lu sur la règle; puis, on trouverait x sur la règle au-dessus du diviseur c lu sur la réglette. En effet, on doit avoir

$$\log a + \log b = \log c + \log x.$$

Si le diviseur c ne correspond dans ce cas à aucun nombre de la règle, c'est-à-dire s'il est situé sur la partie de la réglette qui sort *vers la gauche*, on opère en lisant le facteur a sur la seconde partie de la règle, à partir du premier 10. Le facteur b est toujours lu sur la première partie de la réglette renversée. Quant au diviseur c, on le lit sur la seconde partie de la réglette renversée, à partir du premier 10, et x est le nombre correspondant sur la première partie de la règle.

Carrés et racines carrées. — Puisqu'on a

$$\log a^2 = 2 \log a,$$

il est évident que si on lit, sur l'échelle *inférieure* de la règle, le nombre a, on trouvera au-dessus, sur l'échelle *inférieure* de la réglette, identique à son échelle supérieure, le carré a^2 de ce nombre. Car les divisions de l'échelle inférieure de la règle ayant une longueur *double*, les nombres qui correspondent sur la réglette aux nombres inscrits sur la règle ont en réalité des logarithmes deux fois plus grands. *Inversement*, la racine carrée de a^2 étant a, si on lit le nombre a^2 sur l'échelle inférieure de la réglette, on lira au-dessous, sur la règle, sa racine a.

Ainsi, *en faisant correspondre l'indicateur à l'origine de la règle, tous les nombres de l'échelle inférieure de la règle auront pour carrés les nombres correspondants de l'échelle inférieure de la réglette; et réciproquement, les nombres de l'échelle inférieure de la réglette auront pour racines carrées les nombres correspondants de l'échelle inférieure de la règle.*

En se reportant à ce que nous avons dit en parlant de la multiplication, il est évident d'ailleurs que la caractéristique du logarithme d'un carré est égale *au double* ou *au double plus un* de la caractéristique du logarithme du nombre élevé au carré, suivant que le carré obtenu, lu sur l'échelle inférieure de la réglette, tombe *avant* ou *après* le premier 10 de cette réglette. On saura donc toujours placer convenablement la virgule dans le résultat.

Cherchons le carré de 0,07871. On cherchera 7,87 sur l'échelle inférieure de la règle, et le nombre correspondant sur la réglette sera 62. Comme ce résultat tombe sur la seconde partie de la réglette, la caractéristique du logarithme du carré demandé sera $\bar{2} \times 2 + 1$ ou $\bar{3}$. Ce carré sera donc 0,00620. Le véritable carré est 0,00619,52641.

S'il s'agit d'extraire une racine carrée, il n'y a aucune difficulté, parce qu'on sait toujours quel doit être le rang du premier chiffre significatif à gauche de la racine. Il faut seulement remarquer qu'on doit toujours modifier par la pensée le nombre dont on cherche la racine, de manière qu'il tombe entre 1 et 100, puisque l'échelle inférieure de la règle est *simple* et ne va que de 1 à 10. De plus, le diviseur ou le multiplicateur employé doit toujours être une puissance *paire* de 10 (*Arith.*, 209).

Cherchons la racine carrée de 567,823. On lit le nombre 5,68 sur la réglette. On trouve au-dessous, sur la règle, le nombre 2,382. La racine carrée demandée sera donc 23,82. On tombe ici, par exception, sur la racine exacte.

Pour calculer l'expression

$$x = \sqrt{ab},$$

on amène l'indicateur sous le facteur a lu sur l'échelle *supérieure* de la règle, on lit le facteur b sur l'échelle inférieure de la réglette et, au-dessous de ce facteur, sur l'échelle inférieure de la règle, on trouve x. En effet, x correspond ainsi au produit ab lu sur l'échelle supérieure de la règle, identique à l'échelle inférieure de la réglette.

Pour calculer l'expression

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

on peut amener le diviseur b lu sur la réglette au-dessous du dividende a lu sur la règle. Au-dessus de l'indicateur, on trouve alors le quotient et, au-dessous de ce même indicateur, la racine carrée du quotient ou x.

Cubes et racines cubiques. — On a

$$\log a^3 = 3 \log a.$$

Par conséquent, pour avoir le cube de a, on amène l'indicateur au-dessus de ce nombre lu sur l'échelle *inférieure* de la règle et, au-dessus de ce même nombre lu alors sur la réglette, on trouve évidemment son cube lu sur l'échelle supérieure de la règle. En effet, on ajoute ainsi le logarithme de a^2, ou $2 \log a$ au logarithme de a. Si le cube demandé tombe au delà de la seconde partie de l'échelle supérieure de la règle, on peut remplacer l'indicateur par le premier 10 de la réglette, et lire le résultat sur la règle, au-dessus du nombre donné lu sur la première partie de la réglette.

On peut aussi opérer en *renversant* la réglette. On fait coïncider, dans ce cas, la division qui correspond au nombre a lu sur la réglette, avec celle qui correspond au même nombre lu sur l'échelle *inférieure* de la règle. Le cube a^3 est alors le nombre qui correspond, sur la réglette, à l'origine de la règle ou, sur la règle, à l'indicateur. Il faut se rappeler qu'on peut supposer la règle continuée à droite, la réglette renversée continuée à gauche.

Cette remarque nous conduit immédiatement à la meilleure manière d'opérer pour obtenir la racine cubique d'un nombre. Après avoir retourné la réglette, on fait correspondre le nombre donné, lu sur la réglette, à l'origine de la règle ou le nombre donné, lu sur l'échelle supérieure de la règle, à l'indicateur. On cherche ensuite les traits qui coïncident ou semblent le mieux coïncider, sur la réglette et sur l'échelle inférieure de la règle : ces traits, *s'ils correspondent à des nombres égaux*, indiquent la racine cubique demandée.

On voit que les nombres dont on veut obtenir la racine cubique doivent être compris entre 1 et 1000, puisque cette racine, lue sur l'échelle *inférieure* de la règle, doit être comprise entre 1 et 10.

D'après ce qui précède, suivant qu'on lira le cube d'un nombre *sur la première partie de la réglette, sur la seconde ou au delà* (auquel cas on

pourra prendre pour indicateur le premier 10 de la réglette renversée et lire le cube cherché à droite du premier 10 de la règle, considéré comme origine); la caractéristique du logarithme de ce cube sera égale *au triple* de la caractéristique du logarithme du nombre donné, ou *à ce triple plus* 1, ou *à ce triple plus* 2. On saura donc toujours placer convenablement la virgule dans le résultat obtenu.

Cherchons le cube de 0,08457. Nous lirons 8,46 sur l'échelle inférieure de la règle, et nous amènerons le premier 10 de la réglette au-dessus de ce nombre. Nous lirons ce même nombre sur la réglette, à gauche de ce point, et nous trouverons au-dessus, sur la règle, le cube cherché 603. La caractéristique du logarithme de ce cube est ici égale à $\bar{2} \times 3 + 2$, c'est-à-dire à $\bar{4}$. Le cube demandé sera donc 0,000603. Le véritable cube est 0,000604850974293.

S'il s'agit d'extraire une racine cubique, il n'y a aucune difficulté, parce qu'on sait toujours quel doit être le rang du premier chiffre significatif à gauche de la racine.

Cherchons, par exemple, la racine cubique de 0,04. Nous chercherons la racine de 0,040 ou celle de 40. Nous placerons le 1 de la réglette renversée sous le 4 de la seconde partie de l'échelle supérieure de la règle, et nous chercherons les traits qui, en coïncidant, indiquent le même nombre sur la réglette et sur l'échelle inférieure de la règle. *La coïncidence ne peut avoir lieu qu'entre les deux nombres* 3,4 *de la réglette et de la règle.* On trouve environ 3,42. Le premier chiffre de la racine devant être un chiffre de dixièmes, cette racine sera 0,342.

Logarithmes. — On peut aussi, à l'aide de la règle, déterminer le logarithme d'un nombre donné.

L'échelle inférieure de la règle donne les logarithmes des nombres de 1 à 10, l'*unité adoptée étant la longueur même de cette échelle.* Par suite, pour avoir le logarithme d'un nombre lu sur l'échelle, il suffit de chercher à quelle fraction de la longueur de l'échelle il correspond. A cet effet, la face *postérieure* de la réglette est divisée, sur une longueur égale à l'échelle inférieure de la règle, en 500 parties égales, chaque intervalle représentant $\frac{2}{1000}$ de la longueur totale considérée comme unité. Seulement, le sens de la graduation est *de droite à gauche.* Il en résulte que, lorsqu'on fait coïncider la dernière division (1000) du revers de la réglette avec le nombre dont on veut le logarithme, la réglette sort *vers la droite* d'une longueur précisément égale au logarithme cherché. On lit alors ce logarithme sur la réglette retournée, au point qui correspond au 10 de l'échelle inférieure de la règle.

Ainsi, on demande le logarithme de 0,0435. On cherche 4,35 sur l'échelle inférieure de la règle, et l'on fait coïncider le 1000 du revers de la réglette avec ce nombre. Le 10 de l'échelle inférieure de la règle correspond alors à la 639e division de la réglette. Par suite, le logarithme demandé est $\bar{2}$,639. Le véritable logarithme est $\bar{2}$,63849.

On peut inversement trouver, à l'aide de cette disposition, le nombre qui correspond à un logarithme donné.

En résumé, on voit que la règle est un instrument ingénieux avec lequel on peut effectuer rapidement les calculs qui n'exigent pas une très-grande exactitude. L'approximation obtenue dépend de la grandeur de la

règle qui, en permettant de multiplier les divisions, permet aussi de lire les nombres plus sûrement. Dans certains cas, une règle de grandes dimensions, placée à demeure dans un bureau de calculateurs, serait appelée à rendre de très-bons services. De plus, cet appareil peut facilement être modifié suivant les besoins, de manière à s'appliquer à des opérations spéciales. Sur ce sujet, nous renverrons à l'excellente Notice publiée par M. Léon Lalanne.

Avec les petites règles ordinaires, on peut compter en général sur une approximation *relative* au moins égale à $\frac{1}{300}$. Mais il faut beaucoup s'exercer, et il est nécessaire d'avoir l'habitude de sa règle, comme un musicien a l'habitude de son instrument. Dans tous les cas, ceux-là seuls qui sauraient calculer sans le secours de la règle, pourront s'en servir utilement.

FIN DU PREMIER VOLUME.

ÉCOLE CENTRALE LYONNAISE