Monsieur Mathey,
rue Vaubecour, 7,
Lyon

COURS

DE

MATHÉMATIQUES.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage (tome III) a été fait à Paris dans le cours du mois de décembre 1862, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers Etats avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces Exemplaires.

Mallet-Bachelier

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,

RUE DE SEINE-SAINT-GERMAIN, 10, PRÈS L'INSTITUT.

759

CENTRALE LYONNAISE
ÉCOLE TECHNIQUE

COURS

DE

MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

ET DE TOUS LES ÉLÈVES QUI SE DESTINENT AUX ÉCOLES
DU GOUVERNEMENT.

PAR CHARLES DE COMBEROUSSE,

INGÉNIEUR CIVIL,

Examinateur d'Admission à l'École Centrale des Arts et Manufactures, Répétiteur de Mécanique appliquée à la même École, Professeur de Mathématiques et de Mécanique au Collége Chaptal.

TOME TROISIÈME.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE ET DANS L'ESPACE.
ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

AVEC

ATLAS DE 53 PLANCHES CONTENANT 274 FIGURES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

Quai des Augustins, 55.

1862

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

AVERTISSEMENT.

Ce volume comprend *la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions* et toute la partie de la *Géométrie descriptive* exigée pour l'admission à l'École Centrale.

Le Lecteur, en parcourant les Programmes d'Examen des différentes écoles du Gouvernement, et en les comparant à nos Tables des Matières, verra que nous avons traité avec développement toutes les questions mentionnées dans ces Programmes (*), sans nous astreindre pour cela à négliger d'autres questions intéressantes qui peuvent acquérir dans certains cas une utilité relative.

Comme nous l'annoncions dans la Préface du premier volume de ce Cours publié en 1860, nous pensions le compléter par les notions de Physique et de Mécanique demandées aux Candidats à l'École Centrale. Nous y avons renoncé.

L'addition de ce travail, en partie terminé, aurait imposé au volume que nous publions actuellement des proportions inusitées; elle aurait modifié le caractère

(*) Nous n'avons laissé de côté que les applications de la Géométrie élémentaire à l'*Arpentage* et au *Levé des Plans*. Ces applications, en effet, comme nous l'avons dit déjà (tome II), ne sont pas exigées pour l'admission à l'École Centrale, parce qu'elles font partie du Cours de Travaux publics professé à cette École. Elles sont néanmoins très-utiles à connaître, et les élèves studieux feront bien de consulter sur ce sujet l'excellent *Traité* de MM. Briot et Vacquant.

exclusivement mathématique que nous avons désiré conserver à notre ouvrage, convaincu que nous sommes de plus en plus que les applications pratiques doivent reposer avant tout sur une large base théorique.

Plus tard, nous espérons pouvoir rassembler et publier les applications trop spéciales que notre cadre nous a forcé de négliger. Les *Notions de Physique et de Mécanique* trouveront alors naturellement leur place dans ce Complément.

Les Candidats à l'École Centrale pourront d'ailleurs à cet égard consulter avec grand fruit le premier volume du *Cours de Physique de l'École Polytechnique*, par M. Jamin.

En terminant, nous appellerons l'attention du Lecteur sur le chapitre X du livre III de la Géométrie analytique.

Notre excellent collègue et ami M. Eugène Rouché, dont le nom est bien connu de tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques, a bien voulu nous permettre de profiter d'un travail manuscrit qu'il a rédigé sur le système *des Coordonnées polaires*. Le chapitre cité lui appartient donc en propre, et nous le prions d'accepter ici le témoignage de toute notre reconnaissance.

Les démonstrations de M. Rouché relatives aux tangentes et aux asymptotes des courbes en coordonnées polaires simplifient beaucoup la discussion de ces courbes; elles lèvent des ambiguïtés souvent délicates, et elles méritent de passer dans l'enseignement.

La manière élégante dont notre collègue trouve par les coordonnées polaires plusieurs théorèmes auxquels les coordonnées rectilignes ne conduisent que pénible-

ment, doit aussi être remarquée. Elle prouve qu'on aurait tort de s'habituer à l'emploi trop exclusif du système rectiligne. On sait au reste toute l'importance que peut acquérir le système polaire en Mécanique. (*Étude des Mouvements de rotation.*)

TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (*).

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

NOTIONS FONDAMENTALES.

CHAPITRE PREMIER. — CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Position d'un point, système de coordonnées rectiligne, page 2. — Système de coordonnées polaire, 3. — *Il y a une infinité de systèmes de coordonnées,* 4. — Équation d'une ligne, 4. — Lieu géométrique d'une équation, 5. — Construction des équations, 5. — *Système de coordonnées naturel,* 6.

CHAPITRE II. — THÉORIE DE L'HOMOGÉNÉITÉ ET CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

De l'homogénéité : Démonstration de la loi de l'homogénéité, remarques à ce sujet, 7. — Fonction homogène, degré d'une expression fractionnaire ou d'un radical, 8. — Cas où l'une des grandeurs qui entrent dans la question a été prise pour unité, 9.

Construction des expressions algébriques : Ce qu'on entend par construire une formule, 10. — Construction des formules rationnelles du premier degré, 11. — Construction des formules irrationnelles du second degré, 12. — *Applications :* Construction des racines d'une équation du second degré, 14. — Construction des racines d'une équation bicarrée, 15. — Problème de Pappus, 15.

CHAPITRE III. — THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

Points de vue sous lesquels on doit considérer cette transformation, 18. — *Déplacement de l'origine,* 19. — *Changement de direction des axes,* 20. — Cas particuliers, 21. — Formules générales, 22.

Transformation relative aux coordonnées polaires, 23.

(*) La partie de la Géométrie analytique exigée des candidats à l'École Centrale est renfermée dans le premier, le troisième et le quatrième Livre; il est néanmoins de l'intérêt bien entendu des élèves de voir toute la Géométrie analytique.

CHAPITRE IV. — Théorie de la Ligne droite.

Distance de deux points, 24. — Coordonnées du point milieu d'une droite finie, 25.

Équation de la ligne droite, 25. — *Toute équation du premier degré à deux variables représente une droite*, 26. — *Degré d'une ligne*, 28.

Interprétation des coefficients de l'équation de la droite, 29. — Construction d'une pareille équation, 30. — Formes particulières de l'équation de la droite, 31. — Équation de la ligne droite en coordonnées polaires, 32.

Questions relatives à la ligne droite : Équation générale des droites qui passent par un point donné, 33. — Équation de la droite déterminée par deux points donnés, 34. — Point d'intersection de deux droites données, 35; Condition pour que trois droites soient concourantes, 36. — Équation générale des droites qui passent par le point de concours de deux droites données, 36; Remarques à ce sujet, 37. — Angle de deux droites, 38; Remarques à ce sujet, 39. — Équation et longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une droite donnée, 40; Remarques à ce sujet, 41. — Équation de la bissectrice de l'angle de deux droites, 42.

Exercices, 43.

Remarque sur la recherche des lieux géométriques par l'analyse, 48.

CHAPITRE V. — Théorie de la Circonférence de Cercle.

Équation de la circonférence en coordonnées rectangulaires; conditions pour qu'une équation représente une circonférence en coordonnées rectangulaires, 49. — Équation de la circonférence en coordonnées obliques; conditions pour qu'une équation représente une circonférence en coordonnées obliques, 50. — Construction d'une pareille équation, 51. — Équation polaire de la circonférence, 52.

Questions relatives à la circonférence : Propriétés élémentaires vérifiées par l'analyse, 53. — Tangente, 54. — Normale, 55. — Sécantes ayant un point commun, 55.

Exercices, 56.

CHAPITRE VI. — Exemples choisis.

Ellipse, 62. — Hyperbole, 64. — Parabole, 66. — Lieu des points dont les distances à un point fixe et à une droite fixe sont constamment proportionnelles, 67. — Cissoïde, 68. — Cycloïde, 70. — Spirale d'archimède, 72.

Questions proposées, 73.

LIVRE DEUXIÈME (*).

THÉORIES GÉNÉRALES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

CHAPITRE PREMIER. — Théorie des Tangentes.

Équation générale de la tangente à une courbe $y = f(x)$ ou $F(x, y) = 0$, 75. — Tangente à l'origine, 77. — *Équation de la normale*, 78. — Tangente passant par un point extérieur ou parallèle à une direction donnée, 78. — Équation générale des tangentes à une courbe donnée, 79. — Tangente commune à deux courbes données, 80. — *Concavité et convexité des courbes*, 82. — *Points maximums et minimums*, 83. — *Points singuliers :* Points d'inflexion, points multiples, points de rebroussement, points isolés, points d'arrêt, points saillants, 85.

CHAPITRE II. — Théorie des Asymptotes.

Définition, 86. — Première méthode de détermination, 86. — Seconde méthode, 88. — Troisième méthode, 89. — Recherche des asymptotes parallèles aux axes coordonnés, 90. — Remarques à ce sujet, 91.

CHAPITRE III. — Théorie des Centres.

Définition, 92. — Lorsqu'une courbe a plus d'un centre, elle en a une infinité, 92. — Condition pour qu'une équation algébrique irréductible représente une courbe à centre, 93. — Méthode pour déterminer le centre d'une courbe algébrique, 93. — Cas d'une courbe transcendante, 94.

CHAPITRE IV. — Théorie des Diamètres.

Définition, 94. — Méthode générale de détermination, 94. — Axes d'une courbe, 95. — Recherche spéciale des diamètres rectilignes, 95. — Cas où une courbe a pour axe l'une des bissectrices des angles des axes coordonnés, 96.

CHAPITRE V. — Exemples de discussion générale d'Équations a deux variables, dans le cas des coordonnées rectilignes.

Lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes demeure constant, 96. — Conchoïde, 100. — Folium de Descartes, 102. — Sinusoïde, 104. — Tangentoïde, 105. — Discussion de la courbe $y = e^{\frac{1}{x}}$, 106.

Questions proposées, 108.

(*) Les matières contenues dans ce Livre ne sont pas exigées des candidats à l'École Centrale. Il faut en dire autant des matières traitées dans le cinquième et dans le sixième Livre.

LIVRE TROISIÈME.

ÉTUDE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER. — Discussion de l'Équation générale du second degré a deux variables.

Résolution de l'équation et séparation des différents cas, 110. — *Genre ellipse*, 111. — *Genre hyperbole*, 113. — *Genre parabole*, 116. — Résumé, 117.

Du centre, des diamètres et des axes dans les courbes du second degré : Du centre, 118. — Des diamètres, 119. — Tangente à l'extrémité d'un diamètre, 120. — Diamètres conjugués, 121. — Des axes, 121. — Résumé, 122.

Des asymptotes dans les courbes du second degré, 122.

Cas particuliers de l'équation du second degré : Cas où il manque l'un des carrés des variables, 124. — Cas où l'on a à la fois $A = 0$ et $B = 0$, 127.

CHAPITRE II. — Transformation des Coordonnées appliquée aux courbes du second degré.

Réduction de l'équation dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, 129. — *Réduction de l'équation dans le cas de la parabole*, 134.

CHAPITRE III. — Théorie générale des Foyers et des Directrices.

Définitions, 138. — *Équation focale* des courbes du second ordre, 139. — Foyers et directrices dans l'*ellipse*, 139. — Foyers et directrices dans l'*hyperbole*, 142. — Foyer et directrice dans la *parabole*, 143.

CHAPITRE IV. — Propriétés de l'Ellipse.

Rappel des notions précédentes, 144. — Construction de la courbe, 147.

Tangente et normale, 149. — La normale en un point de l'ellipse est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs de ce point, 151. — Conséquences, 152. — Tangente passant par un point extérieur, 152. — Tangente parallèle à une direction donnée, 154.

Diamètres, cordes supplémentaires, diamètres conjugués : Équation des diamètres, 155. — Diamètres conjugués, 156. — Cordes supplémentaires, 157. — Variation de l'angle de deux diamètres conjugués, 158. — Diamètres conjugués égaux, 160. — *Théorèmes d'Apollonius*, 161.

Ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués, 163.

Quadrature des aires planes, 165. — Application à l'ellipse, 166.

De l'ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle, conséquences, 168.

Questions diverses, 170. — Étant donnés un système de diamètres conjugués et leur angle, trouver les axes de l'ellipse, 173. — Étant donné un arc d'ellipse, retrouver les éléments de la courbe, 174.

CHAPITRE V. — PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE.

Rappel des notions précédentes, 175. — *Hyperboles conjuguées*, 178. — Construction de la courbe, 179.

Tangente et normale, 180. — La tangente en un point de la courbe est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs de ce point, 182. — Conséquences, 183. — Tangente passant par un point extérieur, 184. — Tangente parallèle à une direction donnée, 186.

Diamètres, cordes supplémentaires, diamètres conjugués : Équation des diamètres, 188. — Diamètres conjugués, 189. — Cordes supplémentaires, 190. — Variation de l'angle de deux diamètres conjugués, 190.

Hyperbole rapportée à un système de diamètres conjugués, 192. — Remarques au sujet de l'équation obtenue, 193. — *Théorèmes d'Apollonius*, 194.

Asymptotes, 196. — *Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes*, conséquences, 197. — Construction de la tangente en un point de la courbe, 198. — *Propriétés segmentaires de l'hyperbole et de ses asymptotes*, 199.

Quadrature de l'hyperbole, 200.

Questions diverses, 201. — Étant donné un arc d'hyperbole, retrouver les éléments de la courbe, 204.

CHAPITRE VI. — PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE.

Rappel des notions précédentes, 205. — Parabole considérée comme limite d'une ellipse dont l'un des foyers et le sommet correspondant restent fixes, tandis que le grand axe croît indéfiniment, 207. — *Équation* $y^2 = 2px + qx^2$ réunissant *les trois courbes du second degré*, 208. — Construction de la parabole, 208.

Tangente et normale, 209. — Propriétés de la sous-tangente et la sous-normale, 210. — Construction de la tangente en un point de la courbe, conséquences, 211. — Tangente passant par un point extérieur, 212. — Tangente parallèle à une direction donnée, 213.

Diamètres, 214. — *Équation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente qui lui correspond*, 215.

Aire d'un segment parabolique, 216.

Questions diverses, 217. — Étant donné un arc de parabole, retrouver les éléments de la courbe, 221.

CHAPITRE VII. — DES SECTIONS CONIQUES ET CYLINDRIQUES.

Des sections planes d'une surface conique de révolution, 221. — Des sections planes d'une surface cylindrique de révolution, 225. — Des sections planes faites dans un cône circulaire oblique, perpendiculairement à son plan principal, 226. — Section anti-parallèle du cône oblique, 227. — Des sections planes faites dans un cylindre circulaire oblique, perpendiculairement à son plan principal, 229.

CHAPITRE VIII. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES RELATIVES AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Pôle et polaire dans les courbes du second degré, 230. — Construction de la tangente, 236. — Théorème de Pascal, 237. — Théorème de Brianchon, 238.

Du nombre de conditions nécessaires pour déterminer une courbe quelconque, 239. — Application aux courbes du second degré, 240. — Équation d'une conique passant par cinq points donnés, 241. — Construction d'une pareille conique, 242.

Exprimer qu'un point est centre, sommet ou foyer d'une conique, 243. — Exprimer qu'une droite est tangente à une conique, qu'elle en est un diamètre, un axe, une directrice ou une asymptote, 244. — Lieux décrits par les points remarquables d'une conique qui n'est pas complétement déterminée, exemples, 245. — Équation générale des coniques passant par quatre points donnés, 247.

Intersection de deux courbes du second degré, 248.

Construction des racines réelles des équations à une inconnue, 249. — Application aux équations du quatrième et du troisième degré, 250. — Application aux équations transcendantes, 252.

CHAPITRE IX. — DES COURBES SEMBLABLES.

Définitions, 252. — Toutes les courbes de même espèce dont l'équation la plus simple ne contient qu'un seul paramètre, sont des courbes semblables, 253.

Équation générale des courbes homothétiques à une courbe donnée, 253. — *Équation la plus générale des courbes semblables à une courbe donnée*, 254.

Similitude des courbes du second degré, 254. — Condition générale de similitude, 255. — Cas où les deux coniques considérées sont à la fois semblables et semblablement placées, 256.

CHAPITRE X. — DES COORDONNÉES POLAIRES.

Variations des coordonnées ρ *et* ω, 257. — *Passage des coordonnées rectilignes aux coordonnées polaires :* application à la ligne droite, 260. — Application à la circonférence, 261. — Condition pour que trois points soient sur une même circonférence passant par le pôle, 261.

Équations polaires des sections coniques, 262.

Des tangentes, 264. — Équation générale, 265. — Application à la parabole, 265. — Points maximums et minimums, 266. — Angle de la tangente avec le prolongement du rayon vecteur, 267. — Sous-tangente et sous-normale, 267. — Tangentes au pôle, 268. — Applications, 268.

Des asymptotes, équation générale, 270. — Application aux sections coniques, 271. — Remarque pratique, 273.

Discussion d'une courbe, 274.

Application des coordonnées polaires à la démonstration de quelques théorèmes, 278.

Questions proposées, 281.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE QUATRIÈME.

NOTIONS FONDAMENTALES DE GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER. — PRÉLIMINAIRES.

Représentation du point, 286. — *Représentation des surfaces*, 288. — *Représentation des lignes*, 290.

Relation des trois cosinus, 291. — Angle de deux droites, 291.

CHAPITRE II. — TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

Déplacement de l'origine, changement de direction des axes, 292. — *Formules d'Euler*, 293. — *Sections planes d'une surface*, 294.

Passage du système rectiligne au système polaire, 295.

Distance de deux points, 296. — *Point milieu d'une droite*, 297.

CHAPITRE III. — DE LA LIGNE DROITE.

Équations de la ligne droite, 298. — Équations générales des droites passant par un point donné, 299. — Équations d'une droite passant par un point donné, 300. — Angles d'une droite avec trois axes coordonnés rectangulaires, 300. — Angle de deux droites données par leurs équations, 301. — Point d'intersection de deux droites données, 302; Condition pour que deux droites soient dans un même plan, 303. — Distance d'une droite à l'origine des coordonnées, en coordonnées rectangulaires, 303. — Distance d'un point donné à une droite donnée, 304.

CHAPITRE IV. — DU PLAN.

Équation du plan, 305. — *Toute équation du premier degré à trois variables représente un plan*, 307. — Équation générale des plans passant par un point donné, 309. — Condition de parallélisme de deux plans, 309. — Équation du plan qui passe par trois points donnés, 310. — Distance de l'origine à un plan, angles de la normale au plan avec les trois axes supposés rectangulaires, 310. — Angle de deux plans, 311. — Condition de perpendicularité de deux plans, 312. — Distance d'un point à un plan, 312. — Intersection de deux plans, 313.

CHAPITRE V. — DU PLAN ET DE LA LIGNE DROITE.

Équation du plan passant par un point et une droite donnés, 313. — Intersection d'une droite et d'un plan; conditions pour qu'une droite soit parallèle à un plan ou pour qu'elle soit située dans ce plan, 314.

— Équation du plan mené par une droite donnée parallèlement à une droite donnée, 315. — Droite et plan perpendiculaires, 316. — Angle d'une droite et d'un plan, 316. — Plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan, 317.

Questions proposées, 319.

LIVRE CINQUIÈME.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER. — DES DIFFÉRENTES CLASSES DE SURFACES.

Notions préliminaires, 320. — *Des surfaces cylindriques*, équation générale, 322. — Reconnaître si une équation donnée représente une surface cylindrique, 323. — *Des surfaces coniques*, équation générale, 324. — Reconnaître si une équation donnée représente une surface conique, 325. — *Toute équation homogène à trois variables représente une surface conique*, 326. — Cas où la directrice de la surface est sa trace sur l'un des plans coordonnés, 326. — *Des surfaces conoïdes*, équation générale dans le cas le plus simple, 328. — Cas où la seconde directrice de la surface est sa trace sur un plan parallèle à l'un des deux plans coordonnés joints au plan directeur, 329. — *Des surfaces de révolution*, équation générale, 330. — Cas où l'axe de la surface se confond avec l'un des axes coordonnés, 331. — Cas où la surface a, en outre, pour directrice sa trace sur l'un des plans coordonnés, 332. — Exemples, 332.

CHAPITRE II. — DU PLAN TANGENT.

Équations de la tangente à une courbe, 334. — *Équation générale du plan tangent en un point d'une surface*, 335. — Normale, 336. — Contour apparent d'une surface sur un plan, 337. — Surface circonscrite à une autre surface, 337.

CHAPITRE III. — APERÇU DE QUELQUES THÉORIES GÉNÉRALES.

Du centre, 338. — Méthode générale, 339. — *Des surfaces diamétrales*, méthode générale, 339. — *Nombre de conditions nécessaires pour déterminer une surface ou une courbe dans l'espace*, 340. — Exprimer qu'un plan est tangent à une surface, 340. — *Condition pour que deux surfaces du second ordre soient semblables et semblablement placées*, 341.

Questions proposées, 341.

LIVRE SIXIÈME.

ÉTUDE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER. — DU CENTRE ET DES SURFACES DIAMÉTRALES DANS LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Du centre, 342. — Équation du centre, 343. — *Des surfaces diamétrales*, équation générale, 344. — Dans les surfaces dénuées de centre, les plans

diamétraux sont parallèles à une même droite, 345. — *Des plans principaux*, 345. — Toute surface du second degré admet au moins un plan principal, équation caractéristique en s, 347. — Deux racines inégales de l'équation en s correspondent à des directions principales perpendiculaires entre elles, 350.

CHAPITRE II. — RÉDUCTION ET DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ A TROIS VARIABLES.

Première simplification, 351. — Remarque à ce sujet, 352. — *Équations les plus simples des surfaces à centre et des surfaces dénuées de centre*, 353. — Ces équations conservent la même forme pour une infinité d'axes obliques, 354.

Surfaces à centre : ellipsoïde, 355. — Hyperboloïde à une nappe, 357. — Hyperboloïde à deux nappes, 359. — Cylindres elliptique et hyperbolique, 360. — Cônes du second degré, 361.

Surfaces dénuées de centre : Paraboloïde elliptique, 362. — Paraboloïde hyperbolique, 363. — Cylindre parabolique, 364.

Résumé, 365.

CHAPITRE III. — DE QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Des diamètres dans les surfaces du second degré, 365. — Dans les surfaces à centre, le plan tangent à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au plan diamétral conjugué à ce diamètre, 367. — Dans les surfaces dénuées de centre, le plan tangent à l'extrémité d'un diamètre est parallèle à toutes les cordes conjuguées aux différents plans diamétraux qui passent par ce diamètre, 368.

Conditions pour qu'une surface du second degré soit de révolution, 368.

Intersection de deux surfaces du second degré : deux surfaces semblables du second degré se coupent suivant une courbe plane, 371. — Lorsque la courbe d'entrée de deux surfaces du second ordre l'une dans l'autre est plane, la courbe de sortie l'est aussi, 371. — Lorsque deux surfaces du second ordre ont un plan principal commun, la projection de leur intersection sur ce plan principal est une courbe du second degré, 372.

CHAPITRE IV. — PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSOÏDE.

Sections planes de l'ellipsoïde, 373. — Recherche des sections circulaires, 374. — Plan tangent, 376. — Équation de l'ellipsoïde rapporté à un système de diamètres conjugués, 376. — Somme des carrés de trois diamètres conjugués, volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués, 377.

CHAPITRE V. — PROPRIÉTÉS DES DEUX HYPERBOLOÏDES.

Hyperboloïde à une nappe : Sections planes de la surface, 378. — Sections circulaires, 378. — Plan tangent, 379. — Relations qui lient les diamètres conjugués et les axes, 379. — Cône asymptote, 379. — *Double système de génératrices rectilignes*, leurs propriétés, 381. — Sections

rectilignes, 383. — Les projections des génératrices rectilignes sur les plans principaux sont tangentes aux sections de la surface par ces plans, 383. — Rapprochement entre les génératrices rectilignes de la surface et celles du cône asymptote, 384. — *Génération de l'hyperboloïde à une nappe par le mouvement d'une droite qui s'appuie constamment sur trois droites fixes non parallèles à un même plan et situées deux à deux dans des plans différents*, 385.

Hyperboloïde à deux nappes : Sections planes de la surface, 386. — Sections circulaires, 387. — Plan tangent, 387. — Diamètres conjugués, 387. — Cône asymptote, 387. — *Hyperboloïdes conjugués*, 388.

CHAPITRE VI. — PROPRIÉTÉS DES DEUX PARABOLOÏDES.

Paraboloïde elliptique : Sections planes de la surface, 389. — Sections circulaires, 390. — Plan tangent, 391. — *Équation de la surface rapportée à un diamètre et au plan tangent correspondant*, 392.

Paraboloïde hyperbolique : Sections planes, 392. — Plan tangent, 393. — Équation de la surface rapportée à un diamètre et au plan tangent correspondant, 394. — *Double système de génératrices rectilignes*, leurs propriétés, 394. — Sections rectilignes, 397. — Les projections des génératrices rectilignes sur les plans principaux sont tangentes aux sections de la surface par ces plans, 397. — *Génération du paraboloïde hyperbolique par le mouvement d'une droite glissant sur trois droites fixes parallèles à un même plan et situées deux à deux dans des plans différents*, 398. — Autre génération par le mouvement d'une droite qui glisse, parallèlement à un plan donné, sur deux droites données situées dans des plans différents, 399. — Remarque sur ce second mode de génération, 400.

CHAPITRE VII. — DISCUSSION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DU SECOND DEGRÉ A TROIS VARIABLES.

Surfaces à centre unique, 401. — Exemples, 402. — Détermination des génératrices rectilignes, dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, 404.

Surfaces ayant une infinité de centres, 405. — Exemples, 406.

Surfaces dénuées de centre, 407. — Exemples, 408. — Détermination des génératrices rectilignes, dans le cas du paraboloïde hyperbolique, 410.

Questions proposées, 412.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (*).

LIVRE PREMIER.

NOTIONS FONDAMENTALES.

CHAPITRE PREMIER. — Représentation du Point, de la Droite et du Plan.

Préliminaires, 415. — *Représentation du point*, 416. — *Représentation de la ligne droite*, 418. — Détermination des traces d'une droite, 419. — Tracé des épures, 419. — Droites parallèles, 422. — *Représentation du plan*, 422. — Droites d'un plan parallèles à l'un des plans de projection, 424. — Lignes de plus grande pente d'un plan, par rapport à l'un des plans de projection, 425. — Plans parallèles, mener par un point donné un plan parallèle à un plan donné, 426. — Droite et plan perpendiculaires, mener par un point donné une droite ou un plan perpendiculaire à un plan ou à une droite donnée, 427.

CHAPITRE II. — Des Méthodes.

Changement des plans de projection : Changement des plans de projection par rapport à un point, 428; Par rapport à une droite, 429; Par rapport à un plan, 430. — *Conséquences*, 430.

Mouvements de rotation : Mouvement de rotation par rapport à un point, 431; Par rapport à une droite, 431; Par rapport à un plan, 432. — *Conséquences*, 433.

Rabattements : Méthode générale, 434. — Exemple, 435.

CHAPITRE III. — Des Intersections.

Intersection des plans : Intersection de deux plans dont les traces se coupent dans les limites de l'épure, 436. — Intersection de deux plans dont les traces horizontales sont parallèles, 436. — Intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre, 437. — Intersection de deux plans dont les traces se croisent au même point de la ligne de terre, 438. — Intersection de deux plans dont les traces sont respectivement en ligne droite, 438. — Intersection de deux plans dont les traces ne se rencontrent pas dans les limites de l'épure, 439. — Intersection de deux plans dont l'un est déterminé par ses traces et l'autre par la ligne de terre et un point, 441.

(*) Cette Table n'est que le développement du Programme des connaissances exigées des candidats à l'École Centrale, en Géométrie descriptive.

Intersection des droites et des plans : Intersection d'une droite et d'un plan quelconque, 441. — Cas où la droite est perpendiculaire ou parallèle aux plans de projection, 442. — Cas où elle est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, 442. — Par un point donné, mener une droite qui s'appuie sur deux droites données non situées dans un même plan, 443.

CHAPITRE IV. — MESURE DES DISTANCES.

Distance de deux points, 443. — Conséquences, 444. — Longueur d'une droite entre ses traces, 445.

Distance d'un point à un plan, 445.

Distance d'un point à une droite, conséquences, 446.

Plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan, 447.

CHAPITRE V. — ANGLES DES DROITES ET DES PLANS.

Angles des droites entre elles : Angle de deux droites quelconques données par leurs projections, bissectrice de cet angle, 448. — Angle de deux droites, l'une parallèle au plan vertical, l'autre au plan horizontal, 449. — Trouver les angles d'une droite avec les plans de projection, 450. — Trouver l'angle d'une droite et d'un plan, 450. — Mener par un point donné une droite qui fasse des angles donnés avec les deux plans de projection, discussion, 451.

Angles des plans entre eux : Angle de deux plans quelconques donnés par leurs traces, plan bissecteur de cet angle, 452. — Angle de deux plans dont les traces horizontales sont parallèles, 453. — Trouver les angles d'un plan avec les plans de projection, 454. — Mener par un point donné un plan qui fasse des angles donnés avec les deux plans de projection, discussion, 455.

CHAPITRE VI. — QUESTIONS DIVERSES.

Réduction d'un angle à l'horizon, 457. — *Représentation des cinq polyèdres réguliers et inclinaison de leurs faces adjacentes :* Tétraèdre régulier, 458. — Octaèdre régulier, 459. — Icosaèdre régulier, 460. — Hexaèdre régulier, 462. — Dodécaèdre régulier, 462.

Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire, 466. — Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire, 467. — Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une sphère, 468.

CHAPITRE VII — DES PLANS COTÉS.

Définitions, 469. — *Construire l'échelle de pente d'une droite donnée,* conséquences, 470. — *Pente d'une droite,* 471. — Relation entre la pente et l'unité de l'échelle de pente, 472. — Mener par un point donné une parallèle à une droite donnée, 472.

Échelle de pente d'un plan, 472. — Reconnaître si deux droites se coupent, 473. — Construire l'échelle de pente d'un plan donné par trois points, 474. — Intersection de deux plans donnés par leurs échelles de

pente, 474. — Cas où ces échelles sont parallèles, 475. — Intersection d'une droite et d'un plan, 475. — Intersection de deux droites situées dans un même plan vertical, 475.

Mener par un point donné une perpendiculaire à un plan donné et trouver la longueur de cette perpendiculaire, relation entre la pente du plan et celle de la droite ou entre les unités de leurs échelles de pente, 476. — Trouver la distance d'un point à une droite, 477. — Trouver la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan, 477.

Trouver l'angle de deux droites, 478. — Trouver l'angle de deux plans donnés par leurs échelles de pente, 479.

Questions proposées, 480.

LIVRE DEUXIÈME.

NOTIONS RELATIVES AUX SURFACES.

CHAPITRE PREMIER. — GÉNÉRATION DES SURFACES ET PLAN TANGENT.

Définitions, 482. — *Plan tangent en un point d'une surface,* 483. — Le plan tangent en un point d'une surface développable, est tangent à la surface tout le long de la génératrice de contact, 484. — Normale, 485.

La projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe, 485.

Représentation graphique d'une surface, contours apparents sur les plans de projection, 486.

Exemples de représentation de surfaces : surface cylindrique, 487; surface conique, 487; surface de révolution, 488; ellipsoïde à trois axes inégaux, 488; hyperboloïde à une nappe, 488.

CHAPITRE II. — PLANS TANGENTS AUX SURFACES CYLINDRIQUES ET CONIQUES.

Mener un plan tangent à une surface cylindrique : par un point pris sur la surface, 489; par un point extérieur, 491; parallèlement à une droite donnée, 491.

Remarque sur les plans tangents aux surfaces développables, 492.

Mener un plan tangent à une surface conique : par un point pris sur la surface, 492; par un point extérieur, 493; parallèlement à une droite donnée, 493.

Applications : faire passer par une droite donnée un plan faisant un angle donné avec le plan horizontal, 493; mener à un cylindre ou à un cône un plan tangent faisant un angle donné avec le plan horizontal, 494.

Mener un plan tangent à une surface cylindrique par un point extérieur, en suivant la méthode des plans cotés, 495.

CHAPITRE III. — PLANS TANGENTS AUX SURFACES DE RÉVOLUTION.

Le plan tangent en un point d'une surface de révolution est perpendiculaire au méridien qui passe par le point de contact, 495. — Les normales ou les tangentes à la courbe méridienne, menées par les différents points d'un même parallèle, coupent l'axe de la surface au même point, 496.

Mener un plan tangent à une surface de révolution par un point pris sur la surface, 496.

Mener le plan tangent à une surface par un point extérieur, 498. — Mener le plan tangent à une surface parallèlement à une droite donnée, 499. — Mener le plan tangent à une surface par une droite donnée, 499.

Faire passer par une droite donnée un plan tangent à une sphère donnée, 499.

Plan tangent commun à deux surfaces, 500.

Par un point donné mener un plan tangent commun à deux sphères données, 501.

Hyperboloïde de révolution : sa représentation, son double mode de génération, ses génératrices rectilignes parallèles, 501 ; construction de la section méridienne parallèle au plan vertical, 503 ; contours apparents de la surface sur les plans de projection, 503 ; par un point de la surface, passent toujours deux génératrices de systèmes différents, 504 ; plan tangent en un point de l'hyperboloïde, 504 ; cas où le point de contact se transporte à l'infini, cône asymptote, 505.

CHAPITRE IV. — SECTIONS PLANES.

Notions préliminaires, intersection de deux surfaces, 505. — Tangente en un point de cette intersection, méthodes du plan tangent et du plan normal, 506.

Sections planes du cylindre : section d'un cylindre droit par un plan perpendiculaire au plan vertical, construction de cette section *en véritable grandeur*, *développement* du cylindre et *transformée* de la courbe d'intersection, tangente à cette courbe et à sa transformée, 507 ; équation de la transformée obtenue, points d'inflexion, 509. — Section d'un cylindre droit par un plan quelconque, véritable grandeur, tangente, 510. — Section droite d'un cylindre oblique, véritable grandeur, développement de la surface, transformées des deux bases, tangentes, 511.

Sections planes du cône : section d'un cône droit par un plan perpendiculaire au plan vertical, 514. — Cas de la section *elliptique*, véritable grandeur, développement de la surface, transformée, tangentes, 514. — Cas de la section *hyperbolique*, détermination des asymptotes, véritable grandeur, développement, transformée, tangentes, 517. — Cas de la section parabolique, 520. — On peut reconnaître d'avance si la courbe d'intersection présente des branches infinies, 520. — Développement d'un cône *quelconque*, 520.

Sections planes des surfaces de révolution. Premier cas : sections planes

du tore, 521. — Second cas : sections planes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe : section *elliptique*, détermination des sommets, 523; section *hyperbolique*, détermination des asymptotes, 525; section *parabolique*, 527.

Intersection d'une droite avec un cylindre ou un cône, 527. — *Intersection d'un droite avec un hyperboloïde de révolution à une nappe*, 528.

CHAPITRE V. — INTERSECTION DE DEUX SURFACES COURBES.

Intersection de deux surfaces cylindriques : Plans auxiliaires, *arrachement*, *pénétration*, points sur les plans-limites, points qui correspondent aux contours apparents, tangente en un point de l'intersection, déterminations des parties visibles et invisibles, 530. — Remarques, 532.

Intersection de deux surfaces coniques : Plans auxiliaires, arrachement, pénétration, points sur les plans-limites, points qui correspondent aux contours apparents, tangente en un point de l'intersection, parties visibles et invisibles, 533. — Détermination des points maximum et minimum de la projection verticale de l'intersection, dans le cas où les bases des deux cônes sont des courbes homothétiques, 535. — *Cas où l'intersection présente des branches infinies*, asymptotes de ces branches infinies, 536.

Intersection d'une surface conique et d'une surface cylindrique, 537.

Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan. Premier cas : Intersection de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes se coupent, sphères auxiliaires, points remarquables, détermination de la tangente par la méthode du plan normal, parties visibles et invisibles, 538; remarques, 541. — Second cas : Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles, cône et sphère, 541.

Remarque générale sur les Intersections de surfaces, 543.

Remarque relative aux ombres et à la perspective, 544.

Questions proposées, 545.

NOTES.

NOTE I. — Des courbes d'erreur, 550.

NOTE II. — *Théorème de Dandelin :* Étude géométrique des sections planes d'un cylindre ou d'un cône circulaire droit, 551.

NOTE III. — Courbe de contact d'une surface du second degré avec un cône ou un cylindre circonscrit, 555.

NOTE IV. — Sur les plans tangents aux surfaces de révolution, 557.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME.

ERRATA.

Page 365 : *au lieu de* Chapitre IV, *lisez* Chapitre III.

Page 425, ligne 7 : *au lieu de* quand on donne, *lisez* quand on en donne.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

NOTIONS FONDAMENTALES.

CHAPITRE PREMIER.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

1. De même que l'Algèbre généralise les problèmes et les conceptions arithmétiques, de même la *Géométrie analytique* soumet à des méthodes uniformes et certaines les diverses théories géométriques.

Lorsqu'on essayait, par exemple, de déterminer la tangente à une courbe avant l'immortelle création de *Descartes*, il fallait modifier la marche suivie chaque fois que la courbe considérée changeait, et chaque nouvelle courbe exigeait ainsi un nouvel effort particulier. L'analyse de Descartes, discernant la partie vraiment commune à toutes les solutions, remplaça cette diversité par une seule méthode générale, applicable à tous les cas.

L'illustre philosophe avait surtout pour but le perfectionnement de la géométrie; mais l'intime rapprochement établi par lui entre les phénomènes géométriques et les théories de l'Algèbre, réagit de la manière la plus heureuse sur les progrès de cette dernière branche de nos spéculations; et l'on doit regarder l'œuvre de Descartes comme ayant préparé

toutes les découvertes ultérieures, en fondant enfin l'unité des mathématiques.

2. Les grandeurs étant seules susceptibles d'une expression *numérique*, pour soumettre la géométrie à l'analyse, il faut pouvoir ramener les idées de *forme* et de *position* à l'idée de *grandeur*.

La forme d'un corps dépendant des positions occupées par ses différents points, il suffit d'indiquer de quelle manière on peut fixer la position d'un point. On y parvient, en employant ce qu'on appelle des *systèmes de coordonnées*.

Si le point considéré appartient à une ligne donnée, il suffit de choisir comme *origine* un point *fixe* de cette ligne : en faisant connaître la distance du point variable à l'origine (distance comptée sur la ligne elle-même), on déterminera immédiatement sa position. La distance indiquée devra d'ailleurs être affectée du signe *plus* ou du signe *moins*, suivant que le point variable tombera d'un côté ou de l'autre de l'origine (*Alg. élém.*, **161**).

Si le point considéré appartient à une surface donnée (c'est le cas constant en géométrie plane), il faut indiquer une ligne de la surface qui le contienne et sa position sur cette ligne comme on vient de le dire.

Si le point considéré est situé d'une manière quelconque dans l'espace, il faut indiquer une surface qui le contienne et sa position sur cette surface.

En géométrie plane, le système de coordonnées universellement adopté consiste à déterminer la position d'un point par ses distances à deux droites fixes tracées dans son plan, et, le plus ordinairement, rectangulaires. Si l'on sait que le point M (*fig.* 1) est à une distance MP de l'axe Ox et à une distance MQ de l'axe Oy, il suffira de prendre sur l'axe Oy une longueur $OQ = MP$ et sur l'axe Ox une longueur $OP = MQ$; en menant respectivement par les points Q et P des parallèles aux deux axes, leur intersection déterminera nécessairement le point proposé.

MP ou OQ s'appelle l'*ordonnée* du point M, MQ ou OP s'appelle son *abscisse*. L'abscisse fait connaître une droite du plan renfermant le point M, et l'ordonnée sa position sur cette droite, ou réciproquement. L'expression de *coordonnées* rappelle la nécessité de réunir ces deux renseignements numériques pour obtenir le point M. Ox est l'axe des abscisses, Oy l'axe des ordonnées; les deux axes portent le nom d'*axes des coordonnées*. Les coordonnées pouvant toujours être comptées sur les deux axes, à partir de leur point d'intersection O, ce point s'appelle l'*origine* des coordonnées. Enfin,

l'ordonnée d'un point étant généralement désignée par y et son abscisse par x, les axes Oy et Ox sont souvent appelés *axe des y* et *axe des x*.

Si les axes Oy et Ox sont obliques l'un sur l'autre, la distance du point M à l'un des axes est comptée parallèlement à l'autre axe, et rien n'est changé aux indications précédentes.

En se reportant à la figure, on voit que les quatre points M, M′, M″, M‴, deux à deux symétriques par rapport à l'un des axes, ont en *valeur absolue* les mêmes coordonnées. Cette difficulté est immédiatement levée par la règle fondamentale de l'opposition de sens manifestée par l'opposition de signe. D'après cette règle, les coordonnées du point M étant OQ et OP, celles du point M′ sont OQ et $-$OP, celles du point M″ sont $-$OQ et OP, celles du point M‴ sont $-$OQ et $-$OP. Aucune ambiguïté n'est donc possible.

3. *Remarques.* — 1° Dans le système de coordonnées dont on vient de parler et auquel on peut spécialement donner le nom de *rectiligne*, deux points M et M‴ (*fig.* 1), situés sur une même droite passant par l'origine et à égale distance de cette origine, ont des coordonnées égales et de signes contraires. La réciproque est vraie.

2° Tous les points de l'axe des y ont une abscisse nulle, tous les points de l'axe des x ont une ordonnée nulle. Les coordonnées de l'origine sont $x = 0$, $y = 0$.

3° Les coordonnées d'un point situé dans un plan non limité peuvent varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

4° Quand nous écrirons le point (x', y'), il faudra entendre le point dont les coordonnées sont x' et y'.

4. On emploie encore souvent, surtout en Astronomie, le système de coordonnées *polaire*.

Soit dans le plan du point M (*fig.* 2) un axe OA et un point O choisi sur cet axe. Le point M sera déterminé si l'on connaît sa distance ρ au point O et l'angle ω formé par la ligne OM avec l'axe OA. La coordonnée *linéaire* ρ porte le nom de *rayon vecteur;* la coordonnée *angulaire* ω n'a pas reçu de nom spécial. Le point O est le *pôle*, l'axe OA est l'*axe polaire*.

On voit que le point M est déterminé dans ce système par l'intersection d'un cercle ayant pour centre le pôle et pour rayon ρ, et d'une droite partant du pôle et faisant l'angle ω avec l'axe polaire.

Lorsqu'il s'agit de la détermination d'un seul point, ω peut varier de 0 à 2π et ρ de 0 à $+\infty$. En faisant varier ρ de 0 à $+\infty$, on a dans le plan tous les cercles possibles, et, en faisant varier ω de 0 à 2π, on a dans ces cercles tous les rayons possibles.

5. Outre le système rectiligne et le système polaire seuls usités, il existe évidemment *une infinité de systèmes de coordonnées*.

Ainsi, par exemple, on pourrait déterminer un point sur un plan par ses distances à deux points fixes choisis dans ce plan ou par les angles formés par les rayons vecteurs de ce point avec la droite joignant les deux points fixes. Dans le premier cas, le point cherché résulterait de l'intersection de deux circonférences de cercle, dans le second de l'intersection de deux lignes droites; dans le premier cas, ses deux coordonnées seraient linéaires, dans le second elles deviendraient toutes les deux angulaires.

D'une manière générale, le point variable est nécessairement placé à l'intersection de deux lignes quelconques, droites ou courbes. Toutes les conditions qui déterminent ces lignes doivent être fixes, excepté une seule dépendant précisément pour chacune d'elles de la position du point mobile, et la valeur numérique qui correspond pour chaque ligne à cette condition constitue l'une des coordonnées du point cherché.

6. Quand un point se déplace arbitrairement dans un plan, ses deux coordonnées varient indépendamment l'un de l'autre. Mais si ce point est astreint à parcourir une ligne AB, la valeur de l'une des coordonnées suffit pour fixer sa position et, par conséquent, pour déterminer l'autre coordonnée. Si le point mobile doit appartenir à l'arc AB (*fig.* 3), l'ordonnée MP correspondra nécessairement à l'abscisse OP, et la variation de l'abscisse imposera à l'ordonnée une variation parfaitement définie. On dit alors que les deux coordonnées sont *fonction* l'une de l'autre, et leur *dépendance* est caractérisée par une *équation* entre les deux variables y et x ou entre les deux variables ρ et ω, s'il s'agit de coordonnées polaires. Que cette équation puisse être ou non exprimée, on conçoit qu'elle existe toujours, et comme elle traduit algébriquement la condition nécessaire pour que le point mobile décrive la courbe AB, on donne à cette équation le nom d'*équation de la courbe* AB.

L'équation d'une ligne quelconque dans un système quelconque est donc la relation constante qui lie les coordonnées variables du point mobile, d'après la nature même de la ligne considérée; de sorte que, quelle que soit la définition adoptée, si la ligne ne change pas, l'équation ne changera pas. Mais le changement de position d'une même courbe par rapport aux axes doit nécessairement modifier son équation, tout en y laissant subsister certains caractères propres à la courbe considérée.

7. *Réciproquement*, toute équation $y = f(x)$ ou $F(x, y) = 0$ entre deux variables y et x représente une courbe plane. En effet, chaque couple de valeurs réelles de x et de y satisfaisant à l'équation proposée, correspond aux coordonnées d'un certain point du plan. Et, en général, si l'on fait varier x d'une manière continue, les valeurs correspondantes de y varient aussi d'une manière continue, en restant réelles au moins entre certaines limites. L'ensemble des points ainsi obtenus forme donc une ligne continue ou *lieu géométrique* qui a pour *définition algébrique* l'équation proposée.

Dans le système polaire, toute équation entre les variables ρ et ω représente aussi, en général, une courbe plane.

De même que l'équation d'une courbe ne dépend en rien de la définition de cette courbe, de même un lieu géométrique déterminé ne dépend en rien des diverses formes que peut affecter son équation. Et pour étudier la marche générale des solutions de cette équation, ce qu'il y a de plus simple, c'est d'en construire le lieu. Cette intime relation entre les équations et leur représentation graphique constitue, aussi bien au point de vue pratique qu'au point de vue théorique, l'un des principaux avantages de la géométrie analytique.

8. Pour construire l'équation $y = f(x)$, on donne ordinairement à x des valeurs en progression arithmétique; ce qui permet, lorsque la fonction proposée est entière algébriquement, de calculer les valeurs successives de y en ayant recours à la méthode des différences (*Complém. d'Alg.*, 249). On unit les différents points du plan représentés par les couples de valeurs de x et de y par un trait continu, et l'on a la courbe cherchée d'une manière d'autant plus approchée que la raison de la progression formée par les valeurs de x est plus petite.

Pour construire l'équation $F(x, y) = 0$, on a à résoudre, pour chaque valeur particulière de x, une équation en y. Pour trouver les racines de cette équation, on devra se servir des procédés connus (voir *Complément d'Algèbre*), et le tracé du lieu s'achèvera comme nous venons de le dire.

Dans ce dernier cas, l'emploi d'une variable auxiliaire permet souvent de simplifier la question.

Si la loi qui lie les deux variables y et x n'a pu être exprimée algébriquement, et si l'on a seulement à sa disposition une Table renfermant une série de valeurs expérimentales correspondantes des deux variables, on pourra tracer le lieu par points en adoptant ces valeurs.

Ce tracé présentera les avantages suivants : dans l'intervalle

des valeurs fournies par la Table, on pourra adopter approximativement les résultats indiqués par la courbe, de sorte que l'interpolation sera immédiate (*Complém. d'Alg.*, **240**). En outre, la courbe trouvée pourra se rapprocher beaucoup d'une courbe connue, et la loi du phénomène pourra alors être exprimée, avec une approximation suffisante pour les besoins de la pratique, par l'équation même de cette courbe connue dans la position considérée; enfin, les phénomènes naturels présentant en général une grande continuité, si la courbe résultant des nombres de la Table ne satisfait pas, en certains points, à cette continuité, on sera averti des erreurs qu'on a pu commettre dans les expériences, et on devra recommencer ces dernières pour les points regardés comme inexacts.

Ce qui précède suffit pour montrer quelles précieuses ressources la Géométrie analytique peut offrir aux physiciens et aux ingénieurs, dans l'étude des phénomènes compliqués dont ils ont à s'occuper.

9. La représentation des lignes par des équations constitue en réalité la Géométrie analytique, puisqu'elle permet de ramener l'étude des propriétés des lignes à l'application des procédés généraux de l'analyse.

Un lieu étant défini géométriquement, on cherchera donc son équation pour trouver ses propriétés. Réciproquement, une équation étant donnée, on construira la courbe correspondante, afin d'obtenir le tableau de la marche des valeurs de la fonction.

Nous devons présenter ici une importante et très-utile remarque. La définition géométrique du lieu permet non-seulement de trouver son équation dans tel système de coordonnées qu'on voudra, mais cette définition constitue elle-même souvent une première équation du lieu par rapport à un certain système dépendant de la définition adoptée et qu'on pourrait qualifier (avec Auguste Comte) de système de coordonnées *naturel* : chaque définition du même lieu conduira d'ailleurs à un nouveau système naturel.

Par exemple, si l'on adopte pour la circonférence de cercle la définition donnée en géométrie élémentaire, le système naturel est le système polaire, et l'équation du lieu est immédiatement $\rho =$ constante. Si la circonférence est définie le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés passent constamment par deux points fixes, le système naturel est celui dans lequel le point mobile est déterminé par l'intersection de deux droites partant des deux points fixes et formant des angles variables α et β d'un même côté de la droite

qui joint ces points (5) : dans ce système de coordonnées, on a pour équation de la circonférence

$$\alpha - \beta = \text{constante}.$$

On nomme *ellipse* le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Le système de coordonnées naturel est alors celui dans lequel le point mobile est déterminé par les rayons vecteurs u et v correspondants aux deux points fixes, et l'équation du lieu dans ce système est

$$u + v = \text{constante}.$$

Dans le même système, l'*hyperbole*, lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes demeure constante, a pour équation

$$u - v = \text{constante}.$$

Enfin la *parabole*, lieu des points dont les distances à une droite fixe et à un point fixe sont égales, est représentée par l'équation $u = v$ dans le système moitié polaire, moitié rectiligne, qui correspond à la définition indiquée.

D'après ce que nous venons de dire, on comprend que toute la difficulté, lorsqu'on cherche l'équation d'un lieu géométrique, consiste dans le passage du système de coordonnées naturel ou de la relation algébrique correspondante, au système de coordonnées prescrit ou à l'équation demandée. On devra donc, après avoir traduit algébriquement la définition de la courbe comme nous l'avons fait plus haut, chercher les relations qui existent entre les coordonnées naturelles et les coordonnées définitives; et une élimination plus ou moins pénible conduira alors d'une manière certaine à l'équation du lieu proposé. C'est ce que les exemples ultérieurs éclairciront.

CHAPITRE II.

THÉORIE DE L'HOMOGÉNÉITÉ ET CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

De l'homogénéité.

10. D'une manière générale, la grande loi de l'homogénéité peut s'énoncer comme il suit : *Toute équation provenant de la résolution d'une question de géométrie, de mécanique ou de physique, doit être homogène, c'est-à-dire ne renfermer que des termes de même degré.*

En effet, l'exactitude de toute relation *concrète* ne peut dépendre en rien du choix de l'unité, qu'il est nécessaire de fixer seulement au point de vue des évaluations numériques (*).

D'après cette remarque, supposons spécialement une relation algébrique quelconque entre longueurs. Si l'unité d'abord employée est remplacée par une unité p fois plus petite, toutes les lignes du problème se trouveront représentées par des nombres p fois plus grands, c'est-à-dire que chaque facteur linéaire de l'équation se trouvera multiplié par p. Dès lors tous les termes du premier degré seront multipliés par p, tous les termes du second degré par $p^2, \ldots$, tous les termes du degré m par p^m. L'équation proposée ne continuera donc d'exister, comme cela doit être, que si tous ses termes sont de même degré : dans cette hypothèse, tous varieront dans le même rapport par suite de la variation de l'unité, tandis que dans l'hypothèse contraire tous les termes de degrés différents varieraient dans des rapports inégaux. Ainsi, à moins d'erreurs de calcul, l'équation proposée ne pouvant dépendre de l'unité choisie doit être *homogène*.

Si la question posée exige la considération de grandeurs d'*espèce différente*, il y a deux cas à distinguer.

Il peut se faire que ces grandeurs d'espèce différente soient subordonnées les unes aux autres. Par exemple, on peut avoir à considérer en même temps des longueurs, des aires et des volumes. D'après l'enchaînement indiqué en géométrie, on devra dans ce cas compter chaque aire pour deux, et chaque volume pour trois facteurs linéaires. En prenant cette précaution, on vérifiera immédiatement l'homogénéité de l'équation obtenue.

En second lieu, si les grandeurs d'espèce différente qui entrent dans la question sont tout à fait indépendantes les unes des autres, il faudra évidemment que l'équation trouvée soit homogène par rapport à chaque espèce de grandeur.

Il est bien entendu que les nombres abstraits étant du degré o échappent à la variation produite par le changement d'unité, et qu'il ne faut en tenir aucun compte dans ce qui précède. *Les rapports trigonométriques sont des nombres abstraits.*

11. *On dit qu'une fonction est homogène et du degré m lorsque toutes les lettres qui y entrent étant multipliées par un même facteur k, la fonction elle-même est multipliée par k^m.*

(*) Par exemple, quelle que soit l'unité considérée, le carré du nombre qui représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle est toujours égal à la somme des carrés des nombres qui représentent les côtés de l'angle droit.

Les fonctions

$$a^3 - b^2c + bc^2, \quad \sqrt{a^4 + b^3c - c^4}, \quad \frac{3a^2 + bc}{7ab - 2c^2}, \quad \frac{5a - \frac{b^2}{c}}{3c^2 - 7ab},$$

sont homogènes. La première est du 3e degré, la seconde est du 2e degré, la troisième du degré 0, la quatrième du degré —1.

On voit d'après cela que *le degré d'un radical s'obtient en divisant le degré de la fonction placée sous le radical par l'indice du radical, et que le degré d'une expression fractionnaire est égal au degré du numérateur diminué du degré du dénominateur.*

Si l'on examine l'équation du mouvement uniforme $e = vt$, on voit que $v = \frac{e}{t}$ est du premier degré par rapport à l'espace et du degré —1 par rapport au temps; de sorte que l'équation $e = vt$ est bien homogène, soit qu'on considère séparément l'espace et le temps, soit qu'on les considère ensemble (10). Et l'on peut en conclure que si, dans une formule de mécanique, on multiplie les longueurs par un facteur m et les temps par un facteur n, les quantités analogues à v devront être multipliées par $\frac{m}{n}$. Cet exemple suffit pour montrer de quelle manière on doit vérifier l'homogénéité des équations fournies par la résolution d'un problème de mécanique ou de physique.

12. Jusqu'ici, *nous avons admis implicitement qu'aucune des lignes de la figure ou des grandeurs qui entrent dans la question n'avait été prise pour unité.* Dans ce cas, en effet, l'équation correspondante pourrait, sans cesser d'être homogène, perdre le caractère de l'homogénéité, puisque tous les facteurs égaux à l'unité disparaissent nécessairement du calcul. Quand cette particularité se présente, il est d'ailleurs facile de rétablir l'homogénéité. Car, avant le choix de l'unité et lorsque la ligne ou la grandeur correspondante était représentée par un signe indéterminé, l'équation avait tous ses termes de même degré. Il suffit donc de rétablir cette condition en multipliant les différents termes par des puissances convenables d'une certaine lettre prise pour signe représentatif de l'unité, et cela de la manière la plus simple possible.

Soit l'expression

$$x = \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c^2 d}{e^2}}.$$

Si x représente une longueur ainsi que les autres lettres de la formule, la quantité placée sous le radical doit être du se-

cond degré (11), une ligne de la figure a donc été prise pour unité : désignons-la par λ. Nous devrons multiplier $\frac{a}{b}$, qui est du degré o, par λ^2, et $\frac{c^2 d}{e^2}$, qui est du premier degré, seulement par λ. Nous obtiendrons ainsi l'équation homogène

$$x = \sqrt{\frac{a\lambda^2}{b} - \frac{c^2 d\lambda}{e^2}}.$$

13. On comprend, sans que nous insistions, toute l'importance du principe de l'homogénéité : c'est un moyen précieux de vérification pendant tout le cours des calculs, et l'on ne doit jamais perdre de vue la symétrie qu'il impose aux équations sur lesquelles on opère. Les élèves feront donc bien de s'assurer toujours de l'homogénéité des formules qu'ils emploieront, jusqu'à ce que l'habitude leur permette de se passer d'une vérification directe.

Construction des expressions algébriques.

14. *Construire* une formule, c'est remplacer les évaluations numériques qu'elle indique par des constructions géométriques. Ces constructions, en liant convenablement des lignes proportionnelles aux nombres considérés, conduisent en dernier lieu à une ligne proportionnelle à la valeur numérique de l'inconnue.

On n'admet, en général, que les constructions où entrent la ligne droite et le cercle, c'est-à-dire que celles qui peuvent s'effectuer simplement à l'aide de la règle et du compas. Comme nous le verrons bientôt, les équations de la ligne droite et de la circonférence de cercle sont du premier et du second degré. Par conséquent, nous ne pourrons construire que des formules rationnelles du premier degré ou des formules irrationnelles renfermant seulement des radicaux du second degré ou dérivés du second degré.

Les expressions à construire doivent présenter le caractère de l'homogénéité : on le rétablira donc toujours s'il n'existe pas déjà (12); car si la ligne prise pour unité n'entrait pas explicitement dans la formule donnée, on ne pourrait exécuter sur cette ligne aucune des constructions nécessaires.

15. Dans ce qui va suivre, nous supposerons que l'inconnue x représente une ligne droite, ainsi que toutes les autres lettres de la formule.

S'il s'agit d'une formule entière et rationnelle, elle sera de la forme

$$x = 3a - \frac{2}{5}b + c - \frac{4}{7}d,$$

et x s'obtiendra facilement en portant sur une droite fixe indéfinie, à partir d'un point déterminé de cette droite, dans le sens convenable et à la suite les unes des autres, les longueurs

$$3a, \quad \frac{2}{5}b, \quad c \quad \text{et} \quad \frac{4}{7}d.$$

La distance du point auquel on parviendra, à l'origine choisie, représentera la valeur de x.

S'il s'agit d'une formule fractionnaire et rationnelle, sa forme la plus simple sera

$$x = \frac{ab}{c}.$$

On obtiendra alors x en construisant une quatrième proportionnelle aux longueurs c, a et b. x sera une troisième proportionnelle aux longueurs c et a, si l'on a

$$x = \frac{a^2}{c} \ (\textit{Géom.}, \ 116).$$

Toute expression monôme analogue, telle que

$$x = \frac{abcd}{efg},$$

se construira à l'aide du même procédé répété; car on peut écrire

$$x = \frac{a}{e} \times \frac{b}{f} \times \frac{cd}{g}.$$

Soient

$$i = \frac{cd}{g}, \quad h = \frac{bi}{f}, \quad k = \frac{ah}{e};$$

on aura finalement

$$x = k.$$

Si x est une fraction à termes polynômes, on commencera par les rendre entiers. Soit donc

$$x = \frac{abcd - efgh + klmn}{opr - stu}.$$

On peut poser

$$efgh = abc\delta, \quad klmn = abc\delta', \quad opr = ab\varepsilon, \quad stu = ab\varepsilon'.$$

On déterminera les lignes auxiliaires δ, δ', ε, ε', par une série de quatrièmes proportionnelles, et l'on aura

$$x = \frac{abc(d - \delta + \delta')}{ab(\varepsilon - \varepsilon')} = \frac{c(d - \delta + \delta')}{\varepsilon - \varepsilon'},$$

c'est-à-dire qu'on sera ramené au cas le plus simple résolu d'abord.

16. Passons aux expressions irrationnelles. Si l'on a

$$x = \sqrt{ab},$$

x sera immédiatement donnée par la construction d'une moyenne proportionnelle aux longueurs a et b (*Géom.*, **117**).

Si l'on a

$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

x sera l'hypoténuse du triangle rectangle qui a pour côtés a et b.

Si l'on a

$$x = \sqrt{a^2 - b^2},$$

il faudra construire un triangle rectangle qui ait a pour hypoténuse et b pour côté de l'angle droit; x sera représentée par le second côté du triangle.

En général, toutes les formules irrationnelles du second degré pourront être construites à l'aide de quatrièmes proportionnelles successives et d'une dernière moyenne proportionnelle. Soit, par exemple, l'expression

$$x = \sqrt{\frac{abcd - efgh + klmn}{op - rs}}.$$

Nous remarquerons que, comme cela doit être, d'après la loi de l'homogénéité, le degré du numérateur de la fraction placée sous le radical l'emporte de deux unités sur le degré du dénominateur.

Nous poserons

$$efgh = abc\delta, \quad klmn = abc\delta', \quad op = a\varepsilon, \quad rs = a\varepsilon'.$$

Il viendra alors, en simplifiant,

$$x = \sqrt{\frac{bc(d - \delta + \delta')}{\varepsilon - \varepsilon'}}.$$

A l'aide d'une quatrième proportionnelle, on pourra remplacer $\frac{c(d - \delta + \delta')}{\varepsilon - \varepsilon'}$ par une seule longueur γ, et, pour avoir $x = \sqrt{b\gamma}$, il suffira de chercher une moyenne proportionnelle à b et à γ.

Si l'on avait à considérer un radical du quatrième degré, la

marche à suivre serait encore la même. Soit, par exemple,

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^3 + b\sqrt{c}}{d^2 - a\sqrt{b}}}.$$

La quantité placée sous le radical principal doit être du quatrième degré; il faut donc commencer par rétablir l'homogénéité, ce que nous ferons (12) en représentant la ligne prise pour unité par λ et en multipliant les différents termes de l'expression par des puissances convenables de λ. Nous aurons

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^3\lambda^3 + b\lambda^3\sqrt{c\lambda}}{d^2 - a\sqrt{b\lambda}}}.$$

Nous construirons les moyennes proportionnelles

$$\sqrt{c\lambda} = f \quad \text{et} \quad \sqrt{b\lambda} = g,$$

puis

$$\sqrt{ag} = h \quad \text{ou} \quad ag = h^2.$$

Il viendra alors

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^3\lambda^3 + bf\lambda^3}{d^2 - h^2}} = \sqrt[4]{\frac{\lambda^4\left(\frac{a^3}{\lambda} + bf\right)}{d^2 - h^2}}.$$

La construction d'un triangle rectangle nous permettra de remplacer $d^2 - h^2$ par k^2; celle d'une troisième proportionnelle et de deux moyennes proportionnelles nous permettra de remplacer $\frac{a^3}{\lambda}$ par m^2 et bf par n^2; enfin, en construisant un dernier triangle rectangle, nous aurons

$$m^2 + n^2 = p^2,$$

c'est-à-dire

$$x = \sqrt[4]{\frac{\lambda^4 p^2}{k^2}} = \sqrt{\lambda \cdot \frac{\lambda p}{k}}.$$

On aura donc finalement à chercher une quatrième proportionnelle q aux longueurs k, λ et p, puis une moyenne proportionnelle à λ et à q.

17. Quand l'inconnue est une surface S, on pose

$$S = ax,$$

a étant une ligne choisie arbitrairement. En construisant la longueur x, on peut obtenir un rectangle équivalent à la surface cherchée.

De même, si l'inconnue est un volume V, on pose

$$V = a^2 x,$$

et la détermination de x donne un parallélipipède rectangle équivalent au volume cherché.

La détermination d'un angle donné par un de ses rapports trigonométriques se ramène de même à celle d'une droite. Si l'on a, par exemple,

$$\operatorname{tang} x = \frac{b}{a},$$

il faut construire un triangle rectangle sur b et a comme côtés de l'angle droit; l'angle opposé dans ce triangle au côté b est l'angle cherché.

18. L'habitude du calcul permet souvent de simplifier la construction d'une formule, en suggérant un mode de décomposition favorable.

Soit

$$x = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{a^2b + ab^2 + 2abc}.$$

L'application du procédé général serait très-longue. Mais on peut écrire (*Alg. élém.*, p. 256, Questions proposées)

$$x = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{ab(a+b+2c)},$$

et l'on arrive alors rapidement au résultat.

Applications.

19. *On peut se proposer de construire les racines d'une équation du second degré ramenée à la forme*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Si x représente une longueur, il faut pour l'homogénéité que p soit du premier degré et q du second degré. On pourra donc, en général, représenter p par une certaine ligne a, et q par un carré équivalent b^2. L'équation du second degré, en mettant en évidence les signes de ses différents termes, aura alors l'une des quatre formes suivantes :

(1) $$x^2 + ax + b^2 = 0,$$

(2) $$x^2 + ax - b^2 = 0,$$

(3) $$x^2 - ax + b^2 = 0,$$

(4) $$x^2 - ax - b^2 = 0.$$

En changeant le signe de x, on passe des deux premières aux

deux dernières équations : nous n'avons donc besoin de construire que les racines des équations (3) et (4); en les changeant de signe, nous obtiendrons ensuite immédiatement les racines des équations (1) et (2).

Les équations (3) et (4) peuvent s'écrire

$$x(a-x)=b^2, \quad x(x-a)=b^2.$$

Dans le premier cas, la somme des racines est a, leur produit est b^2; on est alors ramené à ce problème élémentaire (*Géom.*, **118**) : *Trouver deux lignes, connaissant leur somme et leur produit.*

Dans le second cas, la somme algébrique des racines est toujours a; mais comme elles sont de signes contraires, a est en réalité la différence des deux lignes qui les représentent. On est donc ramené à cet autre problème (*Géom.*, **119**) : *Trouver deux lignes, connaissant leur différence et leur produit.* La plus grande des deux lignes trouvées sera la racine positive de l'équation.

On peut aussi résoudre directement les équations considérées et construire les formules

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}\mp b^2}.$$

20. *Pour les équations bicarrées,* on a seulement besoin de considérer les trois formes

$$x^4+a^2x^2-b^4=0, \quad x^4-a^2x^2+b^4=0, \quad x^4-a^2x^2-b^4=0,$$

car l'équation

$$x^4+a^2x^2+b^4=0$$

n'admet que des racines imaginaires. Si l'on pose

$$x^2=by,$$

les équations proposées deviennent

$$y^2+\frac{a^2}{b}y-b^2=0, \quad y^2-\frac{a^2}{b}y+b^2=0, \quad y^2-\frac{a^2}{b}y-b^2=0.$$

On détermine alors comme on vient de l'indiquer (**19**) les racines des équations en y, puis on obtient x en construisant une moyenne proportionnelle à y et à b.

21. Pour terminer ce sujet, nous traiterons le problème suivant et nous construirons la solution trouvée.

Par un point M *pris sur la bissectrice d'un angle droit* YOX, *mener une droite telle, que la partie de cette droite comprise*

entre les côtés de l'angle, prolongés s'il est nécessaire, ait une longueur donnée l (*fig.* 4). (Problème de Pappus.)

On déterminera le point M en donnant sa distance $a = MP = MQ$ aux deux côtés de l'angle droit. Soit $AB = l$ la ligne cherchée. On pourra prendre pour inconnues

$$OA = x, \quad OB = y.$$

Le triangle rectangle AOB se composant des triangles OMA, OMB, on pourra écrire

$$xy = a(x + y).$$

Le même triangle donnera d'ailleurs

$$l^2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2a(x + y),$$

c'est-à-dire

$$(x + y)^2 - 2a(x + y) - l^2 = 0,$$

d'où

$$x + y = a \pm \sqrt{a^2 + l^2},$$

et, par suite,

$$xy = a\left(a \pm \sqrt{a^2 + l^2}\right).$$

x et y seront donc les racines de deux équations du second degré faciles à former. Et comme les valeurs précédentes sont symétriques en x et en y, en obtenant les quatre valeurs de x on obtiendra les quatre valeurs de y.

Les deux équations du second degré à résoudre seront

$$X^2 - \left(a + \sqrt{a^2 + l^2}\right)X + a\left(a + \sqrt{a^2 + l^2}\right) = 0,$$
$$X^2 + \left(\sqrt{a^2 + l^2} - a\right)X - a\left(\sqrt{a^2 + l^2} - a\right) = 0.$$

Les racines de la seconde équation étant toujours réelles (*Alg. élém.*, **191**), le problème admettra toujours deux solutions. Les racines de la première équation ne seront réelles qu'autant qu'on aura

$$\left(a + \sqrt{a^2 + l^2}\right)^2 > 4a\left(a + \sqrt{a^2 + l^2}\right),$$

c'est-à-dire, en développant,

$$l > 2a\sqrt{2} \quad \text{ou que} \quad 2OM.$$

Telle est donc la condition pour que le problème admette quatre solutions. Dans ce cas, il y aura toujours trois solutions positives pour une négative; et les valeurs négatives seront représentées par des segments comptés sur les prolongements des côtés de l'angle droit, à partir de l'origine O.

On peut d'ailleurs construire les inconnues sans résoudre

aucune équation, en employant directement les valeurs de la somme $x+y$ et du produit xy. Prolongeons d'abord MP d'une longueur $MR = l$ et, du point Q comme centre avec QR pour rayon, décrivons la demi-circonférence DRD′. Nous aurons

$$D'M = QM + QR = a + \sqrt{a^2 + l^2}$$

et

$$DM = QR - QM = \sqrt{a^2 + l^2} - a.$$

Les deux valeurs de $x+y$ sont donc représentées par D′M et par — DM.

Prenons la valeur

$$x + y = D'M = 2a + DM,$$

et soit I le milieu de DM. Nous aurons

$$x + y = 2a + 2MI = 2QI.$$

On peut alors poser

$$x = QI + z, \quad y = QI - z,$$

et tout est ramené à la détermination de l'inconnue auxiliaire z.

On a

$$xy = a(x+y) = 2a.QI \quad \text{et} \quad xy = QI^2 - z^2.$$

Il en résulte

$$z^2 = QI^2 - 2a.QI = (a + MI)^2 - 2a(a + MI) = MI^2 - a^2.$$

Si l'on décrit alors sur DM comme diamètre une demi-circonférence, et si cette demi-circonférence coupe l'axe OX en deux points A et A′, on aura, en abaissant les perpendiculaires AC et A′C′ sur DM,

$$IC = IC' = z.$$

On obtient ainsi, d'après ce qui précède, pour x ou pour y, les deux solutions OA′ et OA. Seulement, si l'on prend $x = OA'$, il faut prendre $y = OB' = OA$, et si l'on prend $x = OA$, y devient $OB = OA'$.

Prenons maintenant la valeur $x + y = -DM = 2a - D'M$, et soit I′ le milieu de D′M. Nous aurons

$$x + y = 2a - 2MI' = -2QI'.$$

On peut alors poser

$$x = z - QI' \quad \text{et} \quad y = -z - QI'.$$

On a, par suite,

$$xy = -2a.QI' \quad \text{et} \quad xy = QI'^2 - z^2.$$

Il en résulte

$$z^2 = \mathrm{QI}'^2 + 2a.\mathrm{QI}' = (\mathrm{MI}' - a)^2 + 2a(\mathrm{MI}' - a) = \mathrm{MI}'^2 - a^2.$$

On décrira donc sur D'M comme diamètre une demi-circonférence qui coupera *toujours* l'axe OX en deux points A'' et A''', et en abaissant de ces points les perpendiculaires A''C'' et A'''C''' sur D'M, nous aurons

$$\mathrm{I}'\mathrm{C}'' = \mathrm{I}'\mathrm{C}''' = z.$$

On aura donc pour x ou pour y les deux solutions OA'' et $-\mathrm{OA}'''$.

Si l'on a MI ou $\frac{\mathrm{DM}}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{a^2 + l^2} - a}{2} < a$, condition qui revient à $l < 2a\sqrt{2}$, la circonférence décrite sur DM comme diamètre ne coupera pas l'axe OX, et les deux premières solutions disparaîtront.

CHAPITRE III.

THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

22. *Nous chercherons d'abord les formules qui permettent de passer d'un système de coordonnées rectiligne à un autre système de coordonnées rectiligne.*

La transformation dont il s'agit doit être considérée sous deux points de vue.

Nous avons dit précédemment (6) que le changement de position d'une ligne par rapport aux axes choisis pouvait modifier son équation. Lorsqu'on voudra s'assurer que deux équations différentes représentent en réalité deux lignes distinctes, on y parviendra en opérant par rapport à l'une de ces lignes une transformation d'axes d'abord indéterminée. Puis, on essayera d'identifier les équations des deux lignes en faisant usage des constantes arbitraires introduites par la transformation effectuée. Suivant qu'on pourra ou non trouver ainsi pour ces constantes des valeurs réelles, on aura ou non affaire au même lieu.

Le second point de vue est relatif à la simplification spéciale d'une équation isolée. Très-souvent, la définition géométrique adoptée ne conduit pas à la forme la plus simple pour l'équation correspondante. Il est donc important de pouvoir opérer une transformation d'axes d'abord indéterminée. En cherchant ensuite les valeurs qu'il faut assigner aux constantes

arbitraires ainsi introduites pour faire disparaître certains termes de l'équation primitive, on déterminera la situation des axes pour laquelle cette équation est réduite à la forme la plus favorable : on choisit alors le système d'axes obtenu de cette manière, toutes les fois qu'on veut étudier commodément les propriétés de la courbe considérée.

Les applications ultérieures feront bien comprendre les indications générales qui précèdent.

23. L'établissement des formules de transformation est un simple problème de trigonométrie. On doit chercher l'expression générale des coordonnées d'un point quelconque du plan par rapport aux anciens axes, en fonction de ses coordonnées par rapport aux nouveaux axes. Dans chaque cas particulier, il suffira de substituer dans l'équation proposée les valeurs générales obtenues, pour passer de l'ancien système au nouveau.

Il convient de distinguer le transport des axes parallèlement à eux-mêmes (c'est-à-dire le simple déplacement de l'origine) et leur changement de direction. La transformation générale consistera ensuite à réunir comme simultanées les modifications dues à chaque changement isolé.

24. *Déplacement de l'origine.* — Remplaçons les deux axes Ox et Oy par les deux axes $O'x'$ et $O'y'$ qui leur sont respectivement parallèles (*fig.* 5). La position des nouveaux axes sera déterminée si l'on donne les coordonnées a et b de la nouvelle origine O' par rapport aux anciens axes. Soit M un point quelconque du plan. Ses coordonnées seront $x = OP$ et $y = MP$ par rapport aux anciens axes, $x' = O'P'$ et $y' = MP'$ par rapport aux nouveaux. Pour aller du point O au point M, on peut suivre la ligne droite OM ou la ligne brisée OO'M. Les projections des deux chemins considérés sur un axe quelconque seront donc égales (*Trig.*, 16). En projetant sur l'axe Ox (parallèlement aux y), on aura donc

$$x = a + x',$$

et en projetant sur l'axe Oy (parallèlement aux x), on aura

$$y = b + y'.$$

Si l'on voulait revenir des nouveaux axes aux anciens, on aurait

$$x' = x - a,$$
$$y' = y - b.$$

La théorie des projections étant complétement générale, il en est de même des formules trouvées.

Remarque. — On doit remarquer immédiatement que cette première transformation ne peut modifier en rien le degré de l'équation donnée; de plus, *elle laisse intacts les coefficients des termes du degré le plus élevé.*

25. *Changement de direction des axes.* — Supposons maintenant qu'en conservant la même origine, on modifie la direction des axes.

Soient Ox et Oy les anciens axes qui font entre eux l'angle θ (*fig.* 6). Soient Ox' et Oy' les nouveaux axes dont la situation est définie par les angles α et β qu'ils font avec l'axe Ox, le sens positif de la rotation angulaire des axes étant celui de Ox vers Oy. Soit M un point quelconque du plan. Ses coordonnées seront $x = OP$ et $y = MP$ par rapport aux anciens axes, $x' = OP'$ et $y' = MP'$ par rapport aux nouveaux. On peut aller du point O au point M en suivant la ligne brisée OPM ou la ligne brisée OP'M. Les projections de ces deux chemins sur un axe quelconque seront donc égales. Pour avoir x, nous nous débarrasserons de y en choisissant pour axe de projection la perpendiculaire OH à Oy. La projection de OPM sur OH se réduira ainsi à

$$x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \sin\theta.$$

L'angle de Ox' avec OH est $\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta$, celui de Oy' avec le même axe est $\beta + \frac{\pi}{2} - \theta$. La projection du chemin OP'M sur OH sera donc (*Trig.*, 15, 16)

$$x' \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha)\right] + y' \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \beta)\right],$$

c'est-à-dire

$$x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta),$$

et l'on aura

$$x \sin\theta = x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta).$$

Pour avoir y, nous nous débarrasserons de x en choisissant pour axe de projection la perpendiculaire OK à Ox. La projection de OPM sur OK se réduira ainsi à

$$y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = y \sin\theta.$$

L'angle de Ox' avec OK est $\frac{\pi}{2} - \alpha$, celui de Oy' avec le

même axe est $\beta - \frac{\pi}{2}$. La projection du chemin OP'M sur OK sera donc

$$x' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y' \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right),$$

c'est-à-dire

$$x' \sin\alpha + y' \sin\beta,$$

et l'on aura

$$y \sin\theta = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

Les formules cherchées sont, par suite,

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta},$$

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}.$$

Si l'on voulait revenir des nouveaux axes aux anciens, on pourrait, au lieu de résoudre les équations qu'on vient de trouver par rapport à x' et à y', changer θ en $\beta - \alpha$, α en $-\alpha$, β en $\theta - \alpha$, enfin x et y en x' et y' et réciproquement; il viendrait

$$x' = \frac{x \sin\beta + y \sin(\beta - \theta)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$y' = \frac{-x \sin\alpha + y \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Remarque. — On doit remarquer immédiatement que cette seconde transformation, pas plus que la première, ne peut modifier le degré de l'équation donnée : elle ne peut ni l'abaisser ni l'élever, puisque les valeurs de x et de y sont du premier degré en x' et en y', et réciproquement. Mais le changement de direction des axes peut modifier les coefficients de tous les termes de l'équation, sans que ceux des termes du degré le plus élevé soient ici exceptés.

26. Il est utile de considérer les cas particuliers suivants :

1° *Les nouveaux axes sont rectangulaires.* On a alors

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte

$$\sin(\theta - \beta) = \sin\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta - \alpha)$$

et

$$\sin\beta = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha.$$

On a donc, d'après les formules générales (25),

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta},$$
$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\theta}.$$

Telles seront les formules à employer *lorsqu'on voudra passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires.*

2° *Les axes primitifs sont rectangulaires.* On a alors

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte

$$\sin(\theta - \alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(\theta - \beta) = \cos\beta, \quad \sin\theta = 1.$$

On a donc, d'après les formules générales (25),

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

Telles seront les formules à employer *pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques.*

3° *Les deux systèmes d'axes sont rectangulaires.* Il faudra supposer

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte

$$\sin(\theta - \alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(\theta - \beta) = \cos\beta = -\sin\alpha,$$
$$\sin\beta = \cos\alpha, \quad \sin\theta = 1.$$

Les formules générales (25) deviennent donc

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Telles seront les formules à employer *pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires.*

27. *Transformation générale.* — Les formules tout à fait générales de transformation seront évidemment (23, 24, 25) pour les coordonnées rectilignes

$$x = a + \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta},$$
$$y = b + \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}.$$

Ces formules sont homogènes et du premier degré par rapport aux coordonnées qu'elles renferment. Comme nous l'avons déjà remarqué pour chaque transformation isolée (24, 25), leur emploi ne peut modifier en rien le degré de l'équation considérée.

28. *Transformation relative aux coordonnées polaires.* — Lorsqu'on veut passer d'un système de coordonnées rectiligne à un système de coordonnées polaire, on peut supposer que l'axe polaire se confond avec l'axe des x et le pôle avec l'origine O des coordonnées rectilignes. On peut aussi supposer les axes rectilignes rectangulaires. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours rentrer dans ce cas par une transformation préalable convenablement effectuée à l'aide des formules précédentes.

En projetant successivement OM (*fig.* 7) sur les deux axes, on aura

$$x = \rho \cos \omega,$$
$$y = \rho \sin \omega.$$

Réciproquement, si l'on veut passer des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes, on déduira de ces relations

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tang} \omega = \frac{y}{x}.$$

On voit que les équations qui sont algébriques dans un système, deviendront en général transcendantes dans l'autre système, et que la condition inverse pourra dans certains cas avoir lieu.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DE LA LIGNE DROITE.

29. Pour terminer cette introduction, nous exposerons la théorie de la ligne droite. Nous y joindrons comme complément la théorie de la circonférence de cercle, qui, au point de vue d'une méthode rigoureuse, devrait peut-être faire partie de l'étude des courbes du second degré. Mais nous pensons qu'il est important d'habituer d'abord les élèves aux nouvelles considérations de la géométrie analytique, en leur faisant résoudre les problèmes les plus usuels relatifs aux deux seules lignes considérées en géométrie élémentaire. Nous achèverons ensuite ce I^er^ Livre en traitant une série d'exemples, choisis de manière à familiariser le lecteur avec quel-

ques-unes des principales courbes auxquelles nous devrons plus tard appliquer nos méthodes générales.

30. Nous commencerons par indiquer deux formules élémentaires qui reviennent constamment dans les calculs.

Distance de deux points. — Soient les axes Ox et Oy (*fig.* 8). Cherchons d'abord la distance du point M, dont les coordonnées sont x et y, à l'origine O. Le triangle MOP, quelle que soit la position du point M, donnera

$$OM^2 = OP^2 + MP^2 - 2\,OP.MP.\cos OPM.$$

Si θ est l'angle des axes, on aura toujours, l'angle OPM étant le supplément de θ,

$$\cos OPM = -\cos\theta.$$

Il viendra donc, en désignant par d la distance cherchée,

$$(1) \qquad d = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}.$$

Cherchons maintenant dans le plan des axes la distance de deux points quelconques M et M'. Transportons les axes Ox et Oy parallèlement à eux-mêmes en Mx' et My'. Si l'on désigne par X et Y les coordonnées du point M' par rapport aux nouveaux axes, on aura, d'après la formule (1),

$$MM' = \sqrt{X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta}.$$

Mais, si x' et y' sont les coordonnées du point M' par rapport aux anciens axes, on a, d'après les dernières formules du n° 24,

$$X = x' - x,$$
$$Y = y' - y;$$

x et y sont en effet les coordonnées de la nouvelle origine M par rapport aux anciens axes. En substituant, on aura donc pour la formule générale de la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées *par rapport à un système d'axes obliques*,

$$(2) \quad d = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\theta}.$$

Si les axes sont rectangulaires, $\cos\theta$ est nul, et les formules (1) et (2) deviennent simplement

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad d = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}.$$

En coordonnées polaires, la formule de la distance de deux

points sera, en vertu du triangle MOM' (*fig.* 9),

$$d = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega' - \omega)}.$$

Coordonnées du point milieu d'une droite finie. — Soient la droite MM' et I son point milieu (*fig.* 8). Par rapport aux axes Mx' et My', les coordonnées X_1 et Y_1 du point I seront évidemment

$$X_1 = \frac{X}{2}, \quad Y_1 = \frac{Y}{2},$$

c'est-à-dire

$$X_1 = \frac{x' - x}{2}, \quad Y_1 = \frac{y' - y}{2}.$$

Mais si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point I par rapport aux axes primitifs, on aura aussi (24)

$$X_1 = x_1 - x, \quad Y_1 = y_1 - y.$$

Il viendra donc

$$x_1 - x = \frac{x' - x}{2}, \quad y_1 - y = \frac{y' - y}{2},$$

et l'on en déduit

$$x_1 = \frac{x' + x}{2}, \quad y_1 = \frac{y' + y}{2}.$$

Ainsi, *par rapport à un système rectiligne quelconque, les coordonnées du milieu d'une droite sont les moyennes arithmétiques des coordonnées correspondantes des extrémités de cette droite.*

31. Équation de la ligne droite. — Cherchons l'équation de la ligne droite considérée comme lieu géométrique. Si la droite donnée passe par l'origine et si l'on marque sur cette droite des points quelconques M, M', M'', on aura (*fig.* 10), d'après la similitude des triangles formés,

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-M''P''}{-OP''} = \text{constante}.$$

Si l'on désigne cette constante par a, et si y et x sont les coordonnées d'un point quelconque de la droite, on aura donc

$$\frac{y}{x} = a,$$

d'où

$$y = ax.$$

Telle sera l'équation d'une droite passant par l'origine des coordonnées.

Soit maintenant une droite quelconque BN (*fig.* 10). On pourra lui mener par l'origine une parallèle OM, et cette parallèle aura pour équation

$$y = ax.$$

Si l'on marque sur les deux droites des points M et N, M′ et N′, M″ et N″, correspondants à des abscisses égales, on verra que les ordonnées de ces points NP et MP, N′P′ et M′P′, N″P″ et — M″P″, présentent une différence constante mesurée sur la figure par l'ordonnée OB du point B où la droite BN rencontre l'axe Oy. Si l'on désigne OB par b, on aura donc

$$\mathrm{NP} - \mathrm{MP} = \mathrm{N'P'} - \mathrm{M'P'} = \mathrm{N''P''} - (-\mathrm{M''P''}) = b.$$

Si l'on représente alors par x et y les coordonnées d'un point quelconque de la droite BN, l'ordonnée du point correspondant de la droite OM sera représentée par ax, et il viendra, d'une manière générale,

$$y - ax = b,$$

d'où

$$y = ax + b.$$

Telle sera l'équation d'une droite ayant une situation quelconque par rapport aux axes.

L'équation d'une droite parallèle à l'axe des y est évidemment

$$x = \text{constante}.$$

L'équation d'une droite parallèle à l'axe des x est

$$y = \text{constante}.$$

L'axe des y a pour équation

$$x = 0,$$

l'équation de l'axe des x est

$$y = 0.$$

Ainsi, *toute droite est représentée par une équation du premier degré.*

32. Réciproquement, *toute équation du premier degré à deux variables représente une droite.*

L'équation la plus générale du premier degré à deux variables est de la forme

$$Ay + Bx + C = 0.$$

Si le coefficient C est nul, on a

$$Ay + Bx = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{B}{A}x \quad \text{ou} \quad y = ax,$$

en posant

$$-\frac{B}{A} = a.$$

Construisons différents points du lieu (*fig.* 10), et joignons ces points M, M′, M″, à l'origine. D'après l'équation $y = ax$, on aura

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-M''P''}{-OP''} = a.$$

Les triangles OMP, OM′P′, OM″P″, sont donc semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Par suite, les directions OM, OM′, OM″ se confondent, et les points M, M′, M″ appartiennent à une même droite passant par l'origine.

Si B = 0, l'équation devient

$$Ay + C = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{C}{A}.$$

Tous les points du lieu ayant alors la même ordonnée, ce lieu est une droite parallèle à l'axe des x.

Si A = 0, il reste

$$Bx + C = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{C}{B}.$$

Tous les points du lieu ayant alors la même abscisse, ce lieu est une droite parallèle à l'axe des y.

Les coefficients B et C *ou* A et C étant nuls, le lieu devient l'axe des x ou l'axe des y.

Les coefficients A et B ne peuvent pas être nuls à la fois, sans quoi C serait aussi égal à 0, et l'équation ne représenterait rien.

Enfin, si aucun coefficient n'est égal à zéro, l'équation peut s'écrire

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A},$$

c'est-à-dire en posant $-\frac{B}{A}=a$ et $-\frac{C}{A}=b$,

$$y=ax+b.$$

Construisons la droite $y=ax$. L'ordonnée d'un point quelconque de cette droite différera de l'ordonnée du lieu cherché, qui correspond à la même abscisse, de la quantité constante b. Par suite, pour passer des points de la droite $y=ax$ aux points du lieu représenté par l'équation $y=ax+b$, il faut faire varier toutes les ordonnées de la droite d'une même quantité b. Les nouveaux points se trouveront ainsi répartis sur une parallèle à la droite $y=ax$, menée à la distance b. L'équation $y=ax+b$ représente donc une droite qui ne passe pas par l'origine.

Remarque. — L'équation $y=ax+b$ n'est pas aussi générale que l'équation $Ay+Bx+C=0$, car elle ne peut représenter une droite parallèle à l'axe des y.

33. *Degré d'une ligne.* — La réciproque qu'on vient d'établir aurait pu l'être d'une autre manière.

Nous avons vu que la position des axes n'influait pas sur le degré de l'équation (24, 25).

Le degré d'une ligne est le degré de son équation : ce degré indique en combien de points elle peut être coupée par une droite. En effet, soit $F(x, y)=0$ l'équation de la courbe proposée lorsqu'on prend la droite sécante pour axe des x. Pour avoir les points d'intersection de la courbe avec la droite, il suffira de faire $y=0$ dans l'équation de la courbe supposée du degré m; on obtiendra ainsi une équation en x qui sera au plus du degré m et qui aura au plus m racines réelles, de sorte qu'on ne pourra avoir plus de m points d'intersection.

Si l'équation en x était satisfaite pour plus de m valeurs de x, elle se réduirait à une identité (*Compl. d'Alg.*, 177), et la droite sécante ferait alors partie du lieu, puisque tous ses points satisferaient à l'équation du lieu. Dans ce cas, le premier membre de l'équation $F(x, y)=0$ devenant identiquement nul pour $y=0$, on pourrait y mettre y en facteur, et l'équation proposée se décomposerait en deux équations, l'une $y=0$ du premier degré, l'autre $f(x, y)=0$ du degré $m-1$.

Toute équation du degré m peut donc représenter une ligne du degré m ou plusieurs lignes d'un degré inférieur, la somme des degrés partiels devant toujours être égale à m. Une équation du troisième degré peut, par exemple, représenter une ligne du premier degré jointe à une ligne du second degré.

Ceci posé, il suffit de remarquer, pour démontrer notre ré-

ciproque, que les lignes du premier degré (c'est-à-dire représentées par les équations du premier degré) ne pouvant être coupées par une droite en plus d'un point, sont nécessairement des lignes droites.

On classe ordinairement les lignes algébriques d'après le degré de leurs équations; mais cette classification ne repose sur aucun caractère réellement scientifique, et on ne doit l'adopter que faute d'une meilleure, impossible encore à formuler.

Remarque. — Dans tous les degrés, une équation *homogène* par rapport à x et à y représente autant de droites passant par l'origine, que l'équation en z obtenue en posant $y = zx$ admet de racines réelles et inégales.

34. *Interprétation des coefficients de l'équation de la droite.* — Nous avons trouvé pour l'équation générale d'une droite non parallèle à l'axe des y,

$$y = ax + b.$$

La constante b est l'ordonnée du point où la droite rencontre l'axe des y (*fig.* 10) : cette constante a reçu le nom d'*ordonnée à l'origine.*

La constante a, *qui reste la même pour toutes les droites parallèles,* a reçu le nom de *coefficient angulaire.*

En désignant par α l'angle de la partie de la droite qui s'étend au-dessus de l'axe des x avec la partie positive de cet axe (angle qui peut varier de 0 à π), on a, d'après la *fig.* 10,

$$a = \frac{MP}{OP} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)};$$

et il est facile de s'assurer que cette relation est générale. Si l'on considère la *fig.* 11, on a en effet

$$a = \frac{MP}{-OP} = \frac{\sin\alpha}{-\sin(\alpha - \theta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Lorsque les axes sont rectangulaires, on a

$$\sin(\theta - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad a = \operatorname{tang}\alpha.$$

Ainsi, *dans le cas des axes obliques, le coefficient angulaire de la droite est égal au rapport des sinus des angles* α *et* $\theta - \alpha$; *dans le cas des axes rectangulaires, ce coefficient est égal à la tangente trigonométrique de l'angle formé par la partie de la droite qui s'étend au-dessus de l'axe des* x *avec la partie positive de cet axe.*

35. Quand les axes sont rectangulaires, la relation $\operatorname{tang}\alpha = a$

fait immédiatement connaître l'angle de la droite donnée avec l'axe des x.

Quand les axes sont obliques, on déduit de la relation

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$$

$$a\sin\theta\cos\alpha - a\cos\theta\sin\alpha = \sin\alpha,$$

d'où, en divisant par $\cos\alpha$,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta}.$$

Si l'on veut obtenir une formule calculable par logarithmes, on écrit

$$\frac{a}{1} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

d'où (*Trig.*, 26)

$$\frac{a-1}{a+1} = \frac{\sin\alpha - \sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha + \sin(\theta-\alpha)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\alpha - \frac{1}{2}\theta\right)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta}.$$

Il en résulte

$$\operatorname{tang}\left(\alpha - \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{a-1}{a+1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta.$$

Cette formule permettra de calculer, dans le cas des axes obliques, l'angle de la droite donnée avec l'axe des x.

36. *Pour construire une droite, lorsqu'elle est représentée par une équation à coefficients numériques*, le mieux est de déterminer les points où elle rencontre les deux axes.

Soit l'équation

$$3x - 5y = 7.$$

En faisant $y = 0$, on trouve $x = \frac{7}{3}$ pour l'abscisse du point où la droite coupe l'axe des x (abscisse qu'on peut appeler *abscisse à l'origine*); en faisant $x = 0$, on trouve $y = -\frac{7}{5}$ pour l'ordonnée de la droite à l'origine. On portera donc à l'échelle adoptée et à partir de l'origine, sur la partie positive de l'axe des x la longueur $\frac{7}{3}$, sur la partie négative de l'axe des y la longueur $\frac{7}{5}$; puis on joindra les deux points obtenus par une droite, qui sera la droite demandée.

Soit encore l'équation

$$2x - 9y = 0.$$

La droite représentée par cette équation passe par l'origine. Pour $x = 5$, on a

$$y = \frac{10}{9}.$$

On construira donc le point $\left(x = 5, y = \frac{10}{9}\right)$, et on le joindra à l'origine par une droite, qui sera la droite cherchée.

37. *Autres formes de l'équation de la droite.* — Reprenons l'équation

$$y = ax + b.$$

En faisant $x = 0$ dans cette équation, on obtient

$$y = b;$$

en faisant $y = 0$, on obtient

$$x = -\frac{b}{a}.$$

L'ordonnée à l'origine est donc b, l'abscisse à l'origine est $-\frac{b}{a}$. Posons

$$-\frac{b}{a} = p \quad \text{et} \quad b = q;$$

nous aurons

$$a = -\frac{q}{p}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation proposée, elle deviendra

$$y = -\frac{q}{p}x + q,$$

d'où

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1.$$

Lorsque l'équation de la droite est sous cette forme très-symétrique, on peut la construire immédiatement (36).

Soit la droite AB (*fig.* 12). Abaissons de l'origine sur cette droite la perpendiculaire $OD = p$, et désignons par α l'angle formé par cette perpendiculaire avec l'axe des x. Prenons un point M quelconque sur la droite; les coordonnées de ce point étant MP et OP, projetons le chemin OPM sur la direction OD.

Nous aurons, en appelant θ l'angle des axes et en remarquant que la projection cherchée est évidemment égale à OD,

$$x\cos\alpha + y\cos(\theta - \alpha) = p.$$

Si les axes sont rectangulaires, cette nouvelle forme de l'équation de la droite devient

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

38. *Équation de la ligne droite en coordonnées polaires.* — Soit la droite AB (*fig.* 13) qui coupe l'axe polaire à une distance OA du pôle égale à d. Soit M un point quelconque de AB. Le triangle MOA donne immédiatement, en appelant α l'angle de l'axe polaire et de la perpendiculaire $OD = p$ abaissée du pôle sur AB,

$$\frac{OM}{OA} = \frac{\sin OAM}{\sin OMA} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha - \omega)},$$

c'est-à-dire

$$\rho = \frac{d\cos\alpha}{\cos(\alpha - \omega)}.$$

On peut remplacer $d\cos\alpha$ par p, et l'équation prend la forme un peu plus simple

$$\rho = \frac{p}{\cos(\alpha - \omega)}.$$

Cette équation, qui donne

$$\rho = \frac{p}{\cos\alpha\cos\omega + \sin\alpha\sin\omega},$$

rentre dans le type général

$$\rho = \frac{C}{B\cos\omega + A\sin\omega}.$$

Réciproquement, en coordonnées polaires, une pareille équation représente toujours une droite. Si l'on multiplie en effet ses deux membres par $\cos\omega$, on peut la mettre sous la forme

$$\rho\cos\omega = \frac{C}{B + A\operatorname{tang}\omega}.$$

On a d'ailleurs

$$\rho\cos\omega = x, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x} \ (28),$$

d'où

$$x = \frac{C}{B + \frac{Ay}{x}} \quad \text{et} \quad Ay + Bx = C.$$

Nota. — Si la droite proposée passe par le pôle, son équation est simplement

$$\omega = \text{constante}.$$

39. *Remarque.* — L'équation de la ligne droite, soit en coordonnées rectilignes, soit en coordonnées polaires, renferme toujours *deux* constantes arbitraires. Et cette particularité aurait lieu dans tout autre système de coordonnées, en vertu du nombre de points nécessaires à la détermination de la ligne considérée. Pour qu'une droite soit déterminée, il faut donc la soumettre à deux conditions distinctes qui serviront à calculer les valeurs des deux constantes pour la position particulière de la droite.

Questions relatives à la ligne droite.

40. I. *Trouver l'équation générale des droites qui passent par un point donné.*

Les coordonnées étant rectilignes, soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite quelconque. Si cette droite doit passer par le point (x', y'), son équation devra être satisfaite par les coordonnées de ce point. On aura donc

$$y' = ax' + b.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les constantes ou *paramètres* a et b pour que la droite considérée remplisse la condition imposée.

Pour introduire cette condition dans l'équation générale, il faut exprimer b en fonction de a et des coordonnées x' et y', ou, ce qui revient au même, éliminer b par soustraction entre les équations

$$y = ax + b, \quad y' = ax' + b.$$

Il viendra

$$y - y' = a(x - x').$$

Quand on fait $y = y'$ et $x = x'$, cette équation est satisfaite, quel que soit a. En faisant varier a, on obtient toutes les droites qui passent par le point donné.

Remarques. — 1° L'équation $y - y' = a(x - x')$ peut représenter toutes les droites du plan qui passent par le point donné, sauf celle qui est parallèle à l'axe des y, puisque a devient infini. Pour lever cette difficulté, on peut poser d'abord

$$a = \frac{m}{n};$$

ce qui conduit à l'équation

$$n(y - y') = m(x - x').$$

Si l'on suppose alors $n = 0$, c'est-à-dire $a = \infty$, il vient

$$x = x',$$

équation de la parallèle menée à l'axe des y par le point donné.

2° L'équation $y - y' = a(x - x')$ représente la parallèle menée par le point (x', y') à la droite déterminée $y = ax + b$ (34).

41. II. *Trouver l'équation de la droite déterminée par deux points donnés.*

Soient (x', y'), (x'', y''), les deux points donnés. L'équation générale des droites qui passent par le premier point est (40)

$$y - y' = a(x - x').$$

L'équation de celle de ces droites qui passe par le second point donné, doit être satisfaite par les coordonnées de ce point. On aura donc l'équation de condition

$$y'' - y' = a(x'' - x'),$$

qui déterminera immédiatement la seule constante restée arbitraire. Le plus simple est alors d'éliminer a par division, et il vient

$$\frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{x - x'}{x'' - x'}, \quad \text{ou} \quad y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

Remarques. — 1° Le coefficient angulaire d'une droite passant par deux points donnés est égal au rapport qui existe entre la différence de leurs ordonnées et celle de leurs abscisses.

2° Si l'on suppose $y' = 0$ et $x'' = 0$, il vient

$$y = \frac{y''}{-x'}(x - x'),$$

d'où

$$\frac{y}{y''} + \frac{x}{x'} = 1,$$

comme cela doit être (37).

3° Si l'on suppose $y'' = -y'$ et $x'' = -x'$, il vient

$$y - y' = \frac{-2y'}{-2x'}(x - x'),$$

d'où

$$y = \frac{y'}{x'}x,$$

équation d'une droite passant par l'origine (3).

4° Si plusieurs points sont en ligne droite, les coefficients angulaires des droites qui passent par deux quelconques des points considérés doivent être identiques. On aura, par exemple, pour trois points (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''),

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{y'''-y''}{x'''-x''},$$

c'est-à-dire que, *pour que plusieurs points soient en ligne droite, il faut que les différences de leurs ordonnées et celles de leurs abscisses soient proportionnelles.*

42. III. *Trouver le point d'intersection de deux droites données.*

Soient les deux droites

$$y=ax+b, \quad y=a'x+b'.$$

Les coordonnées du point d'intersection de ces droites se distinguent des coordonnées de tous leurs autres points par cette condition, qu'*elles seules peuvent satisfaire simultanément aux équations des deux droites.* Dès lors, la question devient une simple opération algébrique consistant à chercher les solutions communes aux deux équations proposées. *Et cette manière de procéder, tout à fait générale, s'appliquera aux lignes quelconques.*

En éliminant d'abord y par soustraction, on obtient

$$x=\frac{b'-b}{a-a'}.$$

Il vient ensuite, par substitution,

$$y=\frac{ab'-ba'}{a-a'}.$$

Remarques. — 1° Si l'on a $a=a'$, sans que b soit égal à b', on trouve pour x et pour y des valeurs infinies. En effet, les deux droites données sont parallèles.

2° Si l'on a en même temps $a=a'$ et $b=b'$, on a aussi

$$ab'=ba',$$

et les valeurs de x et de y se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. En effet, les deux droites données sont alors confondues.

3° Si les équations proposées sont de la forme

$$Ay+Bx+C=0, \quad A'y+B'x+C'=0,$$

il faut remplacer a et a' par $-\frac{B}{A}$ et $-\frac{B'}{A'}$, b et b' par

$-\frac{C}{B}$ et $-\frac{C'}{B'}$. Il vient dans ce cas, pour les coordonnées du point d'intersection des deux droites,

$$x=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'},\quad y=\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'}.$$

4° La condition *pour que trois droites soient concourantes* s'obtiendra en exprimant que les coordonnées du point d'intersection des deux premières droites satisfont à l'équation de la troisième. Et, comme pour une droite, à une abscisse déterminée correspond une seule ordonnée, il suffira d'écrire que l'abscisse du point d'intersection des deux premières droites est égale à celle du point d'intersection de la première et de la troisième. Si les équations des trois droites sont

$$y=ax+b,\quad y=a'x+b',\quad y=a''x+b'',$$

il viendra donc

$$\frac{b'-b}{a-a'}=\frac{b''-b}{a-a''}\quad\text{ou}\quad\frac{a-a'}{a-a''}=\frac{b-b'}{b-b''}.$$

Ainsi, *pour que trois droites soient concourantes, il faut et il suffit qu'il y ait proportionnalité entre les différences de leurs coefficients angulaires et celles de leurs ordonnées à l'origine.*

43. IV. *Trouver l'équation générale des droites qui passent par le point de concours de deux droites données.*

Pour répondre immédiatement à cette question, il suffit de réunir les solutions des problèmes I et III; mais il est préférable d'opérer de la manière suivante. Soient

$$y=ax+b,\quad y=a'x+b',$$

les équations des deux droites données. Mettons-les sous la forme

$$(1)\qquad y-ax-b=0,$$

$$(2)\qquad y-a'x-b'=0.$$

Ajoutons-les membre à membre, après avoir multiplié la seconde par un coefficient indéterminé m. Nous obtiendrons

$$(3)\qquad (y-ax-b)+m(y-a'x-b')=0.$$

Cette équation étant du premier degré représente une droite; cette droite est quelconque, puisque le coefficient m reste

indéterminé; elle passe par le point de concours des deux droites données, puisque les coordonnées de ce point de concours annulent nécessairement les deux parenthèses qui composent l'équation (3).

Si, parmi les droites considérées, il s'agit de celle qui passe en outre par un point (x', y'), on aura l'équation de condition

$$(y' - ax' - b) + m(y' - a'x' - b') = 0,$$

d'où l'on déduira

$$m = -\frac{y' - ax' - b}{y' - a'x' - b'}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (3), il viendra

$$\frac{y - ax - b}{y' - ax' - b} = \frac{y - a'x - b'}{y' - a'x' - b'}. \tag{4}$$

Cette équation, qui représente la droite passant par un point donné et par le point de concours de deux droites données, est facile à retenir. Les premiers membres des équations des deux droites forment les numérateurs de l'expression, les dénominateurs se déduisent des numérateurs en y remplaçant y et x par les coordonnées y' et x' du point donné.

Remarques. — 1° On peut déduire de ce qui précède la condition pour que trois droites soient concourantes. Soient les trois droites

$$y - ax - b = 0, \quad y - a'x - b' = 0, \quad y - a''x - b'' = 0.$$

L'équation générale des droites qui passent par le point de concours des deux premières droites est

$$(y - ax - b) + m(y - a'x - b') = 0.$$

La troisième droite satisfaisant à la condition indiquée, son équation doit pouvoir s'identifier avec l'équation générale, de sorte qu'on aura

$$a'' = \frac{a + ma'}{1 + m} \quad \text{et} \quad b'' = \frac{b + mb'}{1 + m}.$$

En éliminant m entre ces deux relations, on obtiendra la condition déjà trouvée (42).

2° En général, *quand trois droites sont concourantes, on peut le reconnaître immédiatement à ce que l'équation de l'une d'elles résulte de la combinaison des équations des deux autres.*

Démontrons, par exemple, que *les médianes d'un triangle se coupent en un même point* (*Compl. de Géom.*, 20).

Soit le triangle ABC (*fig.* 14). Nous prendrons pour axes les côtés AB et BC. Posons

$$AB = p, \quad BC = q.$$

Les équations des trois médianes seront (37, 31) :

$$(AD) \qquad \frac{y}{\frac{q}{2}} + \frac{x}{p} = 1,$$

$$(CF) \qquad \frac{y}{q} + \frac{x}{\frac{p}{2}} = 1,$$

$$(BE) \qquad y = \frac{\frac{q}{2}}{\frac{p}{2}} x.$$

Or l'équation de la troisième médiane BE s'obtient immédiatement en retranchant l'équation de AD de l'équation de CF; par suite, le point de concours des médianes AD et CF se trouve sur BE (*Alg. élém.*, 130).

44. V. *Trouver l'angle de deux droites.*

Soient

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b',$$

les équations des deux droites données. Par l'origine et au-dessus de l'axe des x, menons à ces droites les parallèles OA, OA′ (*fig.* 15). Elles feront le même angle V que les droites proposées. Soient α et α' les angles de OA et de OA′ avec la partie positive de l'axe des x. Si l'on a

$$\alpha' > \alpha,$$

on pourra écrire

$$V = \alpha' - \alpha,$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'}.$$

Si les axes sont rectangulaires, on a (35)

$$\operatorname{tang}\alpha = a, \quad \operatorname{tang}\alpha' = a',$$

et il vient

$$\operatorname{tang} V = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Si les axes sont obliques, on a (35)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\vartheta}{1+a\cos\vartheta}, \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{a'\sin\vartheta}{1+a'\cos\vartheta},$$

et il vient, en substituant,

$$\operatorname{tang} V = \frac{(a'-a)\sin\vartheta}{1+aa'+(a+a')\cos\vartheta}.$$

Remarques. — 1° Si les deux droites considérées sont perpendiculaires entre elles, on a

$$\operatorname{tang} V = \infty.$$

La condition de perpendicularité de deux droites dans un plan est donc : dans le cas des axes obliques,

$$1+aa'+(a+a')\cos\vartheta = 0;$$

dans le cas des axes rectangulaires,

$$1+aa' = 0.$$

Dans ce dernier cas, qui est le plus usuel, *les coefficients angulaires des deux droites doivent donc former un produit égal à* -1.

2° A l'inspection des équations données, on peut juger quelle est celle des deux droites OA, OA', qui fait le plus grand angle avec la partie positive de l'axe des x.

D'ailleurs, eu égard à la question proposée, il y aurait peu d'inconvénient à oublier cette remarque; car les deux droites considérées faisant deux angles supplémentaires l'un de l'autre, peu importe de trouver l'angle $180° - V$, au lieu de l'angle V.

3° Nous avons dit que (les axes étant rectangulaires) la condition de perpendicularité de deux droites se réduisait à

$$1+aa' = 0.$$

Mais on aurait encore

$$\operatorname{tang} V = \infty,$$

si le numérateur de l'expression $\operatorname{tang} V = \frac{a'-a}{1+aa'}$ était infini, le dénominateur ne l'étant pas. Dans ce cas, a' ou a serait infini. Si a', par exemple, est infini, la droite OA' se confond avec l'axe des y. En divisant les deux termes de la valeur de tang V par a', il vient

$$\operatorname{tang} V = \frac{1-\frac{a}{a'}}{\frac{1}{a'}+a},$$

d'où, en faisant $a' = \infty$,

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{a}.$$

Cette expression ne peut être infinie que pour $a = 0$, et alors la seconde droite OA se confond avec l'axe des x. Les valeurs $a = 0$ et $a' = \infty$ satisfont au reste à la relation

$$1 + aa' = 0.$$

Cette relation exprime donc l'unique condition de perpendicularité.

45. VI. *D'un point donné, abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée, et trouver la longueur de cette perpendiculaire* (*fig.* 16).

Soit la droite AB ayant pour équation

$$y = ax + b;$$

soit le point M dont les coordonnées sont x', y'. L'équation de la perpendiculaire MD abaissée du point M sur la droite AB sera de la forme (**40**)

$$y - y' = a'(x - x').$$

Les axes étant supposés rectangulaires, on devra avoir (**44**, 1°)

$$a' = -\frac{1}{a}.$$

L'équation de la perpendiculaire MD sera donc

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Pour obtenir sa longueur, nous considérerons le triangle rectangle MDQ, qui nous donnera, α étant l'angle de la droite AB avec la partie positive de l'axe des x,

$$MD = MQ \cos\alpha.$$

Mais

$$MQ = MP - QP.$$

MP est l'ordonnée y' du point M, QP est l'ordonnée de la droite AB, qui correspond à l'abscisse $OP = x'$. On a donc

$$QP = ax' + b.$$

Par suite,

$$MQ = y' - ax' - b.$$

D'ailleurs

$$\operatorname{tang}\alpha = a \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Il viendra finalement

$$MD = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

MD étant une distance absolue, on donnera au radical $\sqrt{1+a^2}$ le signe du numérateur $y' - ax' - b$. Suivant que le point M sera au-dessus ou au-dessous de la droite AB, on aura MP ou $y' >$ ou $<$ que QP ou $ax' + b$. On donnera, par conséquent, au radical le signe + ou le signe − suivant que le point M sera au-dessus ou au-dessous de la droite AB.

Si les axes coordonnés étaient obliques, on aurait

$$MD = MQ \sin(\vartheta - \alpha), \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{a \sin\vartheta}{1 + a\cos\vartheta},$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{1 + a\cos\vartheta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{a\sin\vartheta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}}.$$

Il viendra donc

$$\sin(\vartheta - \alpha) = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}}$$

et, par suite,

$$MD = \frac{(y' - ax' - b)\sin\vartheta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}}.$$

Le signe du radical dépendra toujours de la position du point M par rapport à la droite AB.

Cette formule et la précédente sont faciles à retenir: $y' - ax' - b$ représentant le premier membre de l'équation $y - ax - b = 0$, dans lequel y et x sont remplacés par y' et x'.

Remarques. — 1° Si l'on veut avoir la distance de l'origine à la droite $y = ax + b$, il faut, dans les formules obtenues, faire

$$y' = x' = 0.$$

Il vient alors pour la distance cherchée : *dans le cas des axes rectangulaires*,

$$\frac{-b}{\sqrt{1 + a^2}};$$

dans le cas des axes obliques,

$$\frac{-b\sin\vartheta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\vartheta}}.$$

2° Si l'équation de la droite AB est donnée sous la forme

$Ay+Bx+C=0$, il faut remplacer a par $-\frac{B}{A}$ et b par $-\frac{C}{A}$. Les deux formules trouvées deviennent dans ce cas

$$MD=\frac{Ay'+Bx'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad MD=\frac{(Ay'+Bx'+C)\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}.$$

3° Il est facile, d'après ce qui précède, de *trouver l'équation de la bissectrice de l'angle de deux droites*

$$y=ax+b, \quad y=a'x+b'.$$

Ces deux droites forment deux angles supplémentaires dont les bissectrices sont à angle droit. Les distances d'un point quelconque (x,y) de la première bissectrice aux deux droites ont pour expressions

$$\frac{y-ax-b}{\pm\sqrt{1+a^2}} \quad \text{et} \quad \frac{y-a'x-b'}{\mp\sqrt{1+a'^2}},$$

les signes supérieurs ou inférieurs des deux radicaux devant être pris ensemble. Pour la seconde bissectrice, on a au contraire

$$\frac{y-ax-b}{\pm\sqrt{1+a^2}} \quad \text{et} \quad \frac{y-a'x-b'}{\pm\sqrt{1+a'^2}},$$

les signes supérieurs ou inférieurs des deux radicaux devant toujours être pris ensemble. Les deux bissectrices ayant tous leurs points à égale distance des droites considérées, seront donc représentées par l'équation

$$\frac{y-ax-b}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{y-a'x-b'}{\pm\sqrt{1+a'^2}}.$$

On peut facilement vérifier la perpendicularité des deux bissectrices. Le coefficient angulaire de la première est

$$\frac{a\sqrt{1+a'^2}-a'\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a'^2}-\sqrt{1+a^2}};$$

le coefficient angulaire de la seconde est

$$\frac{a\sqrt{1+a'^2}+a'\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a'^2}+\sqrt{1+a^2}}.$$

Si l'on fait le produit de ces deux coefficients, on obtient en simplifiant

$$\frac{a^2-a'^2}{a'^2-a^2}=-1.$$

La définition de la bissectrice donne immédiatement pour équations des bissectrices des angles formés par les axes

$$y = x \quad \text{et} \quad y = -x.$$

On retrouverait ces résultats en introduisant dans la relation générale qu'on vient de démontrer, les conditions

$$a = b = b' = 0 \quad \text{et} \quad a' = \infty .$$

Si les équations des deux droites proposées étaient de la forme

$$Ay + Bx + C = 0, \quad A'y + B'x + C' = 0,$$

l'équation des bissectrices deviendrait

$$\frac{Ay + Bx + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'y + B'x + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Notons à ce sujet, comme nous l'avons déjà remarqué, que l'équation $y = ax + b$ ne peut pas représenter une droite parallèle à l'axe des y.

EXERCICES.

46. 1° *Mener par un point donné une droite qui forme un angle donné avec une droite donnée.*

Soient $y = ax + b$ la droite donnée et (x', y') le point donné. L'équation de la droite cherchée sera de la forme

$$y - y' = a'(x - x').$$

C'est a' qui est indéterminé. Soit m la tangente de l'angle donné. On devra avoir (44), les axes étant supposés rectangulaires,

$$m = \frac{a - a'}{1 + aa'} \quad \text{ou} \quad m = \frac{a' - a}{1 + aa'},$$

suivant que la droite demandée fera l'angle voulu au-dessous ou au-dessus de la droite donnée. On déduit de là

$$a' = \frac{a - m}{1 + ma} \quad \text{ou} \quad a' = \frac{m + a}{1 - ma},$$

relations qu'on pourrait écrire immédiatement, en remarquant que l'angle de la droite cherchée avec l'axe des x est égal à la différence ou à la somme de l'angle de la droite donnée avec le même axe et de l'angle imposé.

Les deux solutions de la question seront donc renfermées dans l'équation

$$y - y' = \frac{a \mp m}{1 \pm ma}(x - x').$$

Les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble.

47. 2° *Trouver la surface d'un triangle en fonction des coordonnées de ses sommets.*

Soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les coordonnées des trois sommets. Prenons pour base le côté qui joint les points (x', y'), (x''', y'''). On aura, en désignant cette base par b (30),

$$b = \sqrt{(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2}.$$

La hauteur du triangle sera la perpendiculaire h abaissée du sommet (x'', y'') sur la base b. L'équation de la base b considérée comme droite indéfinie étant

$$y - y' = \frac{y''' - y'}{x''' - x'}(x - x'),$$

l'expression de la hauteur h sera (44, 45)

$$h = \frac{y'' - \frac{y''' - y'}{x''' - x'} \cdot x'' - \left(y' - \frac{y''' - y'}{x''' - x'} \cdot x'\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{y''' - y'}{x''' - x'}\right)^2}},$$

c'est-à-dire

$$h = \frac{(y'' - y')(x''' - x') - (y''' - y')(x'' - x')}{\sqrt{(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2}}.$$

La surface S du triangle ayant pour expression $\frac{1}{2}bh$, il viendra

$$S = \frac{1}{2}[(y'x'' - x'y'') + (y''x''' - x''y''') - (y'x''' - x'y''')].$$

48. 3° *Les bissectrices des angles d'un triangle concourent en un même point* (*Compl. de Géom.*, 22).

Soit le triangle ABC (*fig.* 17). Nous prendrons pour axe des x le côté AB et pour axe des y la perpendiculaire élevée par le sommet A au coté AB.

L'équation du côté AC sera de la forme

$$y = ax,$$

celle du côté BC de la forme

$$y = a'x + b',$$

celle du côté AB sera

$$y = 0.$$

D'après ce qui précède (45), l'équation de la bissectrice de l'angle CAB sera

$$\frac{y - ax}{-\sqrt{1 + a^2}} = y.$$

L'équation de la bissectrice de l'angle CBA sera

$$\frac{y - a'x - b'}{\sqrt{1 + a'^2}} = y.$$

Enfin, celle de la bissectrice de l'angle ACB sera

$$\frac{y - ax}{-\sqrt{1 + a^2}} = \frac{y - a'x - b'}{\sqrt{1 + a'^2}}.$$

Si l'on retranche les équations des deux premières bissectrices membre à membre, on tombe précisément sur l'équation de la troisième bissectrice : le théorème est donc démontré.

49. 4° *Dans tout triangle, le point de concours des trois médianes, le point de concours des trois hauteurs et le centre du cercle circonscrit, sont en ligne droite.*

Nous avons déjà prouvé (43, *Remarques*, 2°) que les médianes d'un triangle se coupaient en un même point. En suivant une marche identique, on prouverait que les trois hauteurs passent aussi par un même point, et qu'il en est de même des trois perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés.

Ceci posé, nous prendrons pour axes (*fig.* 18) le côté AB et la perpendiculaire élevée à ce côté par le sommet A. Nous désignerons par d la longueur AB, par p et q les coordonnées du sommet C. Les deux médianes correspondantes aux côtés BC et AC auront pour équations

$$y = \frac{\frac{q}{2}}{\frac{p+d}{2}}x \quad \text{et} \quad y - \frac{q}{2} = \frac{\frac{q}{2}}{\frac{p}{2} - d}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Les coordonnées du point d'intersection des trois médianes seront donc

$$x = \frac{p+d}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{q}{3}.$$

Les deux hauteurs correspondantes aux côtés AB et AC auront pour équations

$$x = p \quad \text{et} \quad y = -\frac{p}{q}(x - d).$$

Les coordonnées du point d'intersection des trois hauteurs seront donc

$$x = p \quad \text{et} \quad y = \frac{p(d-p)}{q}.$$

Enfin, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés AB et AC auront pour équations

$$x = \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad y - \frac{q}{2} = -\frac{p}{q}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Les coordonnées du point d'intersection des trois perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle seront donc

$$x = \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{q^2 + p^2 - pd}{2q}.$$

L'équation de la droite qui passe par les deux derniers points d'intersection est

$$y - \frac{p(d-p)}{q} = \frac{\frac{q^2+p^2-pd}{2q} - \frac{p(d-p)}{q}}{\frac{d}{2} - p}(x - p).$$

et on voit immédiatement que cette équation est satisfaite par les coordonnées du premier point d'intersection : le théorème est donc démontré.

Pour avoir le rapport des distances des points d'intersection considérés, il suffit, puisqu'ils sont en ligne droite, de chercher celui des différences de leurs abscisses. Or on a

$$\frac{p+d}{3}-\frac{d}{2}=\frac{2p-d}{6} \quad \text{et} \quad p-\frac{p+d}{3}=\frac{2p-d}{3}.$$

Donc, la distance qui sépare le point de rencontre des trois hauteurs de celui des médianes est *double* de la distance qui sépare le point de rencontre des médianes du centre du cercle circonscrit.

On arrive très-simplement aux mêmes résultats par la géométrie élémentaire. G étant le point de rencontre des médianes, I celui des trois hauteurs, O le centre du cercle circonscrit, la similitude des deux triangles ACI, DOE, donne

$$CI = 2DO.$$

Si l'on compare alors les deux triangles GOD, GIC, on voit que GC étant égal à 2GD, ces triangles sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. La ligne IGO est donc une seule et même droite, et l'on a

$$GI = 2GO.$$

30. 5° *On donne un angle* COD *et un point* A *hors de cet angle. On mène par ce point deux sécantes quelconques* ACD, AC'D', *et l'on joint diagonalement les points d'intersection* C *et* D', C' *et* D. *Ces droites se croisent en un point* M *dont on demande le lieu* (*fig.* 19).

Nous prendrons pour axes les deux côtés de l'angle COD, et nous désignerons par α et β les coordonnées du point A. Soient d et d' les distances indéterminées OD et OD'. L'équation de la sécante AD sera

$$y-\beta=\frac{\beta}{\alpha-d}(x-\alpha);$$

celle de la sécante AD' sera

$$y-\beta=\frac{\beta}{\alpha-d'}(x-\alpha).$$

Pour avoir OC et OC', il suffira de faire $x=0$ dans ces équations. On trouvera ainsi

$$OC=\frac{\beta d}{d-\alpha}, \quad OC'=\frac{\beta d'}{d'-\alpha}.$$

Par suite, les équations des deux droites CD' et C'D qui sont

$$\frac{y}{OC}+\frac{x}{OD'}=1 \quad \text{et} \quad \frac{y}{OC'}+\frac{x}{OD}=1,$$

deviendront

$$\frac{y(d-\alpha)}{\beta d}+\frac{x}{d'}=1 \qquad (1)$$

et

$$\frac{y(d'-\alpha)}{\beta d'}+\frac{x}{d}=1. \qquad (2)$$

Les valeurs de y et de x qui satisferont à la fois à ces deux équations seront les coordonnées du point M (42). Ce qui particularise le point M, ce sont les valeurs de d et de d'. Si l'on parvient à éliminer d et d' entre les équations obtenues (ce qu'on ne pourra faire qu'en y attribuant par la pensée les mêmes valeurs à y et à x), on obtiendra une relation constante entre les coordonnées y et x d'un point quelconque du lieu géométrique indiqué, c'est-à-dire l'équation même de ce lieu.

On peut mettre les équations (1) et (2) sous la forme

$$d'(d-\alpha)y+\beta dx=\beta dd',$$
$$d(d'-\alpha)y+\beta d'x=\beta dd'.$$

Si on les retranche membre à membre, il vient

$$(d-d')(\alpha y+\beta x)=0. \tag{3}$$

Tant que d est différent de d', l'équation (3) revient à

$$\alpha y+\beta x=0, \tag{4}$$

qui est l'équation du lieu. Ce lieu est donc une ligne droite passant par l'origine et facile à construire.

On déduit, en effet, de l'équation (4)

$$y=-\frac{\beta}{\alpha}x,$$

et, pour $x=-\alpha$, on a

$$y=\beta.$$

Donc, par le point A, on mènera une parallèle AL à l'axe des x, on prendra sur cette parallèle LA′ = LA, et l'on tracera la droite OA′. C'est précisément la règle que nous avons donnée (*Compl. de Géom.*, 28) pour trouver la quatrième droite d'un faisceau harmonique.

En se reportant à ce que nous avons déjà dit (*Compl. de Géom.*, 29, 30), le point A est le *pôle* de la droite OA′, et la droite OA′ est la *polaire* du point A par rapport à l'angle COD.

L'équation (4) ne dépendant que du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ ou du coefficient angulaire de la droite OA, le lieu du point M reste le même tant que le point A demeure sur la droite OA, c'est-à-dire que la droite OA′ est la polaire de tous les points de OA.

Réciproquement, la droite OA est la polaire de tous les points de OA′; en d'autres termes, si par un point M pris sur OA′ on mène les sécantes CD′ et C′D jusqu'aux côtés de l'angle COD, puis qu'on joigne les points d'intersection C et D, C′ et D′, les droites obtenues CD, C′D′, iront se croiser sur OA. En effet, d'après ce qui précède, α' et β' étant les coordonnées d'un point quelconque de OA′, la polaire de ce point aura pour équation

$$\alpha' y+\beta' x=0 \quad \text{ou} \quad y=-\frac{\beta'}{\alpha'}x.$$

Mais on aura aussi, d'après l'équation (4),

$$\alpha\beta'+\beta\alpha'=0 \quad \text{ou} \quad \frac{\beta'}{\alpha'}=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

L'équation de la polaire du point (x', y') sera donc

$$y = \frac{y'}{x'} x,$$

c'est-à-dire que cette polaire sera la droite OA.

51. *Remarque sur la recherche des lieux géométriques par l'analyse.* — Lorsque la réponse à un problème de géométrie consiste dans la détermination d'un ou plusieurs points isolés, le calcul appliqué à ce problème conduit finalement à deux équations

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0,$$

où les seules inconnues sont les coordonnées des points cherchés. On peut alors résoudre ces deux équations ou construire les courbes qu'elles représentent isolément lorsqu'on y considère y et x comme des coordonnées variables ou *courantes* : dans ce dernier cas, les différents points d'intersection des courbes tracées sont les points demandés, puisque les coordonnées de ces points représentent les seuls couples de valeurs communes aux deux équations.

Mais il peut arriver que le problème admette une infinité de solutions ou qu'une infinité de points disposés d'une manière continue dans le plan de la figure répondent à la question. Il ne s'agit plus alors de la détermination d'un ou plusieurs points isolés, mais bien de celle d'un lieu géométrique. Dans ce cas, le problème soumis à l'analyse conduit *en général* à un nombre d'équations inférieur d'une unité à celui des inconnues. Ces inconnues sont, d'une part les coordonnées y et x d'un point quelconque du lieu cherché, et de l'autre les n inconnues auxiliaires ou *paramètres* variables $a, b, c, \ldots$, qui entraînent par leurs modifications les changements de situation des lignes dont la combinaison détermine le lieu. Ayant $n + 1$ équations entre les $n + 2$ inconnues, on élimine, s'il est possible, les n paramètres $a, b, c, \ldots$, et l'on arrive à une équation ne contenant plus que les inconnues principales y et x. Cette équation, représentant une relation constante entre les coordonnées d'un point quelconque du lieu demandé, est l'équation même de ce lieu.

Il peut se faire qu'on ait seulement n équations pour $n + 2$ inconnues. Par exemple, dans le problème précédent (50), on a obtenu deux équations contenant les quatre inconnues y, x, d, d'; mais les paramètres d et d' n'étant soumis à aucune condition spéciale, c'est-à-dire étant complétement indépendants l'un de l'autre, doivent, si le lieu existe, disparaître forcément par le jeu même du calcul. C'est en effet ce qui arrive.

CHAPITRE V.

THÉORIE DE LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

52. La définition élémentaire de la circonférence comme lieu des points à égale distance d'un point intérieur nommé centre, permet de poser immédiatement son équation.

Supposons (*fig.* 20) les axes rectangulaires. Soit M ou (x, y) un point quelconque de la circonférence; soient C ou (α, β) son centre et r son rayon. On aura, d'après la formule de la distance de deux points et pour tous les points du lieu,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2. \tag{1}$$

Si le centre est sur l'axe des x, on a $\beta=0$; si, de plus, la circonférence passe par l'origine, on a $\alpha=r$, et l'équation (1) devient

$$x^2+y^2-2rx=0.$$

Si le centre est à l'origine, $\beta=\alpha=0$, et l'on a simplement

$$x^2+y^2=r^2.$$

Reprenons l'équation la plus générale, c'est-à-dire l'équation (1). En la développant, on peut la mettre sous la forme (*)

$$x^2+y^2+ax+by+c^2=0,$$

et l'on voit qu'*en coordonnées rectangulaires, l'équation de la circonférence est une équation du second degré qui manque de terme en xy et où les coefficients des carrés des variables sont identiques.*

Réciproquement, *toute équation de la forme*

$$x^2+y^2+ax+by+c^2=0 \tag{2}$$

représente en coordonnées rectangulaires une circonférence de cercle, quand elle représente une ligne.

En effet, on peut écrire cette équation comme il suit :

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c^2.$$

Si l'on suppose le second membre positif et égal à r^2,

(*) Nous désignons le terme indépendant par c^2 pour faire apparaître l'homogénéité.

on obtient une circonférence ayant pour centre le point $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ et pour rayon r.

Si l'on a

$$\frac{a^2+b^2}{4} - c^2 = 0,$$

le premier membre étant la somme de deux carrés, l'équation ne peut être satisfaite que pour $x = -\frac{a}{2}$ et $y = -\frac{b}{2}$, c'est-à-dire que la circonférence se réduit à son centre.

Enfin, si l'on a $\frac{a^2+b^2}{4} - c^2 < 0$, l'équation est impossible et ne représente rien.

53. Supposons maintenant les axes obliques et soit θ leur angle. La formule de la distance de deux points donnera pour équation de la circonférence

$$(3) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta = r^2.$$

Cette équation est de la forme

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + ax + by + c^2 = 0.$$

L'équation du cercle en coordonnées obliques est donc une équation du second degré où les carrés des variables ont des coefficients identiques et où le produit des variables a pour coefficient deux fois le cosinus de l'angle des axes, lorsque les coefficients des carrés des variables ont été préalablement ramenés à l'unité.

Réciproquement, *toute équation de la forme*

$$(4) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + ax + by + c^2 = 0$$

représente en coordonnées obliques une circonférence de cercle, quand elle représente une ligne.

En effet, l'équation (3) développée donne

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2(\alpha + \beta\cos\theta)x - 2(\beta + \alpha\cos\theta)y + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - r^2 = 0;$$

et pour identifier l'équation (4) avec elle, il suffit de poser

$$\alpha + \beta\cos\theta = -\frac{a}{2}, \quad \beta + \alpha\cos\theta = -\frac{b}{2},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - r^2 = c^2.$$

Des deux premières équations, on déduit facilement

$$\alpha = \frac{b\cos\theta - a}{2\sin^2\theta}, \quad \beta = \frac{a\cos\theta - b}{2\sin^2\theta}.$$

La troisième devient alors

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}{4\sin^2\theta} - c^2.$$

Si l'on trouve pour r^2 une quantité positive, l'équation (4) représente une circonférence dont le centre a pour coordonnées α et β et dont le rayon est r.

Si l'on trouve pour r^2 une quantité nulle, l'équation (4) représente un point et la circonférence se réduit à son centre.

Si l'on trouve pour r^2 une quantité négative, l'équation (4) est impossible, parce que le carré de la distance de deux points ne peut pas être une quantité négative.

Pour construire l'equation (4) lorsqu'elle représente une circonférence de cercle, il n'est pas nécessaire de construire les valeurs de α et de β.

Soit, par exemple (*fig.* 21), C le centre cherché. Abaissons de ce centre sur les axes les perpendiculaires CP et CQ, menons en même temps les coordonnées CA et CB du point C. Nous aurons

$$OP = OA + AP = \alpha + \beta\cos\theta = -\frac{a}{2},$$

$$OQ = OB + BQ = \beta + \alpha\cos\theta = -\frac{b}{2}.$$

En prenant en signe contraire dans l'équation (4) les moitiés des coefficients des termes du premier degré, on aura donc les distances OP et OQ. Élevant alors respectivement par les points P et Q des perpendiculaires aux axes, ces perpendiculaires viendront se croiser au centre C.

La figure donne d'ailleurs

$$OC^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta,$$

c'est-à-dire, en vertu de la troisième relation d'identification entre les équations (3) et (4),

$$OC^2 - r^2 = c^2 \quad \text{ou} \quad r^2 = OC^2 - c^2.$$

On obtiendra donc r par un triangle rectangle, et la valeur de OC^2 comparée à celle de c^2 montrera immédiatement si la circonférence existe.

Lorsque c^2 est négatif, r^2 est toujours positif. Si $c^2 = 0$, le rayon se réduit à OC et la circonférence passe par l'origine.

Les axes étant toujours supposés obliques, si le centre est sur l'axe des x, on a $\beta = 0$; si, de plus, la circonférence passe

par l'origine, on a $\alpha = r$. L'équation (3) devient alors

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2rx - 2ry\cos\theta = 0.$$

Si le centre est à l'origine, $\beta = \alpha = 0$, et l'on a simplement

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = r^2.$$

54. *Équation polaire de la circonférence.* — Désignons par d et α les coordonnées polaires du centre C (*fig.* 22).

La formule de la distance de deux points nous donnera immédiatement, ρ et ω étant les coordonnées d'un point quelconque M de la circonférence,

$$\rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos(\omega - \alpha) = r^2$$

ou

$$\rho^2 - 2d\rho\cos(\omega - \alpha) + d^2 - r^2 = 0.$$

Si le centre du cercle est sur l'axe polaire, et si la circonférence passe au pôle, on a

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad d = r.$$

Par la suppression du facteur $\rho = 0$, l'équation prend alors la forme très-simple

$$\rho = 2r\cos\omega,$$

qu'on aurait pu trouver immédiatement en remarquant (*fig.* 23) que le triangle OMD est dans ce cas constamment rectangle.

Si la circonférence donnée passe par le pôle sans que son centre soit sur l'axe polaire, il faut simplement faire $d = r$ dans l'équation générale. Il vient alors, en supprimant le facteur $\rho = 0$,

$$\rho = 2d\cos(\omega - \alpha),$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$\rho = A\cos\omega + B\sin\omega,$$

en posant

$$2d\cos\alpha = A \quad \text{et} \quad 2d\sin\alpha = B.$$

Réciproquement, toute équation de la forme

$$\rho = A\cos\omega + B\sin\omega$$

représente une circonférence qui passe par le pôle et dont les coordonnées du centre sont déterminées par les relations

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{B}{A}$$

et

$$2d = 2r = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

55. *Remarque.* — Il est utile de remarquer que les équations les plus générales de la circonférence en coordonnées rectilignes ou polaires renferment *trois* constantes arbitraires : ce qui correspond précisément au nombre de points nécessaires pour l'entière détermination d'une pareille ligne (39).

Questions relatives à la circonférence.

56. *On peut facilement retrouver par l'analyse les propriétés élémentaires de la circonférence, déjà établies en géométrie.*

Lorsque la circonférence est rapportée à des axes rectangulaires passant par son centre, elle a pour équation

$$y^2 + x^2 = r^2, \tag{1}$$

d'où

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

A une même valeur de x correspondent donc deux valeurs de y égales et de signes contraires. Par suite, *tout diamètre divise la circonférence et le cercle en deux parties égales; tout diamètre perpendiculaire à une corde divise cette corde et les arcs qu'elle sous-tend en deux parties égales.*

L'équation (1) donne encore

$$y^2 = r^2 - x^2 = (r + x)(r - x).$$

Pour le point M (*fig.* 24),

$$y = \text{MP}, \quad x = \text{OP}, \quad r + x = \text{AP}, \quad r - x = \text{PB}.$$

On a donc d'une manière générale

$$\text{MP}^2 = \text{AP}.\,\text{PB},$$

c'est-à-dire que *la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.*

Menons la corde AM (*fig.* 24). Nous aurons

$$\text{AM}^2 = y^2 + (r + x)^2 = 2r(r + x),$$

en vertu de la relation

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

On aura donc d'une manière générale

$$\text{AM}^2 = \text{AB}.\,\text{AP},$$

c'est-à-dire que *toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre.*

Les équations des droites AM et BM sont de la forme

$$y = a(x + r), \quad y = a'(x - r).$$

On en déduit

$$a = \frac{y}{x + r}, \quad a' = \frac{y}{x - r}$$

et

$$aa' = \frac{y^2}{x^2 - r^2} = -1,$$

d'après l'équation de la circonférence. Les deux droites AM et BM sont donc perpendiculaires, c'est-à-dire que *tout angle inscrit dans une demi-circonférence est droit.*

57. *Tangente à la circonférence.* — Soient la circonférence $y^2 + x^2 = r^2$ et la droite $y = ax + b$. Cherchons les points d'intersection de ces deux lignes. Pour ces points et pour eux seulement, les équations proposées deviennent simultanées. Remplaçons donc dans l'équation de la circonférence y par $ax + b$. Il viendra

$$(ax + b)^2 + x^2 = r^2,$$

c'est-à-dire

$$(a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2 - r^2 = 0, \tag{1}$$

et les abscisses des points d'intersection seront données par la formule

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{(a^2 + 1)r^2 - b^2}}{a^2 + 1}.$$

Pour qu'il y ait intersection, x doit être réel, d'où la condition

$$(a^2 + 1)r^2 > b^2 \quad \text{ou} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} < r.$$

Il est facile d'interpréter ce résultat. $\frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}}$ représente la distance de l'origine ou du centre à la droite donnée (45, *Rem.*, 1°); si cette distance est plus petite que le rayon, la droite traversera la circonférence.

Si l'on a

$$(a^2 + 1)r^2 = b^2, \tag{2}$$

les deux racines de l'équation (1) deviennent égales, et la droite donnée est tangente à la circonférence, puisque ses deux points d'intersection se réunissent en un seul dont les

coordonnées sont

$$(3)\quad x_1 = \frac{-ab}{a^2+1}, \qquad (4)\quad y_1 = \frac{b}{a^2+1}.$$

L'équation de la tangente à la circonférence s'obtiendra, en fonction du seul coefficient angulaire a, en remplaçant b par la valeur $\pm r\sqrt{a^2+1}$ déduite de la relation (2) qui caractérise le contact. On aura ainsi pour cette équation

$$y = ax \pm r\sqrt{a^2+1},$$

et l'on voit qu'il existe toujours deux tangentes parallèles à une direction donnée.

La méthode qu'on vient d'indiquer est générale : elle s'applique toujours d'une manière simple aux courbes convexes.

Remarque. — On peut vouloir obtenir l'équation de la tangente, en fonction des coordonnées (x_1, y_1) du point de contact. On tire alors des relations (3) et (4) d'abord, puis des relations (2) et (4), en les divisant membre à membre,

$$\frac{x_1}{y_1} = -a, \quad \frac{r^2}{y_1} = b.$$

L'équation de la tangente $y = ax + b$ deviendra dans ce cas

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1},$$

c'est-à-dire

$$yy_1 + xx_1 = r^2.$$

58. On sait que la *normale* à une courbe quelconque est la perpendiculaire menée à la tangente par le point de contact. L'équation de la normale à la circonférence sera donc

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

ou, en réduisant,

$$y = \frac{y_1}{x_1}\cdot x,$$

équation d'une droite passant par l'origine ou par le centre. *Les normales à la circonférence se confondent donc avec ses rayons.*

59. Supposons (*fig.* 25) deux cordes AB et CD se coupant dans la circonférence au point O. Prenons ces cordes prolongées pour axes. L'équation de la circonférence sera alors de la forme

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + ax + by + c^2 = 0.$$

Pour avoir les points d'intersection de la courbe avec l'axe des x, il suffira de faire $y = 0$ dans son équation. On obtiendra

$$x^2 + ax + c^2 = 0.$$

Les racines de cette équation représentant les abscisses des points d'intersection cherchés, et le produit de ces racines étant c^2, on aura

$$OA \cdot OB = c^2.$$

De même, si l'on fait $x = 0$ dans l'équation de la circonférence, les ordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des y seront données par l'équation

$$y^2 + by + c^2 = 0,$$

de sorte qu'on aura

$$OC \cdot OD = c^2,$$

d'où

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Donc *le point d'intersection de deux cordes qui se coupent dans un cercle, détermine sur ces cordes des segments dont le produit est constant.*

On prouverait d'une manière identique que, *lorsque deux sécantes à la circonférence partent d'un même point extérieur, le produit d'une sécante entière par sa partie extérieure est constant.*

EXERCICES.

60. 1° *Soit proposé de mener à une circonférence* O *une tangente par un point extérieur* A (*fig.* 26).

Soient (α, β) les coordonnées du point donné **A**. La question est ici de déterminer les coordonnées x_1, y_1, du point de contact de la tangente cherchée; car on n'aura plus qu'à joindre ce point au point donné pour déterminer la tangente.

L'équation générale de la tangente est (57)

$$yy_1 + xx_1 = r^2.$$

Si elle passe par le point (α, β), on aura donc la relation

$$\beta y_1 + \alpha x_1 = r^2. \tag{1}$$

On doit avoir en outre

$$y_1^2 + x_1^2 = r^2. \tag{2}$$

Ces deux équations résolvent le problème, puisqu'elles ne renferment que les inconnues x_1, y_1. Mais, au lieu d'opérer analytiquement, on peut construire les lieux représentés par les équations (1) et (2) lorsqu'on

y regarde x_1 et y_1 comme des coordonnées courantes (51), et les points d'intersection de ces lieux seront les points demandés. Le premier de ces lieux est une droite facile à construire (qu'on appelle *corde des contacts*), le second est la circonférence donnée elle-même.

La condition de sécance est ici (57)

$$\frac{r^4}{\beta^2} < \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right) r^2 \quad \text{ou} \quad r^2 < \alpha^2 + \beta^2 :$$

ce qui revient à

$$r^2 < \text{OA}^2,$$

condition toujours satisfaite si le point A est extérieur à la circonférence.

Pour construire la droite MN ou corde des contacts, représentée par l'équation

$$\beta y_1 + \alpha x_1 = r^2,$$

nous déterminerons les points où elle coupe les axes en faisant successivement

$$x_1 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 = 0.$$

On obtient alors

$$y_1 \text{ ou } \text{OK} = \frac{r^2}{\beta} \quad \text{et} \quad x_1 \text{ ou } \text{OH} = \frac{r^2}{\alpha}.$$

Considérons spécialement la valeur $\text{OH} = \frac{r^2}{\alpha}$. Cette valeur ne dépend que de α : elle reste donc invariable, si le point extérieur A décrit la parallèle LL′ à l'axe des y, parallèle qui a pour équation $x = \alpha$. Réciproquement, si OH ne change pas, α ne pourra pas changer et le point A restera sur LL′. On est ainsi conduit à ces deux propositions :

Si par les différents points d'une même droite, on trace des couples de tangentes à une circonférence, les cordes de contact se croiseront toutes en un même point situé sur la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite.

Si par un même point pris dans le plan d'un cercle, on lui mène une série de sécantes, les points de rencontre des couples de tangentes menées à la circonférence par les points d'intersection correspondants, appartiennent à une même droite perpendiculaire à celle qui joint le centre au point donné.

En se reportant à ce que nous avons dit précédemment (*Compl. de Géom.*, 33, 34), on voit que la corde des contacts MN est la *polaire* du point A et que le point H est le *pôle* de la droite LL′.

Remarque I. — La considération de la corde des contacts, que nous généraliserons lorsque nous étudierons les courbes du second degré, est très-utile. On voit qu'on obtient son équation en remplaçant, dans l'équation de la tangente, les coordonnées variables par les coordonnées fixes du point extérieur, et en regardant, au contraire, comme coordonnées variables, les coordonnées du point de contact.

Remarque II. — Nous avons dit que les points de contact M et N étaient donnés par l'intersection de la droite $\beta y_1 + \alpha x_1 = r^2$ et du cercle $y_1^2 + x_1^2 = r^2$. Si l'on retranche membre à membre ces deux équations, la nouvelle équation obtenue pourra remplacer l'une d'elles, c'est-à-dire que le lieu représenté par cette dernière équation passera par les

points d'intersection des deux précédents (*Alg. élém.*, 130). On trouve ainsi

$$y_1^2 + x_1^2 - \beta y_1 - \alpha x_1 = 0$$

ou

$$\left(y_1 - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(x_1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4},$$

équation d'une circonférence décrite sur OA comme diamètre; ce qui ramène à la construction indiquée en géométrie élémentaire (82).

61. 2° *Étant données deux circonférences concentriques, on mène à la première une tangente qui est sécante à la seconde; trouver le lieu des points d'intersection des couples de tangentes qui correspondent aux extrémités des sécantes ainsi déterminées* (*fig.* 27).

Nous rapporterons les deux circonférences r et r' à des axes rectangulaires passant par leur centre commun. Menons à la petite circonférence r la tangente AB dont le point de contact N a pour coordonnées x_1 et y_1; par les points A et B où elle coupe la seconde circonférence r', menons à cette même circonférence les tangentes AM et BM. On demande le lieu du point M dont nous représenterons les coordonnées variables par α et β.

L'équation de la droite AB, considérée comme une tangente à la petite circonférence, sera

$$yy_1 + xx_1 = r^2.$$

L'équation de cette même droite, considérée comme corde des contacts dans la circonférence r', sera

$$\beta y + \alpha x = r'^2.$$

On peut écrire comme il suit ces deux équations

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r_2}{y_1},$$
$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{r'^2}{\beta};$$

et comme elles doivent être identiques, on aura

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{r^2}{y_1} = \frac{r'^2}{\beta};$$

d'où

$$y_1 = \frac{r^2}{r'^2} \cdot \beta \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{r^2}{r'^2} \cdot \alpha.$$

Le point N appartenant à la petite circonférence, on a d'ailleurs

$$y_1^2 + x_1^2 = r^2.$$

Il viendra donc, en substituant les valeurs précédentes,

$$\frac{r^4}{r'^4}\beta^2 + \frac{r^4}{r'^4}\alpha^2 = r^2.$$

L'équation du lieu sera, par suite,

$$\beta^2+\alpha^2=\frac{r'^4}{r^2}.$$

Ce lieu est donc une circonférence, concentrique aux circonférences proposées, et ayant pour rayon une troisième proportionnelle aux rayons r et r'.

La géométrie élémentaire conduit immédiatement à ce résultat, en remarquant que le quadrilatère MAOB restant constamment égal à lui-même, la diagonale OM y conserve la même longueur. Cette longueur est d'ailleurs représentée par $\frac{r'^2}{r}$ en vertu du triangle rectangle OAM.

62. 3° *Trouver le lieu des sommets d'un angle de valeur constante dont les côtés sont astreints à passer par deux points fixes* (*fig.* 28).

Nous prendrons pour axe des x la ligne qui joint les deux points fixes A et B, et pour axe des y la perpendiculaire Oy élevée au milieu de AB. Nous poserons

$$AB=2d.$$

Le lieu sera évidemment symétrique par rapport aux axes choisis, de sorte que son équation ne contiendra nécessairement que des puissances paires des variables x et y (*Alg. élém.*, 202).

M étant un point quelconque du lieu, si l'on désigne par V l'angle constant AMB, on aura l'équation de condition

$$MAx-MBx=V;$$

il en résulte

$$\operatorname{tang} V=\frac{\operatorname{tang} MAx-\operatorname{tang} MBx}{1+\operatorname{tang} MAx\operatorname{tang} MBx}.$$

x et y représentant les coordonnées du point M, on aura d'ailleurs (41, *Rem.*, 1°), suivant que le point M sera au-dessus ou au-dessous de la droite AB,

$$\operatorname{tang} MAx=\frac{\pm y}{x-d} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} MBx=\frac{\pm y}{x+d}.$$

Il viendra donc, en substituant,

$$\operatorname{tang} V=\frac{\dfrac{\pm y}{x-d}-\dfrac{\pm y}{x+d}}{1+\dfrac{y^2}{x^2-d^2}}=\frac{\pm 2dy}{x^2+y^2-d^2},$$

c'est-à-dire

$$x^2+y^2\mp\frac{2d}{\operatorname{tang} V}\cdot y-d^2=0.$$

L'équation complète du lieu s'obtiendrait en multipliant les deux facteurs qui correspondent au double signe. Ces facteurs étant tout séparés, on voit que ce lieu se compose de deux circonférences symétriquement placées par rapport à la droite AB, dont les centres situés sur l'axe des y ont pour ordonnées $\pm\frac{d}{\operatorname{tang} V}$, et dont le rayon commun est égal à

$$\sqrt{d^2+\frac{d^2}{\operatorname{tang}^2 V}} \quad \text{ou à} \quad \frac{d}{\sin V} \text{ (}\textit{Trigon.}\text{, 13)}.$$

La question proposée revient donc à décrire, au-dessus et au-dessous de AB, deux segments capables de l'angle V.

Remarque. — Cet exemple nous conduit à remarquer que l'équation d'un lieu excède, dans certains cas, la définition de ce lieu, en ce sens qu'une portion seule de la ligne représentée par l'équation satisfait aux conditions de l'énoncé. Ainsi, pour le problème résolu, c'est l'arc supérieur à AB dans la première circonférence, et l'arc inférieur à AB dans la seconde circonférence, qui répondent seuls à la question.

63. 4° *On donne un point* A *et une droite* BC, *on mène du point à la droite les sécantes* AN, AN', *etc., et l'on demande le lieu des points* M, M', *etc., qui divisent ces sécantes de manière qu'on ait*

$$AM \times AN = AM' \times AN' = \ldots = \text{const.}\ (*).$$

Nous placerons l'origine au point A; l'axe des x sera perpendiculaire à la droite BC, l'axe des y lui sera parallèle. Soient x, y, les coordonnées d'un point du lieu. En désignant par d la distance du point A à la droite BC, et par k^2 la constante donnée, on aura successivement

$$AM \times AN = k^2, \quad \frac{AM}{AN} = \frac{x}{d},$$

d'où, par multiplication,

$$AM^2 = \frac{k^2 x}{d}.$$

Mais

$$AM^2 = y^2 + x^2.$$

L'équation du lieu sera donc

$$y^2 + x^2 - \frac{k^2}{d} x = 0.$$

C'est une circonférence de cercle, tangente à l'origine à l'axe des y, et dont le diamètre est égal à $\frac{k^2}{d}$, comme cela doit être d'après les conditions de l'énoncé. Le point M pouvant être pris symétriquement sur le prolongement de AN, une seconde circonférence identique à la première, mais placée à gauche de l'axe des y, répondra encore à la question. Pour l'obtenir en même temps que la première, il suffit de poser

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\pm x}{d}.$$

On vérifie facilement le résultat obtenu par la géométrie élémentaire.

64. 5° *Trouver le lieu des points dont les distances à deux points fixes restent dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$ (*fig.* 29) (*Géom.*, 91).

Soient A et B les deux points fixes considérés; soient sur la droite AB

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

les deux points D et D′ appartenant au lieu, c'est-à-dire tels, qu'on ait

$$\frac{DA}{DB} = \frac{D'A}{D'B} = \frac{m}{n}.$$

Nous pourrons alors regarder DA et DB comme représentant effectivement les longueurs m et n.

Nous prendrons pour axe des x la droite AB et, pour axe des y, la perpendiculaire élevée à AB par le point D. Le lieu sera évidemment symétrique par rapport à l'axe des x et passera en outre par l'origine; son équation ne renfermera donc que des puissances paires de la variable y, et ne contiendra pas de terme indépendant.

Si M est un point quelconque du lieu, nous devrons avoir

$$\frac{MA^2}{MB^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Mais on a

$$MA^2 = y^2 + (x+m)^2, \quad MB^2 = y^2 + (x-n)^2.$$

L'équation du lieu sera donc

$$\frac{y^2 + (x+m)^2}{y^2 + (x-n)^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

d'où

$$(m^2 - n^2)\, y^2 + (m^2 - n^2)\, x^2 - 2mn\,(m+n)\, x = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad y^2 + x^2 - \frac{2mn}{m-n}\, x = 0.$$

En comparant cette équation au type (52) $y^2 + x^2 - 2rx = 0$, on voit qu'elle représente une circonférence dont le centre est sur l'axe des x, qui passe par l'origine et dont le diamètre est égal à $\frac{2mn}{m-n}$ ou à DD′. La construction du diamètre DD′ revient à diviser harmoniquement la droite AB dans le rapport de m à n (*Compl. de Géom.*, 28).

Remarque. — Si, après avoir chassé dans l'équation (1) le dénominateur du dernier terme, on suppose $m = n$, l'équation se réduit à

$$x = 0.$$

Le point D est alors au milieu de AB, et le lieu est précisément l'axe des y ou la perpendiculaire élevée au milieu de AB, comme l'indique immédiatement la géométrie élémentaire.

65. 6° *Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à deux circonférences données des tangentes égales* (axe radical).

Désignons par r et r' les rayons des deux circonférences, par (α, β), (α', β'), les coordonnées de leurs centres, par l la longueur commune de deux quelconques des tangentes qui répondent à la question. Si l'on suppose les axes rectangulaires, et si l'on considère les triangles rectangles formés par ces tangentes, par les droites qui joignent leur point de rencontre aux centres des circonférences et par les rayons correspondants, on aura

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2 + l^2,$$
$$(y-\beta')^2 + (x-\alpha')^2 = r'^2 + l^2.$$

Dans ces équations, x et y représentent les coordonnées d'un point quelconque du lieu demandé. C'est l qu'il faut éliminer. En retranchant les deux équations membre à membre, il viendra

$$(1) \qquad y = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta' - \beta} x + \frac{\beta' + \beta}{2} + \frac{\alpha'^2 - \alpha^2 + r^2 - r'^2}{2(\beta' - \beta)}.$$

Le lieu demandé est donc une droite perpendiculaire à la ligne des centres des deux circonférences données, car cette ligne des centres a pour coefficient angulaire $\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$. Nous retrouvons ainsi les propriétés de l'axe radical (*Compl. de Géom.*, 62).

Les équations des deux circonférences étant

$$(2) \qquad (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2,$$

$$(3) \qquad (y - \beta')^2 + (x - \alpha')^2 = r'^2,$$

si on les retranche membre à membre, on obtiendra l'équation d'une ligne passant par les points d'intersection de ces circonférences. Cette ligne n'est autre que leur axe radical représenté par l'équation (1). Ainsi, *quand deux circonférences sont sécantes, leur axe radical se confond avec la corde commune indéfiniment prolongée.* Et, en effet, deux points suffisent pour déterminer une droite, et les tangentes menées aux deux circonférences par leurs points d'intersection sont égales comme nulles.

Si les deux circonférences ne se coupent pas, la soustraction indiquée n'est qu'un moyen de retrouver rapidement l'équation de l'axe radical. Dans cette soustraction, la quantité l^2 est alors sous-entendue.

D'après cette remarque, si les équations de trois circonférences sont

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0,$$

les équations des axes radicaux de ces circonférences considérées deux à deux seront

$$M - N = 0, \quad M - P = 0, \quad N - P = 0.$$

La troisième équation obtenue résultant de la soustraction des deux autres, le troisième axe radical passe par le point d'intersection des deux premiers. *Les axes radicaux de trois circonférences prises deux à deux, concourent donc en un même point qui est le centre radical de ces circonférences* (*Compl. de Géom.*, 63).

CHAPITRE VI.

EXEMPLES CHOISIS.

66. *Ellipse.* — On appelle *ellipse* le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Les deux points fixes sont les *foyers* de l'ellipse.

Soient (*fig.* 30) F', F, les deux foyers. Désignons par $2a$ la

somme constante qui caractérise la courbe. Si l'on prend le milieu O de la distance $FF' = 2c$ et si l'on porte de chaque côté du point O, sur la ligne FF', des longueurs OA et OA' égales à a, les points A et A' appartiendront à l'ellipse. On aura en effet, pour le point A par exemple,

$$FA = OA - OF, \quad F'A = OA + OF',$$

d'où

$$FA + F'A = 2a.$$

Si l'on élève une perpendiculaire à FF' par le point O, si l'on décrit du foyer F comme centre avec a pour rayon une circonférence qui coupe cette perpendiculaire en B et en B' (on a nécessairement $a > c$, sans quoi il n'y aurait pas de courbe), les points B et B' appartiendront aussi à l'ellipse ; et l'on aura, en posant $BB' = 2b$,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Ceci posé, si M est un point quelconque du lieu, le triangle MFF' se reproduira par *renversement* en M'FF' ; les deux triangles MFF', M'FF', se reproduiront par *rotation* autour de FF' en M''FF' et en M'''FF' ; de sorte que les quatre points M, M' M'', M''', appartiendront à l'ellipse. Cette remarque montre que la courbe est symétrique par rapport aux axes AA', BB' (*Géom.*, 73). On aura donc avantage à les choisir pour axes coordonnés, car à chaque valeur de l'une des variables devront alors correspondre des valeurs de l'autre variable égales et de signes contraires. Par conséquent, l'équation de la courbe rapportée au système indiqué ne pourra renfermer que des puissances *paires* des variables.

En posant $MF' = u$, $MF = v$, on a pour équation naturelle de l'ellipse

$$u + v = 2a.$$

Pour avoir son équation en coordonnées rectangulaires, il suffira donc d'exprimer u et v en fonction de y et de x. Les deux triangles rectangles MPF', MPF, donneront

$$u^2 = y^2 + (c + x)^2, \quad v^2 = y^2 + (c - x)^2,$$

y et x représentant les coordonnées du point M par rapport aux axes choisis. Il viendra par soustraction

$$u^2 - v^2 = 4cx \quad \text{ou} \quad (u + v)(u - v) = 4cx,$$

c'est-à-dire

$$u - v = \frac{2cx}{a}.$$

Connaissant la somme $u+v$ et la différence $u-v$, on aura immédiatement

$$u=a+\frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad v=a-\frac{cx}{a}.$$

u et v sont appelés les *rayons vecteurs* du point M, et il est essentiel de se rappeler leurs expressions.

Si l'on remplace maintenant u^2 par sa valeur dans l'équation $u^2=y^2+(c+x)^2$, il vient

$$a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}=y^2+c^2+2cx+x^2$$

ou

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=(a^2-c^2).$$

Telle est l'équation de l'ellipse qu'on peut écrire encore, en vertu de la relation $a^2=b^2+c^2$,

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

en divisant les deux membres par a^2b^2.

On voit que l'équation trouvée ne contient que des puissances paires des variables. De plus, les deux termes du premier membre étant essentiellement positifs, chacun d'eux est moindre que 1, tant que l'autre n'est pas égal à 0. x ne peut donc varier que de $-a$ à $+a$, et y que de $-b$ à $+b$. Les deux coordonnées varient d'ailleurs en sens inverse. Ainsi l'ellipse est une courbe limitée dans tous les sens, comme l'indique la figure. Nous l'étudierons plus tard spécialement comme courbe du second degré. Si l'on suppose $a=b$, l'équation du lieu devient

$$x^2+y^2=a^2.$$

Le cercle n'est donc qu'une ellipse dont les deux foyers se confondent.

Remarque. — Si les axes étant toujours rectangulaires, on veut transporter l'axe des y au point A′, il faut remplacer dans l'équation de l'ellipse x par $x'-a$ ou simplement par $x-a$. Il vient

$$a^2y^2+b^2(x-a)^2=a^2b^2 \quad \text{ou} \quad a^2y^2+b^2x^2-2ab^2x=0.$$

67. *Hyperbole.* — On appelle *hyberbole* le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante. Les deux points fixes sont les *foyers* de l'hyperbole.

Soient (*fig.* 31) F et F′ les deux foyers. Désignons par $2a$ la différence constante qui caractérise la courbe. Si l'on prend le

milieu O de la distance $FF' = 2c$ et si l'on porte de chaque côté du point O, sur la ligne FF', des longueurs OA et OA' égales à a, les points A et A' appartiendront à l'hyperbole. On aura en effet, pour le point A par exemple,

$$FA = OF - OA, \quad F'A = OF' + OA,$$

d'où

$$F'A - FA = 2a$$

(on a nécessairement $c > a$, sans quoi il n'y aurait pas de courbe).

Ceci posé, si M est un point quelconque du lieu, le triangle MFF' se reproduira par renversement en M'FF'; les deux triangles MFF', M'FF', se reproduiront par rotation autour de FF' en M''FF' et en M'''FF'; de sorte que les quatre points M, M', M'', M''', appartiendront à l'hyperbole. Cette remarque montre que la courbe est symétrique par rapport à la droite AA' et par rapport à une perpendiculaire BB' élevée à cette droite par le point O. On aura donc avantage à choisir pour axes coordonnés ces axes de symétrie (66).

En posant $MF' = u$, $MF = v$, on a pour équation naturelle de l'hyperbole

$$u - v = 2a.$$

D'ailleurs les triangles rectangles MPF', MPF, donnent

$$u^2 = y^2 + (x+c)^2, \quad v^2 = y^2 + (x-c)^2.$$

Il en résulte

$$u^2 - v^2 = 4cx,$$

d'où

$$u + v = \frac{2cx}{a}.$$

Connaissant la somme $u+v$ et la différence $u-v$, on a immédiatement

$$u = \frac{cx}{a} + a, \quad v = \frac{cx}{a} - a.$$

u et v sont les *rayons vecteurs* du point M. En remplaçant u^2 par sa valeur dans l'équation $u^2 = y^2 + (c+x)^2$, on trouve

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = a^2 (a^2 - c^2),$$

équation qui diffère de celle de l'ellipse en ce que c l'emporte sur a. Si l'on pose $c^2 - a^2 = b^2$, il vient pour équation de l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La différence des termes du premier membre (qui sont eux-mêmes essentiellement positifs) devant être égale à 1, aucune valeur de x ne peut tomber entre $-a$ et $+a$. Par suite, si l'on mène par les points A et A′ des parallèles à l'axe des y, aucun point de la courbe ne peut tomber entre ces deux parallèles. Pour $x=0$, y est alors imaginaire. D'ailleurs, les deux variables devant croître en même temps, la courbe s'éloigne à la fois de l'axe des x et de l'axe des y, tant dans le sens positif que dans le sens négatif. Elle est donc composée de deux *parties* illimitées, comme l'indique la figure. Nous étudierons plus tard spécialement l'hyperbole comme courbe du second degré.

Remarque. — Si, les axes étant toujours rectangulaires, on veut transporter l'axe des y au point A, il faut remplacer dans l'équation de l'hyperbole x par $x'+a$ ou simplement par $x+a$. Il vient

$$a^2y^2-b^2(x+a)^2=-a^2b^2 \quad \text{ou} \quad a^2y^2-b^2x^2-2ab^2x=0.$$

68. *Parabole.* — On appelle *parabole* le lieu des points à égale distance d'un point fixe et d'une droite fixe. Le point fixe est le *foyer*, la droite fixe est la *directrice* de la parabole.

Soient (*fig.* 32) F le foyer, LL′ la directrice. Si du point F nous abaissons la perpendiculaire FD sur LL′, le lieu sera évidemment symétrique par rapport à cette perpendiculaire. De plus, le point O, milieu de la distance FD, appartiendra à la courbe. On est ainsi conduit à prendre FD pour axe des x et à faire passer l'axe des y par le point O perpendiculairement à FD. On sera sûr alors d'éviter les termes contenant y à une puissance impaire; en outre, la courbe passant par l'origine des coordonnées, son équation devra être satisfaite pour $x=0$ et $y=0$, c'est-à-dire qu'elle ne renfermera pas de terme indépendant des variables.

Ceci posé, désignons par p la distance du foyer à la directrice. Si l'on écrit $MF=u$ et $MQ=v$, l'équation naturelle du lieu est

$$u=v.$$

D'après le triangle rectangle MFP, on a

$$u=\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}.$$

On a d'ailleurs

$$v=x+\frac{p}{2}.$$

Par conséquent, l'équation de la parabole en coordonnées

rectangulaires sera

$$y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad y^2=2px.$$

Le foyer étant à droite de la directrice, comme nous l'avons supposé, il est clair que la courbe ne peut avoir aucun point situé à gauche de l'axe des y, tous les points situés à gauche de cet axe étant nécessairement plus rapprochés de la directrice que du foyer. C'est ce que confirme la forme de l'équation. La courbe s'étend donc seulement à droite de l'axe des y, mais d'une manière illimitée, les deux variables devant croître ensemble.

La parabole compose, avec l'ellipse et l'hyperbole, les trois courbes du second degré, célèbres depuis les Grecs sous le nom de *sections coniques*, parce qu'on les obtient toutes les trois en coupant un cône par un plan sous différentes inclinaisons.

69. Proposons-nous de *chercher le lieu des points dont les distances à un point fixe et à une droite fixe sont constamment proportionnelles et dans le rapport donné* $\frac{p}{q}$.

Soient (*fig.* 33) F le point donné et LL la droite donnée. Abaissons FD perpendiculaire sur LL et divisons FD au point A dans le rapport $\frac{p}{q}$. La courbe cherchée sera symétrique par rapport à FD et passera au point A. Nous prendrons donc FD pour axe des x et la perpendiculaire Ay à FD pour axe des y. On peut, de plus, regarder AF comme égal à p et AD comme égal à q.

Si l'on pose MF $=u$ et MQ $=v$, l'équation naturelle du lieu sera

$$\frac{u}{v}=\frac{p}{q}. \tag{1}$$

Le triangle rectangle MFP donne d'ailleurs

$$u=\sqrt{y^2+(x-p)^2},$$

et l'on a

$$v=x+q.$$

En substituant dans l'équation (1), après avoir chassé les dénominateurs et élevé au carré, on aura donc pour l'équation du lieu en coordonnées rectangulaires

$$q^2[y^2+(x-p)^2]=p^2(x+q)^2,$$

c'est-à-dire

$$q^2y^2+(q^2-p^2)x^2-2pq(q+p)x=0.$$

En se reportant aux remarques qui terminent les nos 66 et 67 et au no 68 lui-même, on voit immédiatement que le lieu demandé est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant qu'on a

$$q^2-p^2>0, \quad q^2-p^2<0, \quad q^2-p^2=0,$$

c'est-à-dire suivant que le rapport donné $\frac{p}{q}$ est plus petit que 1, plus grand que 1 ou égal à 1.

Dans le cas de la parabole, le point F est le foyer de la courbe, la droite LL en est la directrice.

S'il s'agit d'une ellipse, en identifiant l'équation obtenue avec l'équation $a^2y^2+b^2x^2-2ab^2x=0$, on trouve facilement

$$a=\frac{pq}{q-p} \quad \text{et} \quad b=p\sqrt{\frac{q+p}{q-p}}.$$

S'il s'agit d'une hyperbole, en identifiant l'équation obtenue avec l'équation $a^2y^2-b^2x^2-2ab^2x=0$, on trouve

$$a=\frac{pq}{p-q} \quad \text{et} \quad b=p\sqrt{\frac{p+q}{p-q}}.$$

Or, dans le cas de l'ellipse, si le point fixe donné F se confond avec le foyer correspondant de la courbe, on doit avoir

$$\text{AF ou } p=a-c=a-\sqrt{a^2-b^2}.$$

Dans le cas de l'hyperbole, on doit avoir

$$\text{AF ou } p=c-a=\sqrt{a^2+b^2}-a.$$

C'est ce qu'on trouve en effet, en substituant à a et à b leurs valeurs en fonction de p et de q.

Par analogie avec la dénomination adoptée relativement à la parabole, on donne alors aussi le nom de *directrice* à la droite LL, quand le lieu est une ellipse ou une hyperbole. La symétrie de ces dernières courbes par rapport à leurs deux foyers indique immédiatement l'existence d'une seconde directrice qui répond au second foyer. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

70. *Cissoïde* (de Dioclès). — *On donne une circonférence* C *et une tangente* BL *à cette circonférence. Par l'extrémité* A *du diamètre* AB *qui passe par le point de contact* B, *on mène une sécante quelconque.* DI *étant la partie de cette sécante interceptée entre la circonférence et la tangente, on prend sur la sécante mobile, à partir de son extrémité fixe, et à droite de*

cette extrémité, AM = DI, *et l'on demande le lieu du point* M (*fig.* 34.)

La courbe engendrée est évidemment symétrique par rapport au diamètre AB. La sécante mobile s'éloignant du diamètre AB, la distance DI et, par suite, la distance AM croît indéfiniment. Donc la cissoïde est une courbe illimitée. Lorsque la sécante mobile se rapproche du diamètre AB, la distance DI ou la corde AM tend vers zéro. Donc, d'après la définition générale indiquée en géométrie (56), le diamètre AB est tangent au point A aux deux branches de la cissoïde. La courbe coupera évidemment la circonférence C en deux points E et E′ situés aux extrémités du diamètre perpendiculaire à AB. Enfin, puisque AM = DI, on a aussi

$$AD = MI.$$

A mesure que la sécante mobile s'éloigne de AB, la corde AD diminue et tend vers zéro ; il en est donc de même de MI et, à plus forte raison, de la parallèle MH à AB. On voit par là que la cissoïde se rapproche indéfiniment de la tangente BL sans jamais la rencontrer : on dit alors que BL est une *asymptote* de la courbe. Cette première discussion assigne approximativement à la cissoïde la forme indiquée par la figure.

L'équation naturelle étant ici AM = DI, il sera préférable de chercher d'abord l'équation polaire de la courbe, pour passer ensuite à l'équation en coordonnées rectilignes.

Si l'on prend le point A pour pôle et AB pour axe polaire, on a immédiatement

$$AM = \rho.$$

D'ailleurs

$$DI = AI - AD.$$

Si l'on désigne par d le diamètre de la circonférence C, il vient

$$AI = \frac{d}{\cos\omega} \quad \text{et} \quad AD = d\cos\omega ;$$

par suite,

$$DI = \frac{d\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

L'équation polaire de la cissoïde est donc

$$\rho = \frac{d\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

En désignant par x et y les coordonnées du point M, rapporté aux axes Ax et Ay, on a (28)

$$\sin\omega = \frac{y}{\rho}, \qquad \cos\omega = \frac{x}{\rho}, \qquad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Substituant, on trouve

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{dy^2}{x\sqrt{x^2+y^2}},$$

c'est-à-dire

$$y^2=\frac{x^3}{d-x},$$

pour l'équation de la cissoïde en coordonnées rectilignes.

Cette équation montre, comme la discussion géométrique, que x ne pouvant recevoir de valeurs négatives et croître positivement au delà de d, la courbe est tout entière comprise entre les deux parallèles Ay et BL. A mesure que x se rapproche de d, y tend vers l'infini : donc la courbe est illimitée et a la droite BL pour asymptote.

On peut décrire comme il suit la cissoïde d'un mouvement continu (Newton) : prolongeons AB vers la gauche d'une longueur égale au rayon de la circonférence; supposons un angle droit dont un côté indéfini passe constamment par le point fixe ainsi obtenu et dont l'extrémité de l'autre côté, toujours égal au diamètre AB, décrive le diamètre perpendiculaire EE' : le milieu de ce dernier côté tracera la cissoïde : c'est ce qu'on vérifiera facilement par la géométrie ou par l'analyse.

71. *Cycloïde. — Un cercle* O *roulant sans glisser sur une droite* AB, *en restant toujours dans le même plan, la courbe engendrée par un point quelconque* M *de sa circonférence s'appelle cycloïde* (*fig.* 35).

Considérons le cercle générateur dans sa position initiale, et supposons que le point M se confonde alors avec le point de contact A. Le cercle roulant, le point M s'élèvera sur sa circonférence, et lorsque le nouveau point de contact sera devenu A', le point mobile occupera une position telle, qu'on ait

$$\text{arc } A'M=AA'$$

(puisqu'on suppose que le roulement est constant, c'est-à-dire qu'aucun glissement ne se produit). Donc, en désignant par z l'arc qui sépare le point de contact actuel de la circonférence du point mobile, et par u la distance de ce même point de contact au point de contact initial, on aura pour équation naturelle de la cycloïde

$$u=z.$$

On voit que si l'on mène Mm parallèle à AB jusqu'à la position initiale du cercle générateur, on aura

$$mM=AA'=\text{arc } A'M=\text{arc } Am;$$

remarque qui fournit une construction immédiate de la courbe par points. L'arc Am représente alors la coordonnée z et la parallèle mM la coordonnée u.

Après une révolution entière du cercle générateur, le point mobile M se retrouvera en B, de sorte que la courbe se composera d'une infinité d'arcs égaux, tels que AHB. La distance maximum de M à la droite AB est évidemment le diamètre IH du cercle générateur. Le point I étant le milieu de $AB = 2\pi r$ (en désignant par r le rayon de ce cercle), l'arc AHB sera symétrique par rapport à la perpendiculaire IH à AB.

Cherchons l'équation de la cycloïde en coordonnées rectilignes, en prenant la droite AB pour axe des x et la perpendiculaire Ay pour axe des y. Nous aurons, en appelant α l'angle A'O'M (*Trig.*, 1),

$$z = r\alpha.$$

D'ailleurs

$$u = x + \text{A'P} = x + \text{O'C} = x + r\sin\alpha.$$

Il viendra donc, à la place de $u = z$,

$$x + r\sin\alpha = r\alpha. \qquad (1)$$

Mais on a

$$y = \text{MP} = r + \text{MC} = r - r\cos\alpha.$$

On en déduit

$$\cos\alpha = \frac{r-y}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{r}\sqrt{2ry - y^2}, \quad \alpha = \text{arc cos}\frac{r-y}{r}.$$

L'équation (1) deviendra donc

$$x = r\,\text{arc cos}\frac{r-y}{r} \mp \sqrt{2ry - y^2},$$

$\sin\alpha$ étant positif ou négatif suivant que α est plus petit ou plus grand que π, on devra prendre le signe — ou le signe + du radical, suivant qu'on sera en deçà ou au delà de l'axe de symétrie IH ou suivant que le point m appartiendra ou non à la première moitié de la circonférence du cercle générateur.

L'équation trouvée donne bien tous les arcs *égaux* (en nombre illimité) qui composent la cycloïde; car à un même cosinus $\frac{r-y}{r}$ correspondent une infinité d'arcs (*Trig.*, 8) : à une même valeur de y correspondent donc une infinité de valeurs de x qui diffèrent entre elles d'un nombre exact de circonférences.

Nota. — Un point lié invariablement au cercle mobile décrit une cycloïde *allongée* ou *raccourcie*, suivant qu'il est à l'intérieur ou à l'extérieur de ce cercle.

Lorsqu'on remplace la droite fixe par un cercle fixe, les conditions du mouvement du cercle mobile restant les mêmes, la courbe engendrée par un point lié invariablement au cercle mobile est une *épicycloïde plane*.

72. *Spirale de Conon ou d'Archimède. — On suppose la droite* OM *tournant dans son plan autour d'un de ses points, en s'écartant de la droite* OX; *le point* M, *mobile sur* OM, *y parcourt des longueurs égales, tandis que la droite* OM *décrit des angles égaux : le point* M *trace alors sur le plan une spirale d'Archimède* (*fig.* 36).

Les coordonnées polaires sont ici les coordonnées naturelles. Admettons qu'au moment où la droite OM se confond avec l'axe OX, le mobile M soit en O, et qu'après une révolution entière il soit en N. Soit *dmm'* la circonférence décrite du pôle O avec un rayon égal à l'unité. Nous devrons avoir, pour un point M quelconque du lieu,

$$\frac{\text{OM}}{\text{ON}} = \frac{\text{arc } dm}{2\pi},$$

c'est-à-dire

$$2\pi\rho = \text{ON}.\ \omega.$$

Si l'on désigne la longueur ON, qui caractérise la spirale d'Archimède ou qui en est le *paramètre*, par l, et si l'on pose $\frac{l}{2\pi} = a$, l'équation de cette spirale sous sa forme la plus simple sera

$$\rho = a\omega.$$

Le rayon vecteur, qui se confond avec OX, s'accroît de l pour chaque révolution de la droite mobile; après n révolutions, on aura donc

$$\rho = nl,$$

c'est-à-dire qu'à chaque révolution tous les rayons vecteurs s'accroissent ensemble de l.

Connaissant l, on décrira très-facilement la courbe par points : c'est ce qu'indique suffisamment la figure (*).

La spirale peut faire autour du pôle O une infinité de circonvolutions.

(*) L'*excentrique en cœur* à l'aide duquel on transforme *uniformément* un mouvement de rotation circulaire en mouvement rectiligne, est limité par une spirale d'Archimède.

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Inscrire un carré dans un triangle; cas où ce carré est maximum.

II. Inscrire dans un triangle un rectangle de surface donnée. Discussion et construction.

III. Inscrire dans une sphère donnée un cylindre dont le volume ait un rapport donné m avec la somme des deux segments sphériques (inférieurs à un hémisphère) que ses bases déterminent. On construira le cylindre pour $m = \frac{9}{5}$.

IV. Démontrer que, dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite (*Compl. de Géom.*, 31).

V. Trouver le lieu des points qui divisent dans un rapport connu les droites menées d'un même point fixe aux différents points d'une droite donnée.

VI. Dans un quadrilatère quelconque, on inscrit un parallélogramme astreint seulement à avoir ses côtés parallèles aux diagonales du quadrilatère : trouver le lieu du point de rencontre des diagonales du parallélogramme.

VII. Un triangle tourne autour de l'un de ses sommets supposé fixe, en restant semblable à lui-même; son second sommet étant astreint à se trouver toujours sur une droite donnée, quel sera le lieu décrit par le troisième sommet?

VIII. Trouver le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une circonférence donnée.

IX. Démontrer que, si d'un point quelconque d'une circonférence circonscrite à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur ses côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.

X. Retrouver par l'analyse les conditions relatives aux cinq positions que deux circonférences données peuvent occuper l'une par rapport à l'autre.

XI. Par un point pris dans le plan d'un cercle, lui mener une sécante telle, que la corde interceptée soit égale à une ligne donnée. Discussion.

XII. Faire passer une circonférence par trois points donnés.

XIII. Par deux points donnés, faire passer une circonférence tangente à une droite donnée.

XIV. Trouver le lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur donnée, dont les extrémités demeurent constamment sur les côtés d'un angle droit donné.

XV. Trouver le lieu des points qui divisent dans un rapport connu les droites menées d'un même point fixe aux différents points d'une circonférence donnée.

XVI. Étant donnés un nombre quelconque de points, trouver le lieu

des points tels, qu'en les joignant par des droites à tous les points donnés, la somme des carrés de ces droites soit égale à une constante m^2 (Apollonius).

XVII. Étant donnés un angle droit et une droite de longueur connue, on suppose que la droite se meut en s'appuyant constamment sur les deux côtés de l'angle droit, et l'on demande le lieu décrit par le centre de gravité du triangle variable ainsi déterminé (on sait que le centre de gravité d'un triangle est le point commun à ses trois médianes).

XVIII. Le troisième sommet d'un triangle de base donnée est astreint à parcourir une circonférence donnée : quel est le lieu décrit par le centre de gravité du triangle variable ainsi déterminé?

XIX. On donne deux parallèles : par un point A de la première on mène une sécante quelconque AB jusqu'à la rencontre de la seconde parallèle, on élève ensuite BC perpendiculaire à AB. Au point C où BC coupe la première parallèle, on fait l'angle ACD double de l'angle BAC, et du point fixe A on abaisse AM perpendiculaire sur CD : trouver le lieu du point d'intersection M.

LIVRE DEUXIÈME.

THÉORIES GÉNÉRALES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES TANGENTES (*).

73. Comme nous l'avons dit en Géométrie (**56**), la tangente en un point M d'une courbe quelconque (*fig.* 37) est la limite des positions successives prises par une sécante MM'M'' qui tourne autour du point M, jusqu'à ce que l'un de ses autres points d'intersection M' soit venu se confondre avec le point M.

Si l'on désigne par x_1, y_1, les coordonnées du point M qu'on appelle *point de contact*, l'équation de la tangente sera de la forme

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

et il s'agit de déterminer le coefficient angulaire m.

Désignons par $x_1 + h$ et par $y_1 + k$ les coordonnées du point M'. Le coefficient angulaire de la sécante MM'M'' qui passe par les deux points M et M', sera

$$\frac{y_1 + k - y_1}{x_1 + h - x_1} \quad \text{ou} \quad \frac{k}{h}.$$

A mesure que la sécante se rapproche de la tangente, k et h tendent ensemble vers zéro, tandis que leur rapport tend vers une limite déterminée qui est la valeur de m. Mais k représente l'accroissement de l'ordonnée de la courbe, et h l'accroissement de son abscisse, quand on passe du point M au point M'. La limite du rapport $\frac{k}{h}$ est donc précisément la valeur que prend la *dérivée* de l'ordonnée y de la courbe, considérée comme *fonction* de l'abscisse x correspondante, lorsqu'on arrive au point M (*Compl. d'Alg.*, **114**).

Si l'équation de la courbe est de la forme $y = f(x)$, on aura donc

$$m = y'_1 = f'(x_1).$$

(*) Dans tout ce Livre, nous ne considérerons que les coordonnées rectilignes

Si la fonction est implicite, c'est-à-dire si l'équation de la courbe est de la forme $F(x, y) = 0$, on aura (*Compl. d'Alg.*, **142**)

$$m = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}.$$

Dans le premier cas, l'équation de la tangente au point M sera

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Dans le second, cette équation deviendra

$$y - y_1 = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}(x - x_1).$$

74. *Exemples.* — 1° Soit l'équation du cercle (**52**)

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Nous aurons

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y.$$

L'équation de la tangente au point (x_1, y_1) sera donc

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

ou, en y joignant la condition $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, puisque le point (x_1, y_1) est sur la courbe,

$$yy_1 + xx_1 = r^2,$$

comme nous l'avons déjà trouvé par une autre méthode (**58**).

2° Soit l'équation générale des courbes du second degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Nous aurons

$$F'_x = By + 2Cx + E, \quad F'_y = 2Ay + Bx + D.$$

L'équation de la tangente au point (x_1, y_1) sera donc

$$y - y_1 = -\frac{By_1 + 2Cx_1 + E}{2Ay_1 + Bx_1 + D}(x - x_1)$$

ou

$$(2Ay_1 + Bx_1 + D)(y - y_1) + (By_1 + 2Cx_1 + E)(x - x_1) = 0.$$

On a de plus l'équation de condition

$$Ay_1^2 + Bx_1y_1 + Cx_1^2 + Dy_1 + Ex_1 + F = 0.$$

Si l'on multiplie cette équation par 2 et si on l'ajoute membre à membre avec l'équation de la tangente, on obtient cette dernière sous la forme suivante, utile à retenir,

$$(2Ay_1 + Bx_1 + D)y + (By_1 + 2Cx_1 + E)x + Dy_1 + Ex_1 + 2F = 0.$$

3° Soit encore l'équation de la cissoïde (70)

$$y^2 = \frac{x^3}{d - x} \quad \text{ou} \quad dy^2 - xy^2 - x^3 = 0.$$

Nous aurons

$$F'_x = -y^2 - 3x^2, \quad F'_y = 2dy - 2xy.$$

L'équation de la tangente au point (x_1, y_1) sera donc

$$y - y_1 = \frac{y_1^2 + 3x_1^2}{2y_1(d - x_1)}(x - x_1),$$

avec la condition

$$dy_1^2 - x_1 y_1^2 - x_1^3 = 0.$$

75. *Tangente à l'origine.* — Lorsque le point de contact se trouve à l'origine des coordonnées, le rapport $-\frac{F'_x}{F'_y}$ se présente en général sous la forme $\frac{0}{0}$. Le mieux pour obtenir la véritable valeur de y' au point considéré est alors souvent de procéder comme il suit.

Toute sécante passant par l'origine ayant pour coefficient angulaire $\frac{y}{x}$, il suffit d'évaluer la valeur de ce rapport à l'aide de l'équation de la courbe, et d'y supposer $x = 0$ pour exprimer que la sécante est devenue tangente.

Exemple. — Prenons l'équation de la cissoïde

$$y^2 = \frac{x^3}{d - x}.$$

On en déduit

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{d - x}}.$$

La limite de ce rapport pour $x = 0$ est évidemment zéro. Ainsi la tangente à l'origine se confond avec l'axe de la courbe, comme nous le savions déjà.

76. La perpendiculaire menée à la tangente par le point de

contact, est la *normale* à la courbe. La normale au point (x_1, y_1) aura donc pour équation (en supposant les coordonnées rectangulaires)

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1) \quad \text{ou} \quad y - y_1 = \frac{F'_{y_1}}{F'_{x_1}}(x - x_1),$$

en y joignant toujours la condition

$$F(x_1, y_1) = 0.$$

Exemple. — La normale au point (x_1, y_1) du cercle

$$x^2 + y^2 = r^2$$

aura pour équation

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

ou, en simplifiant,

$$y = \frac{y_1}{x_1}x,$$

comme nous l'avons déjà trouvé (59).

77. *Tangente passant par un point extérieur.* — Si l'on demande de mener à la courbe $F(x, y) = 0$ une tangente qui passe par un point extérieur donné (x_2, y_2), les inconnues du problème seront les coordonnées x_1, y_1, du point de contact.

L'équation de la tangente devant être satisfaite par les coordonnées du point (x_2, y_2), les inconnues cherchées devront satisfaire aux deux équations

$$(1) \qquad y_2 - y_1 = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}(x_2 - x_1)$$

et

$$(2) \qquad F(x_1, y_1) = 0.$$

Si l'on regarde x_1 et y_1 comme des coordonnées courantes, on pourra, au lieu de traiter la question par le calcul, chercher les points d'intersection de la courbe représentée alors par l'équation (1) avec la courbe proposée elle-même (60).

Remarque. — On traiterait de même la question qui consisterait à mener une normale passant par un point extérieur.

78. *Tangente parallèle à une droite donnée.* — Si l'on demande de mener à la courbe $F(x, y) = 0$ une tangente parallèle à une droite donnée ayant m pour coefficient angulaire, les inconnues du problème seront encore les coordonnées x_1,

y_1, du point de contact. Les inconnues cherchées devront évidemment satisfaire aux deux équations

$$m = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}} \tag{1}$$

et

$$F(x_1, y_1) = 0. \tag{2}$$

Si l'on regarde x_1 et y_1 comme des coordonnées courantes, on pourra, au lieu de traiter la question par le calcul, chercher les points d'intersection de la courbe représentée par l'équation (1) avec la courbe proposée elle-même.

Remarque. — On traiterait de même la question qui consisterait à mener une normale parallèle à une droite donnée.

79. *Équation générale des tangentes à une courbe donnée.* — L'équation générale des tangentes à une courbe donnée s'obtient en exprimant la condition de tangence, indépendamment des coordonnées du point de contact spécial. Pour cela, on cherche la relation qui doit exister entre le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine d'une droite quelconque $y = mx + n$, pour qu'elle soit tangente à la courbe proposée.

On peut, comme nous l'avons fait pour la circonférence (57), éliminer y entre l'équation de la droite et celle de la courbe. En exprimant alors que l'équation résultante a deux racines égales, on obtient la relation voulue. Le plus simple est, en général, au lieu d'appliquer la théorie connue (*Compl. d'Alg.*, 211), de chercher la condition de divisibilité du premier membre de l'équation trouvée par le facteur $(x - p)^2$, p étant une constante arbitraire. En poursuivant la division, on arrive à un reste du premier degré en x. On égale à zéro les coefficients de ce reste, qui sont fonction de quantités connues et des indéterminées m, n, p; et en éliminant p entre les deux équations posées, on a la relation cherchée entre m et n.

Ce procédé sera surtout préférable lorsqu'il s'agira de courbes du second degré, car il n'y aura qu'à écrire dans ce cas la condition

$$b^2 - 4ac = 0 \quad (\textit{Alg. élém.}, 187).$$

On peut aussi, et cette marche est complétement générale, prendre l'équation de la tangente à la courbe

$$y - y_1 = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}(x - x_1),$$

y joindre l'équation de condition $F(x_1, y_1) = 0$ et identifier

l'équation de la droite $y = mx + n$ avec l'équation de la tangente. On aura ainsi les trois équations

$$m = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}, \qquad n = y_1 + \frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}} x_1, \qquad F(x_1, y_1) = 0.$$

En éliminant entre elles les coordonnées x_1 et y_1 du point de contact variable, on obtiendra entre m et n la relation qui caractérise le contact.

Remarque. — On traiterait de même, en suivant le second procédé, la question qui consisterait à trouver l'équation générale des normales à une courbe donnée.

80. *Tangente commune à deux courbes données.* — Soient

$$F(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = 0$$

les équations des deux courbes. Supposons que les coordonnées du point de contact de la tangente commune avec la première courbe soient x_1, y_1, et que les coordonnées de son point de contact avec la seconde courbe soient x_2, y_2.

L'équation de la tangente commune sera, par rapport à la première courbe,

$$(1) \qquad y - y_1 = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}(x - x_1),$$

et l'on aura en même temps

$$(2) \qquad F(x_1, y_1) = 0.$$

L'équation de la tangente commune sera, par rapport à la seconde courbe,

$$(3) \qquad y - y_2 = -\frac{\varphi'_{x_2}}{\varphi'_{y_2}}(x - x_2),$$

et l'on aura en même temps

$$(4) \qquad \varphi(x_2, y_2) = 0.$$

Mais les équations (1) et (3) représentant une même droite doivent être identiques; ce qui donne les équations de condition

$$(5) \qquad \frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}} = \frac{\varphi'_{x_2}}{\varphi'_{y_2}},$$

$$(6) \qquad y_1 + \frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}} x_1 = y_2 + \frac{\varphi'_{x_2}}{\varphi'_{y_2}} x_2.$$

Les inconnues du problème sont x_1, y_1, x_2, y_2, et l'on aura, pour les déterminer, les quatre équations (2), (4), (5) et (6).

Remarque. — On traiterait de même la question qui consisterait à mener une normale commune à deux courbes données.

81. La méthode qu'on vient d'indiquer est complétement générale; mais la suivante est préférable lorsqu'il s'agit de courbes du second degré.

Représentons par $y = mx + n$ l'équation de la tangente commune. Cherchons les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la courbe $F(x, y) = 0$, et écrivons que l'équation résultante a deux racines égales. Opérons de la même manière relativement à la courbe $\varphi(x, y) = 0$. Nous obtiendrons deux équations entre les indéterminées m et n, qui nous permettront de les calculer, c'est-à-dire d'établir l'équation de la tangente commune.

Exemple. — Cherchons la tangente commune à deux circonférences. Nous supposerons le centre de la première circonférence à l'origine des axes d'ailleurs rectangulaires, et le centre de la seconde circonférence situé sur l'axe des x.

Les équations des deux circonférences seront alors

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{1}$$

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r'^2. \tag{2}$$

Les équations qui donneront les abscisses des points d'intersection de ces circonférences avec la droite $y = mx + n$, seront

$$(m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0, \tag{3}$$

$$(m^2 + 1)x^2 - 2(\alpha - mn)x + \alpha^2 + n^2 - r'^2 = 0. \tag{4}$$

Pour que leurs racines soient égales, il faut qu'on ait

$$n^2 = r^2(m^2 + 1), \tag{5}$$

$$(m\alpha + n)^2 = r'^2(m^2 + 1). \tag{6}$$

Telles seront les deux équations de condition.

Si l'on veut éviter le calcul des quantités m et n et ramener la question à une construction géométrique, on remarquera qu'en faisant $y = 0$ dans l'équation $y = mx + n$ de la tangente commune, on trouve $x = -\frac{n}{m}$ pour l'abscisse du point où elle coupe l'axe des x. Or, en divisant les équations (5) et (6) l'une par l'autre et en extrayant la racine carrée du résultat, il vient

$$\frac{n}{m\alpha + n} = \pm\frac{r}{r'} \quad \text{ou} \quad \frac{-\frac{n}{m}}{-\alpha - \frac{n}{m}} = \pm\frac{r}{r'},$$

d'où

$$-\frac{n}{m}=\frac{\alpha r}{r\mp r'}.$$

Il suffira de construire cette quantité pour obtenir les centres de similitude des deux circonférences données (*Compl. de Géom.*, 69); et en menant, des points ainsi déterminés sur l'axe des x, des tangentes à l'une des circonférences proposées, on aura les quatre solutions qui répondent en général à la question (*Géom.*, 83).

82. CONCAVITÉ ET CONVEXITÉ DES COURBES.

On dit qu'une courbe est *convexe vers les y positifs ou concave vers les y négatifs* en un point M, lorsqu'elle est aux environs de ce point comprise dans l'angle *aigu* formé par la tangente à la courbe au point M avec l'axe des abscisses.

Lorsque la courbe est au contraire située dans l'angle *obtus* formé par la tangente avec l'axe des abscisses, on dit qu'elle est au point M *concave vers les y positifs ou convexe vers les y négatifs*.

Cherchons à quels signes on peut reconnaître la concavité ou la convexité d'une courbe, et désignons pour plus de rapidité par y' le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe.

Si la courbe est *convexe vers les y positifs* (*fig.* 38), on voit que y' *diminue* à mesure qu'on s'avance sur la courbe dans le sens des x positifs. Par suite, la dérivée de y' doit être négative (*Compl. d'Alg.*, 145), c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$y''<0.$$

Si la courbe est *concave vers les y positifs* (*fig.* 39), on voit que y' *augmente* à mesure qu'on s'avance sur la courbe dans le sens des x positifs. Par suite, la dérivée de y' doit être positive, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$y''>0.$$

De plus, par la figure même ou en se rappelant (73) que, dans l'expression $\frac{k}{h}$, h est une quantité essentiellement positive, tandis que k est l'accroissement positif ou négatif de l'ordonnée de la courbe, on voit que cette ordonnée croît ou décroît suivant que la valeur de y' est positive ou négative.

Ainsi, pour connaître la marche de l'ordonnée, on pourra consulter le signe de y'; et pour savoir si la courbe est convexe ou concave vers les y positifs, on pourra consulter le signe de y''. La convexité correspondra à $y''<0$, la concavité à $y''>0$.

Il sera d'ailleurs souvent plus simple de s'arrêter à cette re-

marque : *il y a convexité ou concavité vers les y positifs, suivant que y' diminue ou augmente à mesure qu'on marche vers les x positifs.*

Exemple. — Soit la cissoïde pour laquelle nous avons trouvé (74)

$$y' = \frac{y^2 + 3x^2}{2y(d-x)}.$$

Pour savoir comment y' varie lorsque x croît de o à d, il faut éliminer y à l'aide de l'équation de la courbe. On obtient

$$y' = \frac{3dx^2 - 2x^3}{2x\sqrt{x}(d-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3d-2x}{2(d-x)\sqrt{\frac{d-x}{x}}}.$$

Il viendra donc

$$y' = \pm\sqrt{\frac{x}{d-x}}\left[1 + \frac{d}{2(d-x)}\right].$$

Pour $x = o$, on trouve $y' = o$, c'est-à-dire que l'axe des x est tangent à la courbe à l'origine, comme nous l'avons déjà remarqué (70, 75). On voit en outre que y' croît avec x pour la branche de courbe supérieure à l'axe des x (branche qui correspond au signe + du radical), et décroît au contraire à mesure que x augmente pour la branche inférieure à cet axe. Par conséquent, la branche supérieure de la cissoïde tourne sa concavité vers les y positifs, tandis que la branche inférieure tourne vers eux sa convexité.

83. Points maximums et minimums. — Lorsque l'ordonnée d'une courbe diminue après avoir augmenté, elle passe par une valeur *maximum*, et le point correspondant est en général un *point maximum*. Lorsque cette ordonnée augmente après avoir diminué, elle passe par une valeur *minimum*, et le point correspondant est en général un *point minimum*.

Les points A et C (*fig.* 40) sont des *points maximums* ; les points B et D sont des *points minimums*.

y' représentant la dérivée de l'ordonnée y considérée comme fonction de l'abscisse x, on voit que, *pour un maximum, y' devient négative après avoir été positive*, puisque la fonction décroît après avoir été croissante. *C'est l'inverse pour un minimum* (voir le *Compl. d'Alg.*, p. 506 et suiv.). Ainsi, pour les points remarquables considérés, y' passant du positif au négatif ou du négatif au positif, doit s'annuler. Nous supposons que y' reste une fonction finie et continue de x.

On devra donc chercher les abscisses des points maximums et minimums parmi les valeurs de x qui rendent la

dérivée y' ou le coefficient angulaire de la tangente à la courbe égal à zéro; c'est-à-dire qu'aux points que l'on veut déterminer, la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x.

Pour le maximum, y' va décroître; donc y'' *doit être* < 0.

Pour le minimum, y' va croître; donc y'' *doit être* > 0.

Exemples. 1° Soit l'équation de l'ellipse (66)

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

On a alors

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Pour $x = 0$, on a

$$y' = 0 \quad \text{et} \quad y = \pm b.$$

De plus, y' passe du positif au négatif, lorsque x passe d'une valeur négative très-petite en valeur absolue à une très-petite valeur positive, y étant positif; c'est l'inverse pour y négatif. Le point où l'ellipse coupe la partie positive de l'axe des y est donc un maximum, le point où elle coupe la partie négative de cet axe est un minimum.

2° Soit l'équation de la cycloïde (71)

$$x = r \arccos\frac{r-y}{r} \mp \sqrt{2ry - y^2}.$$

On trouve, en dérivant x par rapport à y (*Compl. d'Alg.*, 139),

$$x' = r\frac{-\left(-\frac{1}{r}\right)}{\pm\sqrt{1-\left(\frac{r-y}{r}\right)^2}} \mp \frac{2r-2y}{2\sqrt{2ry-y^2}},$$

c'est-à-dire

$$x' = \pm\frac{y}{\sqrt{2ry-y^2}}.$$

On aura donc (*Compl. d'Alg.*, 131)

$$y' = \frac{1}{x'} = \pm\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

Pour $y = 2r$, on a $y' = 0$: ce qui indique comme précédemment (71) que la courbe passe par un maximum chaque fois que le point mobile se confond avec l'extrémité supérieure du diamètre du cercle générateur qui est perpendiculaire à la droite fixe.

Remarque. — Les points maximums et minimums dépendent des axes employés et peuvent varier lorsqu'on passe

d'un système à un autre, de sorte qu'ils n'ont pas une existence absolue relativement à la courbe qu'on considère.

84. Points singuliers. — Les points singuliers d'une courbe sont indépendants du choix des axes; en ces points, la courbe présente une disposition remarquable qui la caractérise.

Points d'inflexion. — En un point d'inflexion (*fig.* 41), la courbe change d'allure, c'est-à-dire devient concave après avoir été convexe (82) ou réciproquement. Par suite, à partir d'un point d'inflexion, la dérivée première y' diminue après avoir augmenté jusqu'à ce point ou augmente après avoir diminué. Il en résulte que y'' ou la dérivée seconde passe alors d'une valeur positive à une valeur négative ou d'une valeur négative à une valeur positive. *Les points d'inflexion correspondent donc, en général, aux valeurs de y et de x qui, satisfaisant à l'équation de la courbe, rendent en outre* y'' *égale à zéro.* Il faut d'ailleurs toujours s'assurer du changement de signe de y'' après le point d'inflexion.

Il peut arriver que ce changement s'opère et corresponde au passage de y' par l'infini (*fig.* 41).

Points multiples. — Si plusieurs branches d'une même courbe viennent passer par un même point sans s'y arrêter, et si en ce point la courbe admet plusieurs tangentes distinctes, ce point est un point multiple. Le point multiple considéré est *double*, *triple*, etc., suivant le nombre des tangentes correspondantes.

En général, pour un point multiple, la valeur de y' se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. En effet, si les polynômes F'_x et F'_y ne devenaient pas nuls pour les coordonnées du point multiple considéré, y' aurait en ce point une valeur unique. On fera alors usage du procédé indiqué au n° 75, en transportant l'origine au point multiple lui-même.

Points de rebroussement. — Lorsque deux branches de courbe viennent s'arrêter en un même point où elles ont une tangente commune, ce point est un point de rebroussement.

Le rebroussement est de *première espèce*, lorsque les deux branches de courbe sont *de part et d'autre* de la tangente commune. Dans le cas contraire, le rebroussement est de *seconde espèce*.

Reprenons la valeur de y' relative à la cycloïde, savoir

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2r}{y} - 1},$$

Pour $y = 0$, on a

$$y' = \pm\infty,$$

c'est-à-dire que tous les points où la courbe vient couper l'axe des x sont des rebroussements de première espèce.

La cissoïde présente un pareil rebroussement à l'origine.

Points isolés ou conjugués. — On appelle ainsi des points dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe, sans qu'ils appartiennent à aucune branche de cette courbe.

Points d'arrêt et points saillants ou anguleux. — Lorsqu'une seule branche d'une courbe vient s'arrêter brusquement en un certain point, ce point est un point *d'arrêt.*

Lorsque deux branches d'une courbe viennent s'arrêter brusquement en un même point où elles ont deux tangentes distinctes, ce point est dit *saillant* ou *anguleux.*

Les courbes transcendantes seules peuvent présenter des points d'arrêt ou des points saillants.

La théorie complète des points singuliers fait partie *du calcul différentiel.*

CHAPITRE II.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

85. Lorsqu'une courbe est illimitée, c'est-à-dire présente une ou plusieurs branches infinies, l'une de ces branches peut en poursuivant son cours s'approcher indéfiniment d'une certaine droite sans jamais l'atteindre : cette droite est alors une *asymptote* de la courbe proposée.

Soit (*fig.* 42) la branche de courbe AMS. Si, à partir du point M, les perpendiculaires abaissées des différents points de la courbe sur la droite *rs* diminuent constamment et ont pour limite zéro, la droite *rs* est une asymptote de la branche AMS.

La courbe, à partir du point où la tendance à l'asymptotisme se manifeste, tourne nécessairement sa convexité vers son asymptote ; en effet, par définition, une droite ne peut couper la *branche* de courbe à laquelle elle est asymptote.

86. D'une manière générale, si la tangente à une branche de courbe infinie tend vers une limite déterminée à mesure que le point de contact s'éloigne sur cette branche, cette limite

est une asymptote. Car la tangente se rapprochant indéfiniment de cette droite limite, il en est de même de son point de contact ou de la courbe elle-même.

A ce point de vue, une asymptote étant une tangente dont le point de contact s'est transporté à l'infini, nous identifierons l'équation de la droite $y = mx + n$ avec l'équation de la tangente à la courbe $F(x, y) = 0$, c'est-à-dire que nous poserons (73)

$$m = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad \text{et} \quad n = y + \frac{F'_x}{F'_y} x.$$

Dans ces formules, nous supposerons infinies les coordonnées x et y du point de contact, et les valeurs correspondantes que nous trouverons alors pour les constantes m et n, nous feront connaître les asymptotes cherchées.

Exemples. — 1° Comme on ne doit poursuivre la recherche des asymptotes que pour des courbes illimitées, nous prendrons pour exemple l'hyperbole (67). L'équation de cette courbe est

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Nous aurons donc ici

$$m = \frac{b^2x}{a^2y} \quad \text{et} \quad n = y - \frac{b^2x^2}{a^2y} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y}.$$

En vertu de l'équation de la courbe, on peut écrire

$$m = \pm\frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} = \pm\frac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \quad \text{et} \quad n = -\frac{b^2}{y}.$$

Si l'on fait maintenant

$$x = y = \infty,$$

il vient

$$m = \pm\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad n = 0.$$

L'hyperbole a donc deux asymptotes qui passent par l'origine et font avec l'axe des x des angles supplémentaires : ces asymptotes ont pour équation

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

2° Considérons encore la parabole (68) qui a pour equation

$$y^2 = 2px.$$

Nous aurons, dans ce cas

$$m = \frac{p}{y} \quad \text{et} \quad n = y - \frac{px}{y} = \frac{y}{2},$$

en vertu de l'équation de la courbe.

Si l'on fait $x = y = \infty$, il vient

$$m = 0 \quad \text{et} \quad n = \infty.$$

Les tangentes à la parabole tendent donc à devenir parallèles à l'axe des x à mesure qu'on s'éloigne sur la courbe, mais le point où elles coupent l'axe des y se transporte en même temps à l'infini, c'est-à-dire que la parabole n'a pas d'asymptotes.

87. On peut, en conservant d'ailleurs le même point de départ, suivre une méthode analytiquement plus commode pour déterminer les asymptotes rectilignes, seules utiles à connaître.

Une sécante dont les deux points d'intersection se transportent en même temps à l'infini, est la même chose qu'une tangente dont le point de contact s'éloigne à l'infini. D'après cette remarque, cherchons les abscisses des points d'intersection de la droite $y = mx + n$ avec la courbe $F(x, y) = 0$. L'équation résultante $F(x, mx + n) = 0$ devra présenter deux racines infinies si la droite considérée est asymptote. Or, dans le cas où le premier membre de l'équation $F(x, y) = 0$ est entier et rationnel, on parviendra par l'élimination de y à une équation de la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Pour qu'une pareille équation ait deux racines infinies, il faut que les coefficients A_0 et A_1 des deux termes du degré le plus élevé s'annulent. En effet, si l'on remplace x par $\frac{1}{z}$, l'existence de deux racines nulles pour l'équation transformée en z correspondra à l'existence de deux racines infinies pour l'équation en x. Ainsi on posera

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0;$$

si ces équations fournissent pour m et n des valeurs convenables, la courbe donnée aura des asymptotes, et ces asymptotes seront déterminées.

Exemples. — 1° Reprenons l'équation de l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2;$$

si nous y remplaçons y par $mx+n$, il viendra

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+\ldots=0.$$

Égalons à zéro les coefficients des deux premiers termes de l'équation résultante, nous aurons

$$a^2m^2-b^2=0, \quad 2a^2mn=0,$$

d'où

$$m=\pm\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad n=0.$$

Nous retrouvons ainsi le même résultat que par la première méthode. Si l'on partait de l'équation de l'ellipse, on trouverait pour m et n des valeurs imaginaires.

2° Soit l'équation de la parabole

$$y^2=2px.$$

Si nous y remplaçons y par $mx+n$, il vient

$$m^2x^2+2(mn-p)x+\ldots=0.$$

En posant $m^2=0$ et $mn-p=0$, on voit que s'il y avait des asymptotes, elles seraient parallèles à l'axe des x ; mais qu'elles n'existent pas, parce que la valeur $m=0$ entraîne la valeur $n=\infty$.

88. *Remarques.* — I. Il résulte de ce qui précède ou de la seconde définition adoptée, qu'une courbe algébrique du degré α ne peut être coupée par une de ses asymptotes en plus de $\alpha-2$ points.

II. Le degré de A_0 par rapport à m ne peut dépasser le degré le plus élevé de l'équation $F(x,y)=0$ par rapport à y. Donc, si ce degré est β, la courbe admettra au plus β asymptotes obliques à l'axe des y.

89. Il peut quelquefois être utile de chercher les asymptotes en partant du principe suivant.

De l'équation

$$y=mx+n$$

on déduit

$$m=\frac{y}{x}-\frac{n}{x} \quad \text{et} \quad n=y-mx.$$

Si l'asymptote existe, elle correspondra aux valeurs qu'on trouvera pour m et n en supposant à la fois y et x infinies. On aura alors

$$m=\lim\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad n=\lim(y-mx)$$

pour les valeurs indiquées.

Le rapport $\frac{y}{x}$ et, ensuite, la différence $y - mx$ s'exprimeront d'ailleurs à l'aide de l'équation de la courbe, parce que la différence entre l'ordonnée de la courbe et l'ordonnée de la droite doit disparaître pour $x = \infty$. La différence entre l'ordonnée de la courbe et l'ordonnée de l'asymptote est, en effet, proportionnelle à la perpendiculaire abaissée d'un point de la courbe sur l'asymptote.

Exemple. — Reprenons encore l'équation de l'hyperbole ou

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

On en déduit

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

La limite du rapport $\frac{y}{x}$ pour $x = \infty$ est $\pm\frac{b}{a}$. On a donc

$$m = \pm\frac{b}{a}.$$

On a d'ailleurs

$$y - mx = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x,$$

c'est-à-dire

$$y - mx = \pm\frac{b}{a}\left[\sqrt{x^2 - a^2} - x\right] = \pm\frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}.$$

La limite de cette différence est o pour $x = \infty$. On a donc $n = 0$.

90. Jusqu'à présent, les méthodes expliquées ne peuvent permettre de déterminer que les asymptotes *non parallèles à l'axe des y*, parce que l'équation employée $y = mx + n$ ne peut pas représenter une parallèle à cet axe.

Pour obtenir les asymptotes *parallèles à l'axe des y*, il suffit de remarquer que, lorsqu'elles existent, certaines valeurs finies de x doivent correspondre sur la courbe à des ordonnées infinies (*fig.* 43). Ainsi, on cherchera les valeurs finies de x qui, substituées dans l'équation de la courbe, rendent $y = \infty$.

Cette équation $F(x, y) = 0$ peut s'écrire

$$f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + f_2(x)y^{n-2} + \ldots = 0,$$

en ordonnant son premier membre par rapport aux puissances décroissantes de y. Si l'on divise alors ses deux membres par y^n et si l'on fait ensuite $y = \infty$, il reste pour déterminer les valeurs correspondantes de x l'équation

$$f_0(x) = 0.$$

Les racines de l'équation en x obtenue en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y dans l'équation de la courbe ordonnée suivant les puissances décroissantes de cette variable, correspondront donc aux asymptotes parallèles à l'axe des y. Seulement, dans chaque cas particulier, on devra s'assurer que la valeur de y, aux environs de la valeur de x qui semble donner une pareille asymptote, est bien réelle et indéfiniment croissante en valeur absolue.

Exemple. — Prenons l'équation de la cissoïde

$$y^2 = \frac{x^3}{d-x} \quad \text{ou} \quad (d-x)y^2 - x^3 = 0.$$

On obtiendra les asymptotes parallèles à l'axe des y en posant

$$d - x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = d.$$

Aux environs de cette valeur, la valeur de l'ordonnée est réelle et indéfiniment croissante ou décroissante. Par suite, comme on l'a déjà vu (70), les deux branches de la cissoïde ont pour asymptote commune la tangente BL menée à l'extrémité du diamètre fixe AB.

91. *Remarques.* — I. La même méthode, appliquée en prenant x au lieu de y pour lettre ordonnatrice, donnerait les asymptotes parallèles à l'axe des x.

L'équation $Ay^2 + Bxy + Dy + Ex + F = 0$ représente une courbe ayant pour asymptote parallèle à l'axe des abscisses la droite $By + E = 0$. Si l'on a $E = 0$, cette asymptote est l'axe des x lui-même.

De même l'équation $Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ représente une courbe ayant pour asymptote parallèle à l'axe des ordonnées la droite $Bx + D = 0$. Si l'on a $D = 0$, cette asymptote est l'axe des y lui-même.

L'équation $Bxy + F = 0$ représente une courbe ayant les deux axes pour asymptotes.

On voit que s'il existe une asymptote parallèle à l'un des axes, le terme du degré le plus élevé par rapport à la variable correspondante manque nécessairement dans l'équation.

II. Si l'équation proposée $F(x, y) = 0$ est du degré α, l'équation $f_0(x) = 0$ sera du degré $\alpha - \beta$. Il ne peut donc y avoir plus de $\alpha - \beta$ asymptotes parallèles à l'axe des y. Nous avons vu (88) qu'il ne pouvait y en avoir plus de β obliques à cet axe. Par conséquent, une courbe du degré α ne peut avoir plus de α asymptotes.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES CENTRES.

92. Le *centre* d'une courbe est un point qui divise toute corde de cette courbe qui y passe en deux parties égales.

Supposons que la courbe considérée ait un centre et que l'origine des coordonnées soit placée en ce point. Toute corde passant par l'origine y sera divisée en deux parties égales, de sorte que les extrémités de cette corde auront des coordonnées égales et de signes contraires (3). L'équation de la courbe restera donc la même lorsqu'on remplacera d'une manière générale x par $-x$ et y par $-y$.

Réciproquement, si l'équation d'une courbe n'est pas modifiée par la substitution de $-x$ et de $-y$ à la place de x et de y, l'origine des coordonnées est un centre de la courbe. Car si par le point M, dont les coordonnées sont x et y, on mène une droite passant par l'origine, et si on la prolonge jusqu'au point M′ de manière que l'origine soit au milieu de la longueur MM′, les coordonnées du point M′ seront précisément $-x$ et $-y$; de sorte que, le point M′ appartenant à la courbe, toute corde de cette courbe passant par l'origine y sera divisée en deux parties égales.

Ainsi, que l'équation d'une courbe soit algébrique ou transcendante, *l'origine des coordonnées sera un centre lorsqu'on pourra, sans changer l'équation, remplacer x et y par $-x$ et $-y$.*

93. *Lorsqu'une courbe a plus d'un centre, elle en a une infinité.*

Pour démontrer cette proposition, il suffira de prouver que l'existence de deux centres entraîne celle d'un troisième centre.

Soit (*fig.* 44) M un point quelconque d'une courbe qui a deux centres O et O′. Si l'on mène la droite MOM′ et si l'on prend OM′ = MO, le point M′ appartiendra à la courbe. Si l'on mène de même les droites MO′N, M′O′N′, et si l'on prend O′N = MO′, O′N′ = M′O′, les points N et N′ appartiendront aussi à la courbe. Les diagonales du quadrilatère MM′NN′ se coupant mutuellement en parties égales, ce quadrilatère sera un parallélogramme, et le point O étant le milieu de MM′, la droite OO′ parallèle à MN′ viendra couper la droite NN′ en son milieu O″. Le point M étant quelconque sur la courbe, la droite NN′ est aussi une corde quelconque de cette courbe, et comme on aura toujours

$O'O'' = OO'$, le point O'' qui est fixe est un centre de cette courbe.

Donc, quand une courbe a plus d'un centre, elle en a une infinité, tous situés sur une même droite qu'ils divisent en parties égales.

De plus, si l'on joint le point M' à ces différents centres, tous les points de la courbe appartenant aux cordes ainsi déterminées, seront distribués sur une même droite $MN'N''$ parallèle à la droite des centres : ce qui montre que dans les courbes qui ont une infinité de centres, toute parallèle menée à la droite des centres à une distance convenable a une infinité de points d'intersection avec la courbe.

Il résulte immédiatement de cette dernière remarque qu'*une courbe algébrique ne peut avoir qu'un seul centre;* car, si elle est du degré m, elle ne peut être coupée par une droite en plus de m points (33).

94. Soit en particulier une équation algébrique *irréductible*. Si la courbe qu'elle représente a pour centre l'origine des coordonnées, tous ses termes seront de même parité, c'est-à-dire tous de degré pair ou tous de degré impair, de manière à ne pas changer de signes ou à en changer tous à la fois, lorsqu'on substituera $-x$ et $-y$ à x et à y.

En effet, remplaçons x et y par $-x$ et $-y$ dans le terme général $Px^{m-p}y^p$. Si $m-p$ et p sont tous deux pairs ou impairs, c'est-à-dire si m est pair, le terme considéré ne changera pas de signe; si, au contraire $m-p$ et p sont l'un pair et l'autre impair, c'est-à-dire si m est impair, le changement de signe aura nécessairement lieu.

Remarque. — Dans le cas où l'équation est de degré impair, elle ne doit donc pas contenir de terme indépendant des variables; et alors, s'il y a un centre, il est situé sur la courbe elle-même.

95. La méthode pour déterminer le centre d'une courbe algébrique, découle directement de ce qui précède.

En effet, si le centre supposé n'est pas à l'origine, on le reconnaît à ce que les termes de l'équation proposée sont de parité différente. En désignant alors par a et b les coordonnées du centre cherché, on effectue une transformation d'axes indéterminée, en les transportant parallèlement à eux-mêmes au point (a, b); ce qui se fera en remplaçant dans l'équation x et y par $x+a$ et $y+b$.

Si l'équation transformée est de degré pair, on égale à zéro les coefficients de tous ses termes de degré impair; si elle est de degré impair, on égale à zéro les coefficients de tous ses

termes de degré pair. On obtient ainsi des équations qui permettent de déterminer les coordonnées a et b du centre, lorsqu'il existe.

Remarque. — S'il s'agit d'une courbe transcendante, après avoir effectué la transformation indiquée, on change dans l'équation x et y en $-x$ et en $-y$. Les deux équations obtenues doivent rester identiques, lorsque la nouvelle origine est un centre; et si leur identification est possible, elle conduit aux coordonnées a et b du centre cherché.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES DIAMÈTRES.

96. On entend par *diamètre* d'une courbe le lieu des milieux d'un système de cordes menées dans cette courbe parallèlement à une direction donnée.

Pour trouver l'équation générale des diamètres d'une courbe dont l'équation est donnée, voici théoriquement la marche qu'on peut suivre.

Soit $F(x, y)$ l'équation proposée, soit m le coefficient angulaire du système de cordes parallèles donné. Désignons par X et Y les coordonnées du point milieu d'une quelconque d'entre elles. Transportons en ce point l'origine des coordonnées. L'équation de la corde considérée deviendra $y = mx$, et celle de la courbe sera $F(x+X, y+Y) = 0$. Pour avoir les abscisses des points d'intersection de la corde et de la courbe, il suffira de remplacer dans l'équation de la courbe y par mx. L'équation résultante $F(x+X, mx+Y) = 0$ devra alors, puisque le milieu de la corde est à l'origine, présenter deux racines égales et de signes contraires. On divisera donc son premier membre par le binôme $x^2 - h^2$ qui correspond aux deux racines $+h$ et $-h$. On continuera la division jusqu'au reste du premier degré en x, on posera les conditions nécessaires pour la nullité de ce reste, et l'on obtiendra deux équations entre lesquelles il suffira d'éliminer l'indéterminée h pour avoir l'équation générale des diamètres de la courbe $F(x, y) = 0$. L'indétermination de h correspond précisément à la variation nécessaire de l'origine (X, Y), choisie au milieu d'une corde *quelconque*.

Remarque. — Lorsqu'on appliquera cette méthode à l'équation générale du second degré à deux variables, le calcul se

simplifiera. En effet, l'équation résultante en x étant nécessairement du second degré, il suffira d'y égaler à zéro le coefficient du terme du premier degré pour exprimer la condition analytique imposée, c'est-à-dire pour obtenir l'équation des diamètres.

97. On appelle *axe* d'une courbe tout diamètre *rectiligne* perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales ou qui lui sont *conjuguées*.

Les points où une courbe est rencontrée par un de ses axes sont appelés *sommets*, lorsque la tangente correspondante est perpendiculaire à l'axe.

Dans l'ellipse et dans l'hyperbole (66, 67) dont les équations sont

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

l'origine des coordonnées est un *centre*, les axes coordonnés sont des *axes* de la courbe, les points où ils la coupent sont des *sommets*.

98. Les diamètres *rectilignes* étant seuls réellement utiles à connaître, il est indispensable d'indiquer de quelle manière on peut directement en trouver l'équation sans être forcé de calculer l'équation générale du n° 96, qui les renferme nécessairement.

Il suffit de remarquer que, si l'on choisit un diamètre rectiligne pour axe des x, en prenant l'axe des y parallèle aux cordes conjuguées de ce diamètre, à chaque valeur de x devront correspondre des valeurs de y égales et de signes contraires, c'est-à-dire que l'équation de la courbe considérée ne devra alors contenir que des puissances paires de l'ordonnée.

On effectuera donc une transformation d'axes indéterminée à l'aide des formules (26)

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta,$$
$$y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\beta,$$

qui supposent les axes primitifs rectangulaires et la nouvelle origine, placée au point (o, b) où le diamètre cherché coupe l'ancien axe des y (simplification qui ne modifie en rien la question). On cherchera alors à faire disparaître les puissances impaires de y, en profitant de l'indétermination des constantes b, α et β. Quand on obtiendra ainsi pour ces constantes des valeurs réelles et finies, chaque groupe de valeurs fera connaître un diamètre rectiligne de la courbe proposée et la direction de ses cordes conjuguées.

Si l'on veut trouver les axes par cette méthode, il faudra passer d'axes rectangulaires à axes rectangulaires, c'est-à-dire employer les formules (26)

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

qui ne contiennent plus, comme cela doit être, que deux constantes arbitraires b et α.

99. *Remarque.*—Lorsque l'équation d'une courbe ne change pas quand on y permute x et y, cette courbe a pour axe la bissectrice de l'angle yox des coordonnées positives.

En effet, soient (*fig.* 45) les deux points M et M′, pour lesquels on a

$$MP = OP' \quad \text{et} \quad OP = M'P'.$$

Le quadrilatère OQRP′ sera un losange, et comme on aura MR = RM′, la bissectrice ORX de l'angle yox sera perpendiculaire sur le milieu de la corde MM′.

On prouverait de la même manière que, lorsque l'équation d'une courbe n'est pas altérée par le changement de x en $-y$ et de y en $-x$, cette courbe a pour axe la bissectrice de l'angle yox', supplément de l'angle yox.

Nota. — Nous parlerons du nombre de points nécessaires pour la détermination d'une courbe d'espèce donnée et de la théorie générale de la similitude au point de vue analytique, en nous occupant spécialement des courbes du second degré.

CHAPITRE V.

EXEMPLES DE DISCUSSION GÉNÉRALE D'ÉQUATIONS A DEUX VARIABLES, DANS LE CAS DES COORDONNÉES RECTILIGNES.

100. I. *Lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes demeure constant.*

Si l'on désigne par u et v les distances d'un point du lieu aux deux points fixes, son équation naturelle est immédiatement

$$uv = m^2.$$

Le lieu est évidemment symétrique par rapport à la droite qui joint les deux points fixes et par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de cette droite : ce qui règle immédiatement le choix des axes rectilignes. L'équation naturelle montre que le lieu est fermé.

Si l'on représente par $2d$ la distance AB des deux points fixes et si M est un point du lieu (*fig.* 46), on aura

$$u^2 = y^2 + (x-d)^2 \quad \text{et} \quad v^2 = y^2 + (x+d)^2,$$

d'où, pour l'équation du lieu en coordonnées rectangulaires,

$$[y^2 + (x-d)^2][y^2 + (x+d)^2] = m^4,$$

c'est-à-dire

$$y^4 + 2(x^2+d^2)y^2 + (x^2-d^2)^2 = m^4. \tag{1}$$

Cette équation ne contenant que des puissances paires des variables, prouve que l'origine des coordonnées est un centre de la courbe. On en déduit (en écartant le signe — du second radical qui correspond à des valeurs de y toujours imaginaires)

$$y = \pm\sqrt{-(x^2+d^2) + \sqrt{4d^2x^2+m^4}}. \tag{2}$$

Reprenons l'équation (1) : si l'on y forme la quantité $b^2 - 4ac$, on trouve

$$4d^2x^2 + m^4,$$

quantité toujours plus grande que zéro. Ainsi les racines de l'équation (1), si l'on y regarde y^2 comme inconnue, sont toujours réelles. Leur somme $-2(x^2+d^2)$ est toujours négative. On aura donc deux racines négatives pour y^2 ou quatre imaginaires pour y, si le produit $(x^2-d^2)^2 - m^4$ de ces racines est positif.

Pour que y^2 admette une valeur positive ou y deux valeurs réelles, il faut donc que la condition $(x^2-d^2)^2 - m^4 < 0$ soit satisfaite.

Elle revient à

$$x^2 < d^2 + m^2,$$

c'est-à-dire

$$x < +\sqrt{d^2+m^2} \quad \text{ou} \quad x > -\sqrt{d^2+m^2};$$

ou bien à

$$x^2 > d^2 - m^2,$$

c'est-à-dire

$$x > +\sqrt{d^2-m^2} \quad \text{ou} \quad x < -\sqrt{d^2-m^2}.$$

On ne peut donc donner à x de valeurs positives qu'entre $+\sqrt{d^2-m^2}$ et $+\sqrt{d^2+m^2}$, de valeurs négatives qu'entre $-\sqrt{d^2-m^2}$ et $-\sqrt{d^2+m^2}$. Pour ces valeurs limites données à x, on a d'ailleurs $y = 0$.

Ainsi, la courbe est bien limitée dans le sens des abscisses, et par suite dans le sens des ordonnées.

Nous distinguerons les trois cas suivants :

1° $m > d$.

Dans ce cas, les limites $+\sqrt{d^2-m^2}$ et $-\sqrt{d^2-m^2}$ sont imaginaires. Par suite, la courbe ne coupe l'axe des x qu'en deux points déterminés par les valeurs $x = \pm\sqrt{d^2+m^2}$. Si ces points sont C et C', la courbe sera tout entière comprise entre les parallèles menées par ces points à l'axe des y (*fig.* 47). Quant aux valeurs maximums et minimums de y, on a

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x(y^2+x^2-d^2)}{y(y^2+x^2+d^2)}.$$

En vertu de l'équation (2), on a

$$y^2+x^2-d^2=+\sqrt{4d^2x^2+m^4}-2d^2.$$

On peut donc écrire

$$y'=-\frac{x\left(\sqrt{4d^2x^2+m^4}-2d^2\right)}{y\left(y^2+x^2+d^2\right)}.$$

Les valeurs cherchées correspondent donc à l'équation

$$x\left(\sqrt{4d^2x^2+m^4}-2d^2\right)=0.$$

On en déduit

$$x=0 \quad \text{et} \quad \sqrt{4d^2x^2+m^4}-2d^2=0.$$

c'est-à-dire

$$x=\pm\frac{\sqrt{4d^4-m^4}}{2d}.$$

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y=\pm\sqrt{m^2-d^2} \quad \text{et} \quad y=\pm\frac{m^2}{2d}.$$

On a, par hypothèse, $m>d$; donc les valeurs $x=0$, $y=\pm\sqrt{m^2-d^2}$ déterminent sur l'axe des y deux points D et D′ appartenant à la courbe.

Quant aux valeurs $x=\pm\frac{\sqrt{4d^4-m^4}}{2d}$, $y=\pm\frac{m^2}{2d}$, elles n'existent que si l'on a

$$4d^4-m^4>0,$$

c'est-à-dire

$$m<d\sqrt{2}.$$

Supposons d'abord m compris entre d et $d\sqrt{2}$. y' deviendra nulle pour deux valeurs de x (en ne considérant que le quart de courbe situé dans l'angle yOx). De plus, y' restera positive tant que x demeurera comprise entre la valeur zéro et la valeur $\frac{\sqrt{4d^4-m^4}}{2d}=\mathrm{OP}$, pour devenir négative au delà. L'ordonnée de la courbe augmentera donc du point D (minimum) au point E (maximum), pour diminuer ensuite jusqu'au point C (82, 83).

La courbe, dans le sens des ordonnées, sera donc renfermée entre les deux tangentes parallèles EE′ et E″E‴. Aux points C et C′, on a $y'=\infty$ à cause de $y=0$. Les points C et C′, D et D′, sont donc des sommets, ce qui exige que la courbe tourne sa concavité comme l'indique la figure. Une fois qu'on a construit un quart de la courbe, on l'obtient tout entière en vertu de sa symétrie par rapport aux axes, par deux rabattements successifs autour de l'axe des y et de l'axe des x.

Si m, toujours $>d$, est aussi $>d\sqrt{2}$, y' ne peut devenir nulle que pour $x=0$ et demeure constamment négative, du point D au point C. L'ordonnée diminue donc depuis le point D (maximum) jusqu'au point C (limite), et la courbe a la forme indiquée par la figure (*fig.* 48). On lui donne alors le nom d'*ovale* ou d'ellipse de *Cassini*.

2° $m < d$.

Dans ce cas, les limites $x = +\sqrt{d^2 - m^2}$ et $x = -\sqrt{d^2 - m^2}$ sont aussi réelles. Le lieu coupe donc l'axe des abscisses en quatre points C, C', H, H' (*fig.* 49), et il se trouve tout entier entre les parallèles menées à l'axe des y, d'une part par les points C et H, de l'autre par les points C' et H'. Ainsi, entre les parallèles qui correspondent aux points H et H', il n'existe aucun point de la courbe.

Considérons sa partie positive. y part de zéro au point H, pour redevenir zéro au point C : il passe donc par un maximum. Consultons la dérivée

$$y' = -\frac{x\left(\sqrt{4d^2x^2 + m^4} - 2d^2\right)}{y\left(y^2 + x^2 + d^2\right)}.$$

On ne peut pas faire ici $x = 0$. La condition $y' = 0$ entraînera donc seulement la condition

$$\sqrt{4d^2x^2 + m^4} - 2d^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{+\sqrt{4d^4 - m^4}}{2d} \quad \text{et} \quad y = \frac{m^2}{2d};$$

telles seront les coordonnées du point E (maximum). Les points C, C', H, H', pour lesquels on a $y = 0$ ou $y' = \infty$, sont d'ailleurs des sommets de la courbe, qui se sépare en deux parties fermées et a la forme indiquée par la figure.

3° $m = d$.

Ce cas sert de liaison aux deux autres. Les deux limites $x = +\sqrt{d^2 - m^2}$ et $x = -\sqrt{d^2 - m^2}$ se réduisant à zéro, les deux ovales du second cas, après s'être rapprochées à mesure que m et d tendaient l'un vers l'autre, finissent par se rejoindre à l'origine, comme l'indique la disparition du terme indépendant dans l'équation (1). Les points C et C' restent des sommets de la courbe. Les quatre points maximums et minimums E, E', E'', E''' ont toujours pour abscisse et pour ordonnée (en valeur absolue)

$$\frac{\sqrt{4d^4 - m^4}}{2d} \quad \text{et} \quad \frac{m^2}{2d},$$

c'est-à-dire, en vertu de la condition $m = d$,

$$\frac{d\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d}{2}.$$

Pour $x = 0$, on a $y = 0$, de sorte que y' se présente à l'origine sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour lever cette difficulté, reprenons l'équation (1) qui est devenue

$$y^4 + 2(x^2 + d^2)y^2 + x^4 - 2d^2x^2 = 0.$$

En divisant ses deux membres par x^2, on peut l'écrire

$$x^2 \cdot \frac{y^4}{x^4} + 2(x^2 + d^2)\frac{y^2}{x^2} + x^2 - 2d^2 = 0.$$

Pour $x = 0$, on obtient alors pour le rapport $\frac{y^2}{x^2}$ une valeur égale à $-\infty$

et une valeur égale à 1. Puisque nous ne considérons que des valeurs réelles de x et de y, nous n'admettrons que la valeur de $\frac{y^2}{x^2}$ égale à 1. Nous aurons donc (75), pour $x = 0$,

$$\lim \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad y' = \pm 1.$$

Ainsi, l'origine est un point double, et les deux tangentes en ce point sont les bissectrices des angles des axes. D'ailleurs, au delà de l'origine et jusqu'au point maximum E, y' est évidemment inférieure à 1 et positive, pour devenir ensuite négative jusqu'au point C. La courbe a donc la forme indiquée par la figure (*fig.* 50) : dans le cas considéré de $m = d$, c'est une *lemniscate de Bernoulli*. On voit que l'origine est en même temps un point double et un point d'inflexion pour les deux branches qui viennent s'y croiser.

101. II. *Conchoïde* (de Nicomède). — *On suppose un point fixe* A *et une droite fixe* BB' (*fig.* 51). *Par le point* A, *on mène une droite quelconque* ABM. *Sur cette droite, à partir du point* B *où elle rencontre* BB', *on prend* BM = BN = *une longueur constante d, et l'on demande le lieu des points ainsi déterminés.*

Le lieu est évidemment symétrique par rapport à la perpendiculaire AO abaissée du point A sur la droite fixe BB'. A mesure que la droite variable ABM s'éloigne de AO, la distance MH du point M à la droite BB' diminue. On a en effet

$$\text{MH} = d \sin \text{ABO};$$

et comme l'angle ABO tend vers zéro, il en est de même de MH : la droite BB' est donc une asymptote du lieu cherché qui s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous de la droite AO.

Cette première discussion nous porte à prendre la droite AO pour axe des x et la droite BB' pour axe des y. L'équation du lieu ne contiendra alors que des puissances paires de y et, de plus, le terme du degré le plus élevé en y manquera nécessairement (91).

Le lieu peut être regardé comme résultant de l'intersection de la droite ABM et d'un cercle décrit du point B comme centre avec d pour rayon. Posons

$$\text{OA} = -p.$$

L'équation de la droite ABM sera

$$y = m(x + p). \tag{1}$$

L'ordonnée à l'origine de cette droite étant $+mp$, l'équation du cercle correspondant sera

$$(y - mp)^2 + x^2 = d^2. \tag{2}$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffira donc d'éliminer m entre les équations (1) et (2); ce qui donne

$$\left(y - \frac{y}{x + p} \cdot p\right)^2 + x^2 = d^2,$$

ÉCOLE CENTRALE LYONNAISE

d'où l'on déduit

$$x^2y^2+x^2(x+p)^2=d^2(x+p)^2,$$

ou

$$y=\pm\left(1+\frac{p}{x}\right)^2\sqrt{d^2-x^2}.$$

On doit donc avoir $d^2-x^2>0$, c'est-à-dire que la valeur de x doit être comprise entre $+d$ et $-d$. Si l'on prend $OC=OC'=d$, la courbe sera donc tout entière comprise entre les deux parallèles menées par ces points à l'axe des y.

A mesure que x s'approche de 0, y s'approche de $\pm\infty$: l'axe des y est donc bien asymptote aux deux parties de la courbe.

On a $y=0$ pour $x=\pm d$ et pour $x=-p$; et il faut alors distinguer les trois cas suivants :

1° $p>d$.

Dans ce cas, qui est celui de la *fig.* 51, le point A, c'est-à-dire le point $(0,-p)$ se trouve complétement isolé de la courbe : c'est un point conjugué (84).

L'équation du lieu donne

$$y'=-\frac{xy^2+(x+p)(2x^2+px-d^2)}{x^2y}.$$

Pour $x=\pm d$ et $y=0$, on a

$$y'=\mp\infty.$$

Les points C et C′ sont donc des sommets. D'après cela, comme une courbe finit toujours par être convexe vers son asymptote, la conchoïde présentera sur chaque branche deux points d'inflexion symétriques par rapport à l'axe des x.

2° $p<d$ (*fig.* 52).

Si p est plus petit que d, les valeurs de x comprises entre p et d correspondent à des valeurs réelles de y. y partant de zéro au point A pour revenir à zéro au point C′, passe par un maximum, si l'on considère seulement la partie du lieu supérieure à l'axe des x. Or la valeur de y' peut s'écrire, en multipliant par x ses deux termes,

$$y'=-\frac{x^2y^2+x(x+p)(2x^2+px-d^2)}{x^3y}.$$

Remplaçons x^2y^2 par sa valeur tirée de l'équation de la courbe. Il viendra en simplifiant

$$y'=-\frac{(x+p)(x^3+pd^2)}{x^3y}.$$

On aura donc $y'=0$ pour $x^3+pd^2=0$. Le maximum de y entre les points A et C′ correspondra donc à

$$x=\sqrt[3]{-pd^2}.$$

Pour $x=\pm d$, on a toujours

$$y'=\mp\infty.$$

Les points C et C′ restent donc des sommets de la courbe.

Pour $x = -p$, comme on a $y = 0$, y' se présente sous la forme $\frac{0}{0}$: ce qui correspond en général à un point multiple (84).

Transportons l'origine au point A, c'est-à-dire remplaçons x par $x - p$. L'équation du lieu deviendra

$$(x-p)^2 y^2 + [(x-p)^2 - d^2]x^2 = 0.$$

On en déduit

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{d^2 - (x-p)^2}{(x-p)^2}.$$

La limite de ce rapport pour $x = 0$ est $\frac{d^2 - p^2}{p^2}$. On aura donc au point A (75)

$$y' = \lim \frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{d^2}{p^2} - 1} = \pm \frac{\sqrt{d^2 - p^2}}{p},$$

valeur bien facile à construire.

Le point A est donc un point double. La branche de gauche de la conchoïde n'a plus alors d'inflexions. Les inflexions du premier cas viennent, dans le second, se réunir au point double.

3° $p = d$ (*fig.* 53).

Dans ce cas, l'intervalle entre les points A et C′ disparaît. L'origine étant supposée au point A, on a en ce point

$$y' = \lim \frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{d^2}{p^2} - 1} = 0.$$

Les deux tangentes au point double A du second cas se confondent donc dans le troisième cas avec l'axe des x. Le point A est donc alors un point de rebroussement de première espèce (84). Le point C reste d'ailleurs un sommet de la courbe qui a, dans tous les cas, BB′ pour asymptote.

102. III. *Folium de Descartes.* — Cette courbe est représentée par l'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

où a est une quantité réelle quelconque. Nous supposerons pour plus de simplicité $a = 1$, et nous écrirons

$$y^3 - 3xy + x^3 = 0, \tag{1}$$

les axes étant d'ailleurs supposés rectangulaires.

Le lieu de l'équation proposée passe évidemment par l'origine. On voit que x et y ne peuvent prendre ensemble des valeurs négatives, tous les termes de l'équation (1) devenant alors de même signe; ce qui montre que la courbe cherchée ne peut avoir aucun point dans l'angle opposé à l'angle yOx (*fig.* 54).

L'équation (1) est symétrique en x et en y, c'est-à-dire qu'elle ne change pas lorsqu'on y remplace x par y et y par x. On en conclut immédiatement que la bissectrice de l'angle yOx est un *axe* du *folium* (99).

Pour calculer plus facilement les coordonnées des points de la courbe,

on peut poser $y = tx$, en désignant par t une variable auxiliaire. Il vient alors

$$t^3x^3 - 3tx^2 + x^3 = 0,$$

d'où, en divisant par x^2,

$$t^3x - 3t + x = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \quad \text{et} \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

En faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$, on aura toutes les valeurs correspondantes de x et de y. Ce procédé revient évidemment à chercher les points d'intersection du lieu à construire avec une droite variable menée par l'origine et ayant pour équation $y = tx$: il est souvent applicable, surtout lorsque l'équation proposée n'est résoluble par rapport à aucune des variables y et x.

Dans le cas considéré, nous avons reconnu que la courbe avait pour axe la bissectrice de l'angle $y'Ox$. Il est donc préférable d'abaisser l'équation (1) au second degré relativement à y, en effectuant une transformation d'axes qui consistera à faire tourner les axes primitifs de 45° autour de l'origine.

Pour passer d'axes rectangulaires à axes rectangulaires, les formules de transformation sont (26)

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

On a ici $\alpha = 45°$, c'est-à-dire

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il viendra par suite

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

L'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes sera donc, en supprimant les accents,

$$3(x\sqrt{2}+1)y^2 + x^2(x\sqrt{2} - 3) = 0. \tag{2}$$

On en déduit

$$y = \pm x\sqrt{\frac{3 - x\sqrt{2}}{3(x\sqrt{2}+1)}}. \tag{3}$$

On voit immédiatement qu'on ne peut donner à x de valeurs positives que depuis 0 jusqu'à $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Pour $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$, on a $y = 0$, ce qui détermine le point A (*fig.* 54).

On déduit de l'équation (2)

$$y' = -\frac{3\sqrt{2}.y^2 + 3x(x\sqrt{2} - 2)}{6y(x\sqrt{2}+1)}. \tag{4}$$

Au point A, à cause de $y = 0$, on a $y' = \infty$: ce point est donc bien un sommet de la courbe.

A l'origine, la valeur de y' se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. L'équation (3) donne alors

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{3 - x\sqrt{2}}{3(x\sqrt{2}+1)}}.$$

Pour $x = 0$, il vient

$$\lim \frac{y}{x} = y' = \pm 1.$$

Il en résulte que les axes primitifs sont tangents à la courbe à l'origine qui est un point double.

On ne peut donner à x, d'après l'équation (3), que des valeurs négatives comprises entre 0 et $-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. A mesure que x tend vers cette dernière valeur, y tend vers $\pm\infty$.

La courbe est donc formée d'une *feuille* AMOM' et de deux branches infinies OR et OS qui ont pour asymptote la droite menée parallèlement au nouvel axe des y à la distance $OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'existence de l'asymptote est d'ailleurs indiquée par la valeur infinie que prend y' pour $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

y partant de zéro à l'origine pour redevenir zéro au point A, passe par un maximum (en considérant la partie de la feuille située au-dessus de l'axe de la courbe).

D'après l'équation (4), y' devient nulle pour

$$3\sqrt{2}y^2 = 3x(2 - x\sqrt{2}),$$

c'est-à-dire, en remplaçant y^2 par sa valeur tirée de l'équation (2) et en simplifiant, pour

$$4x^2 = 6 \quad \text{ou} \quad x = +\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Le signe + du radical convient seul d'après ce qui précède. La valeur correspondante de l'ordonnée est d'ailleurs

$$y = \pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{3(\sqrt{3}+1)}}.$$

103. IV. *Sinusoïde* (*fig.* 55). — Soit l'équation $y = \sin x$, où x représente la longueur d'un arc dans la circonférence ayant pour rayon l'unité. La courbe correspondante manifeste la loi de variation du sinus (*Trig.*, 7) : elle se compose donc d'une infinité de parties identiques, situées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des x. Les points où la courbe coupe l'axe des x sont distants d'une demi-circonférence, puisque pour $x = k\pi$, k étant un entier quelconque positif ou négatif, on a $y = 0$.

L'origine est un centre, puisqu'on peut changer y en $-y$ et x en $-x$ sans modifier l'équation. Et il est facile de voir que tous les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont des centres.

En effet (95), changeons dans l'équation donnée y en $y+b$ et x en $x+a$. Il viendra

$$y+b=\sin(x+a). \tag{1}$$

Dans l'équation obtenue, changeons y et x en $-y$ et en $-x$; nous aurons

$$-y+b=\sin(-x+a)$$

ou

$$y-b=-\sin(x-a). \tag{2}$$

Identifions les équations (1) et (2). Il faudra qu'on ait

$$b=-b \quad \text{ou} \quad b=0,$$

et

$$\sin x\cos a=-\sin x\cos a \quad \text{ou} \quad \sin x=0.$$

La dernière condition entraîne celle-ci :

$$x=k\pi.$$

Les différents points O_1, O, O', O'', ..., sont donc des centres de la sinusoïde.

On a

$$y'=\cos x.$$

Par conséquent, x variant de 0 à π, y' diminue de 1 à -1; x variant de π à 2π, y' augmente de -1 à 1, et ainsi de suite. Les arcs de courbe tournent donc alternativement leur convexité et leur concavité vers les y positifs.

On a

$$y''=-\sin x.$$

Par conséquent, $y''=0$ pour $x=k\pi$. Donc tous les points où la courbe rencontre l'axe des x sont en même temps des centres et des points d'inflexion. y'' passe du négatif au positif ou réciproquement, lorsque la courbe traverse les points ... , O', O'', ...

D'ailleurs $y'=0$ pour $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$. Les perpendiculaires élevées au milieu des intervalles OO', O'O'', ..., correspondent donc alternativement à des points maximums et minimums. Par exemple, pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, on a $y''<0$, et pour $x=\dfrac{3}{2}\pi$, on a $y''>0$.

Enfin, pour $x=k\pi$, on a $y'=+1$ ou $y'=-1$, suivant que k est pair ou impair, c'est-à-dire que les tangentes aux points d'inflexion font alternativement des angles de 45° et de 135° avec l'axe des x.

104. V. *Tangentoïde* (*fig.* 56). — Soit encore l'équation $y=\operatorname{tang} x$. La courbe correspondante représente la loi de variation de la tangente (*Trig.*, 9) : elle se compose donc d'une infinité de parties identiques. Les points où la courbe coupe l'axe des x sont distants d'une demi-circonférence, puisque pour $x=k\pi$, k étant un entier quelconque positif ou négatif, on a $y=0$. L'origine est un centre, puisqu'on peut changer x en $-x$ et y en $-y$ sans modifier l'équation. Il en est de même de tous les

points d'intersection de la courbe avec l'axe des x, puisque l'équation donnée conserve la même propriété lorsqu'on y remplace x par $k\pi + x$.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, et en général pour $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, on a $y = \pm\infty$. Par conséquent, les parallèles menées à l'axe des y par les points situés à égale distance de deux centres consécutifs, sont des asymptotes de la courbe. Un peu avant une valeur $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, l'ordonnée y est positive et très-grande; un peu après, cette ordonnée est négative et très-grande en valeur absolue.

On a (*Compl. d'Alg.*, 138)

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Il en résulte

$$y'' = \frac{2\cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

On a $y' = \infty$ pour $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, ce qui correspond aux asymptotes considérées comme limites des tangentes. On a $y'' = 0$ pour $x = k\pi$. D'ailleurs y'' est négative un peu avant une valeur $x = k\pi$, positive un peu après. Donc les centres de la courbe sont en même temps des points d'inflexion; aux points d'inflexion, on a d'ailleurs

$$y' = 1.$$

105. VI. Soit l'équation $y = e^{\frac{1}{x}}$ (*fig.* 57).

Pour $x = 0$, on a $y = \infty$. L'axe des y est donc asymptote à la courbe. A mesure que x augmente, en restant positive, la valeur de y diminue en restant positive et en tendant indéfiniment vers la valeur 1 qu'elle n'atteint que pour $x = \infty$. On a donc une première branche de courbe, ayant à la fois pour asymptotes l'axe des y et la parallèle menée à l'axe des x à la distance 1 : cette branche tourne nécessairement sa concavité vers les y positifs, comme l'indique d'ailleurs la valeur de

$$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}},$$

qui est constamment croissante.

Faisons maintenant varier x de 0 à $-\infty$. Pour cela, changeons x en $-x$ dans l'équation donnée, et faisons ensuite varier x de 0 à $+\infty$. Nous aurons

$$y = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Pour $x = 0$, nous aurons $y = 0$. A mesure que x augmente, la valeur de y augmente en tendant vers la valeur 1 qu'elle n'atteint que pour $x = \infty$. On obtient donc une seconde branche de courbe partant de l'origine, s'étendant entre l'axe des abscisses et la parallèle menée à cet axe à la distance $OA = 1$, et ayant cette parallèle pour asymptote. On voit que l'origine est un point d'arrêt (84).

Changeons dans la valeur de y', x en $-x$. Il viendra

$$y' = -\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on trouve

$$y' = -\frac{\infty}{\infty}.$$

Nous lèverons l'indétermination en appliquant la règle connue (*Compl. d'Alg.*, 156). En prenant la dérivée de chaque terme, il vient

$$y' = -\frac{\frac{-2x}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

En faisant $x = 0$, on trouve encore

$$y' = -\frac{\infty}{\infty}.$$

En redoublant la dérivation, on obtient enfin

$$y' = -\frac{\frac{-2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}},$$

ce qui donne $y' = 0$ pour $x = 0$. L'axe des x est donc tangent à la courbe à l'origine ou au point d'arrêt.

Par suite, la seconde branche devant finir par tourner sa convexité vers son asymptote, présente nécessairement un point d'inflexion. Cherchons la valeur de y''. Il viendra

$$y'' = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right).$$

Changeons x en $-x$. Nous aurons

$$y'' = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right).$$

Il en résulte $y'' = 0$ pour $\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} = 0$, c'est-à-dire pour $x = \frac{1}{2}$. On a alors

$$y = \frac{1}{e^2}.$$

Ainsi, prenant $OP = \frac{1}{2}$ et $PM = \frac{1}{e^2}$, le point M sera le point d'inflexion cherché.

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Discuter les équations

$$x^3+y^3=1, \quad y^2-x^3+x^4=0, \quad x^3-xy^2=1,$$
$$x^2y-xy=1, \quad y^4-x^4+4x=0,$$
$$x^4-x^2-y^2=0, \quad y^4-xy^2+x^4=0, \quad y^2+x^3-x^2=0.$$

II. Discuter l'équation

$$y^2-x^3+(a-b)x^2+abx=0.$$

On distinguera les trois cas suivants : a et b différents de zéro, $a=0$, $b=0$.

III. Discuter l'équation

$$y^4-2x^2y^2-x^4+2xy^2-5x^3=0.$$

IV. Discuter l'équation

$$y=\sec x \ (\textit{sécantoïde}).$$

V. Discuter l'équation

$$y=\log x \ (\textit{logarithmique}).$$

VI. Discuter l'équation

$$y=\frac{1}{\log x}.$$

VII. Discuter l'équation

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \ (\textit{point saillant}).$$

VIII. Discuter l'équation

$$y^4-x^4-96y^2+100x^2=0 \ (\textit{courbe du diable}).$$

IX. Discuter l'équation

$$y=x\cot\frac{\pi x}{2d} \ (\textit{quadratrice de Dinostrate}).$$

X. On donne un angle droit et une droite de longueur l, toujours inscrite entre les côtés de cet angle : trouver et discuter l'équation du lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du sommet de l'angle sur cette droite (*rosace*).

XI. On donne un cercle de diamètre AA′; par le point A, on mène une corde quelconque AB, et, par le milieu de l'arc qu'elle sous-tend, on trace une parallèle au diamètre fixe AA′. Cette parallèle vient couper la corde AB en un point dont on demande le lieu.

XII. Discuter l'équation générale

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

a est positif, a' est positif ou négatif- On examinera tous les cas qui peuvent se présenter, en se reportant, s'il est nécessaire, au n° 226 de l'*Algèbre élémentaire*.

XIII. On prend un angle droit yOx et un point A sur l'un de ses côtés Ox; on mène par le point A des rayons vecteurs AB sur lesquels on prend, de part et d'autre de leur point d'intersection B avec Oy, $BM = BN = OB$. On demande le lieu des points M et N ainsi déterminés (*strophoïde* ou *logocyclique*).

XIV. Soit un cercle de diamètre AA'. Par le point A, passe une corde quelconque AC : des milieux des arcs qu'elle sous-tend, on abaisse sur le diamètre fixe AA' des perpendiculaires qui coupent cette corde aux points M et N : trouver le lieu des points ainsi déterminés (on rapprochera ce lieu du précédent).

XV. Chercher le lieu des points qui ont pour abscisses les différentes cordes inscrites dans un cercle, et pour ordonnées les cordes des demi-arcs correspondants, les axes étant supposés rectangulaires (*Nouvelles Annales*, t. V).

XVI. Soit un cercle de diamètre AA'. Par le point A passe une corde quelconque AB, qu'on prolonge d'une longueur BC égale à elle-même. Du point C, on abaisse une perpendiculaire CP sur le diamètre fixe AA', et, par le centre du cercle, on mène une parallèle OM à la corde AB jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire CP : on demande le lieu des points M ainsi déterminés.

LIVRE TROISIÈME.

ÉTUDE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ A DEUX VARIABLES.

106. Soit l'équation générale du second degré à deux variables

$$(1) \qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

Résolvons-la par rapport à l'une des variables, y par exemple. Il viendra

$$(2) \quad \begin{cases} y=-\dfrac{Bx+D}{2A} \\ \pm\dfrac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}. \end{cases}$$

Pour abréger, nous poserons

$$B^2-4AC=a, \quad 2(BD-2AE)=b, \quad D^2-4AF=c.$$

Nous aurons ainsi

$$(3) \qquad y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

On voit que l'ordonnée du lieu de l'équation (1) se compose, pour chaque valeur de x, de l'ordonnée de la droite $y=-\dfrac{Bx+D}{2A}$, augmentée ou diminuée de la valeur du radical $\dfrac{1}{2A}\sqrt{ax^2+bx+c}$. Il en résulte immédiatement que la droite $y=-\dfrac{Bx+D}{2A}$ divise en deux parties égales les cordes du lieu qui sont parallèles à l'axe des y : cette droite est donc un *diamètre* du lieu (96).

La discussion ne pouvant porter que sur le radical, nous distinguerons les trois cas suivants :

$$B^2-4AC \quad \text{ou} \quad a<0, \quad B^2-4AC \quad \text{ou} \quad a>0,$$
$$B^2-4AC \quad \text{ou} \quad a=0.$$

Genre ellipse ($B - 4AC < 0$).

107. Posons

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Considérant le trinôme du second degré placé sous le radical, nous partagerons ce premier cas en trois autres.

1° $b^2 - 4ac > 0$. *Les racines* x' et x'' *du trinôme placé sous le radical sont réelles et inégales.*

Nous pourrons écrire (en supposant $x' > x''$)

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{a(x-x')(x-x'')} = \frac{1}{2A}\sqrt{-a(x'-x)(x-x'')}.$$

a étant négatif par hypothèse, $-a$ sera une quantité positive. Pour que Y conserve une valeur réelle, il faudra nécessairement que la valeur de x reste comprise entre x' et x''.

Construisons donc (*fig.* 58) le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$. Prenons sur l'axe des x, $OP' = x'$, $OP'' = x''$. La courbe sera tout entière comprise entre les parallèles menées à l'axe des y par les points P′ et P″. D'ailleurs, pour $x = x'$ et $x = x''$, on a $Y = 0$. Donc, les points d'intersection Q′ et Q″ de ces parallèles avec le diamètre sont à la courbe. Les valeurs de x étant limitées, il en sera de même des valeurs de y.

Entre ses deux valeurs égales à zéro, Y doit passer par un maximum absolu. La somme des deux facteurs $x' - x$ et $x - x''$ est égale à la constante $x' - x''$; par suite, leur produit sera maximum lorsqu'ils seront égaux entre eux et à la moitié de leur somme (*Alg. élém.*, 219), c'est-à-dire pour $x = \frac{x' + x''}{2}$. On a alors

$$Y = \frac{x' - x''}{4A}\sqrt{-a}.$$

On prendra donc le point P à égale distance des points P′ et P″ de manière à avoir $OP = \frac{x' + x''}{2}$; par le point P, on mènera une parallèle à l'axe des y ; à partir de l'intersection G de cette parallèle avec le diamètre Q′Q″, on portera au-dessus et au-dessous de ce diamètre les longueurs $GR' = GR'' = \frac{x' - x''}{4A}\sqrt{-a}$: les points R′ et R″ seront les points de la courbe les plus éloignés du diamètre considéré.

Si l'on donne à x des valeurs qui diffèrent de OP, *en plus ou en moins*, d'une même quantité α, on obtiendra évidemment pour Y des valeurs égales. Prenons $PN' = PN''$. A $x = ON'$ et à $x = ON''$, correspondent des valeurs M'H' et M''H'' de Y qui sont égales. Les cordes M'M'' et M'''M'^{IV} sont donc parallèles au diamètre Q'Q''. De plus, comme $GH' = GH''$, elles sont divisées en deux parties égales par la droite R'R'' qui est un second diamètre du lieu.

Les diamètres Q'Q'', R'R'', tels que chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre, sont dits *conjugués*.

On voit immédiatement que, si l'on prenait pour axes ces deux diamètres conjugués, l'équation de la courbe ne serait pas modifiée par le changement de x en $-x$ et de y en $-y$, puisqu'on passerait ainsi, par exemple, du point M' au point M'''. Le point G est donc un *centre* (92).

Les droites menées par les points R' et R'' parallèlement au diamètre Q'Q'' n'ont qu'un point commun avec la courbe qui est nécessairement convexe (33) : ce sont donc des tangentes. Il en est de même des parallèles P'Q', P''Q'', au diamètre R'R''. Le lieu obtenu est donc une courbe fermée, inscrite dans le parallélogramme déterminé par ces quatre tangentes : on lui donne le nom d'*ellipse*.

Reprenons l'équation (3)

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Les racines du trinôme placé sous le radical étant réelles et inégales, ce trinôme pourra être mis sous la forme (*Alg. élém.*, 194)

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - h^2\right].$$

Dans le cas considéré, l'équation (1) elle-même est donc de la forme

$$(2Ay + Bx + D)^2 - a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + ah^2 = 0;$$

son premier membre est la *somme des carrés* d'une fonction du premier degré en y et en x et d'une fonction du premier degré en x, *diminuée* d'un certain nombre positif.

2° $b^2 - 4ac < 0$. *Les racines x' et x'' du trinôme placé sous le radical sont imaginaires.* Dans ce cas, quelle que soit la valeur donnée à x, le trinôme placé sous le radical prend le signe de son premier terme (*Alg. élém.*, 195). Y et, par suite, y restent donc constamment imaginaires. L'équation (1) repré-

sente une *ellipse imaginaire*, c'est-à-dire rien. Le trinôme ax^2+bx+c pouvant alors s'écrire

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right],$$

l'équation (1) est de la forme

$$(2\mathrm{A}y+\mathrm{B}x+\mathrm{D})^2-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-ak^2=0;$$

son premier membre est la *somme de trois carrés*, dont l'un est indépendant des variables.

3° $b^2-4ac=0$. *Les racines x' et x'' du trinôme placé sous le radical sont égales.* On a alors

$$\mathrm{Y}=\frac{x-x'}{2\mathrm{A}}\sqrt{a}.$$

Y est donc imaginaire, sauf pour la valeur $x=x'$. L'équation (1) n'est donc satisfaite que pour $x=x'$ et

$$y=-\frac{\mathrm{B}x'+\mathrm{D}}{2\mathrm{A}},$$

c'est-à-dire qu'elle représente *un seul point*. L'ellipse se réduit à son centre. Le trinôme ax^2+bx+c pouvant alors s'écrire $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, l'équation (1) est de la forme

$$(2\mathrm{A}y+\mathrm{B}x+\mathrm{D})^2-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0;$$

son premier membre est la *somme des carrés* d'une fonction du premier degré en y et en x et d'une fonction du premier degré en x seulement.

Genre hyperbole ($\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}>0$).

108. Nous partagerons de même ce second cas en trois autres.

1° $b^2-4ac>0$. *Les racines x' et x'' du trinôme placé sous le radical sont réelles et inégales.* On a

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2\mathrm{A}}\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2\mathrm{A}}\sqrt{a(x-x')(x-x'')}.$$

a étant positif, pour que Y conserve une valeur réelle, il faut que les valeurs de x ne soient pas comprises entre les racines x' et x''. Par suite, si l'on construit le diamètre $y=-\frac{\mathrm{B}x+\mathrm{D}}{2\mathrm{A}}$,

si l'on prend $OP' = x'$, $OP'' = x''$, si par les points P' et P'' (*fig.* 59), on mène des parallèles à l'axe des y, entre ces parallèles, il n'y aura aucun point de la courbe. Pour $x = x'$ et $x = x''$, on a $Y = 0$. Les points où le diamètre rencontre les parallèles indiquées sont donc à la courbe.

D'ailleurs on peut faire varier x depuis x' jusqu'à $+\infty$ et depuis x'' jusqu'à $-\infty$. x pouvant croître d'une manière illimitée, il en est de même de Y. Le lieu se compose donc de deux parties séparées, formées chacune de deux branches infinies.

Pour des valeurs de x qui diffèrent de x' *en plus* ou de x'' *en moins* d'une même quantité α, Y prend évidemment les mêmes valeurs. Il en résulte que la parallèle menée à l'axe des y par le point P, milieu de l'intervalle P'P'', est le diamètre *conjugué* du diamètre Q' Q'', et que le point G de rencontre des deux diamètres est le *centre* de la courbe. On lui donne le nom d'*hyperbole*.

Des deux diamètres conjugués Q'Q'' et GP ou R'R'', l'un rencontre la courbe, l'autre ne la rencontre pas.

Reprenons l'expression

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Dans le cas considéré, on peut remplacer $ax^2 + bx + c$ par

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - h^2\right]:$$

l'équation (1) peut donc se mettre sous la forme

$$(2Ay + Bx + D)^2 - a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + ah^2 = 0;$$

son premier membre est la *différence des carrés* d'une fonction du premier degré en y et en x, et d'une fonction du premier degré en x, *augmentée* d'un nombre positif.

2° $b^2 - 4ac < 0$. *Les racines x' et x'' du trinôme placé sous le radical sont imaginaires.* On peut alors écrire

$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + h^2\right]}.$$

x peut recevoir toutes les valeurs possibles, puisque toutes les valeurs du trinôme sont de même signe que a. Mais on ne peut plus, comme dans le cas précédent, faire prendre à y toutes les valeurs possibles. Y est susceptible d'un *minimum*

différent de zéro. Ce minimum correspond à $x = -\frac{b}{2a}$ et est égal à $\frac{k}{2A}\sqrt{a}$. Prenons (*fig.* 60) $OP = -\frac{b}{2a}$, et menons par le point P une parallèle à l'axe des y. A partir du point de rencontre G de cette parallèle avec le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$ ou Q'Q'', portons sur elle, au-dessus et au-dessous du diamètre, la longueur $\frac{k}{2A}\sqrt{a}$. Si, par les points R' et R'' ainsi obtenus, on mène des parallèles au diamètre Q' Q'', il n'y aura entre ces parallèles aucun point de la courbe. D'ailleurs, x pouvant croître au delà de toute limite dans un sens ou dans l'autre, il en sera de même de Y et de y. La courbe se composera donc de deux parties séparées, formées chacune de deux branches infinies. C'est encore une *hyperbole* ayant le point G pour centre et les diamètres Q' Q'' et R' R'' pour diamètres conjugués. Seulement, c'est le diamètre R' R'' qui coupe la courbe et c'est le diamètre Q' Q'' qui ne la rencontre pas.

Les deux cas que nous venons de considérer sont en réalité identiques. Il n'y a ici qu'un changement de position. On peut le vérifier en résolvant dans le second cas l'équation par rapport à la variable x. Dans ce second cas, le premier membre de l'équation (1) est la *différence des carrés* d'une fonction du premier degré en y et en x et d'une fonction du premier degré en x, *diminuée* d'un nombre positif.

3° $b^2 - 4ac = 0$. *Les racines x' et x'' du trinôme placé sous le radical sont égales.* Ce trinôme étant un carré parfait, on peut écrire

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{x - x'}{2A}\sqrt{a}.$$

Le lieu se compose alors des deux droites

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} + \frac{x - x'}{2A}\sqrt{a},$$

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} - \frac{x - x'}{2A}\sqrt{a}.$$

Ces deux droites se coupent sur le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$, puisque pour l'abscisse $x = x'$ les trois droites ont la même ordonnée $y = -\frac{Bx' + D}{2A}$.

Dans ce cas, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(2Ay+Bx+D)^2-a(x-x')^2=0;$$

son premier membre est *la différence de deux carrés.*

Genre parabole $(B^2-4AC=0)$.

109. Nous subdiviserons aussi ce dernier cas en trois autres. On a alors

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{bx+c}.$$

1° $b>0$. Posons

$$\frac{c}{b}=-x'.$$

On pourra écrire

$$Y=\frac{1}{2A}\sqrt{b(x-x')}.$$

Pour que Y conserve une valeur réelle, il faut qu'on ait $x>x'$. On peut donner à x toutes les valeurs depuis x' jusqu'à $+\infty$. Y peut donc croître d'une manière illimitée, ainsi que y. La courbe rencontre son diamètre $y=-\frac{Bx+D}{2A}$ ou RR' (*fig.* 61) au point Q, qui a pour abscisse $x=x'$. Si l'on prend $OP=x'$ et si l'on mène PQ parallèle à l'axe des y, la courbe n'a aucun point à gauche de cette parallèle; mais elle s'étend sur sa droite d'une manière illimitée en formant deux branches infinies à partir du point Q : c'est une *parabole.*

2° $b<0$. Pour que Y conserve une valeur réelle, il faut qu'on ait aussi

$$x-x'<0,$$

c'est-à-dire qu'on ne peut donner à x que des valeurs plus petites que x'. On peut d'ailleurs faire varier x depuis x' jusqu'à $-\infty$. On a une parabole qui s'étend du côté des x négatives (*fig.* 62), au lieu de s'étendre du côté des x positives.

Dans les deux cas considérés, l'équation (1) peut s'écrire

$$(2Ay+Bx+D)^2-b(x-x')=0.$$

Son premier membre est *la différence* ou *la somme* du carré d'une fonction du premier degré en y et en x et de la première puissance d'une fonction du premier degré en x.

3° $b=0$. On a

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{c}.$$

Si c est > 0, le lieu se compose de *deux droites parallèles* à la droite $y = -\frac{Bx + D}{2A}$ et menées à égale distance de cette droite.

Si c est < 0, ces deux droites deviennent *imaginaires* et l'équation ne représente rien.

Enfin, si $c = 0$, le lieu se réduit *à la seule droite*

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}.$$

Dans ce dernier cas, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(2Ay + Bx + D)^2 - c = 0;$$

si c est positif ou négatif, son premier membre est *la différence* ou *la somme* du carré d'une fonction du premier degré en y et en x et d'un nombre positif; si c est nul, son premier membre se réduit au carré d'une fonction du premier degré en y et en x.

110. *Résumé. — Lorsque* $B^2 - 4AC$ *est* < 0, *l'équation générale du second degré à deux variables représente une ellipse ou l'une de ses variétés :* une ellipse, si les racines du trinôme placé sous le radical lorsqu'on résout l'équation par rapport à l'une des variables, sont réelles et inégales; rien, si ces racines sont imaginaires; un point, si elles sont égales (*).

Lorsque $B^2 - 4AC$ *est* > 0, *l'équation générale du second degré à deux variables représente une hyperbole ou son unique variété :* une hyperbole, si les racines du trinôme placé sous le radical sont réelles et inégales ou imaginaires; deux droites qui se coupent, si ces racines sont égales.

Lorsque $B^2 - 4AC = 0$, *l'équation générale du second degré à deux variables représente une parabole ou l'une de ses variétés :* une parabole, si le terme du premier degré ne manque

---

(*) Lorsque le cercle est rapporté à des axes rectangulaires, son équation est de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0;$$

le caractère $B^2 - 4AC$ se réduit alors à

$$-4 < 0.$$

Lorsque le cercle est rapporté à des axes obliques, son équation est de la forme

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 + ax + by + c = 0,$$

le caractère $B^2 - 4AC$ devient

$$4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta < 0.$$

pas sous le radical; deux droites parallèles, rien ou une seule droite, suivant que le terme indépendant resté seul sous le radical est positif, négatif ou nul.

Du centre, des diamètres et des axes, dans les courbes du second degré.

111. Reprenons l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et appliquons à cette équation les méthodes générales indiquées précédemment.

Du centre. — Si nous voulons chercher le centre du lieu qu'elle représente, il faut substituer $x + p$ et $y + q$ à la place de x et de y, en désignant par p et q les coordonnées de la nouvelle origine et en y transportant les axes parallèlement à eux-mêmes (95).

Il vient

$$\left.\begin{array}{l|l|l} Ay^2 + Bxy + Cx^2 + 2Aq & y + 2Cp & x + Aq^2 \\ \quad + Bp & \quad + Bq & \quad + Bpq \\ \quad + D & \quad + E & \quad + Cp^2 \\ & & \quad + Dq \\ & & \quad + Ep \\ & & \quad + F \end{array}\right\} = 0.$$

Comme cela doit être (24, *Rem.*), les termes du second degré restent les mêmes que dans l'équation donnée; les coefficients de y et de x sont les dérivées partielles du premier membre de cette équation, prises par rapport à y et à x, en supposant y et x remplacées par q et p; enfin, le nouveau terme indépendant est le premier membre de l'équation primitive où l'on a effectué la même substitution.

L'équation considérée étant de degré pair, il faut égaler à zéro les coefficients des termes du premier degré. On aura ainsi les deux relations (*)

$$2Aq + Bp + D = 0,$$
$$2Cp + Bq + E = 0.$$

On en déduit

$$p = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \qquad q = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

(*) On peut remarquer que ces relations représentent précisément les diamètres qu'on obtient en résolvant successivement l'équation par rapport à chaque variable.

Si le dénominateur commun $B^2 - 4AC$ est différent de zéro, les valeurs de p et de q déterminent un point unique : donc *l'ellipse et l'hyperbole ont un centre, et un seul.*

Si le dénominateur commun $B^2 - 4AC$ est égal à zéro sans que l'un des numérateurs le soit, le point correspondant aux valeurs de p et de q se transporte à l'infini : donc *la parabole n'a pas de centre, ou ce centre est à l'infini.*

Si l'on avait à la fois

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \text{et} \quad 2AE - BD = 0,$$

on en conclurait

$$2CD - BE = 0$$

et, par suite,

$$p = \frac{0}{0}, \quad q = \frac{0}{0}.$$

En effet (106), la parabole se réduit alors aux deux droites parallèles représentées par l'équation

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF},$$

système qui admet une infinité de centres distribués sur la droite menée à égale distance des deux parallèles.

112. *Des diamètres.* — Appliquons à l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

la méthode exposée au n° 96. Si nous remplaçons dans l'équation proposée y et x par $y + Y$ et $x + X$, *les coefficients de y et de x* deviendront, d'après une remarque précédente (111),

$$2AY + BX + D \quad \text{et} \quad 2CX + BY + E.$$

Par suite, lorsqu'on viendra remplacer y par mx pour avoir les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la corde $y = mx$, *le coefficient du terme en x* dans l'équation résultante sera

$$(2AY + BX + D)\, m + 2CX + BY + E,$$

c'est-à-dire qu'on aura, pour équation générale des diamètres des courbes du second ordre (96, *Rem.*),

$$(2AY + BX + D)\, m + 2CX + BY + E = 0$$

ou, plus simplement,

$$(1) \qquad (2Ay + Bx + D)\, m + 2Cx + By + E = 0.$$

On l'obtient, en multipliant par le coefficient angulaire m qui

correspond au système de cordes arbitraire considéré la dérivée partielle du premier membre de l'équation par rapport à y, en ajoutant à ce produit la dérivée partielle du premier membre par rapport à x, puis en égalant cette somme à zéro.

113. L'équation obtenue prouve que *tous les diamètres des courbes du second ordre sont des lignes droites.*

Lorsqu'une courbe a un centre, tous ses diamètres y passent : c'est là une conséquence immédiate des définitions adoptées. On peut la vérifier facilement pour les courbes du second degré; car les coordonnées p et q du centre étant déterminées (**111**) par les équations

$$2Aq + Bp + D = 0 \quad \text{et} \quad 2Cp + Bq + E = 0,$$

satisfont nécessairement à l'équation générale des diamètres (**112**), quel que soit m.

La réciproque est évidente : *toute droite passant par le centre d'une courbe du second degré est un diamètre de cette courbe.* Soit, en effet, m' le coefficient angulaire de cette droite. L'expression générale du coefficient angulaire d'un diamètre est, en vertu de l'équation trouvée,

$$-\frac{Bm + 2C}{2Am + B};$$

et l'on trouvera toujours pour m une valeur qui satisfasse à la condition d'identification

$$-\frac{Bm + 2C}{2Am + B} = m'.$$

Pour la parabole, si dans l'expression générale du coefficient angulaire d'un diamètre, on introduit la condition $B^2 - 4AC = 0$ en remplaçant $2C$ par $\frac{B^2}{2A}$, il vient

$$-\frac{Bm + 2C}{2Am + B} = -\frac{2ABm + B^2}{2A(2Am + B)} = -\frac{B}{2A}.$$

Cette valeur constante prouve que *tous les diamètres de la parabole sont parallèles.*

114. *Dans les courbes du second ordre, la tangente au point où un diamètre rencontre la courbe, est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales.* En effet, de l'équation des diamètres, on déduit (**73**)

$$(2) \qquad m = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

115. Désignons par m' le coefficient angulaire d'un diamètre quelconque, par m le coefficient angulaire du système de cordes, *conjugué à ce diamètre*. Nous aurons

$$m' = -\frac{\mathrm{B}m + 2\mathrm{C}}{2\mathrm{A}m + \mathrm{B}}.$$

Il en résulte

$$2\mathrm{A}mm' + \mathrm{B}(m + m') + 2\mathrm{C} = 0. \tag{3}$$

Cette relation reste satisfaite si l'on y permute les coefficients m et m', c'est-à-dire que si l'on considère le diamètre parallèle au système de cordes donné, les cordes qui lui sont *conjuguées* sont à leur tour parallèles au premier diamètre. En d'autres termes, les deux diamètres qui ont m et m' pour coefficients angulaires, divisent chacun en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre : on donne, comme nous l'avons vu (**107**), à ces diamètres le nom de *diamètres conjugués*.

Dans la parabole, *il n'y a pas de diamètres conjugués*, puisque aucun système de cordes ne peut y être parallèle à la direction constante des diamètres.

116. *Des axes.* — Cherchons si les courbes du second degré admettent des axes (**97**) et, pour les trouver, posons la condition de perpendicularité entre un diamètre et ses cordes conjuguées, savoir (**113**)

$$-\frac{\mathrm{B}m + 2\mathrm{C}}{2\mathrm{A}m + \mathrm{B}} = -\frac{1}{m}.$$

On en déduit

$$\mathrm{B}m^2 - 2(\mathrm{A} - \mathrm{C})m - \mathrm{B} = 0. \tag{4}$$

Cette équation en m admet, en général, deux racines réelles et inégales, puisque son dernier terme est négatif, ou puisque le produit de ces mêmes racines est égal à -1. Les courbes du second degré admettent donc, en général, deux axes perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire conjugués.

On déduit de l'équation (4)

$$m = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C} \pm \sqrt{(\mathrm{A} - \mathrm{C})^2 + \mathrm{B}^2}}{\mathrm{B}}.$$

Dans le cas de la parabole, on a

$$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}} = \frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{B}}.$$

La valeur de m devient

$$m = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C} \pm (\mathrm{A} + \mathrm{C})}{\mathrm{B}}.$$

Les deux racines sont alors

$$\frac{2A}{B} \quad \text{et} \quad -\frac{2C}{B} \quad \text{ou} \quad -\frac{B}{2A}.$$

La première donne la direction des cordes coupées en deux parties égales par *l'axe unique* de la parabole qui, faisant partie de ses diamètres, doit bien avoir la direction indiquée par la seconde racine $-\frac{B}{2A}$.

Remarque. — Tous les diamètres du cercle sont des axes. En effet, dans le cas du cercle, $B = 0$ et $A = C$, de sorte que l'équation (4) est satisfaite quel que soit m.

117. *Résumé.* — L'ellipse et l'hyperbole ont un centre, la parabole n'en a pas.

Tous les diamètres des courbes du second degré sont rectilignes. Ceux de l'ellipse et de l'hyperbole concourent aux centres de ces courbes, ceux de la parabole sont parallèles.

L'ellipse et l'hyperbole admettent des diamètres conjugués, la parabole n'en a pas.

L'ellipse et l'hyperbole ont deux axes conjugués; la parabole a un seul axe parallèle à la direction commune des diamètres.

Des asymptotes dans les courbes du second degré.

118. Appliquons la méthode générale (87) à l'équation du second degré, c'est-à-dire substituons $mx + n$ à la place de y dans l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Il viendra

$$(Am^2 + Bm + C)x^2 + (2Amn + Bn + Dm + E)x + \ldots = 0.$$

En écrivant que l'équation résultante a deux racines infinies, nous aurons, pour déterminer m et n, les deux équations

$$Am^2 + Bm + C = 0, \quad 2Amn + Bn + Dm + E = 0.$$

La première donne d'abord

$$m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

et l'on a ensuite

$$n = -\frac{Dm + E}{2Am + B},$$

c'est-à-dire

$$n = -\frac{D}{2A} \pm \frac{BD - 2AE}{2A\sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

Si l'on a $B^2 - 4AC < 0$, m est imaginaire, de sorte que *l'ellipse n'a pas d'asymptotes.*

Si l'on a $B^2 - 4AC > 0$, on trouve pour m et par suite pour n deux valeurs réelles et finies : *l'hyperbole a donc deux asymptotes.*

Enfin, si l'on a $B^2 - 4AC = 0$, on trouve

$$m = -\frac{B}{2A} \quad \text{et} \quad n = \infty :$$

la parabole n'a donc pas d'asymptotes.

119. Les asymptotes de l'hyperbole ont pour équations

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} x - \frac{D}{2A} \pm \frac{BD - 2AE}{2A\sqrt{B^2 - 4AC}},$$

ce qu'on peut écrire

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left(\sqrt{B^2 - 4AC}.x + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right).$$

Les deux asymptotes auront le même y pour la valeur de x qui annulera la parenthèse, c'est-à-dire pour

$$x = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC},$$

d'où

$$y = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

Les asymptotes de l'hyperbole se croisent donc en son centre (**111**).

120. Lorsque l'équation générale du second degré représente deux droites qui se coupent (**108**, 3°), le trinôme placé sous le radical de la valeur de y a ses racines égales ou est un carré parfait. On a alors

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}$$

$$= -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left(\sqrt{B^2 - 4AC}\,.\,x + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right).$$

Lorsque l'hyperbole dégénère en deux droites sécantes, ces deux droites sont donc précisément ses asymptotes.

De plus, on voit qu'*on peut déduire immédiatement l'expression de l'ordonnée des asymptotes d'une hyperbole de celle même de l'ordonnée de la courbe, en remplaçant le radical qui entre dans cette dernière valeur par le binôme dont le carré a pour premiers termes les deux premiers termes du trinôme placé sous le radical.*

Cas particuliers de l'équation du second degré.

121. Jusqu'à présent, nous avons supposé que, dans l'équation générale, le coefficient A de y^2 n'était pas nul. Il s'agit maintenant d'examiner les cas particuliers qui correspondent à l'hypothèse $A = 0$.

I. Soit l'équation

$$Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Le binôme $B^2 - 4AC$ se réduisant à B^2, cette équation ne peut représenter qu'une hyperbole ou deux droites qui se coupent.

On pourrait rentrer dans les cas précédemment examinés, en résolvant l'équation par rapport à x; mais il vaut mieux faire usage des remarques suivantes.

Si l'équation proposée représente une hyperbole, cette hyperbole aura une asymptote parallèle à l'axe des y, puisque le terme en y^2 manque (**91, I**). En ordonnant par rapport à y, on a pour premier terme

$$(Bx + D)y,$$

ce qui conduit à l'asymptote

$$Bx + D = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{D}{B}.$$

Quant à la seconde asymptote oblique à l'axe des y, on l'obtiendra en suivant la méthode générale (**87**), et son équation sera

$$y = -\frac{C}{B}x + \frac{CD - BE}{B^2}.$$

D'ailleurs, l'équation donnée étant du premier degré en y, on peut aussi en déduire immédiatement

$$(1) \qquad y = -\frac{Cx^2 + Ex + F}{Bx + D}.$$

Si l'on effectue la division, on aura, en désignant par $Px + Q$ le quotient obtenu et par R le reste indépendant de x,

$$y = Px + Q + \frac{R}{Bx + D}.$$

Si R *n'est pas nul,* on voit que, pour construire la courbe, il faut ajouter à l'ordonnée de la droite $y = Px + Q$ la quantité positive ou négative $\frac{R}{Bx+D}$. Cette quantité $\frac{R}{Bx+D}$ s'approche de zéro autant qu'on veut, à mesure que x marche vers l'infini positif ou vers l'infini négatif. Donc la courbe a pour asymptote, du côté des x positifs aussi bien que du côté des x négatifs, la droite $y = Px + Q$. D'autre part, si x s'approche indéfiniment, en plus ou en moins, de la valeur $-\frac{D}{B}$ obtenue en égalant à zéro le diviseur $Bx + D$, on voit que R étant supposé positif, la quantité $\frac{R}{Bx+D}$ est, un peu avant cette valeur, négative et très-grande, un peu après cette valeur, positive et très-grande. Pour $x = -\frac{D}{B}$, on a donc

$$\frac{R}{Bx+D} = \pm\infty .$$

La droite $x = -\frac{D}{B}$ est, par suite, la seconde asymptote de l'hyperbole, comme nous l'avons dit plus haut.

Il est facile de vérifier que l'équation $y = Px + Q$ se confond avec l'équation précédemment indiquée pour l'asymptote oblique à l'axe des y. On n'a qu'à effectuer la division indiquée dans l'expression (1). On trouve pour quotient

$$-\frac{C}{B}x + \frac{CD - BE}{B^2},$$

et pour reste

$$-\frac{D(CD - BE)}{B^2} - F.$$

Ainsi

$$P = -\frac{C}{B}, \quad Q = \frac{CD - BE}{B^2}, \quad R = -(DQ + F).$$

Si R *est nul,* on a simplement

$$y = -\frac{Cx^2 + Ex + F}{Bx + D} = Px + Q,$$

d'où

$$-(Cx^2 + Ex + F) = (Bx + D)(Px + Q).$$

On pourra donc écrire

$$y(Bx + D) = (Bx + D)(Px + Q),$$

d'où

$$(Bx + D)(y - Px - Q) = 0.$$

L'équation représente alors deux droites sécantes qui sont précisément les asymptotes trouvées dans le cas précédent.

On traitera absolument de la même manière l'équation

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0.$$

Si elle représente une hyperbole, cette hyperbole aura (91, I) pour asymptote parallèle à l'axe des y la droite

$$Bx + D = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{D}{B},$$

et pour asymptote parallèle à l'axe des x la droite

$$By + E = 0 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{E}{B}.$$

L'équation considérée peut aussi représenter les deux droites dont on vient d'indiquer les équations.

Si l'on a $D = 0$ ou $E = 0$, l'une des asymptotes se confond avec l'axe auquel elle est parallèle. Par conséquent, l'équation

$$Bxy + F = 0,$$

représente une hyperbole ayant les deux axes coordonnés pour asymptotes.

En résumé, quand $A = 0$, l'équation du second degré représente en général une hyperbole ayant une asymptote parallèle aux y et qui devient l'axe des y lui-même, si l'on a en outre $D = 0$.

Même remarque par rapport à l'axe des x, lorsqu'on a $C = 0$ ou $C = 0$ et $E = 0$.

122. *Exemples.* — 1° Soit l'équation

$$2xy - 3x^2 + 2y - x + 1 = 0.$$

On en déduit

$$y = \frac{3x^2 + x - 1}{2(x+1)} = \frac{3}{2}x - 1 + \frac{1}{2(x+1)}.$$

L'équation proposée représente donc une hyperbole ayant pour asymptotes la droite $y = \frac{3}{2}x - 1$ et la parallèle $x = -1$ à l'axe des y. Pour savoir dans quel angle de ses asymptotes l'hyperbole est située, il suffit de remarquer que, pour x positif, l'ordonnée de la courbe surpasse l'ordonnée de la droite $y = \frac{3}{2}x - 1$. La courbe est donc renfermée dans l'angle LGS

et dans son opposé par le sommet (*fig.* 63). On peut aussi, dans l'exemple proposé, chercher les points où la courbe coupe les axes coordonnés. Pour $x = 0$, l'équation donne

$$y = -\frac{1}{2};$$

et pour $y = 0$ on a

$$-3x^2 - x + 1 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6},$$

c'est-à-dire

$$x = 0{,}434 \quad \text{et} \quad x = -0{,}734.$$

2° Soit encore l'équation

$$2xy - 3x^2 + 2y - x + 2 = 0.$$

On en déduit

$$y = \frac{3x^2 + x - 2}{2(x+1)} = \frac{3}{2}x - 1.$$

L'équation proposée représente donc les deux droites

$$y = \frac{3}{2}x - 1 \quad \text{et} \quad x = -1.$$

123. II. Supposons à la fois $A = 0$ et $B = 0$. L'équation générale deviendra

$$Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

On a ici

$$B^2 - 4AC = 0.$$

L'équation donnée représentera donc, en général, une parabole. On en déduit

$$y = -\frac{Cx^2 + Ex + F}{D}.$$

La discussion revient alors à celle que nous avons présentée au n° 225 de *l'Algèbre élémentaire*.

Posons

$$-\frac{C}{D} = a, \quad -\frac{E}{D} = b, \quad -\frac{F}{C} = c.$$

Il viendra

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Si les racines x' et x'' du second membre égalé à zéro sont réelles et inégales et si a est positif, y décroîtra depuis $+\infty$

jusqu'à zéro, quand on fera croître x depuis $-\infty$ jusqu'à la plus petite racine x''. Au delà, y deviendra négatif et passera par un minimum correspondant à $x = \frac{x' + x''}{2}$. x croissant depuis $\frac{x' + x''}{2}$ jusqu'à x', y croîtra depuis le minimum $\frac{4ac - b^2}{4a}$ jusqu'à zéro. x croissant depuis x' jusqu'à $+\infty$, y croîtra depuis zéro jusqu'à $+\infty$. C'est ce qu'on voit sans peine en mettant l'équation proposée sous l'une des deux formes suivantes :

$$y = a(x - x')(x - x''), \quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - h^2\right].$$

h^2 représente l'expression $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. D'ailleurs, pour des valeurs de x qui diffèrent de $\frac{x' + x''}{2}$ ou de $-\frac{b}{2a}$ d'une même quantité α en plus ou en moins, y passe par les mêmes valeurs. Par suite, si l'on a (*fig.* 64)

$$OP'' = x'', \quad OP' = x',$$

et si l'on détermine le point P, milieu de $P'P''$, la parallèle PQ menée par le point P à l'axe des y sera un diamètre de la parabole.

Si les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ égalé à zéro sont réelles et égales, la parabole se trouvera simplement *remontée* vers les y positifs, de manière à être tangente à l'axe des x.

Enfin, si ces mêmes racines sont imaginaires, la parabole, tout entière au-dessus de l'axe des x, ne rencontre plus cet axe et présente un minimum positif $\frac{4ac - b^2}{4a}$; c'est ce que montre la figure.

Si a était négatif, les paraboles obtenues tourneraient leur concavité vers les y négatifs, au lieu de la tourner vers les y positifs.

En résumé, lorsqu'on a $A = 0$ et $B = 0$, l'équation du second degré représente en général une parabole dont les diamètres sont parallèles à l'axe des y et dont la direction dépend du signe de $a = -\frac{C}{D}$.

Même remarque par rapport à l'axe des x, lorsqu'on a $C = 0$ et $B = 0$; la direction dépend alors du signe de $-\frac{A}{E}$.

Il est inutile de considérer le cas de $A = o$, $B = o$, $D = o$. L'équation ne contenant plus alors que la variable x et étant du second degré par rapport à cette variable, représente deux droites parallèles à l'axe des y, ou une seule, ou rien, suivant la nature de ses racines.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES APPLIQUÉE AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

124. Nous avons dit (**22**) que la transformation des coordonnées permettait de ramener l'équation d'une courbe à la forme la plus simple possible (eu égard au système adopté), de manière à faciliter ensuite l'étude des propriétés de cette courbe. Nous allons appliquer cette remarque à la *réduction* de l'équation générale du second degré. Nous supposerons les axes primitifs rectangulaires, ce qui ne modifiera en rien la généralité de nos raisonnements.

Nous commencerons par considérer le cas de l'ellipse et de l'hyperbole.

Ellipse et Hyperbole.

125. Soit l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o.$$

On suppose

$$B^2 - 4AC \gtrless o.$$

La courbe admet alors un centre dont les coordonnées sont (**111**)

$$p = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad q = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point. Les termes du premier degré de l'équation proposée disparaîtront (**92**), les termes du second degré resteront les mêmes (**24**), le terme indépendant deviendra (**111**)

$$Aq^2 + Bpq + Cp^2 + Dq + Ep + F.$$

On peut simplifier l'expression de ce terme, que nous désignerons par F'. Prenons, en effet, les équations dérivées (**111**)

$$2Aq + Bp + D = o,$$
$$Bq + 2Cp + E = o.$$

et ajoutons-les après avoir multiplié la première par q et la seconde par p. Il viendra

$$2Aq^2+2Bpq+2Cp^2+Dq+Ep=0,$$

d'où

$$Aq^2+Bpq+Cp^2=-\frac{Dq+Ep}{2}.$$

Il en résulte

$$F'=-\frac{Dq+Ep}{2}+Dq+Ep+F=F+\frac{Dq+Ep}{2}.$$

Ainsi, *cette première transformation permettra toujours de ramener l'équation générale d'une ellipse ou d'une hyperbole à la forme*

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F'=0.$$

Faisons maintenant tourner les axes d'un angle α autour du centre, et profitons de l'indétermination de α pour faire disparaître le terme qui renferme le produit des variables. Les formules de transformation à employer seront (26)

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Pour plus de simplicité, nous supprimerons immédiatement les accents. Il viendra

$A\cos^2\alpha$	$y^2+2A\sin\alpha\cos\alpha$	$xy+A\sin^2\alpha$	$x^2+F'=0.$
$-B\sin\alpha\cos\alpha$	$-B\sin^2\alpha$	$+B\sin\alpha\cos\alpha$	
$-C\sin^2\alpha$	$+B\cos^2\alpha$	$+C\cos^2\alpha$	
	$-2C\sin\alpha\cos\alpha$		

Simplifions l'expression du coefficient du terme en xy et égalons-le à zéro, nous aurons

$$(A-C)\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha=0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\alpha=\frac{-B}{A-C}.$$

Il y aura toujours un angle θ compris entre 0 et 180° satisfaisant à cette relation. Toutes les valeurs cherchées seront alors données (*Trig.*, 9) par la formule

$$2\alpha=\theta+n\pi.$$

Ces valeurs seront donc

$$\theta,\quad \theta+\pi,\quad \theta+2\pi,\quad \theta+3\pi,\quad \theta+4\pi,\ldots.$$

Par suite, celles de α formeront le tableau

$$\frac{\theta}{2},\quad \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2},\quad \frac{\theta}{2}+\pi,\quad \frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2},\quad \frac{\theta}{2}+2\pi,\ldots.$$

On voit qu'elles indiquent un seul système d'axes rectangulaires. Nous pourrons donc nous arrêter à la valeur $\frac{\theta}{2}$ comprise entre o et 90° (*).

Désignons par M et N les nouveaux coefficients de y^2 et de x^2; nous aurons

$$M = A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$N = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha.$$

L'addition de ces deux valeurs donne immédiatement

$$(1)\qquad M + N = A + C.$$

Leur soustraction conduit à la relation

$$(2)\qquad M - N = (A - C)\cos 2\alpha - B\sin 2\alpha.$$

On a d'ailleurs (*Trig.*, 13), en vertu de la valeur de tang 2α,

$$\cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}},\qquad \sin 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}.$$

2α étant compris entre o et 180°, sin 2α est positif, et *l'on doit alors donner au radical qui entre dans les deux formules un signe contraire à celui de* B.

Substituons dans l'équation (2) les valeurs de cos 2α et de sin 2α, il viendra

$$M - N = \frac{(A-C)^2 + B^2}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}} = \sqrt{(A-C)^2 + B^2}.$$

On aura donc, pour déterminer les coefficients M et N, les équations

$$(1)\qquad M + N = A + C,$$

$$(2)\qquad M - N = \sqrt{(A-C)^2 + B^2},$$

le radical étant de signe contraire à B.

Les deux transformations effectuées permettent donc tou-

(*) Si l'on avait à la fois B = o et A = C, la valeur de tang 2α se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$, ce qui indiquerait la possibilité de répondre à la question d'une infinité de manières; dans ce cas, en effet, l'équation représenterait une circonférence de cercle.

jours de ramener l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole à la forme

$$\text{H)} \qquad My^2 + Nx^2 + F' = 0.$$

Les équations (1) et (2) élevées au carré, puis retranchées membre à membre, la première de la seconde, donnent

$$-4MN = B^2 - 4AC.$$

Dans le cas de l'ellipse, on devra donc avoir

$$-4MN < 0;$$

dans le cas de l'hyperbole, on devra avoir

$$-4MN > 0.$$

Ainsi, *dans le cas de l'ellipse, les coefficients* M *et* N *sont de même signe; dans le cas de l'hyperbole, ils sont de signes contraires.*

Nous avons vu (116) que l'ellipse et l'hyperbole admettaient deux axes conjugués. L'équation (H), comme le prouve sa forme, représente une ellipse ou une hyperbole rapportée à ses axes.

126. Reprenons l'équation

$$My^2 + Nx^2 + F' = 0.$$

Si elle représente une ellipse, on pourra supposer M et N positifs.

Si F' *est alors positif,* l'équation ne représentera rien ou *une ellipse imaginaire.*

Si F' *est nul,* elle représentera l'*origine des coordonnées.*

Si F' *est négatif,* on pourra poser

$$\frac{M}{-F'} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{N}{-F'} = \frac{1}{a^2},$$

et l'équation prendra la forme

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que les axes de la courbe ont pour longueurs 2*a et* 2*b, et qu'elle se confond entièrement avec le lieu géométrique déjà désigné dans le I^er Livre sous le nom d'*ELLIPSE (66).

127. Si l'équation

$$My^2 + Nx^2 + F' = 0$$

représente une hyperbole, on pourra supposer M positif et N négatif.

Si F′ *est alors positif*, on peut poser

$$\frac{M}{-F'} = -\frac{1}{b^2}, \quad \frac{N}{-F'} = \frac{1}{a^2},$$

d'où l'on déduit

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

équation d'une hyperbole placée de manière que l'axe des x rencontre seul la courbe : cet axe a $2a$ *pour longueur.*

Si F′ *est négatif*, on peut poser

$$\frac{M}{-F'} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{N}{-F'} = -\frac{1}{a^2},$$

d'où

$$\text{(II } bis\text{)} \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

équation d'une hyperbole placée de manière que l'axe des y rencontre seul la courbe : cet axe a $2b$ *pour longueur.*

Si F′ *est nul*, on a

$$y = \pm x\sqrt{\frac{-N}{M}},$$

et *l'équation représente deux droites passant par l'origine :* les parties de ces droites qui s'étendent au-dessus de l'axe des x, forment avec cet axe des angles supplémentaires.

Les équations (II) *et* (II *bis*) *montrent que la courbe appelée* HYPERBOLE, *déduite de l'équation générale du second degré, se confond entièrement avec le lieu géométrique déjà désigné sous ce nom* (67).

128. *Exemple.* — Soit l'équation

$$4y^2 - 3xy + x^2 - y + 2x + 1 = 0.$$

On a $B^2 - 4AC < 0$: l'équation donnée représente une ellipse, il faut la ramener à sa forme la plus simple. Nous aurons

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{-B}{A - C} = \frac{3}{4 - 1} = 1.$$

Par suite, la plus petite valeur de l'angle 2α est 45°, d'où

$$\alpha = 22^\circ\, 30'.$$

Des relations $M+N=A+C$, $M-N=+\sqrt{(A-C)^2+B^2}$, on déduit

$$M+N=5, \quad M-N=+3\sqrt{2}.$$

Par suite,

$$M=\frac{5+3\sqrt{2}}{2}, \quad N=\frac{5-3\sqrt{2}}{2}.$$

D'ailleurs, les coordonnées du centre devront satisfaire aux équations dérivées

$$8y-3x-1=0,$$
$$-3y+2x+2=0.$$

Ces coordonnées seront donc

$$y=-\frac{4}{7}, \quad x=-\frac{13}{7}.$$

On aura alors

$$F'=F+\frac{Dy+Ex}{2}=-\frac{4}{7}.$$

L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes sera donc

$$\frac{5+3\sqrt{2}}{2}y^2+\frac{5-3\sqrt{2}}{2}x^2-\frac{4}{7}=0,$$

ou bien

$$\frac{x^2}{\frac{8}{35-21\sqrt{2}}}+\frac{y^2}{\frac{8}{35+21\sqrt{2}}}=1.$$

Les axes seront

$$2a=4\sqrt{\frac{2}{35-21\sqrt{2}}}, \quad 2b=4\sqrt{\frac{2}{35+21\sqrt{2}}}.$$

Parabole.

129. Considérons maintenant le cas de la parabole. Comme la courbe n'a pas de centre (**111**), la méthode suivie pour l'ellipse et l'hyperbole n'est plus applicable, et il convient de faire d'abord tourner les axes d'un angle α, de manière que le terme en xy disparaisse.

Les formules de transformation étant

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

l'équation deviendra, en supprimant les accents pour plus de

simplicité et en se reportant aux calculs précédents (125) :

$$\begin{array}{l|l|l} My^2+Nx^2+D\cos\alpha & y+D\sin\alpha & x+F=0. \\ \quad -E\sin\alpha & \quad +E\cos\alpha & \end{array}$$

Nous supposons que la valeur de α soit la valeur convenable pour faire disparaître le terme en xy. M et N ayant nécessairement les valeurs déjà indiquées (125), puisqu'un simple transport d'axes ne modifie pas les termes du degré le plus élevé, on aura d'ailleurs

$$M+N=A+C, \quad M-N=\sqrt{(A-C)^2+B^2}.$$

Mais si l'on remplace B^2 par sa valeur $4AC$ déduite de la relation caractéristique $B^2-4AC=0$, il vient

$$M-N=\pm(A+C);$$

et il en résulte nécessairement soit $M=0$, soit $N=0$. Ainsi, *lorsque l'équation donnée représente une parabole, la disparition du terme en xy entraîne nécessairement celle de l'un des carrés des variables.* C'est ce qu'on pouvait prévoir d'après la condition imposée $B^2-4AC=0$. Supposons $N=0$.

L'équation sera alors ramenée à la forme

$$My^2+D'y+E'x+F=0,$$

en posant

$$D'=D\cos\alpha-E\sin\alpha, \quad E'=D\sin\alpha+E\cos\alpha.$$

On peut maintenant transporter les axes parallèlement à eux-mêmes de manière à faire disparaître deux nouveaux termes. On ne doit pas chercher évidemment à faire disparaître les termes du premier degré en y et en x, puisque alors l'équation ne représenterait plus une courbe; mais on peut se proposer d'éliminer le terme du premier degré en y et le terme indépendant des variables. L'équation sera finalement réduite à la forme

$$My^2+E'x=0,$$

c'est-à-dire que la courbe sera rapportée à son axe pour axe des x et à la tangente au sommet pour axe des y (116, 97). D'après cela, *comme tous les diamètres de la parabole sont parallèles* (113), *la courbe se trouvait rapportée à un diamètre comme axe des x après la première transformation effectuée.* L'angle α dont il a fallu faire tourner les axes pour éliminer le terme en xy, sera donc donné *immédiatement* par la formule générale (113)

$$\operatorname{tang}\alpha=-\frac{B}{2A},$$

qui exprime l'inclinaison commune des diamètres de la parabole sur l'axe des x.

$\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ auront donc les valeurs suivantes :

$$\sin\alpha = \frac{-B}{\sqrt{4A^2+B^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{2A}{\sqrt{4A^2+B^2}}.$$

En prenant pour α le plus petit angle (compris alors entre 0° et 180°) qui ait pour tangente $-\frac{B}{2A}$, $\sin\alpha$ sera toujours positif. *On devra donc donner au radical, dans les deux valeurs précédentes, un signe contraire à celui de* B.

En substituant les valeurs trouvées pour $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ dans les expressions des coefficients D′ et E′, il viendra

$$D' = \frac{2AD + BE}{\sqrt{4A^2+B^2}}, \quad E' = \frac{2AE - BD}{\sqrt{4A^2+B^2}}.$$

Pour terminer, il faut trouver les coordonnées de la nouvelle origine où l'on doit transporter les axes parallèlement à eux-mêmes pour passer de la forme

$$My^2 + D'y + E'x + F = 0$$

à la forme

$$My^2 + E'x = 0.$$

Nous remarquerons à cet effet que l'abscisse de la nouvelle origine, par rapport aux axes qui correspondent à la première forme, doit rendre les deux valeurs de y *égales* entre elles. On a donc immédiatement, pour l'ordonnée de la nouvelle origine,

$$y = -\frac{D'}{2M}.$$

De plus, la condition générale $b^2 - 4ac = 0$ devant être alors remplie, l'abscisse correspondante sera déterminée par la relation

$$D'^2 - 4M(E'x + F) = 0,$$

d'où

$$x = \frac{D'^2 - 4MF}{4ME'}.$$

On peut donc prendre pour équation de la courbe

$$My^2 + E'x = 0,$$

d'où, en posant $-\frac{E'}{M} = 2p$,

$$y^2 = 2px.$$

Telle est la forme la plus simple de l'équation de la PARABOLE (rapportée à son axe et à la tangente au sommet). On voit que cette courbe se confond entièrement avec le lieu géométrique que nous avons déjà nommé ainsi (68).

130. *Exemple.* — Soit l'équation

$$y^2 - 2xy + x^2 - y + 2x - 1 = 0.$$

La condition $B^2 - 4AC = 0$ étant satisfaite, elle représente une parabole, et il s'agit de la ramener à la forme

$$y'^2 = 2px.$$

Nous aurons

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2}{2} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 45°,$$

puis, pour savoir si c'est le terme en y^2 ou le terme en x^2 qui disparaîtra lorsqu'on fera tourner les axes de l'angle α, nous poserons

$$M + N = 2,$$
$$M - N = +\sqrt{4} = 2.$$

Il faut se rappeler que le radical de la valeur de $M - N$ doit toujours avoir un signe contraire à celui de B. On en déduira

$$M = 2, \quad N = 0.$$

Il viendra ensuite

$$D' = \frac{2AD + BE}{\sqrt{4A^2 + B^2}} = \frac{-2 - 4}{+\sqrt{4+4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$
$$E' = \frac{2AE - BD}{\sqrt{4A^2 + B^2}} = \frac{4 - 2}{+\sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On en conclura, pour les coordonnées du sommet de la courbe,

$$y = \frac{3\sqrt{2}}{8}, \quad x = \frac{25}{8\sqrt{2}}.$$

L'équation de la parabole proposée, rapportée à son axe et à la tangente au sommet, sera finalement

$$2y'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x = 0 \quad \text{ou} \quad y'^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}x.$$

CHAPITRE III.

THÉORIE GÉNÉRALE DES FOYERS ET DES DIRECTRICES.

131. Soit une ellipse dont l'équation générale a été ramenée à la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

c'est-à-dire a été rapportée aux axes mêmes de la courbe. Si l'on prend sur l'axe des x (en supposant $a>b$), de part et d'autre du centre, deux points F et F′ situés à une distance de ce centre égale à $c=\sqrt{a^2-b^2}$, et si l'on cherche le lieu des points dont la somme des distances aux points F et F′ est constamment égale à $2a$, on retombera sur l'ellipse donnée (66).

On pourra faire pour l'hyperbole et la parabole des remarques analogues (67, 68).

Par conséquent, l'ellipse et l'hyperbole ont deux *foyers*, la parabole en a un, et ces points jouissent par rapport aux courbes considérées de propriétés remarquables qui peuvent leur servir de définitions géométriques.

La question résolue au n° 69 prouve en outre que les trois courbes du second ordre peuvent encore être obtenues comme lieu des points dont les distances à un point fixe et à une droite fixe restent proportionnelles. Le point fixe donné se confond alors avec l'un des foyers de la courbe trouvée, la droite fixe est une *directrice* de cette courbe. L'ellipse et l'hyperbole ont deux foyers et deux directrices, la parabole a un foyer et une directrice.

Il s'agit donc bien moins de retrouver dans les trois courbes du second degré les points et les droites appelés foyers et directrices, que d'en donner une définition analytique convenable.

Remarquons, à cet effet, que la distance d'un point (x', y') à une droite $ly+mx+n=0$ étant égale à $\frac{ly'+mx'+n}{\sqrt{l^2+m^2}}$, est une fonction rationnelle et du premier degré des coordonnées de ce point. Il en résulte que, si les distances du point (x', y') à une droite fixe (*directrice*) et à un point fixe (*foyer*), doivent demeurer proportionnelles, il faut nécessairement que la distance du point (x', y') au point fixe s'exprime aussi rationnellement et linéairement. Car, en appelant d cette distance, on devra avoir

$$\frac{d}{\frac{ly'+mx'+n}{\sqrt{l^2+m^2}}}=\text{constante}.$$

On est ainsi conduit à la définition suivante :

On appelle foyer *d'une courbe un point situé dans son plan et dont la distance à un point quelconque de la courbe est une fonction rationnelle et du premier degré des coordonnées de ce point ; cette fonction égalée à zéro représente la* directrice *correspondante.*

Les axes étant placés d'une manière quelconque, mais rectangulaires, si

l'on désigne par α et β les coordonnées du foyer cherché, la distance du point (x, y) de la courbe considérée à ce foyer aura pour expression

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

et l'on devra avoir

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=ly+mx+n$$

ou

$$(f) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(ly+mx+n)^2=0.$$

Cette relation devant être satisfaite par les coordonnées de tous les points du lieu, est l'équation même de la courbe.

Cette équation étant du second degré, les seules courbes du second degré admettent des foyers, et, par suite, des directrices.

L'équation $ly+mx+n=0$ représente la directrice qui correspond au foyer (α, β). La distance du point (x, y) à cette droite est

$$\frac{ly+mx+n}{\sqrt{l^2+m^2}}.$$

Le rapport des distances du point de la courbe au foyer et à la droite sera donc représenté par la constante

$$\sqrt{l^2+m^2}.$$

C'est la valeur de cette constante qui décide l'espèce de la courbe.

Pour le prouver, développons l'équation (f). Il viendra

$$(1-l^2)y^2-2lmxy+(1-m^2)x^2-2(\beta+ln)y \\ -2(\alpha+mn)x+\alpha^2+\beta^2-n^2=0.$$

La quantité B^2-4AC devient

$$4l^2m^2-4(1-l^2)(1-m^2)=4(l^2+m^2-1).$$

Par conséquent, *suivant que le rapport* $\sqrt{l^2+m^2}$ *sera inférieur, supérieur ou égal à l'unité, l'équation* (f) *représentera une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

La considération de l'équation (f) peut être utile dans toutes les questions qui se rattachent aux foyers et aux directrices : on lui donne le nom d'*équation focale* des courbes du second ordre.

132. D'après les formules de transformation des coordonnées et la définition adoptée, lorsqu'un point est foyer d'une courbe par rapport à un certain système d'axes, il reste foyer de la courbe pour tout autre système. Lorsqu'on veut déterminer les foyers et les directrices d'une courbe du second ordre, on peut donc, sans modifier la généralité de la question, supposer l'équation de cette courbe ramenée par le choix des axes à la forme la plus simple.

Ellipse.

133. Prenons l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

L'équation focale de l'ellipse est, sous sa forme la plus générale et en supposant $\sqrt{l^2+m^2}<1$,

$$(2)\qquad \begin{cases} (1-l^2)y^2-2lmxy+(1-m^2)x^2-2(\beta+ln)y \\ \qquad -2(\alpha+mn)x+\alpha^2+\beta^2-n^2=0. \end{cases}$$

Pour identifier l'équation (1) et l'équation (2), nous écrirons cette dernière comme il suit :

$$\frac{1-l^2}{n^2-\alpha^2-\beta^2}y^2-\frac{2lm}{n^2-\alpha^2-\beta^2}xy+\frac{1-m^2}{n^2-\alpha^2-\beta^2}x^2 \\ -\frac{2(\beta+ln)}{n^2-\alpha^2-\beta^2}y-\frac{2(\alpha+mn)}{n^2-\alpha^2-\beta^2}x=1.$$

Les conditions d'identification seront alors (les termes indépendants des deux équations étant ainsi rendus égaux) :

$$(3)\quad \frac{1-m^2}{n^2-\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{a^2},\qquad (4)\quad -2lm=0,$$

$$(5)\quad \frac{1-l^2}{n^2-\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{b^2},\qquad (6)\quad \frac{-2(\beta+ln)}{n^2-\alpha^2-\beta^2}=0,$$

$$(7)\quad \frac{-2(\alpha+mn)}{n^2-\alpha^2-\beta^2}=0.$$

Il faut que l'on ait, d'après (4),

$$l=0\quad \text{ou}\quad m=0;$$

c'est-à-dire que les directrices sont parallèles à l'un des axes ou perpendiculaires à l'autre.

Supposons $l=0$. Nous aurons alors, d'après (6),

$$\beta=0;$$

et (5) deviendra

$$b^2=n^2-\alpha^2.$$

(3) et (7) donneront donc

$$(1-m^2)a^2=n^2-\alpha^2=b^2,\quad \alpha+mn=0.$$

Par suite,

$$m^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},$$

c'est-à-dire

$$m=\pm\frac{c}{a}.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha=-mn.$$

Si l'on remplace α^2 par m^2n^2 dans la relation $(1-m^2)a^2=n^2-\alpha^2$, il vient

$$(1-m^2)a^2=n^2-m^2n^2=n^2(1-m^2),$$

d'où

$$n=\pm a.$$

Il en résulte

$$\alpha=\pm c.$$

Ainsi, *il existe deux foyers situés sur le grand axe de l'ellipse de part et d'autre du centre, et ayant pour abscisses*

$$\pm c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

L'équation $mx + n = 0$ des directrices devient d'ailleurs

$$\frac{c}{a}x \mp a = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Si l'on prend $\alpha = +c$, il faut en effet que m et n soient de signes contraires en vertu de la relation

$$\alpha = -mn;$$

c'est l'inverse si l'on prend $\alpha = -c$.

L'ellipse a donc deux directrices perpendiculaires au grand axe et situées de part et d'autre du centre à une distance qui est une troisième proportionnelle aux longueurs c et a.

Comme on a $a > c$, les deux directrices sont situées au delà des sommets de l'ellipse.

Le rapport des distances d'un point de la courbe à un foyer et à la directrice correspondante, qui est d'une manière générale $\sqrt{l^2 + m^2}$, se réduit ici à $m = \frac{c}{a}$, quantité qui, dans le cas de l'ellipse, est bien inférieure à 1. *Les points de l'ellipse sont donc plus rapprochés d'un foyer que de la directrice correspondante.*

L'expression $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ devient

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2},$$

c'est-à-dire, en remplaçant y^2 par sa valeur tirée de l'équation de la courbe,

$$\sqrt{(x \mp c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}.$$

En simplifiant, on trouve, pour la distance essentiellement positive d'un foyer à un point de la courbe,

$$\sqrt{\left(a \mp \frac{cx}{a}\right)^2} = a \mp \frac{cx}{a}.$$

Cette distance est une fonction rationnelle et du premier degré de l'abscisse du point considéré.

Les rayons vecteurs émanant du foyer qui a pour abscisse $+c$, ont pour expression générale

$$a - \frac{cx}{a};$$

ceux qui émanent du foyer qui a pour abscisse $-c$, ont pour expression

$$a + \frac{cx}{a}.$$

Ces résultats sont d'accord avec ceux du n° 66, et la coïncidence indiquée précédemment (126) se vérifie immédiatement par l'addition des deux rayons vecteurs issus d'un même point de la courbe : leur somme est, en effet, constamment égale à $2a$.

La distance $2c$ des foyers est souvent appelée l'*excentricité* de l'ellipse; il vaut mieux réserver cette dénomination au rapport $\frac{c}{a}$.

D'après la condition $-2lm=0$, nous avons supposé $l=0$. Il faut, pour résoudre complétement la question, chercher quelles conséquences entraîne la supposition $m=0$.

On a alors

$$\alpha=0, \quad a^2=n^2-\beta^2, \quad (1-l^2)b^2=n^2-\beta^2, \quad \beta+ln=0.$$

Il en résulte

$$l^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}, \quad n^2=b^2, \quad \beta^2=b^2-a^2.$$

a étant $>b$, la valeur de β est imaginaire ainsi que celle de l : *l'ellipse n'a donc que les deux foyers déjà trouvés.*

Hyperbole.

134. Nous prendrons $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ pour équation de la courbe; c'est l'axe des x qui rencontre alors l'hyperbole. En suivant la même marche que pour l'ellipse, on trouvera que *l'hyperbole a deux foyers situés sur l'axe des x, c'est-à-dire sur l'axe qui rencontre la courbe.* Les coordonnées de ces foyers seront

$$\beta=0, \quad \alpha=\pm c=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

Les deux directrices auront pour équations

$$x=\pm\frac{a^2}{c}.$$

Comme on a dans l'hyperbole $c>a$, les directrices, perpendiculaires à l'axe des x, tomberont entre les deux sommets de la courbe.

Le rapport m des distances d'un point de la courbe à un foyer et à la directrice correspondante sera encore égal à $\frac{c}{a}$, quantité qui dans le cas de l'hyperbole est bien supérieure à 1. *Les points de l'hyperbole sont donc plus éloignés d'un foyer que de la directrice correspondante.*

Enfin, l'expression $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$ devient alors

$$\pm\left(\frac{cx}{a}\mp a\right),$$

expression qui est une fonction rationnelle et du premier degré de l'abscisse du point considéré.

Les rayons vecteurs émanant du foyer qui a pour abscisse $+c$, ont pour expression générale

$$+\left(\frac{cx}{a}-a\right).$$

Le signe + convient lorsque le point considéré est sur la partie de droite, c'est-à-dire lorsque son abscisse est positive; le signe — convient lorsque le point considéré est sur la partie de gauche, c'est-à-dire lorsque son abscisse est négative. *De cette manière, on trouve toujours une valeur positive pour la distance cherchée.* Les rayons vecteurs émanant du foyer qui a pour abscisse $-c$. ont pour expression générale

$$\pm\left(\frac{cx}{a}+a\right).$$

Le signe + répond de même à la partie de droite, le signe — à la partie de gauche.

Ainsi, pour la partie de droite de la courbe, les deux rayons vecteurs d'un même point sont

$$\frac{cx}{a}-a \quad \text{et} \quad \frac{cx}{a}+a;$$

pour la partie de gauche, ces rayons sont

$$-\frac{cx}{a}+a \quad \text{et} \quad -\frac{cx}{a}-a.$$

Pour chaque partie, la différence des rayons vecteurs d'un même point est bien égale à $2a$: ce qui confirme la coïncidence indiquée (**127**). Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'excentricité de l'hyperbole.

Parabole.

135. Prenons l'équation

$$y^2=2px.$$

La courbe est rapportée à son axe et à la tangente au sommet, et l'on doit avoir

$$\sqrt{l^2+m^2}=1.$$

Le terme indépendant étant nul dans l'équation simplifiée de la parabole, il faut identifier immédiatement cette équation avec l'équation focale de la courbe (**131**). Il vient alors

$$(1)\quad 1-l^2=1, \qquad (2)\quad -2lm=0, \qquad (3)\quad 1-m^2=0,$$
$$(4)\quad \beta+ln=0, \qquad (5)\quad \alpha+mn=p, \qquad (6)\quad \alpha^2+\beta^2-n^2=0.$$

L'équation (1) donne

$$l=0.$$

l'équation (3) donne

$$m=\pm 1.$$

l'équation (2) se trouve alors satisfaite d'elle-même.

L'équation (4) donne à son tour

$$\beta=0,$$

ce qui entraîne, d'après l'équation (6),

$$\alpha^2=n^2;$$

on a d'ailleurs, d'après l'équation (5),

$$\alpha\pm n=p.$$

c'est-à-dire

$$n^2 = \alpha^2 = (p - \alpha)^2,$$

d'où

$$\alpha = \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad n = \pm\frac{p}{2}.$$

La parabole admet donc un foyer situé sur son axe du côté où la courbe s'étend et ayant pour abscisse $\frac{p}{2}$, *c'est-à-dire le quart du paramètre* $2p$ *de la courbe.*

L'équation $mx + n = 0$ de la directrice revient à

$$x + \frac{p}{2} = 0.$$

c'est-à-dire à

$$x = -\frac{p}{2}.$$

En effet, la relation (5), qui donne $mn = \frac{p}{2}$, prouve que m et n doivent avoir le même signe.

La parabole a donc une directrice perpendiculaire à son axe, située du côté où la courbe ne s'étend pas, et ayant pour abscisse $-\frac{p}{2}$, *de sorte que le sommet de la courbe se trouve au milieu de la distance du foyer et de la directrice.*

Le rapport $\sqrt{l^2 + m^2}$ est ici égal à 1, c'est-à-dire que *tous les points de la parabole sont également distants du foyer et de la directrice;* ce qui confirme la coïncidence précédemment indiquée (**129**).

L'expression $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ devient d'ailleurs

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = x + \frac{p}{2},$$

c'est-à-dire que *la distance d'un point de la courbe au foyer est une fonction rationnelle et du premier degré de l'abscisse de ce point.* Les rayons vecteurs issus du foyer de la courbe sont égaux à l'abscisse du point considéré sur la courbe, augmentée du quart de son paramètre $2p$.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE.

Rappel des notions précédentes.

136. L'équation d'une ellipse peut toujours être ramenée à la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Si l'on suppose $a > b$, la courbe a $2a$ pour *grand axe*, $2b$ pour *petit axe*. L'origine des coordonnées est un *centre*. La courbe a *quatre sommets*, qui sont les points de rencontre de l'ellipse avec ses deux axes. La valeur

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{2}$$

déduite de l'équation de la courbe, prouve que la valeur de x étant comprise entre les *limites* $+a$ et $-a$, celle de y est comprise entre les *limites* $+b$ et $-b$. Pour l'arc BA (*fig.* 65), x croissant de o à a, y décroît de b à o.

On obtient les *foyers* F et F', en décrivant du point B comme centre avec a pour rayon un arc de cercle. Cet arc vient couper le grand axe aux points F et F' : on a en effet

$$OF = OF' = \sqrt{a^2 - b^2} = c.$$

Si l'on veut construire les *directrices* de l'ellipse, il suffit de se rappeler (133) que leur équation est

$$x = \pm \frac{a^2}{c}.$$

On prendra donc sur l'axe Oy une longueur $OE = a$, on joindra le point E aux deux foyers, et l'on élèvera respectivement au point E, sur les droites EF', EF, jusqu'à la rencontre du grand axe, les perpendiculaires ED, ED'. Les points D et D' seront évidemment les pieds des bissectrices DL, D'L'.

Si l'on considère un point M quelconque pris sur la courbe, le rayon vecteur MF aura pour expression

$$a - \frac{cx}{a},$$

le rayon vecteur MF' aura pour expression

$$a + \frac{cx}{a}.$$

La courbe a bien la forme indiquée sur la figure; ce dont on se rend compte en remarquant que le coefficient angulaire de la tangente $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$, décroît depuis o (pour $x = o$, $y = b$) jusqu'à $-\infty$ (pour $x = a$, $y = o$). L'arc BA tourne donc constamment sa convexité vers les y positifs (82).

La distance OM du centre au point M ayant pour expression,

d'après l'équation de l'ellipse,

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)x^2+a^2b^2}}{a},$$

atteint son maximum a pour $x=a$, son minimum b pour $x=0$.

Si l'on considère un point *intérieur* à l'ellipse, il aura, en valeur absolue, une ordonnée inférieure à celle du point de la courbe qui a la même abscisse; si l'on considère un point *extérieur* à la courbe, il aura, en valeur absolue, une ordonnée ou une abscisse supérieure à celle du point de la courbe qui a la même abscisse ou la même ordonnée. Par suite, selon qu'un point (x, y) est intérieur à l'ellipse, extérieur à l'ellipse ou lui appartient, on a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

ou

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2<0, \quad a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2>0,$$
$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

Enfin, il est évident que, pour un point N *intérieur* à la courbe, on a pour la somme des rayons vecteurs

$$NF+NF'<2a.$$

Pour un point N *extérieur* à la courbe, on a au contraire

$$NF+NF'>2a.$$

137. Considérons sur l'ellipse un point M ayant pour ordonnée MP et pour abscisse OP (*fig.* 65). On aura, d'après l'équation (2),

$$MP^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-OP^2)=\frac{b^2}{a^2}(a+OP)(a-OP)=\frac{b^2}{a^2}\cdot A'P.AP,$$

d'où

$$\frac{MP^2}{A'P.AP}=\frac{b^2}{a^2}=\text{constante}.$$

Le rapport du carré de l'ordonnée d'un point de l'ellipse au produit des segments que cette ordonnée détermine sur l'axe des abscisses limité aux sommets de la courbe, est donc constant; en d'autres termes, *les carrés des ordonnées de la courbe sont proportionnels aux produits des segments qu'elles déterminent sur l'axe des abscisses.*

Construction de la courbe.

138. *Première construction.* — Partons de l'équation naturelle $u + v = 2a$. Du point F comme centre, avec un rayon FM plus grand que AF et plus petit que FA', décrivons une circonférence (*fig.* 66); du point F' comme centre, avec un rayon F'M égal à $2a - FM$, décrivons une seconde circonférence. Ces circonférences se couperont en deux points M et M', symétriques par rapport au grand axe AA', et qui appartiendront évidemment à l'ellipse.

La distance $2c$ des centres des deux circonférences est moindre que la somme $2a$ de leurs rayons. Il suffit donc, pour qu'elles soient en effet sécantes, qu'on ait en outre

$$2c > F'M - FM.$$

Mais de la relation $FM + F'M = 2a$ on déduit

$$F'M = 2a - FM.$$

L'inégalité précédente devient alors

$$2c > 2a - 2FM \quad \text{ou} \quad FM > a - c,$$

Il en résulte alors

$$F'M < a + c.$$

Il faut donc bien, comme nous l'avons supposé, que FM soit plus grand que AF et plus petit que FA'.

Les mêmes rayons pouvant être successivement employés en prenant les deux foyers comme centres, chaque valeur assignée à FM permettra de déterminer quatre points M, M', M'', M''', de l'ellipse, deux à deux symétriques par rapport aux axes de la courbe.

En considérant toujours l'ellipse comme le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante, on peut décrire mécaniquement la courbe comme il suit. On n'a qu'à fixer aux deux foyers les extrémités d'un fil inextensible de longueur $2a$. En tendant ce fil à l'aide d'une pointe et en la faisant glisser dans le plan, on aura tracé l'ellipse lorsque la pointe sera revenue au point de départ.

139. *Seconde construction.* — Décrivons une circonférence sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre. Si nous représentons par Y l'ordonnée d'un point M' de la circonférence et par y l'ordonnée du point M de l'ellipse qui a la même abscisse, nous aurons

$$Y^2 + x^2 = a^2, \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Par suite,

$$Y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$

Ainsi, l'*ordonnée de l'ellipse est à celle du cercle circonscrit dans le rapport constant du petit axe au grand axe.* On passera donc de la circonférence à l'ellipse, en diminuant toutes les ordonnées de la circonférence dans un rapport donné, ou de l'ellipse à la circonférence en augmentant toutes les ordonnées de l'ellipse dans un rapport donné.

On pourrait faire des remarques analogues, mais inverses, en comparant les abscisses de l'ellipse à celles de la circonférence décrite sur son petit axe comme diamètre.

L'importante propriété qu'on vient d'indiquer permet de tracer l'ellipse par points. Décrivons sur le petit axe de l'ellipse comme diamètre une seconde circonférence (*fig.* 67). Sur la circonférence a, prenons un point quelconque M' ayant pour ordonnée M'P; menons le rayon OM' qui rencontrera la circonférence b au point Q; par le point Q, menons au grand axe la parallèle QM jusqu'à la rencontre de l'ordonnée M'P : le point M appartiendra à l'ellipse. On aura bien, en effet,

$$\frac{MP}{M'P} = \frac{OQ}{OM'} = \frac{b}{a}.$$

140. *Troisième construction.* — Soit une droite AB de longueur constante, astreinte à glisser par ses extrémités sur deux droites rectangulaires Ox et Oy (*fig.* 68). Prenons un point quelconque M sur cette droite ou sur son prolongement, posons $AM = a$, $BM = b$, et cherchons le lieu qu'engendre le point M pendant le mouvement de la droite AB.

On a immédiatement, d'après la figure et dans les deux positions du point mobile,

$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Le lieu engendré est donc une ellipse dont les axes sont $2a$ *et* $2b$. Dans le premier cas, la droite AB est la demi-somme $a + b$ des deux axes de l'ellipse; dans le second, elle est leur demi-différence $a - b$.

On est ainsi conduit à une ou, plutôt, à deux nouvelles constructions de l'ellipse soit par points, soit d'un mouvement continu.

Tangente et normale.

141. L'équation de la tangente à l'ellipse en un point (x_1, y_1) est immédiatement (73), d'après l'équation de la courbe,

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

On a, en effet, dans ce cas,

$$F'_{x_1} = \frac{2x_1}{a^2}, \quad F'_{y_1} = \frac{2y_1}{b^2},$$

d'où

$$-\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Il faut joindre d'ailleurs à l'équation de la tangente l'équation de condition

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

L'équation de la tangente qu'on peut écrire

$$a^2 y y_1 - a^2 y_1^2 = -b^2 x x_1 + b^2 x_1^2,$$

ou, en divisant les deux membres par $a^2 b^2$,

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2},$$

revient donc à celle-ci :

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Pour *construire* la tangente, on peut chercher les points où elle coupe les axes. Si l'on suppose $y = 0$, on trouve

$$x = \frac{a^2}{x_1};$$

si l'on suppose $x = 0$, on trouve

$$y = \frac{b^2}{y_1}.$$

Ainsi *chaque coordonné de la tangente par rapport à l'origine ne dépend que de la longueur de l'axe correspondant et de la coordonnée du point de contact sur cet axe.* On en déduit immédiatement un moyen simple de construire la tangente en un point donné de l'ellipse.

Soit M le point donné. Décrivons sur le grand axe AA′ de

l'ellipse une demi-circonférence. Prolongeons l'ordonnée MP jusqu'au point M′ situé sur cette demi-circonférence (*fig.* 69). Pour la tangente au point M de l'ellipse ou pour la tangente au point M′ de la circonférence, l'abscisse OT à l'origine sera également $\frac{a^2}{x_1}$, parce que les deux *ellipses* considérées ont le même grand axe. On tracera donc la tangente M′T à la circonférence et, en menant la droite TM, on aura la tangente à l'ellipse au point M.

Même construction par rapport au petit axe.

La distance TP entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la tangente rencontre l'axe des x, s'appelle la *sous-tangente* par rapport à cet axe. La sous-tangente TP, par rapport à l'axe des x, a donc pour expression

$$\frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}.$$

Remarque analogue par rapport à l'axe des y.

142. L'équation de la normale en un point donné (x_1, y_1) de l'ellipse est

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

On en déduit

$$b^2 x_1 y - b^2 x_1 y_1 = a^2 y_1 x - a^2 x_1 y_1,$$

c'est-à-dire, en divisant les deux membres par $(a^2 - b^2) x_1 y_1$ ou par $c^2 x_1 y_1$,

$$\frac{a^2 x}{c^2 x_1} - \frac{b^2 y}{c^2 y_1} = 1.$$

Pour construire la normale, on peut chercher les points où elle coupe les axes. Si l'on suppose $y = 0$, il vient

$$x = \frac{c^2 x_1}{a^2};$$

si l'on suppose $x = 0$, il vient

$$y = -\frac{c^2 y_1}{b^2}.$$

La distance NP entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la normale rencontre l'axe des x (*fig.* 70) s'appelle la *sous-normale* par rapport à cet axe. La sous-normale NP, par rapport à l'axe des x, a donc pour expression

$$x_1 - \frac{c^2 x_1}{a^2} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Lorsque le point M est à l'une des extrémités du petit axe,

$x_1 = 0$, et le pied N de la normale par rapport au grand axe est au centre de la courbe. Lorsque le point M s'approche de l'une des extrémités du grand axe, x_1 s'approche de a, et la sous-normale tend vers $\frac{b^2}{a}$. Ainsi, *à la limite, le point* M *se confondant avec l'une des extrémités du grand axe, le pied de la normale sur cet axe se trouve à une distance de cette extrémité égale à la longueur* $\frac{b^2}{a}$ *plus petite que* b.

Remarque analogue par rapport au petit axe.

143. *La normale au point* M *de l'ellipse est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs de ce point* (*fig.* 70).

De

$$ON = \frac{c^2 x_1}{a^2},$$

on déduit

$$NF = OF - ON = c - \frac{c^2 x_1}{a^2} = \frac{c(a^2 - cx_1)}{a^2}$$

et

$$NF' = OF' + ON = c + \frac{c^2 x_1}{a^2} = \frac{c(a^2 + cx_1)}{a^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{NF}{NF'} = \frac{a^2 - cx_1}{a^2 + cx_1}.$$

Mais

$$MF = a - \frac{cx_1}{a} = \frac{a^2 - cx_1}{a},$$

$$MF' = a + \frac{cx_1}{a} = \frac{a^2 + cx_1}{a}.$$

Par suite,

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{a^2 - cx_1}{a^2 + cx_1} = \frac{NF}{NF'}.$$

La normale MN, divisant la base du triangle FMF' en segments proportionnels aux côtés MF et MF', est la bissectrice de l'angle FMF' (*Géom.*, 89).

La normale MN divisant en deux parties égales l'angle FMF' des rayons vecteurs du point M, la tangente au point M est nécessairement également inclinée par rapport à ces mêmes rayons vecteurs. Ainsi : *les rayons vecteurs du point de contact font, d'un même côté de la tangente et avec cette ligne, des angles égaux* (*).

(*) Cette importante propriété explique au point de vue physique (l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion) comment les rayons sonores, lumineux ou calorifiques, qui partent du foyer d'une ellipse, vont se concentrer à l'autre foyer.

Remarques. — I. La normale MN étant la bissectrice de l'angle *intérieur* FMF', la tangente MT est la bissectrice de l'angle *extérieur* FML, c'est-à-dire *la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre.*

Le pied N de la normale et le pied T de la tangente sur le grand axe, sont donc *harmoniques conjugués* par rapport aux deux foyers F et F' (*Compl. de Géom.*, 27).

II. On peut obtenir la tangente au point M, en remarquant que si l'on prend sur le prolongement de F'M, ML = MF (ce qui entraîne F'L = 2*a*), le triangle FML étant alors isocèle et la tangente MT devant être la bissectrice de l'angle FML, elle se confondra avec la perpendiculaire élevée sur le milieu H de la base FL du triangle.

III. Le point H étant le milieu de FL et le centre O de l'ellipse étant le milieu de la distance focale FF', la distance OH sera toujours égale à la moitié de la distance FL', c'est-à-dire à la constante *a*. Par suite, *les projections des foyers sur toutes les tangentes à l'ellipse ont pour lieu géométrique la circonférence décrite sur le grand axe de la courbe comme diamètre.*

144. Si l'on veut mener à l'ellipse *une tangente passant par un point extérieur donné*, les inconnues du problème seront les coordonnées x_1, y_1, du point de contact. En désignant par α, β, les coordonnées du point donné, on aura à résoudre les deux équations

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} + \frac{\beta y_1}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

La première exprime que la tangente cherchée passe par le point donné.

Le mieux (60) est de regarder les inconnues x_1, y_1, comme des coordonnées courantes et de déterminer les points d'intersection des lieux représentés par les équations (1) et (2). Or l'équation (2) représente alors l'ellipse proposée elle-même, l'équation (1) représente une droite facile à construire. En faisant successivement dans cette équation $y_1 = 0$ et $x_1 = 0$, on a en effet

$$x_1 = \frac{a^2}{\alpha}, \qquad y_1 = \frac{b^2}{\beta}.$$

La droite obtenue ainsi coupera toujours l'ellipse en deux points (comme il est facile de le vérifier) si le point (α, β) est

bien extérieur à la courbe : on donne à cette droite le nom de *corde des contacts*. En joignant les points où elle rencontre l'ellipse avec le point donné, on aura les deux tangentes qui répondent à la question.

L'équation de la corde des contacts s'obtient en remplaçant dans l'équation de la tangente les coordonnées variables x, y, par les coordonnées fixes α, β, du point extérieur, et en regardant les coordonnées x_1, y_1, du point de contact comme des coordonnées courantes.

Le point (α, β) est le *pôle* de la corde des contacts qui est la *polaire* de ce point.

Nous reviendrons plus loin sur ces dénominations appliquées aux courbes du second ordre et sur les propriétés correspondantes.

145. On peut aussi, en s'appuyant sur ce qui précède, mener *géométriquement* une tangente à l'ellipse par un point extérieur.

Du point donné N comme centre, avec NF pour rayon, décrivons une circonférence (*fig.* 71); du foyer F′ comme centre, avec $2a$ pour rayon, décrivons une autre circonférence. Ces deux circonférences seront toujours sécantes, si le point N est extérieur à l'ellipse. On mènera alors les cordes qui, dans la première circonférence, joignent le foyer F aux points d'intersection obtenus L et L′. Du centre N, on abaissera sur ces cordes les perpendiculaires NT, NT′ : ce seront les tangentes demandées. Car si l'on joint le foyer F′ aux points d'intersection L et L′, les droites NT et NT′ seront coupées par les droites F′L et F′L′ aux points M et M′, et l'on aura

$$MF = ML,$$

c'est-à-dire

$$MF + MF' = F'L = 2a, \quad M'F = M'L',$$

c'est-à-dire

$$M'F + M'F' = F'L' = 2a.$$

Les points M et M′ appartiennent donc à l'ellipse, et, en ces points, les droites NT et NT′ coupent en deux parties égales les angles formés par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre : ces droites sont donc tangentes à l'ellipse aux points M et M′ (143, I), et elles passent par le point donné N.

Nous avons dit que, le point N étant extérieur, les circonférences NF et F′L seraient toujours sécantes. En effet, la distance des centres NF′ étant moindre que NF + FF′, est à fortiori plus petite que la somme des rayons NF + $2a$. D'ailleurs,

le point N étant extérieur, on a

$$NF + NF' > 2a \quad (136),$$

et l'on en déduira (en supposant $2a > NF$)

$$NF' > 2a - NF.$$

Si au contraire NF est $> 2a$, le triangle F'NF donnera

$$NF' > NF - FF',$$

et, à fortiori,

$$NF' > NF - 2a.$$

Donc la distance des centres, plus petite que la somme des rayons, est aussi plus grande que leur différence.

Remarque. — Les cercles décrits de chaque foyer d'une ellipse comme centre, avec le grand axe $2a$ pour rayon, sont appelés *cercles directeurs.* On voit que *tous les points de l'ellipse sont à égale distance de l'un des foyers et du cercle directeur qui correspond à l'autre foyer.*

146. Si l'on veut *mener à l'ellipse une tangente parallèle à une direction donnée,* les inconnues du problème seront encore les coordonnées x_1, y_1, du point de contact. Soit m le coefficient angulaire qui correspond à la direction donnée; on aura à résoudre les deux équations

$$(1) \qquad m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

$$(2) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

et, en faisant le calcul, on vérifiera que le problème est toujours possible. Les équations (1) et (2) montrent d'ailleurs que les points de contact demandés résulteront de l'intersection de l'ellipse proposée et de la droite $y_1 = -\frac{b^2}{a^2 m} x_1$, qui passe par l'origine. Mais il est préférable de chercher l'équation générale des tangentes à l'ellipse, indépendamment des coordonnées du point de contact. Il suffira pour cela, comme nous l'avons indiqué (57), de déterminer la relation qui doit exister entre les constantes m et n pour que la droite $y = mx + n$ soit tangente à l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Si l'on élimine y entre les deux équations, il vient

$$(a^2 m^2 + b^2) x^2 + 2a^2 mnx + a^2 n^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Si la droite considérée est tangente, l'équation ainsi obtenue doit avoir ses deux racines égales, d'où la condition

$$a^4 m^2 n^2 - (a^2 m^2 + b^2)(a^2 n^2 - a^2 b^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$n^2 = a^2 m^2 + b^2 \quad \text{ou} \quad n = \pm\sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

L'équation générale des tangentes à l'ellipse (équation qu'il importe de retenir) *est donc*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2};$$

et en y donnant à m la valeur indiquée, on répondra immédiatement à la question. *L'ellipse admet donc toujours deux tangentes parallèles à une direction donnée.*

147. Si l'on veut résoudre *géométriquement* le problème proposé, on se rappellera (143, III) que le lieu des projections des foyers sur les tangentes à la courbe est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre. Par suite, si la droite DD′ marque la direction donnée (*fig.* 72), il suffira d'abaisser du foyer F, par exemple, sur cette droite, la perpendiculaire indéfinie H′FH qui coupera la circonférence AA′ en deux points H et H′. Par les points H et H′, on mènera des parallèles HT et H′T′ à DD′, et la question sera résolue. Pour avoir les points de contact des deux tangentes, on prolongera FH d'une longueur HL=FH, et FH′ d'une longueur H′L′=FH′. On joindra ensuite le foyer F′ aux points L et L′, et les droites F′L, F′L′, détermineront sur HT et H′T′ les points de contact M et M′. Il suffit, pour vérifier les constructions indiquées, de remarquer qu'on a

$$OH = OH' = a$$

et, par conséquent,

$$F'L = F'L' = 2a.$$

La droite MM′ qui joint les deux points de contact passe bien par le centre (146), car il est aisé de voir que le quadrilatère MFM′F′ est un parallélogramme.

Il est bon de noter que les dernières constructions géométriques indiquées (145, 147) *ne supposent pas l'ellipse tracée.*

Diamètres, cordes supplémentaires, diamètres conjugués.

148. Pour trouver l'équation des diamètres de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

appliquons la règle générale trouvée précédemment (112).

On a ici

$$F'_y = 2a^2y, \quad F'_x = 2b^2x.$$

Si l'on désigne par m le coefficient angulaire du système de cordes parallèles considéré, on aura pour l'équation demandée

$$2a^2ym + 2b^2x = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{b^2}{a^2m}x.$$

En désignant par m' le coefficient angulaire du diamètre, on aura donc

$$m' = -\frac{b^2}{a^2m}$$

ou

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{1}$$

Telle est la relation constante qui existe entre le coefficient angulaire d'un diamètre et celui des cordes qu'il divise en deux parties égales.

On peut vérifier facilement que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au système de cordes, conjugué à ce diamètre* (114).

En désignant par x_1, y_1, les coordonnées de l'extrémité du diamètre, son coefficient angulaire m' sera

$$\frac{y_1}{x_1}.$$

Par suite, celui des cordes conjuguées sera

$$m = -\frac{b^2}{a^2m'} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

c'est-à-dire précisément celui de la tangente au point (x_1, y_1).

149. Nous savons (115) que tout diamètre a pour diamètre conjugué celui qui fait partie du système de cordes, conjugué au premier diamètre. Deux diamètres conjugués sont tels que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. La relation (1) permet de le vérifier immédiatement. Dans cette relation, m' est le coefficient angulaire du premier diamètre, m le coefficient angulaire de ses cordes conjuguées. Le diamètre conjugué au premier diamètre ayant à son tour m pour coefficient angulaire, ses cordes conjuguées ont m' pour coefficient angulaire et sont parallèles au premier diamètre.

150. On dit que *deux cordes sont* SUPPLÉMENTAIRES *lorsque, partant d'un même point de l'ellipse, elles aboutissent aux extrémités d'un même diamètre.*

Cherchons la relation qui lie les coefficients angulaires de deux cordes supplémentaires MD et MD′ (*fig.* 73).

Soient x, y, les coordonnées du point M, x_1, y_1, les coordonnées du point D; celles du point D′ seront alors

$$-x_1, \quad -y_1.$$

Le coefficient angulaire de la droite MD sera

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1};$$

celui de la droite MD′ sera

$$m' = \frac{y + y_1}{x + x_1}.$$

Si on les multiplie l'un par l'autre, il viendra

$$mm' = \frac{y^2 - y_1^2}{x^2 - x_1^2}.$$

Mais le point M et le point D étant sur la courbe, on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

d'où l'on déduit, par soustraction,

$$\frac{y^2 - y_1^2}{b^2} + \frac{x^2 - x_1^2}{a^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$mm' = \frac{y^2 - y_1^2}{x^2 - x_1^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

La relation qui existe entre le coefficient angulaire d'un diamètre et celui de ses cordes conjuguées, ainsi qu'entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués (**148**, **149**), *existe donc également entre les coefficients angulaires de deux cordes supplémentaires.*

Il en résulte immédiatement (*fig.* 73) que les diamètres conjugués à deux cordes supplémentaires sont *conjugués*, ou qu'*en menant par le centre de l'ellipse des parallèles à deux cordes supplémentaires, on obtient un système de diamètres conjugués.*

Remarque. — Deux cordes supplémentaires satisfont à trois

conditions : elles partent d'un même point de l'ellipse, elles aboutissent aux extrémités d'un même diamètre, leurs coefficients angulaires satisfont en outre à la relation

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Réciproquement, lorsque deux droites rempliront deux des conditions énoncées, elles satisferont nécessairement à la troisième.

Par conséquent : 1° *si des extrémités d'un même diamètre partent deux droites respectivement parallèles à deux diamètres conjugués, ces droites aboutiront à un même point de l'ellipse;* 2° *si d'un même point de l'ellipse partent deux cordes respectivement parallèles à deux diamètres conjugués, ces cordes aboutiront aux extrémités d'un même diamètre.*

151. Les propriétés précédentes permettent de tracer facilement la tangente à l'ellipse par un point donné sur la courbe ou parallèlement à une direction donnée.

Soit le point M qui correspond au diamètre MM' (*fig.* 74). En menant la corde DD' parallèle au diamètre MM' et en joignant son milieu au centre, on obtiendra le diamètre NN' conjugué du diamètre MM'; en menant par le point M une parallèle au diamètre NN', on aura la tangente demandée (148, 149).

S'il s'agit de mener une tangente parallèle à la droite LL', on mènera une corde DD' parallèle à LL'. En joignant son milieu au centre (*fig.* 75), on obtiendra le diamètre MM' conjugué à la direction donnée, et il restera à mener par le point M une parallèle à LL' (148). Le point M' correspondra à la seconde solution possible.

152. On peut demander de *trouver entre quelles limites varie l'angle de deux diamètres conjugués ou de deux cordes supplémentaires.*

L'équation d'un diamètre quelconque étant $y = mx$, l'équation de son conjugué sera $\left(\text{en vertu de la relation } mm' = -\frac{b^2}{a^2}\right)$

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}x.$$

Si le premier diamètre MM' (*fig.* 76) fait un angle aigu avec Ox, le second diamètre NN' fera donc un angle obtus avec cet axe.

Si l'on désigne par α l'angle NOM, on aura

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{-\frac{b^2}{a^2 m} - m}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = -\frac{b^2 + a^2 m^2}{c^2 m}.$$

Cherchons la dérivée de tang α par rapport à m. Nous aurons (*Compl. d'Alg.*, 137)

$$-\frac{c^2(b^2 + a^2 m^2) - 2a^2 c^2 m^2}{c^4 m^2} = \frac{a^2 m^2 - b^2}{c^2 m^2}.$$

Cette expression devient nulle pour

$$a^2 m^2 - b^2 = 0$$

ou pour

$$m = \pm\frac{b}{a}.$$

D'ailleurs, si l'un des diamètres a pour coefficient angulaire $\pm\frac{a}{a}$, son conjugué $\left(\text{en vertu de la relation } mm' = -\frac{b^2}{a^2}\right)$ aura pour coefficient angulaire $\mp\frac{b}{a}$.

Les deux diamètres conjugués qui font à la fois l'angle maximum et l'angle minimum, sont donc les diagonales du rectangle STUV *circonscrit à l'ellipse.*

Le maximum de α étant l'angle NOM, son minimum corrélatif est MON'.

L'expression $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{b^2 + a^2 m^2}{c^2 m}$ prouve que l'angle de deux diamètres conjugués ne peut être droit que pour $m = 0$ ou $m = \infty$; mais alors le coefficient angulaire $-\frac{b^2}{a^2 m}$ du second diamètre est égal à ∞ ou à 0 : ce qui montre, comme on le savait déjà, que les axes de l'ellipse sont les seuls diamètres conjugués rectangulaires.

153. *Remarques.* — I. Aux cordes supplémentaires qui correspondent aux extrémités d'un certain diamètre, on peut toujours mener, par les extrémités de tout autre diamètre, des parallèles qui formeront aussi un système de cordes supplémentaires (150, *Rem.*). Par conséquent, si l'on veut étudier complétement les variations de l'angle formé par deux diamètres conjugués ou deux cordes supplémentaires, on peut considérer celles qui aboutissent aux extrémités du grand axe, y et x

représentant les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse, les coefficients angulaires de ces cordes auront pour expressions

$$m = \frac{y}{x - a} \quad \text{et} \quad m' = \frac{y}{x + a},$$

d'où, en désignant leur angle par α,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Le point (y, x) appartenant à l'ellipse, on aura

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

d'où

$$x^2 - a^2 = -\frac{a^2 y^2}{b^2},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2ab^2}{(b^2 - a^2) y} = -\frac{2ab^2}{c^2 y}.$$

Il suffira de faire varier y de o à b pour obtenir toutes les variations de l'angle α, et, par suite, celles de l'angle supplémentaire.

II. *Pour tracer deux cordes supplémentaires ou*, ce qui revient au même, *deux diamètres conjugués faisant un angle donné*, il suffit de construire sur l'un des diamètres de l'ellipse un segment capable de cet angle. En joignant aux extrémités du diamètre considéré l'un des points d'intersection de la circonférence décrite et de l'ellipse proposée, on obtiendra un système de cordes supplémentaires répondant à la question.

134. *Les diamètres conjugués dont l'angle est un maximum ou un minimum, étant également inclinés par rapport aux axes* (132), *sont égaux entre eux en vertu de la symétrie de la courbe* (136). On peut se demander si l'ellipse admet d'autres diamètres conjugués égaux.

S'il en existe d'autres, ils sont, comme les diamètres OM et ON (*fig.* 76), également inclinés par rapport à l'axe AA' de chaque côté de l'axe BB', c'est-à-dire que si m représente le coefficient angulaire de l'un d'eux, le coefficient angulaire m' de l'autre est nécessairement égal à $-m$. *Pour les diamètres conjugués égaux*, et pour ceux-là seulement, la relation $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ devient donc

$$-m^2 = -\frac{b^2}{a^2},$$

d'où

$$m = \pm \frac{b}{a};$$

ce qui nous ramène aux diamètres conjugués dont l'angle est maximum ou minimum.

153. Le demi-diamètre OM (*fig.* 77) est moindre que a, mais le demi-diamètre conjugué ON est plus grand que b (136); quand l'un augmente, l'autre diminue, puisque les équations des deux diamètres sont $y = mx$ et $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$. *Il y a donc lieu de chercher s'il n'existe pas une relation constante entre les longueurs de ces demi-diamètres.*

Désignons par x', y', et x'', y'', les coordonnées des extrémités M et N des demi-diamètres conjugués OM et ON. Soient a' et b' les longueurs de ces demi-diamètres. On aura

$$a'^2 = x'^2 + y'^2, \quad b'^2 = x''^2 + y''^2.$$

Les coefficients angulaires des deux diamètres étant exprimés par les rapports $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{y''}{x''}$, devront satisfaire à la relation générale

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2},$$

de sorte qu'on aura

$$\frac{y'y''}{x'x''} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

On en déduit

$$y'^2 y''^2 = \frac{b^4}{a^4} x'^2 x''^2.$$

Les points (x', y') et (x'', y'') étant sur l'ellipse, on a

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2), \quad y''^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x''^2).$$

Il en résulte, en substituant dans la relation précédente et en simplifiant,

$$(a^2 - x'^2)(a^2 - x''^2) = x'^2 x''^2,$$

d'où

$$(1) \qquad x'^2 + x''^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{x''^2}{a^2} = 1.$$

Mais les équations de condition

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

prouvent alors immédiatement qu'on a aussi

$$\frac{y'^2}{b^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$y'^2+y''^2=b^2.$$

Ajoutant les équations (1) et (2), nous aurons

$$(x'^2+y'^2)+(x''^2+y''^2)=a^2+b^2,$$

c'est-à-dire, en remplaçant les parenthèses par leurs valeurs,

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2.$$

La somme des carrés de deux diamètres conjugués $(4a'^2+4b'^2)$ *est donc constante et égale à la somme des carrés des axes* $(4a^2+4b^2)$.

156. Menons les tangentes aux extrémités des diamètres conjugués MM', NN'; nous formerons un parallélogramme circonscrit à l'ellipse, dont les côtés seront égaux aux deux diamètres conjugués et dont les angles seront ceux de ces diamètres. *Cherchons l'expression de l'aire d'un pareil parallélogramme.*

Le parallélogramme construit sur les demi-diamètres OM et ON en sera le quart. Son aire aura pour expression $OM=a'$, multipliée par la perpendiculaire ND abaissée du point N sur OM (*fig.* 77). Or $y=mx$ étant l'équation de OM, et le point N ayant pour coordonnées x'' et y'', on aura (45)

$$ND=\frac{y''-mx''}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{y''x'-y'x''}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

en remplaçant m par sa valeur $\frac{y'}{x'}$; et l'aire du parallélogramme construit sur OM et ON sera (puisque $a'^2=x'^2+y'^2$)

$$a'.\frac{y''x'-y'x''}{a'}=y''x'-y'x''.$$

Mais

$$(y''x'-y'x'')^2=y''^2x'^2+y'^2x''^2-2y'y''x'x''.$$

Si l'on remplace x'^2 et x''^2 par leurs valeurs déduites de l'équation de l'ellipse, et si l'on tire de la relation générale

$$\frac{y'y''}{x'x''}=-\frac{b^2}{a^2},\quad x'x''=-\frac{a^2}{b^2}y'y'',$$

il viendra (155)

$$(y''x' - y'x'')^2 = a^2y''^2\left(1 - \frac{y'^2}{b^2}\right) + a^2y'^2\left(1 - \frac{y''^2}{b^2}\right) + 2\frac{a^2}{b^2}y'^2y''^2,$$

c'est-à-dire

$$(y''x' - y'x'')^2 = a^2(y'^2 + y''^2) = a^2b^2$$

ou

$$y''x' - y'x'' = ab.$$

L'aire $[4(y''x' - y'x'')]$ *du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est donc constante et égale à celle* $(4ab)$ *du rectangle construit sur les axes.*

En désignant par α l'angle des deux diamètres conjugués, on peut exprimer l'aire du parallélogramme construit sur les demi-diamètres par $a'b'\sin\alpha$. Les axes et deux diamètres conjugués quelconques sont donc liés, dans l'ellipse, par les relations

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \quad a'b'\sin\alpha = ab.$$

157. *Remarques.* — I. Les deux théorèmes importants qu'on vient d'établir (155, 156) sont connus sous le nom de théorèmes d'*Apollonius,* illustre géomètre grec qui les a découverts.

II. A chaque parallélogramme circonscrit à l'ellipse en appliquant la construction précédente (156), correspond un parallélogramme inscrit ayant pour diagonales les diamètres conjugués parallèles aux côtés du parallélogramme circonscrit. Le parallélogramme inscrit aura pour mesure $2a'b'\sin\alpha$ (*Trig.*, 59). Donc *chaque parallélogramme inscrit ayant pour diagonales deux diamètres conjugués, est la moitié du parallélogramme circonscrit correspondant.*

Équation de l'ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués.

158. Si l'on prend pour axes coordonnés deux diamètres conjugués, l'équation de l'ellipse devra, pour chaque valeur de l'une des variables, donner deux valeurs de l'autre variable égales et de signes contraires; en effet, chaque diamètre divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. L'équation de la courbe sera donc alors nécessairement de la forme

$$My^2 + Nx^2 + P = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{M}{-P}y^2 + \frac{N}{-P}x^2 = 1.$$

Désignons par $2a'$ et $2b'$ les longueurs des diamètres conjugués pris pour axes. Nous aurons, en faisant $y = 0$ dans

l'équation,

$$\frac{N}{-P}a'^2=1,$$

d'où

$$\frac{N}{-P}=\frac{1}{a'^2}.$$

De même, en faisant $x=0$, on aura

$$\frac{M}{-P}b'^2=1,$$

d'où

$$\frac{M}{-P}=\frac{1}{b'^2}.$$

Par conséquent, *l'équation de l'ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués est*

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

a' et b' représentant les longueurs des demi-axes obliques.

Cette équation étant de même forme que l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, toutes les propriétés et toutes les équations qui ne dépendent dans ce cas que des axes 2a et 2b, dépendront d'une manière identique des axes 2a' et 2b' lorsque l'ellipse sera rapportée à un système de diamètres conjugués.

Par exemple, l'équation de la tangente à l'ellipse au point (x_1, y_1) étant, dans le premier système,

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$$

cette équation sera, dans le second système,

$$\frac{xx_1}{a'^2}+\frac{yy_1}{b'^2}=1.$$

159. Rien, d'après ce rapprochement, n'est plus facile que de *construire une ellipse dans laquelle on connaît deux diamètres conjugués et l'angle qu'ils forment entre eux.*

En effet, si sur une perpendiculaire élevée par le centre de l'ellipse au diamètre MM' (*fig.* 78), on prend

$$OB=OB'=ON=b',$$

et si l'on décrit une ellipse (139) sur MM' et sur BB' comme *axes*, l'ellipse *construite* et l'ellipse *cherchée* auront les

mêmes ordonnées pour des abscisses égales, en vertu de leurs équations identiques (158). Par conséquent, l'ordonnée PC correspondant à l'abscisse OP sur la première ellipse, il suffira de reporter la longueur PC sur la parallèle menée au diamètre NN' par le point P, pour avoir en Q un point de la seconde ellipse.

On pourrait aussi déterminer directement les axes de l'ellipse demandée. Nous reviendrons sur cette question (170).

160. *Lorsque l'ellipse est rapportée à ses diamètres conjugués égaux, son équation prend la forme*

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{a'^2}=1.$$

Cette forme rappelle l'équation du cercle rapporté à des axes rectangulaires passant par son centre.

Quadrature des aires planes.

161. Soit AB une courbe quelconque rapportée à des axes rectangulaires, et soit $y=F(x)$ son équation. Considérons sur cette courbe deux points M et M' situés d'un même côté de l'axe des x. L'aire limitée par l'arc MM', les ordonnées MP, M'P' et la portion d'axe PP', tombera entre les deux rectangles MPP'Q, M'P'PQ', si l'on suppose l'ordonnée de la courbe constamment croissante ou décroissante de M en M'. Si y et x représentent les coordonnées du point M, $y+\Delta y$ et $x+\Delta x$ représenteront les coordonnées du point M'. En désignant par u l'aire MM'PP', on aura alors

$$y.\Delta x<u<(y+\Delta y)\Delta x,$$

d'où

$$y<\frac{u}{\Delta x}<y+\Delta y.$$

Si le point M' se rapproche indéfiniment du point M, Δy tendra vers zéro, et $\frac{u}{\Delta x}$ tendra vers la dérivée u' de l'aire demandée considérée comme fonction de l'abscisse x. On pourra donc poser à la limite

$$u'=y=F(x).$$

Ainsi, *la dérivée de l'aire définie plus haut et l'ordonnée de la courbe correspondante sont représentées par la même fonction de x.*

En remontant dans les cas simples à la fonction primitive (*Compl. d'Alg.*, 158), on pourra donc trouver la valeur de u.

En désignant par $\varphi(x)$ une fonction primitive de $F(x)$ et par C la constante arbitraire, on aura

$$u = \varphi(x) + C.$$

Si l'on connaît alors la valeur u_m de u pour $x = m$, par exemple, on aura en outre l'équation de condition

$$u_m = \varphi(m) + C,$$

d'où

$$C = u_m - \varphi(m).$$

Il viendra, par suite,

$$u = \varphi(x) + u_m - \varphi(m),$$

d'où

$$u - u_m = \varphi(x) - \varphi(m).$$

Cette équation fera connaître l'aire comprise entre les ordonnées qui correspondent aux deux valeurs m et x de l'abscisse.

Remarque. — Si les axes étaient obliques, on aurait, pour aires limites, des parallélogrammes au lieu de rectangles. Par conséquent, on devrait prendre $u' = y \sin\theta$, en désignant par θ l'angle des axes.

Application à l'Ellipse.

162. Soit une ellipse rapportée à ses axes $2a$ et $2b$. Décrivons une circonférence sur le grand axe AA′ comme diamètre (*fig.* 80). Si l'on considère dans l'ellipse et dans le cercle les aires MM′PP′, NN′PP′, correspondantes aux mêmes abscisses OP et OP′, on aura, en désignant ces aires par u et U et les ordonnées des deux courbes par y et Y,

$$u' = y, \quad U' = Y.$$

Mais (139)

$$y = \frac{b}{a} Y;$$

par suite,

$$u' = \frac{b}{a} U'.$$

Les deux fonctions u et $\frac{b}{a} U$ ayant des dérivées égales, ne peuvent différer que par une constante, de sorte qu'on aura d'une manière générale

$$u = \frac{b}{a} U + C.$$

Si l'on part de l'origine, on a à la fois, pour $x = 0$, $u = 0$ et

$U = o$; donc $C = o$, et il reste simplement

$$u = \frac{b}{a} U.$$

Pour avoir l'aire du quart de l'ellipse, il suffira de remplacer U par l'aire du quart de cercle, en faisant varier x depuis o jusqu'à a. Il viendra alors, S représentant la surface entière de l'ellipse,

$$\frac{1}{4} S = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4},$$

d'où

$$S = \pi ab.$$

L'ellipse est donc équivalente au cercle qui a pour rayon une moyenne proportionnelle entre les demi-axes a et b; ou bien, *l'ellipse est moyenne proportionnelle entre les deux cercles décrits sur ses axes comme diamètres.*

Il est utile de remarquer que le rapport des triangles OPM, OPN, est égal à $\frac{b}{a}$ comme celui des deux segments OPMB, OPNQ. Les deux *secteurs*, elliptique et circulaire, OMB, ONQ, sont donc dans le même rapport, et l'on peut écrire

$$OMB = \frac{b}{a} \cdot ONQ = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} a \,.\, \text{arc NQ} = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{\text{arc NQ}}{a}.$$

$\frac{\text{arc NQ}}{a}$ représente l'angle NOQ ou l'arc qui lui correspond dans le cercle de rayon 1; cet arc a pour sinus $\frac{x}{a}$. On posera donc

$$\text{secteur OMB} = \frac{1}{2} ab \,.\, \text{arc sin} \frac{x}{a}.$$

Si l'on suppose $x = a$ dans cette formule, il faut remplacer arc sin $\frac{x}{a}$ par $\frac{\pi}{2}$, et il vient

$$\text{secteur OAB} = \frac{\pi ab}{4},$$

comme cela doit être.

Si l'ellipse avait été rapportée à un système de diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, les mêmes raisonnements auraient conduit à la formule

$$S = \pi a' b' \sin \theta;$$

d'où l'on conclurait, si on ne le savait déjà (156),

$$a' b' \sin \theta = ab.$$

De l'Ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle.

163. Supposons un cercle rapporté aux diamètres rectangulaires AA′ et CC′ (*fig.* 81). Par le diamètre AA′, faisons passer un plan de projection quelconque. Projetons les différents points de la circonférence sur ce plan, *ces points formeront une ellipse.*

En effet, les points C, N,..., ayant pour projections les points B, M,..., abaissons dans le plan du cercle les perpendiculaires CO, NP,..., sur le diamètre AA′, et menons dans le plan de projection les droites BO, MP,.... Dans le plan du cercle, les perpendiculaires CO, NP,..., seront les ordonnées Y des différents points de la circonférence; dans le plan de projection, les droites BO, MP,..., seront les ordonnées y de la courbe obtenue en projection (*Géom.*, **164**), rapportée aux axes rectangulaires AA′ et BB′.

Ceci posé, V étant l'angle du plan du cercle avec le plan de projection, les triangles COB, NPM,..., donneront d'une manière générale

$$y = \mathrm{Y}\cos \mathrm{V}.$$

Si l'on désigne d'ailleurs AA′ par $2a$ et BB′ par $2b$, on aura dans le triangle COB

$$\cos \mathrm{V} = \frac{b}{a},$$

d'où

$$y = \frac{b}{a}\,\mathrm{Y} :$$

ce qui démontre le théorème énoncé (139). L'ellipse obtenue a pour grand axe le diamètre $2a$ du cercle projeté et pour petit axe $2a\cos \mathrm{V}$.

La réciproque de cette proposition est vraie. Si l'on suppose que le plan de projection passe par le petit axe de l'ellipse (139), et *dans le cas unique de* $\cos \mathrm{V} = \frac{b}{a}$, la projection orthogonale de l'ellipse sera un cercle ayant $2b$ pour diamètre.

164. On peut, en s'appuyant sur le théorème qu'on vient de démontrer, retrouver d'une manière très-simple plusieurs des propriétés précédentes.

Deux droites parallèles ayant des projections parallèles, et le milieu de la projection d'une droite étant la projection du milieu de cette droite :

Les diamètres du cercle (*fig.* 81) *se projettent suivant des diamètres de l'ellipse; la tangente au cercle a pour projection*

une tangente à l'ellipse; comme la droite qui joint le point de concours de deux tangentes à la circonférence au centre de cette circonférence, passe par le milieu de la corde des contacts, il en sera de même pour l'ellipse; enfin, les diamètres conjugués de l'ellipse sont les projections des diamètres rectangulaires du cercle.

Ceci posé, considérons dans le cercle deux demi-diamètres rectangulaires ON, OL, ayant pour projections les demi-diamètres conjugués de l'ellipse OM, OQ. Les angles NOP, LOR, sont complémentaires; les triangles rectangles NOP, LOR, sont donc égaux (*fig.* 81); par suite,

$$OP = LR, \quad NP = OR.$$

Si l'on désigne par a' et b' les demi-diamètres conjugués de l'ellipse (dont les demi-axes sont a et b), il viendra donc

$$a'^2 = OP^2 + MP^2 = OP^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot NP^2,$$

$$b'^2 = OR^2 + QR^2 = OR^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot LR^2 = NP^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot OP^2.$$

En ajoutant, nous aurons

$$a'^2 + b'^2 = (OP^2 + NP^2)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

D'autre part, la projection d'une aire plane sur un plan étant égale à l'aire projetée, multipliée par le cosinus de l'angle que son plan forme avec le plan de projection (*Trig.*, 18), et tous les carrés circonscrits au cercle étant égaux, tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse dont les côtés sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués, seront équivalents entre eux et au rectangle construit sur les axes $2a$ et $2b$. Chacun d'eux, en effet, équivaudra au carré circonscrit correspondant, multiplié par cos V. En désignant par α l'angle des diamètres conjugués dont les longueurs sont $2a'$ et $2b'$, on aura donc d'une manière générale

$$a'b' \sin \alpha = ab.$$

On retrouve ainsi très-simplement les deux théorèmes d'Apollonius.

On aura aussi, d'après le principe rappelé, et en désignant par S l'aire de l'ellipse,

$$S = \pi a^2 \cdot \cos V = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab.$$

Questions diverses.

165. I. *Les perpendiculaires abaissées des foyers de l'ellipse sur une tangente à la courbe, ont pour moyenne proportionnelle le demi petit axe.*

Nous prendrons l'équation de la tangente sous la forme (146)

$$y - mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2} = 0.$$

Comme les coordonnées des deux foyers sont o et c, o et $-c$, leurs distances à cette tangente auront pour expressions (45)

$$\delta = \frac{-mc - \sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad \delta' = \frac{mc - \sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}.$$

On aura donc

$$\delta\delta' = \frac{a^2m^2 + b^2 - m^2c^2}{1+m^2} = \frac{b^2 + (a^2-c^2)m^2}{1+m^2},$$

c'est-à-dire, en remplaçant $a^2 - c^2$ par b^2 et en divisant par $1 + m^2$,

$$\delta\delta' = b^2.$$

166. II. Vérifions par l'analyse que *le lieu des projections des foyers sur les tangentes à l'ellipse est la circonférence décrite sur son grand axe comme diamètre* (143, III).

Soit

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

l'équation d'une tangente quelconque. La perpendiculaire abaissée du foyer F sur cette tangente aura pour équation

$$y = -\frac{1}{m}(x - c).$$

Si l'on regarde comme simultanées les deux équations précédentes, et si on élimine entre elles l'indéterminée m, on aura l'équation du lieu demandé.

Si on les élève au carré, il vient

$$(y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2,$$
$$(my + x)^2 = c^2.$$

Ajoutons membre à membre les équations obtenues, et remplaçons $b^2 + c^2$ par a^2, nous aurons

$$(m^2+1)(x^2+y^2) = (m^2+1)a^2.$$

d'où

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

ce qui vérifie l'énoncé.

167. III. *Trouver le lieu décrit par le sommet d'un angle déterminé qui reste constamment circonscrit à une ellipse donnée.*

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse proposée. Soient

$$(1) \qquad y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

$$(2) \qquad y=m'x+\sqrt{a^2m'^2+b^2},$$

les équations de deux tangentes à la courbe. Si elles font l'angle voulu α, on devra avoir

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\alpha=\frac{m-m'}{1+mm'}.$$

Si l'on considère les équations (1) et (2) comme simultanées, y et x représenteront les coordonnées du point d'intersection des deux tangentes ou du sommet de l'angle mobile. On déduira de l'équation (1)

$$(y-mx)^2=a^2m^2+b^2,$$

d'où, en ordonnant par rapport à m,

$$(4) \qquad (a^2-x^2)m^2+2xy.m+b^2-y^2=0.$$

Le résultat fourni par l'équation (2) traitée de la même manière ne différerait du précédent que par le changement de m en m'. Par suite, l'équation (4) a pour racines m et m'. On aura donc

$$m+m'=-\frac{2xy}{a^2-x^2} \quad \text{et} \quad mm'=\frac{b^2-y^2}{a^2-x^2},$$

d'où

$$m-m'=\sqrt{(m+m')^2-4mm'}=\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{a^2-x^2}.$$

L'équation (3) deviendra alors

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{a^2-x^2+b^2-y^2};$$

telle sera l'équation du lieu.

Si, pour la discuter, on veut l'élever au carré, on arrivera à une équation du quatrième degré irréductible et qui renfermera à la fois le cas de l'angle α et celui de son supplément $\pi-\alpha$, puisque

$$\operatorname{tang}^2\alpha=\operatorname{tang}^2(\pi-\alpha).$$

Si l'on suppose *droit* l'angle des deux tangentes, on doit poser

$$1+mm'=0,$$

c'est-à-dire

$$1+\frac{b^2-y^2}{a^2-x^2}=0.$$

On trouve alors pour l'équation du lieu

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

Ainsi, *le lieu décrit par le sommet d'un angle droit circonscrit à une ellipse est une circonférence de cercle concentrique à l'ellipse donnée et ayant pour rayon* $\sqrt{a^2+b^2}$, *c'est-à-dire circonscrite au rectangle construit sur les axes de l'ellipse.*

168. IV. *Trouver le lieu des sommets des parallélogrammes circonscrits à une ellipse donnée, et qui correspondent à des diamètres conjugués.*

Les droites qui joignent les milieux des côtés d'un des parallélogrammes considérés étant des diamètres conjugués, et les équations de deux côtés adjacents de ce parallélogramme étant

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}, \tag{1}$$

$$y = m'x + \sqrt{a^2m'^2+b^2}, \tag{2}$$

les coefficients m et m' devront satisfaire à la relation générale qui lie les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués. On aura donc l'équation de condition

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{3}$$

D'après le problème précédent (167), l'équation qui donne les valeurs de m et de m' en fonction des coordonnées y et x du sommet du parallélogramme qui correspond aux côtés considérés, est

$$(a^2-x^2)m^2+2xy.m+b^2-y^2=0.$$

On aura donc

$$mm' = \frac{b^2-y^2}{a^2-x^2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (3), il viendra

$$\frac{b^2-y^2}{a^2-x^2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

d'où

$$a^2b^2-a^2y^2 = -a^2b^2+b^2x^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1;$$

telle est l'équation du lieu. Cette équation représente une ellipse concentrique et *semblable* à l'ellipse proposée. Les axes de cette nouvelle ellipse sont $2a\sqrt{2}$ et $2b\sqrt{2}$.

169. V. *Si l'on mène une normale à l'ellipse en un point donné de la courbe, le carré de l'un des demi-axes est une moyenne proportionnelle entre les segments déterminés sur la normale, à partir du point de contact, par l'autre axe et un diamètre perpendiculaire à cette normale.*

L'équation de la normale au point (x_1, y_1) étant (142)

$$\frac{a^2x}{a^2x_1}-\frac{b^2y}{a^2y_1}=1.$$

elle coupera l'axe des y en un point qui aura pour ordonnée $-\frac{a^2y_1}{b^2}$; et

dont la distance au point de contact sera

$$\delta = \sqrt{\left(y_1 + \frac{a^2 y_1}{b^2}\right)^2 + x_1^2} = \frac{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}{b^2}.$$

Le diamètre perpendiculaire à la normale considérée ou parallèle à la tangente correspondante, a pour équation

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x.$$

La distance du point de contact à ce diamètre sera donc

$$\delta' = \frac{y_1 + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot x_1}{\sqrt{1 + \frac{b^4 x_1^2}{a^4 y_1^2}}} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}.$$

il viendra, par suite,

$$\delta\delta' = a^2 :$$

ce qui démontre le théorème.

170. VI. *Étant donnés un système de diamètres conjugués et l'angle qu'ils forment, trouver les axes de l'ellipse.*

Soient $2a'$ et $2b'$ les longueurs des deux diamètres conjugués et α leur angle, soient $2a$ et $2b$ les longueurs des axes cherchés; on aura (155 et 156),

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \quad ab = a'b' \sin\alpha.$$

On en déduit facilement (*Trig.*, 44),

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\alpha = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\alpha = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

On voit alors que la somme $a+b$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés a' et b' comprennent l'angle $\frac{\pi}{2} + \alpha$, tandis que la différence $a-b$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés a' et b' comprennent l'angle supplémentaire $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Par conséquent (*fig.* 82), $MM' = 2a'$ et $NN' = 2b'$ étant les deux diamètres conjugués donnés, NOM étant leur angle α, on abaissera du point N la perpendiculaire NR sur MM', on portera sur cette perpendiculaire, à partir du point N, $NU = NS = a'$, et l'on mènera les droites OU et OS. L'angle ONR étant égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et l'angle ONU à $\frac{\pi}{2} + \alpha$, OU représentera $a+b$ et OS représentera $a-b$. Donc, si l'on décrit du point O comme centre, avec OS pour rayon, une circonférence qui coupe OU et son prolongement aux points V' et V, on aura

$$UV = (a+b) + (a-b) = 2a$$

et

$$UV' = (a+b) - (a-b) = 2b.$$

Quant à la direction des axes, supposons-les obtenus en AA′ (grand axe) et en BB′ (petit axe). Prolongeons la perpendiculaire NR au diamètre MM′, jusqu'à sa rencontre avec BB′ au point H. Si l'on conçoit une nouvelle ellipse ayant pour foyers les points U et S et passant au point O, cette ellipse aura le même grand axe que l'ellipse à construire, son centre sera d'ailleurs au point N. Par suite, NR sera l'abscisse du point O de cette ellipse, en la supposant rapportée à ses axes. Si l'on désigne par d la distance du centre N au pied de la tangente menée par le point O à la seconde ellipse, on aura (141)

$$d \cdot \mathrm{NR} = a^2.$$

D'ailleurs NR étant une normale à la première ellipse (par rapport à la tangente menée à cette ellipse au point N), on aura aussi (169)

$$\mathrm{NH} \cdot \mathrm{NR} = a^2.$$

Il en résulte immédiatement $d = \mathrm{NH}$, c'est-à-dire que la tangente menée à la seconde ellipse par le point O est précisément dirigée suivant le petit axe de la première. *Le grand axe se confondant alors avec la normale à la seconde ellipse au point* O, *est la bissectrice de l'angle* UOS *des rayons vecteurs* UO, SO (*).

171. VII. *Étant donné un arc d'ellipse, retrouver les éléments de la courbe.*

En menant (*fig.* 83) deux cordes parallèles quelconques mm', nn', et en joignant leurs milieux, on aura un diamètre OM de la courbe. On en obtiendra un second OH, en prenant deux autres cordes parallèles pp' et qq'. Les deux diamètres construits feront connaître, par leur intersection, le centre O de l'ellipse. On aura alors facilement le diamètre conjugué de l'un des diamètres tracés, en menant par le centre de l'ellipse une parallèle aux cordes qui l'ont déterminé. On connaîtra donc les directions de deux diamètres conjugués, et au moins la demi-longueur $\mathrm{OH} = a'$ de l'un d'eux. Pour déterminer la demi-longueur $\mathrm{OK} = b'$ du second diamètre, menons une tangente à l'ellipse par le point M, c'est-à-dire une parallèle aux cordes mm', nn'. L'ellipse étant rapportée aux axes OH et OK, l'équation de cette tangente sera

$$\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

Si l'on y fait $x = 0$, il vient

$$yy_1 = b'^2,$$

c'est-à-dire

$$b'^2 = \mathrm{OT}' \cdot \mathrm{MP}.$$

(*) Cette remarquable construction, due à *M. Chasles*, démontre en outre ce théorème : *Si sur une normale à une ellipse on prend à partir du point de contact deux segments égaux au demi-diamètre perpendiculaire à la normale, l'ellipse qui a pour foyers les points ainsi déterminés et qui passe au centre de la première ellipse, a même grand axe qu'elle et est tangente à son petit axe.*

Le demi-diamètre cherché sera donc une moyenne proportionnelle aux longueurs OT′ et MP. Connaissant l'angle KOH et les longueurs a' et b', la question est ramenée à la résolution du problème précédent.

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE.

Rappel des notions précédentes.

172. L'équation d'une hyperbole peut toujours être ramenée à la forme (**127**)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{2}$$

Dans le premier cas, la courbe rencontre l'axe des x; dans le second, elle rencontre l'axe des y : pour étudier ses propriétés, on peut ne considérer que la première forme. $2a$ représente alors l'axe *transverse* de l'hyperbole, $2b$ son axe *imaginaire*. En effet, pour $y = 0$, on a

$$x = \pm a;$$

pour $x = 0$, on a

$$y = \pm b\sqrt{-1}.$$

L'origine des coordonnées est un *centre*. La courbe n'a que deux *sommets* qui sont ses points de rencontre avec l'axe transverse.

Pour passer de l'équation (1) de l'hyperbole à l'équation de l'ellipse (**136**), les axes des deux courbes étant supposés identiques, il suffit de changer b^2 en $-b^2$. Les propriétés de l'ellipse qui ne dépendent que des carrés a^2 et b^2, seront donc applicables à l'hyperbole, sauf le changement de b^2 en $-b^2$.

L'hyperbole est *équilatère* lorsque les axes a et b sont égaux. L'équation de la courbe devient, dans ce cas,

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

La valeur

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{3}$$

déduite de l'équation (1), prouve que l'on a nécessairement

$$x > a \quad \text{ou} \quad x < -a,$$

c'est-à-dire qu'il n'y a aucun point de la courbe entre les parallèles à l'axe des y qui passent par les sommets. x croissant de a à ∞, y croît de o à ∞ ou décroît de o à $-\infty$. Il en est de même lorsque x décroît de $-a$ à $-\infty$.

Supposons les axes représentés par AA′ et BB′ (*fig.* 84). On obtient les foyers F et F′, en construisant le triangle rectangle OAC dans lequel AC = OB, puis en décrivant du point O comme centre avec OC pour rayon une demi-circonférence. Cette demi-circonférence vient couper l'axe transverse aux points F et F′, car on a

$$OF = OF' = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Si l'on veut construire les *directrices* de l'hyperbole, il suffit de se rappeler (134) que leur équation est

$$x = \pm \frac{a^2}{c}.$$

On prendra donc sur l'axe Oy une longueur OE $= a$, on joindra le point E aux deux foyers, et l'on élèvera respectivement sur les droites EF′, EF, les perpendiculaires ED, ED′, jusqu'à la rencontre de l'axe transverse. Les points D et D′ seront évidemment les pieds des directrices DL et D′L′.

Quand l'hyperbole est équilatère, on a

$$c = a\sqrt{2},$$

c'est-à-dire

$$a^2 = \frac{c^2}{2}.$$

L'équation des directrices étant alors $x = \pm \frac{c}{2}$, leurs pieds D et D′ sont au milieu des distances focales OF et OF′.

Si l'on considère un point M quelconque pris sur la courbe, le rayon vecteur MF a pour expression

$$\pm\left(\frac{cx}{a} - a\right),$$

le rayon vecteur MF′ a pour expression

$$\pm\left(\frac{cx}{a} + a\right).$$

Dans chaque expression, on doit prendre le signe + ou le signe —, suivant que le point M est situé à droite ou à gauche de l'axe des y (134).

La distance OM du centre au point M est, d'après l'équation de l'hyperbole,

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^2b^2}}{a}.$$

Cette distance atteint son minimum a pour $x=a$, et devient infinie pour $x=\infty$.

Si l'on considère un point *intérieur* à l'hyperbole, il aura, en valeur absolue, une ordonnée inférieure à celle du point de la courbe qui a la même abscisse. Si l'on considère un point *extérieur* à l'hyperbole, il aura, en valeur absolue, une abscisse inférieure à celle du point de la courbe qui a la même ordonnée. Par suite, *selon qu'un point* (x, y) *est intérieur à l'hyperbole, extérieur à l'hyperbole ou lui appartient*, on a

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ou

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2<0,$$
$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2>0,$$
$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0.$$

Enfin il est évident que, si un point N est *intérieur* à la courbe, on a *pour la différence de ses rayons vecteurs*

$$NF'-NF>2a.$$

Si le point N considéré est *extérieur* à la courbe (*fig.* 84), on a au contraire

$$NF'-NF<2a.$$

173. L'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ admet (86, 87) deux asymptotes dont les équations sont

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

On voit (*fig.* 84) *que ces asymptotes sont les diagonales du rectangle construit sur les axes* AA′ *et* BB′.

$y=+\frac{b}{a}x$ est asymptote à la branche supérieure de la partie de droite et à la branche inférieure de la partie de gauche; $y=-\frac{b}{a}x$ est asymptote à la branche inférieure de la partie de droite et à la branche supérieure de la partie de gauche.

Les asymptotes forment quatre angles, deux à deux opposés par le sommet. La courbe s'étend dans deux de ces angles

opposés par le sommet, elle n'a aucun point dans les deux autres angles.

Lorsque l'hyperbole est équilatère, $a = b$, et les équations des asymptotes sont

$$y = \pm x,$$

c'est-à-dire que les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont les bissectrices des angles des axes : *elles sont donc perpendiculaires l'une à l'autre.*

Si l'on considère simultanément les hyperboles représentées par les équations $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, on a ce qu'on appelle des hyperboles *conjuguées :* l'axe transverse de l'une est l'axe imaginaire de l'autre, et réciproquement. Il est facile de voir que deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes.

Remarque. — Il est facile de vérifier que les droites $y = \pm \frac{b}{a} x$ sont asymptotes à l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cherchons, en effet, la différence des deux ordonnées $y = \frac{b}{a} x$ et $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Cette différence est, pour la même abscisse,

$$\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}};$$

et quand x tend vers l'infini, cette différence, toujours positive, tend vers zéro. A plus forte raison en est-il ainsi de la distance du point considéré sur la courbe à la droite. La symétrie de la courbe permet de n'étudier que ce qui se passe dans l'angle positif des axes.

174. L'hyperbole a bien la forme indiquée sur la figure. On s'en rend compte en remarquant que le coefficient angulaire de la tangente $\frac{b^2 x}{a^2 y}$ peut, en remplaçant y par sa valeur déduite de la relation (3) du n° **172**, se mettre sous la forme

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}.$$

x croissant de a jusqu'à ∞, ce coefficient décroît depuis ∞

jusqu'à $\frac{b}{a}$. La branche supérieure de la partie de droite tourne donc sa concavité vers les y négatifs (82), et par suite la branche inférieure sa concavité vers les y positifs. On retrouve en même temps les asymptotes comme limites des tangentes (86).

175. Prenons sur l'hyperbole (*fig.* 84) un point M ayant pour ordonnée MP et pour abscisse OP. On aura, d'après l'équation (3),

$$MP^2 = \frac{b^2}{a^2}(OP^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(OP + a)(OP - a) = \frac{b^2}{a^2} \cdot A'P \cdot AP,$$

d'où

$$\frac{MP^2}{A'P \cdot AP} = \frac{b^2}{a^2} = \text{constante}.$$

Le rapport du carré de l'ordonnée d'un point de l'hyperbole au produit des segments que cette ordonnée détermine sur l'axe des abscisses, limité aux sommets de la courbe, est donc constant; en d'autres termes, *les carrés des ordonnées de la courbe sont proportionnels aux produits des segments qu'elles déterminent sur l'axe transverse.*

Construction de la courbe.

176. Partons de l'équation naturelle $u - v = 2a$. Du point F comme centre, avec un rayon FM plus grand que AF, décrivons une circonférence (*fig.* 85). Du point F′ comme centre, avec un rayon égal à FM $+ 2a$, décrivons une autre circonférence. Ces circonférences se couperont en deux points M et M′, symétriques par rapport à l'axe transverse AA′, et qui appartiendront évidemment à l'hyperbole.

La distance $2c$ des centres des deux circonférences est plus grande que la différence $2a$ de leurs rayons. Il suffit donc, pour qu'elles soient réellement sécantes, qu'on ait en outre

$$2c < F'M + FM.$$

Mais de la relation

$$F'M - FM = 2a$$

on déduit

$$F'M = 2a + FM.$$

L'inégalité précédente devient alors

$$2c < 2a + 2FM \quad \text{ou} \quad FM > c - a.$$

Il faut donc bien, comme nous l'avons supposé, que FM soit plus grand que AF.

Les mêmes rayons pouvant être successivement employés en prenant les deux foyers comme centres, chaque valeur assignée à FM permettra de déterminer quatre points M, M′, M″, M‴, de l'hyperbole, deux à deux symétriques par rapport aux axes de la courbe.

Remarque. — On pourrait aussi construire la courbe par points, en partant de la relation

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

177. En considérant toujours l'hyperbole comme le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante, on peut en décrire mécaniquement un arc restreint comme il suit.

L'arête d'une règle F′D (*fig.* 86) passe constamment au point F′. Un fil est attaché au second foyer F et à l'autre extrémité D de la règle, et la longueur F′D surpasse de $2a$ la longueur du fil. Si l'on fait tourner la règle autour de F′ de manière que la longueur F′D demeure invariable, et si le fil est en même temps tendu le long de la règle à l'aide d'une pointe à tracer, cette pointe décrira sur l'épure un arc AS d'hyperbole. En effet, on aura à chaque instant

$$\mathrm{F'M} - \mathrm{FM} = \mathrm{F'D} - (\mathrm{FM} + \mathrm{MD}) = 2a.$$

Tangente et Normale.

178. L'équation de la tangente à l'hyperbole en un point (x_1, y_1) est immédiatement (73), d'après l'équation de la courbe,

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

Il faut d'ailleurs joindre à l'équation de la tangente l'équation de condition

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

On peut écrire l'équation de la tangente sous la forme

$$a^2 y y_1 - a^2 y_1^2 = b^2 x x_1 - b^2 x_1^2,$$

ou, en divisant les deux membres par $a^2 b^2$,

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Elle revient donc à celle-ci :

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Pour *construire* la tangente, on peut chercher les points où elle coupe les axes. Si l'on suppose $y = 0$, on trouve

$$x = \frac{a^2}{x_1};$$

si l'on suppose $y = 0$, on trouve

$$y = -\frac{b^2}{y_1}.$$

Ainsi, *chaque coordonnée de la tangente par rapport à l'origine ne dépend que de la longueur de l'axe correspondant et de la coordonnée du point de contact sur cet axe.*

On ne peut pas en déduire, comme pour l'ellipse (**141**), un moyen simple de construire la tangente en un point donné de l'hyperbole, parce que l'hyperbole équilatère (qui est à l'hyperbole ordinaire ce que le cercle est à l'ellipse) n'est pas susceptible, comme le cercle, d'un tracé immédiat.

Si l'on suppose que le point de contact s'éloigne à l'infini, il faut faire

$$x_1 = y_1 = \infty,$$

et l'on trouve alors, pour les coordonnées à l'origine de la tangente,

$$x = y = 0,$$

c'est-à-dire que la tangente passe alors par le centre : ce qui ramène aux asymptotes.

La distance TP (*fig.* 87) entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la tangente rencontre l'axe des x, s'appelle la *sous-tangente* par rapport à cet axe. La sous-tangente TP par rapport à l'axe des x a donc pour expression

$$x_1 - \frac{a^2}{x_1} = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}.$$

Même remarque par rapport à l'axe des y.

179. L'équation de la normale en un point donné (x_1, y_1) de l'hyperbole est

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

On en déduit

$$b^2 x_1 y - b^2 x_1 y_1 = -a^2 y_1 x + a^2 x_1 y_1.$$

c'est-à-dire en divisant les deux membres par $(a^2+b^2)x_1y_1$ ou par $c^2x_1y_1$,

$$\frac{a^2x}{c^2x_1}+\frac{b^2y}{c^2y_1}=1.$$

Pour *construire* la normale, on peut chercher les points où elle coupe les axes. Si l'on suppose $y=0$, il vient

$$x=\frac{c^2x_1}{a^2};$$

si l'on suppose $x=0$, il vient

$$y=\frac{c^2y_1}{b^2}.$$

La distance NP entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la normale rencontre l'axe des x (*fig.* 87), s'appelle la *sous-normale* par rapport à cet axe. La sous-normale NP par rapport à l'axe des x a donc pour expression

$$\frac{c^2x_1}{a^2}-x_1=\frac{b^2x_1}{a^2}.$$

Lorsque le point M s'approche de l'une des extrémités de l'axe transverse, x_1 s'approche de $\pm a$, et la valeur de $\mathrm{ON}=\frac{c^2x_1}{a^2}$ tend vers $\pm\frac{c^2}{a}$. Ainsi, *à la limite, le point* M *se confondant avec l'une des extrémités de l'axe transverse, le pied de la normale sur cet axe se trouve à une distance du centre égale à la longueur* $\pm\frac{c^2}{a}$ *plus grande que c en valeur absolue.*

180. *La tangente au point* M *est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs de ce point* (*fig.* 87).

De

$$\mathrm{OT}=\frac{a^2}{x_1}$$

on déduit

$$\mathrm{TF}=\mathrm{OF}-\mathrm{OT}=c-\frac{a^2}{x_1}=\frac{cx_1-a^2}{x_1}$$

et

$$\mathrm{TF'}=\mathrm{OF'}+\mathrm{OT}=c+\frac{a^2}{x_1}=\frac{cx_1+a^2}{x_1}.$$

Il en résulte

$$\frac{\mathrm{TF}}{\mathrm{TF'}}=\frac{cx_1-a^2}{cx_1+a^2}.$$

Mais (172)

$$MF = \frac{cx_1}{a} - a = \frac{cx_1 - a^2}{a}$$

et

$$MF' = \frac{cx_1}{a} + a = \frac{cx_1 + a^2}{a}.$$

Par suite

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{cx_1 - a^2}{cx_1 + a^2} = \frac{TF}{TF'}.$$

La tangente MT divisant la base du triangle FMF′ en segments proportionnels aux côtés MF et MF′, est la bissectrice de l'angle FMF′.

Il en résulte que l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre font d'un même côté de la tangente et avec cette ligne des angles égaux (*).

Remarques. — I. La tangente MT étant la bissectrice de l'angle *intérieur* FMF′, la normale MN est la bissectrice de l'angle *extérieur* FML′, c'est-à-dire la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre. Le pied T de la tangente et le pied N de la normale sont donc *harmoniques conjugués* par rapport aux deux foyers F et F′.

II. On peut obtenir la tangente au point M en remarquant que, si l'on prend sur MF′ une longueur ML = MF (ce qui entraîne F′L = 2 *a*), le triangle FML étant alors isocèle et la tangente MT devant être la bissectrice de l'angle FML, elle se confondra avec la perpendiculaire élevée sur le milieu H de la base FL du triangle.

III. Le point H étant le milieu de FL et le centre O de l'hyperbole étant le milieu de la distance focale FF′, la distance OH sera toujours égale à la moitié de la distance F′L, c'est-à-dire à la constante *a*. *Les projections des foyers sur toutes les tangentes à l'hyperbole ont donc pour lieu géométrique la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre.*

IV. Si l'on suppose une ellipse et une hyperbole ayant les mêmes foyers, c'est-à-dire *homofocales*, on voit, en rapprochant les propriétés des deux courbes relativement aux tangentes, *qu'elles se couperont à angle droit;* c'est-à-dire qu'en leurs points d'intersection la tangente de l'une sera la normale de l'autre, et réciproquement.

(*) La propriété physique indiquée en note (143) n'existe plus que pour les prolongements tels que ML′, et non pour les rayons correspondants tels que MF′, par suite de la séparation de la courbe en deux parties.

181. Si l'on veut *mener à l'hyperbole une tangente passant par un point extérieur donné*, les inconnues du problème seront les coordonnées x_1, y_1, du point de contact. En désignant par α, β, les coordonnées du point donné, on aura à résoudre les deux équations

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} - \frac{\beta y_1}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

La première exprime que la tangente cherchée passe par le point donné.

Le mieux est, en regardant les inconnues x_1 et y_1 comme des coordonnées courantes, de construire, comme nous l'avons fait pour l'ellipse (**144**), *la corde des contacts*

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} - \frac{\beta y_1}{b^2} = 1,$$

et de chercher les points où elle rencontre l'hyperbole proposée. En joignant ces points avec le point donné (α, β), on aura les deux tangentes qui répondent à la question. Il est facile de vérifier, en effet, que si le point (α, β) est bien extérieur à la courbe, il y a toujours deux solutions.

On déduit de l'équation (1)

$$y_1 = \frac{b^2(\alpha x_1 - a^2)}{a^2 \beta}.$$

Substituant dans l'équation (2), il vient

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{b^4(\alpha x_1 - a^2)^2}{a^4 b^2 \beta^2} = 1$$

ou

$$(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2)x_1^2 + 2a^2b^2\alpha x_1 - a^4(b^2 + \beta^2) = 0. \tag{3}$$

On en tire

$$x_1 = \frac{a^2(-b^2\alpha \pm \beta\sqrt{a^2b^2 + a^2\beta^2 - b^2\alpha^2})}{a^2\beta^2 - b^2\alpha^2};$$

et si le point (α, β) est extérieur à la courbe, on a (**172**)

$$a^2b^2 + a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 > 0,$$

de sorte qu'on trouve pour x_1 et par conséquent pour y_1 deux valeurs réelles.

L'équation (3) montre que les deux valeurs de x_1 sont de signes contraires si le coefficient du premier terme $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2$ est > 0, et qu'elles sont de même signe si ce coefficient $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2$ est < 0.

Mais la première condition équivaut à $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{b}{a}$ ou $< -\frac{b}{a}$: le point (α, β) est alors dans l'un des angles des asymptotes qui ne contiennent aucun point de la courbe. La seconde condition équivaut à $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{b}{a}$ ou $> -\frac{b}{a}$: le point (α, β) tombe alors dans l'un des angles des asymptotes où les deux parties de la courbes sont situées. *On voit donc que les deux tangentes qui partent d'un point extérieur, touchent ensemble la même partie de l'hyperbole, ou séparément ses deux parties, suivant que le point donné tombe ou non dans les angles des asymptotes qui renferment la courbe.*

182. On peut aussi, en s'appuyant sur ce qui précède, mener *géométriquement* une tangente à l'hyperbole par un point extérieur.

Du point donné N comme centre, avec NF pour rayon, décrivons une circonférence (*fig.* 88); du foyer F′ comme centre, avec $2a$ pour rayon, décrivons une autre circonférence. Ces deux circonférences seront toujours sécantes, si le point N est extérieur à l'hyperbole. On mènera alors les cordes qui, dans la première circonférence, joignent le foyer F aux points d'intersection L et L′. Du centre N, on abaissera sur ces cordes les perpendiculaires NT, NT′ : ce seront les tangentes demandées. Car si l'on joint le foyer F′ aux points L et L′, les droites NT et NT′ seront coupées par les droites F′L et F′L′ aux points M et M′, et l'on aura

$$MF = ML, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MF' - MF = F'L = 2a,$$

$$M'F = M'L', \quad \text{c'est-à-dire} \quad M'F - M'F' = F'L' = 2a.$$

Les points M et M′ appartiendront donc à l'hyperbole, et, en ces points, les droites NT et NT′ coupent en deux parties égales les angles formés par les rayons vecteurs correspondants : ces droites sont donc tangentes à l'hyperbole (180), et elles passent par le point donné N.

Nous avons dit que, le point N étant extérieur, les circonférences NF et F′L seraient toujours sécantes. En effet, le point N étant supposé plus proche du foyer F, on aura alors (172)

$$NF' - NF < 2a.$$

d'où

$$NF' < NF + 2a.$$

La distance des centres des deux circonférences est donc moindre que la somme de leurs rayons. Le triangle F'NF donne d'ailleurs

$$FF' < NF' + NF$$

et, à fortiori,

$$2a < NF' + NF,$$

d'où

$$NF' > 2a - NF.$$

Si NF l'emportait sur $2a$, on remarquerait que, le point N étant supposé plus proche du foyer F, on a nécessairement

$$NF < NF' + 2a,$$

d'où

$$NF' > NF - 2a.$$

Dans tous les cas, la distance des centres des deux circonférences, déjà moindre que la somme des rayons, est aussi plus grande que leur différence.

Remarque. — Les cercles décrits de chaque foyer d'une hyperbole comme centre, avec l'axe transverse $2a$ comme rayon, sont appelés *cercles directeurs*. On voit que *les points de l'hyperbole sont à égale distance de l'un des foyers et du cercle directeur qui correspond à l'autre foyer.*

183. Si l'on veut *mener à une hyperbole une tangente parallèle à une direction donnée*, les inconnues du problème seront encore les coordonnées x_1, y_1, du point de contact. Soit m le coefficient angulaire qui correspond à la direction donnée. On aura à résoudre les deux équations

$$(1) \qquad m = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

$$(2) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Ces équations montrent que les points de contact demandés résulteront de l'intersection de l'hyperbole proposée et de la droite $y_1 = \frac{b^2}{a^2 m} x_1$ qui passe par l'origine.

Mais il est préférable de chercher l'équation générale des tangentes à l'hyperbole, indépendamment des coordonnées du point de contact. Il suffira pour cela de déterminer la relation qui doit exister entre les constantes m et n, pour que la

droite $y = mx + n$ soit tangente à l'hyperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. En suivant la même marche qu'au n° 146, on parviendra à la condition

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

L'équation générale des tangentes à l'hyperbole est donc

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2};$$

et en y donnant à m la valeur indiquée, on répondra immédiatement à la question : on voit qu'il y aura deux tangentes parallèles à la direction imposée, si toutefois le problème est possible.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait

$$a^2m^2 - b^2 > 0 \quad \text{ou} \quad m^2 > \frac{b^2}{a^2},$$

c'est-à-dire

$$m > \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad m < -\frac{b}{a}.$$

Ce qui montre que si l'on mène par le centre une parallèle à la direction considérée, elle devra tomber, pour que le problème soit possible, dans les angles des asymptotes qui ne contiennent aucun point de la courbe. Cette restriction concorde avec ce que nous avons dit au n° 147, relativement à la variation du coefficient angulaire de la tangente. Si l'on a $m = \pm\frac{b}{a}$, on retombe sur les équations des asymptotes.

184. Si l'on veut résoudre *géométriquement* le problème proposé, on se rappellera que le lieu des projections des foyers sur les tangentes à la courbe est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre. Par suite, si la droite DD′ marque la direction donnée (*fig.* 89), il suffira d'abaisser du foyer F, par exemple, sur cette droite, la perpendiculaire indéfinie FHH′ qui coupera la circonférence AA′ en deux points H et H′. Par les points H et H′, on mènera des parallèles HT et H′T′ à DD′, et la question sera résolue. Pour avoir les points de contact des tangentes, on prolongera FH d'une longueur HL = FH et FH′ d'une longueur H′L′ = FH′. On joindra ensuite le foyer F′ aux points L et L′, et les droites F′L, F′L′, détermineront sur HT et sur H′T′ les points de contact M et M′. Il suffit, pour vérifier ces constructions, de remarquer qu'on a

$$OH = OH' = a$$

et, par conséquent,

$$FL = F'L' = 2a.$$

La droite MM′ qui joint les deux points de contact passe bien par le centre (183), car il est aisé de voir que le quadrilatère MFM′F′ est un parallélogramme.

Il est bon de noter que les dernières constructions géométriques indiquées (182, 184) *ne supposent pas l'hyperbole tracée.*

Remarque. — Pour que la perpendiculaire abaissée du foyer sur la direction donnée soit tangente au cercle a, l'équation de cette perpendiculaire étant

$$y = m'(x - c),$$

il faut que l'on ait (57)

$$(m'^2 + 1)\,a^2 = m'^2 c^2,$$

d'où l'on déduit

$$a^2 = m'^2 b^2 \quad \text{ou} \quad m' = \pm\frac{a}{b}.$$

La perpendiculaire abaissée du foyer est alors en même temps tangente à la circonférence a et perpendiculaire à l'une des asymptotes $y = \pm\frac{b}{a}x$. Au delà, c'est-à-dire pour $m' > \frac{a}{b}$ ou $m' < -\frac{a}{b}$, cette perpendiculaire ne coupe plus la circonférence, et le problème n'est plus possible.

L'abscisse du point d'intersection de la perpendiculaire $y = -\frac{a}{b}(x - c)$ abaissée du foyer F sur l'asymptote $y = \frac{b}{a}x$ avec cette asymptote, est $x = \frac{a^2}{c}$, ce qui fournit un nouveau moyen de construire les directrices de l'hyperbole (172).

Diamètres, cordes supplémentaires, diamètres conjugués.

185. L'équation de l'hyperbole étant

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

on trouve facilement, en appliquant la règle donnée précédemment (112), que l'équation générale des diamètres de la courbe est

$$y = \frac{b^2}{a^2 m}x.$$

En désignant par m' le coefficient angulaire du diamètre, on

aura donc

$$m' = \frac{b^2}{a^2 m},$$

ou

$$mm' = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (1)$$

Telle est la relation constante qui existe entre le coefficient angulaire d'un diamètre et celui des cordes qui lui sont conjuguées.

Nous savons (115) que tout diamètre a pour diamètre conjugué celui qui fait partie du système de cordes, conjugué au premier diamètre. Deux diamètres conjugués sont tels, que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. La relation (1) permet de le vérifier immédiatement (149). Elle montre en même temps que, *lorsque deux diamètres sont conjugués, l'un rencontre la courbe et l'autre ne la rencontre pas.* En effet, m et m' représentant les coefficients angulaires des deux diamètres, suivant que m positif est $> \frac{b}{a}$ ou $< \frac{b}{a}$, m' positif est $< \frac{b}{a}$ ou $> \frac{b}{a}$, et suivant que m négatif est $< -\frac{b}{a}$ ou $> -\frac{b}{a}$, m' négatif est à son tour $> -\frac{b}{a}$ ou $< -\frac{b}{a}$. Or les diamètres situés dans les angles des asymptotes qui renferment la courbe, c'est-à-dire dont le coefficient angulaire est *en valeur absolue* moindre que $\frac{b}{a}$, peuvent seuls la rencontrer.

Ainsi *les diamètres de l'hyperbole se partagent en diamètres transverses et en diamètres non transverses; et, de deux diamètres conjugués, un seul est transverse.*

On peut vérifier facilement (148) que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre transverse est parallèle au système de cordes, conjugué à ce diamètre.*

Il est visible, en vertu de la relation (1), que les cordes qui correspondent à un diamètre transverse ont leurs extrémités sur une même moitié de l'hyperbole, et que les cordes qui correspondent à un diamètre non transverse s'appuient à la fois sur les deux moitiés de la courbe.

L'équation d'un diamètre quelconque étant $y = mx$, l'équation de son conjugué sera (en vertu de la même relation)

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

On voit que les angles des deux diamètres avec l'axe transverse sont ensemble aigus ou obtus.

186. On dit que *deux cordes sont* SUPPLÉMENTAIRES *lorsque, partant d'un même point de l'hyperbole, elles aboutissent aux extrémités d'un même diamètre transverse.*

Si l'on cherche la relation qui lie les coefficients angulaires de deux cordes supplémentaires MD et MD' (*fig.* 90), en suivant identiquement la même marche que pour l'ellipse (150), on trouve

$$mm' = \frac{b^2}{a^2}.$$

La relation qui existe entre le coefficient angulaire d'un diamètre et celui de ses cordes conjuguées, ainsi qu'entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués (185), existe donc également entre les coefficients angulaires de deux cordes supplémentaires.

Il en résulte immédiatement que les diamètres conjugués à deux cordes supplémentaires sont conjugués, ou qu'en menant par le centre de l'hyperbole des parallèles à deux cordes supplémentaires, on obtient un système de diamètres conjugués.

Remarques. — I. Deux cordes supplémentaires satisfont à trois conditions : elles partent d'un même point de l'hyperbole, elles aboutissent aux extrémités d'un même diamètre transverse, leurs coefficients angulaires satisfont en outre à la relation $mm' = \frac{b^2}{a^2}$.

Réciproquement, lorsque deux droites rempliront deux des conditions énoncées, elles rempliront nécessairement la troisième.

II. Les propriétés précédentes permettent de tracer facilement la tangente à l'hyperbole, par un point donné sur la courbe ou parallèlement à une direction donnée (151).

III. Si l'hyperbole est équilatère, on a

$$b = a \quad \text{et} \quad mm' = 1.$$

Les angles dont les tangentes sont désignées par m et par m', sont donc alors *complémentaires.*

187. *Cherchons entre quelles limites peut varier l'angle de deux diamètres conjugués ou de deux cordes supplémentaires.*

Aux cordes supplémentaires qui correspondent aux extrémités d'un certain diamètre transverse, on peut toujours mener des parallèles par les extrémités de tout autre diamètre

transverse : ces parallèles formeront aussi un système de cordes supplémentaires (186, *Rem. I*). Par conséquent, pour étudier les variations de l'angle formé par deux diamètres conjugués ou deux cordes supplémentaires, on peut considérer celles qui aboutissent aux extrémités de l'axe transverse. y et x représentant les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole, les coefficients angulaires de ces cordes auront pour expressions

$$m = \frac{y}{x-a} \quad \text{et} \quad m' = \frac{y}{x+a},$$

d'où, en désignant leur angle par α,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{m-m'}{1+mm'} = \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

Le point (x, y) appartenant à l'hyperbole, on aura

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

d'où

$$x^2 - a^2 = \frac{a^2y^2}{b^2},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2ab^2}{(a^2+b^2)y} = \frac{2ab^2}{c^2y}.$$

Si l'on fait alors varier y de 0 à ∞, on voit que $\operatorname{tang}\alpha$ varie de ∞ à 0. *L'angle de deux diamètres conjugués ou de deux cordes supplémentaires prend donc toutes les valeurs comprises entre* $\frac{\pi}{2}$ *et* 0.

Si l'on suppose que le point de départ des deux cordes supplémentaires est au-dessous de l'axe des x, il faut faire varier y de 0 à $-\infty$. On trouve encore le même résultat, parce qu'on a alors, comme il est facile de le voir (*fig.* 90),

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{m'-m}{1+mm'} = \frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2} = -\frac{2ab^2}{c^2y}.$$

Remarques. — I. L'équation d'un diamètre quelconque étant $y = mx$, l'équation de son conjugué est

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x.$$

On a donc aussi

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\frac{b^2}{a^2m} - m}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2 - a^2m^2}{c^2m}.$$

Pour que $\operatorname{tang}\alpha$ soit zéro, il faut donc qu'on ait

$$b^2 - a^2 m^2 = 0 \quad \text{ou} \quad m = \pm\frac{b}{a},$$

ce qui conduit aux asymptotes qui représentent, sous ce point de vue, deux diamètres conjugués confondus.

Pour que $\operatorname{tang}\alpha$ soit ∞, il faut qu'on ait

$$m = 0,$$

et il en résulte

$$\frac{b^2}{a^2 m} = \infty,$$

ce qui montre que les axes de l'hyperbole sont ses seuls diamètres conjugués rectangulaires.

II. *Pour tracer deux cordes supplémentaires ou deux diamètres conjugués faisant un angle donné*, il suffit de construire sur l'un des diamètres transverses de l'hyperbole un segment capable de cet angle. En joignant aux extrémités du diamètre considéré l'un des points d'intersection de la circonférence décrite et de l'hyperbole proposée, on obtiendra un système de cordes supplémentaires répondant à la question.

Hyperbole rapportée à un système de diamètres conjugués.

188. Supposons qu'on prenne pour axes coordonnés deux diamètres conjugués. L'équation de l'hyperbole devra, pour chaque valeur de l'une des variables, donner deux valeurs de l'autre variable égales et de signes contraires ; en effet, chaque diamètre divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. L'équation de la courbe sera donc alors nécessairement de la forme

$$My^2 + Nx^2 + P = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{M}{-P}y^2 + \frac{N}{-P}x^2 = 1.$$

Supposons que le diamètre transverse ait été pris pour axe des x. Désignons par $2a'$ la longueur de ce diamètre. En faisant $y = 0$, nous devrons avoir

$$\frac{N}{-P}a'^2 = 1,$$

d'où

$$\frac{N}{-P} = \frac{1}{a'^2}.$$

En faisant $x = 0$, on devra trouver pour y une valeur imagi-

naire, ou pour y^2 une valeur essentiellement négative. On posera donc

$$\frac{M}{-P}\cdot -b'^2=1,$$

d'où

$$\frac{M}{-P}=-\frac{1}{b'^2}.$$

Par conséquent, *l'équation de l'hyperbole rapportée à un système de diamètres conjugués sera*

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

a' et b' étant les longueurs du demi-diamètre transverse et du demi-diamètre imaginaire.

189. *Remarques.*—I. L'équation trouvée étant de même forme que l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes, toutes les propriétés et toutes les équations qui ne dépendent dans ce cas que des axes $2a$ et $2b$, dépendront d'une manière identique des axes $2a'$ et $2b'$, lorsque l'hyperbole sera rapportée à un système de diamètres conjugués.

En particulier, *les équations des asymptotes seront*

$$y=\pm\frac{b'}{a'}x.$$

Les deux équations $\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1$ et $\frac{y^2}{b'^2}-\frac{x^2}{a'^2}=1$ représentent alors (173) deux hyperboles *conjuguées.* On voit que lorsque deux hyperboles sont conjuguées, les diamètres transverses de l'une deviennent les diamètres imaginaires de l'autre, et réciproquement.

II. Puisque les équations des asymptotes de l'hyperbole rapportée à un système de diamètres conjugués sont

$$y=\pm\frac{b'}{a'}x,$$

les diagonales de tous les parallélogrammes construits sur les différents systèmes de diamètres conjugués se confondent ou coïncident avec les asymptotes (34).

Cette importante propriété montre que OD étant un demi-diamètre transverse (*fig.* 91), si l'on mène par le point D et entre les deux asymptotes une tangente HDG à l'hyperbole (tangente qui sera parallèle au diamètre conjugué de OD), DG ou DH représentera le demi-diamètre conjugué de OD.

III. On voit en même temps par là que *l'hyperbole ne peut en général présenter de diamètres conjugués égaux*. En effet, au lieu d'un parallélogramme GHG'H' (*fig.* 91), on aurait alors un losange dont les diagonales seraient à angle droit. *Il ne peut donc y avoir de diamètres conjugués égaux que* lorsque les asymptotes sont à angle droit, c'est-à-dire *dans l'hyperbole équilatère, et alors ils le sont tous.*

L'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à un système de diamètres conjugués est donc (puisque $a' = b'$)

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{a'^2} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 - y^2 = a'^2.$$

190. *Cherchons s'il existe une relation constante entre les longueurs de deux demi-diamètres conjugués.*

Désignons par (x', y') et (x'', y''), les coordonnées des extrémités D et E des demi-diamètres conjugués OD et OE (*fig.* 91). Soient a' et b' les longueurs de ces demi-diamètres. On aura

$$a'^2 = x'^2 + y'^2, \quad b'^2 = x''^2 + y''^2.$$

Les coefficients angulaires des deux diamètres étant exprimés par les rapports $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{y''}{x''}$, devront satisfaire à la relation générale

$$mm' = \frac{b^2}{a^2},$$

de sorte qu'on aura

$$\frac{y'y''}{x'x''} = \frac{b^2}{a^2}.$$

On en déduit

$$y'^2 y''^2 = \frac{b^4}{a^4} x'^2 x''^2.$$

Le point (x', y') étant sur l'hyperbole proposée, et le point (x'', y'') appartenant à l'hyperbole conjuguée (189), on aura

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2), \quad y''^2 = \frac{b^2}{a^2}(x''^2 + a^2).$$

Il en résulte, en substituant dans la relation précédente et en simplifiant,

$$(x'^2 - a^2)(x''^2 + a^2) = x'^2 x''^2,$$

d'où

$$x'^2 - x''^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{x''^2}{a^2} = 1. \tag{1}$$

Mais les équations de condition

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y''^2}{b^2} - \frac{x''^2}{a^2} = 1,$$

prouvent alors immédiatement qu'on a aussi

$$\frac{y''^2}{b^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad y'^2 - y''^2 = -b^2. \tag{2}$$

Ajoutant les équations (1) et (2), nous aurons

$$(x'^2 + y'^2) - (x''^2 + y''^2) = a^2 - b^2,$$

c'est-à-dire, en remplaçant les parenthèses par leurs valeurs,

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$$

La différence des carrés de deux diamètres conjugués de l'hyperbole $(4a'^2 - 4b'^2)$ *est donc constante et égale à la différence des carrés des axes* $(4a^2 - 4b^2)$.

191. Considérons (*fig.* 91) le parallélogramme inscrit entre les deux hyperboles conjuguées, dont les côtés sont égaux aux diamètres conjugués proposés, et dont les angles sont ceux de ces diamètres. *Cherchons l'expression de l'aire d'un pareil parallélogramme.*

Le parallélogramme construit sur les demi-diamètres OD et OE en sera le quart. Son aire aura pour expression $OD = a'$, multipliée par la perpendiculaire EL abaissée du point E sur OD. Or $y = mx$ étant l'équation de OD, et le point E ayant pour coordonnées x'' et y'', on aura

$$EL = \frac{y'' - mx''}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{y''x' - y'x''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

en remplaçant m par sa valeur $\frac{y'}{x'}$; et l'aire du parallélogramme construit sur OD et sur OE sera (puisque $a'^2 = x'^2 + y'^2$)

$$a' \cdot \frac{y''x' - y'x''}{a'} = y''x' - y'x''.$$

Mais

$$(y''x' - y'x'')^2 = y''^2x'^2 + y'^2x''^2 - 2y'y''x'x''.$$

Si l'on remplace x'^2 et x''^2 par leurs valeurs déduites des équations des deux hyperboles conjuguées, et si l'on tire de la rela

tion générale $\frac{y'y''}{x'x''} = \frac{b^2}{a^2}$, $x'x'' = \frac{a^2}{b^2} \cdot y'y''$, il viendra (190)

$$(y''x' - y'x'')^2 = a^2 y'^2 \left(1 + \frac{y'^2}{b^2}\right) + a^2 y'^2 \left(\frac{y''^2}{b^2} - 1\right) - 2 \cdot \frac{a^2}{b^2} y'^2 y''^2,$$

c'est-à-dire

$$(y''x' - y'x'')^2 = a^2(y''^2 - y'^2) = a^2 b^2 \quad \text{ou} \quad y''x' - y'x'' = ab.$$

L'aire $[4(y''x' - y'x'')]$ *du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués de l'hyperbole est donc constante et égale à celle* $(4ab)$ *du rectangle construit sur les axes.*

Le premier des deux théorèmes d'Apollonius est donc seul modifié, lorsqu'on passe de l'ellipse à l'hyperbole.

En désignant par α l'angle de deux diamètres conjugués, on peut exprimer l'aire du parallélogramme construit sur les demi-diamètres par $a'b' \sin \alpha$. Les axes et deux diamètres conjugués quelconques sont donc liés, dans l'hyperbole, par les relations

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \quad a'b' \sin \alpha = ab.$$

Remarque. — On pourrait, pour démontrer les deux théorèmes précédents, employer le même procédé que celui suivi pour l'ellipse (163, 164), en remplaçant le cercle par une hyperbole équilatère, c'est-à-dire en considérant l'hyperbole proposée comme la projection d'une hyperbole équilatère ayant même axe transverse.

Asymptotes.

192. Les asymptotes ont pour équations, suivant que la courbe est rapportée à ses axes ou à deux diamètres conjugués,

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{b'}{a'} x.$$

On peut considérer les asymptotes comme les limites des tangentes à la courbe, lorsque le point de contact s'éloigne à l'infini; ou comme les limites des diamètres conjugués de l'hyperbole, lorsque le coefficient angulaire de l'un d'eux tend vers $\pm \frac{b}{a}$.

On peut encore regarder les asymptotes comme le lieu des sommets des parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués.

L'équation de l'hyperbole, rapportée à ses asymptotes, est de la forme (91, *Rem.* I; 121)

$$x'y' = \text{constante}.$$

Pour trouver cette constante, considérons (*fig.* 92) le sommet A : ses coordonnées par rapport aux asymptotes sont égales, car le triangle AOR est évidemment isocèle. De

$$AO = a = 2\,OR\cos AOR$$

on déduit

$$OR = \frac{a}{2\cos AOR}.$$

Mais

$$\cos AOR = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 AOR}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Il viendra donc

$$OR = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Par suite,

$$OR \cdot AR = \frac{a^2+b^2}{4} \quad \text{et} \quad x'y' = \frac{c^2}{4}.$$

Remarques. — I. Cette équation montre que le parallélogramme construit sur les coordonnées d'un point quelconque M de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes a une aire constante, puisque cette aire est égale à $x'y'\sin\theta$ ou à $\frac{c^2}{4}\sin\theta$, en désignant par θ l'angle des asymptotes.

Si l'on appelle β l'angle $y'Ox$, on a

$$\sin\theta = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{2\operatorname{tang}\beta}{1+\operatorname{tang}^2\beta} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Il vient donc

$$x'y' = \frac{c^2}{4}\sin\theta = \frac{ab}{2}.$$

Le rectangle construit sur les axes ayant pour aire $4ab$, *l'aire du parallélogramme constant dont il s'agit est la huitième partie du rectangle construit sur les axes, ou du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués.*

On arriverait immédiatement à ce résultat, en remarquant que le losange AROS a pour diagonales a et b (*Trig.*, 59).

II. Quand l'hyperbole est équilatère et qu'elle est rapportée à ses asymptotes alors rectangulaires, son équation est

$$x'y' = \frac{a^2}{2}.$$

193. *On arrive facilement aux résultats précédents par la transformation des coordonnées.*

Les formules pour passer des axes rectangulaires Oy et Ox aux axes obliques Oy' et Ox', sont (26) :

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

Dans le cas considéré, on a

$$\alpha = -\beta \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{b}{a}.$$

Il viendra donc

$$x = (y' + x')\cos\beta, \quad y = (y' - x')\sin\beta.$$

Mais

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\beta}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\beta}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Les formules de transformation seront donc finalement

$$x = \frac{a(y' + x')}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b(y' - x')}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En substituant dans l'équation aux axes $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ les valeurs de $\frac{x}{a}$ et de $\frac{y}{b}$ déduites de ces formules, il vient

$$\frac{(y' + x')^2 - (y' - x')^2}{a^2 + b^2} = 1,$$

d'où

$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

c'est-à-dire, en supprimant les accents,

$$xy = \frac{c^2}{4}.$$

194. *La considération des asymptotes conduit à la manière la plus simple de déterminer la tangente en un point de l'hyperbole.*

En effet, si l'on veut mener la tangente au point D (*fig.* 91), et si l'on suppose le problème résolu, on sait (189, II) que la tangente GH sera parallèle au diamètre conjugué du diamètre OD, et que GD ou DH représentera la demi-longueur de ce diamètre conjugué. Le point D étant le milieu de GH, si l'on

mène son ordonnée DP et son abscisse DQ par rapport aux asymptotes, le point P sera le milieu de la distance OH, et le point Q le milieu de la distance OG. Pour avoir le pied de la tangente sur chacune des asymptotes, il suffit donc de doubler les coordonnées du point de contact par rapport à ces mêmes asymptotes. En joignant alors l'un des points ainsi déterminés au point de contact donné, on aura la tangente demandée.

On peut facilement vérifier cette construction, en cherchant l'équation de la tangente à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

En se rappelant la formule générale

$$y - y_1 = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}}(x - x_1),$$

on trouve immédiatement (l'équation de la courbe étant $xy = \frac{c^2}{4}$),

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{x_1}(x - x_1).$$

On en déduit

$$x_1 y - y_1 x_1 = -y_1 x + y_1 x_1$$

ou, en divisant par $2y_1x_1$,

$$\frac{y}{2y_1} + \frac{x}{2x_1} = 1.$$

Cette équation montre que les coordonnées à l'origine de la tangente sont bien $2x_1$ et $2y_1$.

195. *L'hyperbole et ses asymptotes interceptent sur une sécante des longueurs égales* (*fig.* 93).

Soit la sécante NMM'N'. Rapportons l'hyperbole au diamètre OD qui passe par le milieu de la corde MM' et à son conjugué OE. On aura

$$MP = PM'.$$

Mais, le point D étant le milieu de la tangente GH, on aura aussi

$$NP = PN'.$$

Il en résulte

$$NM = N'M'.$$

Ce théorème permet de construire facilement l'hyperbole, lorsqu'on connaît les asymptotes et un point de la courbe. Car, en menant par le point donné M la sécante NMN' terminée aux asymptotes, il suffira de prendre $N'M' = NM$, pour

avoir en M′ un second point de l'hyperbole. Et en répétant la même construction pour d'autres sécantes passant par l'un des points déjà déterminés, on obtiendra autant de points de l'hyperbole qu'on voudra.

Si l'on donne une asymptote et trois points, il n'y a qu'à mener les sécantes qui joignent l'un des points donnés aux deux autres, pour trouver (en appliquant le même théorème) deux points de la seconde asymptote, et pour revenir à la construction précédente.

196. *Le produit des segments déterminés sur une sécante par un point de l'hyperbole et les deux asymptotes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la sécante.*

Considérons d'abord la sécante NMM′N′ (*fig.* 93). Désignons par a' et b' les demi-diamètres conjugués OD et OE. Si nous y rapportons la courbe, son équation sera

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

L'équation de l'asymptote supérieure sera en même temps

$$y = \frac{b'}{a'} x.$$

Il viendra donc

$$NP^2 = \frac{b'^2}{a'^2} x^2 \quad \text{et} \quad MP^2 = \frac{b'^2}{a'^2} x^2 - b'^2,$$

d'où

$$NP^2 - MP^2 = (NP - MP)(NP + MP) = NM.MN' = b'^2.$$

S'il s'agit de la sécante MRR′M′ (*fig.* 94), on aura

$$MQ^2 = \frac{a'^2}{b'^2} y^2 + a'^2 \quad \text{et} \quad RQ^2 = \frac{a'^2}{b^2} y^2,$$

d'où

$$MQ^2 - RQ^2 = (MQ - RQ)(MQ + RQ) = MR.MR' = a'^2.$$

Quadrature de l'Hyperbole.

197. Soit l'hyperbole $xy = \frac{c^2}{4}$, rapportée à ses asymptotes. *On demande d'évaluer l'aire comprise entre l'arc* MM′, *les deux ordonnées* MP *et* M′P′ *et l'axe* Ox (*fig.* 95).

Si l'on désigne par u l'aire cherchée, on aura (164), θ étant toujours l'angle des asymptotes,

$$u' = y \sin\theta = \frac{c^2}{4} \sin\theta \cdot \frac{1}{x}.$$

Il en résulte (*Compl. d'Alg.*, 160)

$$u = \frac{c^2}{4} \sin\theta \,.\, \mathrm{l}.\, x + \mathrm{C}.$$

Si l'on suppose $\mathrm{OP} = m$, on aura

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad x = m.$$

La constante C sera donc égale à

$$-\frac{c^2}{4} \sin\theta \,.\, \mathrm{l}.\, m.$$

Par suite

$$u = \frac{c^2}{4} \sin\theta \,.\, \mathrm{l}.\, \frac{x}{m}.$$

Il ne restera plus, pour calculer u, qu'à remplacer x par sa valeur OP′. Si l'on veut employer les logarithmes vulgaires, on devra multiplier $\log\frac{x}{m}$ par $\frac{1}{\log e}$.

Cette correspondance entre l'hyperbole et les logarithmes népériens leur a fait donner aussi le nom de logarithmes *hyperboliques*.

Elle se marque mieux encore lorsqu'on considère l'hyperbole équilatère et qu'on prend l'ordonnée du sommet $\frac{c}{2}$ pour unité de longueur. Dans ce cas, l'angle des deux asymptotes étant droit, on a simplement (en supposant le point M confondu avec le sommet A de la courbe)

$$u = \mathrm{l}.\, x.$$

Questions diverses.

198. I. *Les perpendiculaires abaissées des foyers de l'hyperbole sur une tangente à la courbe ont pour moyenne proportionnelle le demi-axe non transverse.*

Nous prendrons l'équation de la tangente sous la forme

$$y - mx - \sqrt{a^2 m^2 - b^2} = 0.$$

Comme les coordonnées des deux foyers sont o et c, o et $-c$, et que la tangente passe nécessairement entre eux (180), c'est-à-dire que l'un est au-dessus et l'autre au-dessous, on aura pour les distances des foyers à cette tangente

$$\delta = \frac{-mc - \sqrt{a^2 m^2 - b^2}}{-\sqrt{1 + m^2}}, \qquad \delta' = \frac{mc - \sqrt{a^2 m^2 - b^2}}{+\sqrt{1 + m^2}}.$$

Il viendra donc

$$\delta\delta' = \frac{a^2m^2 - b^2 - m^2c^2}{-(1+m^2)} = \frac{-(c^2-a^2)m^2 - b^2}{-(1+m^2)},$$

d'où, en remplaçant $c^2 - a^2$ par b^2 et en divisant par $-(1+m^2)$,

$$\delta\delta' = b^2.$$

199. II. *Trouver le lieu décrit par le sommet d'un angle déterminé dont les côtés restent constamment tangents à une hyperbole donnée.*

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'hyperbole proposée. Soient

$$(1) \qquad y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2},$$

$$(2) \qquad y = m'x + \sqrt{a^2m'^2 - b^2},$$

les équations des deux tangentes à la courbe. Si elles font l'angle voulu α, on devra avoir

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

Si l'on considère les équations (1) et (2) comme simultanées, y et x représenteront les coordonnées du sommet de l'angle mobile. On déduit de l'équation (1)

$$(y - mx)^2 = a^2m^2 - b^2,$$

d'où, en ordonnant par rapport à m,

$$(4) \qquad (a^2 - x^2)m^2 + 2xy.m - (b^2 + y^2) = 0.$$

Le résultat fourni par l'équation (2), traitée de la même manière, ne diffère du précédent que par le changement de m en m'. Par suite l'équation (4) a pour racines m et m'. On a donc

$$m + m' = -\frac{2xy}{a^2 - x^2}, \quad mm' = -\frac{b^2 + y^2}{a^2 - x^2},$$

d'où

$$m - m' = \sqrt{(m+m')^2 - 4mm'} = \frac{2\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2}}{a^2 - x^2}.$$

L'équation (3) donne alors

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2}}{a^2 - x^2 - b^2 - y^2};$$

telle sera l'équation du lieu.

Si l'on suppose *droit* l'angle des deux tangentes, on doit poser

$$\operatorname{tang}\alpha = \infty$$

c'est-à-dire

$$a^2 - x^2 - b^2 - y^2 = 0,$$

On trouve alors pour l'équation du lieu

$$x^2+y^2=a^2-b^2.$$

Le lieu est, dans ce cas, une circonférence concentrique à l'hyperbole donnée et ayant pour rayon $\sqrt{a^2-b^2}$. *Pour que ce lieu existe, il faut qu'on ait*

$$a>b,$$

ou *que l'hyperbole tombe dans l'angle aigu des asymptotes.*

Ce lieu se réduit à un point, qui est le centre de l'hyperbole, si, *cette hyperbole devenant équilatère,* on a

$$a=b;$$

ce qui veut dire que les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont les seules tangentes à angle droit.

Enfin *le lieu disparaît*, si l'on a

$$a<b,$$

ou *si l'hyperbole est située dans l'angle obtus formé par ses asymptotes.* Dans ce cas, en effet, l'angle formé par deux tangentes issues d'un même point étant nécessairement plus grand que l'angle obtus des deux asymptotes ou plus petit que leur angle aigu (181), ne peut être droit.

200. III. *Vérifier par l'analyse que le lieu des sommets des parallélogrammes qui correspondent aux diamètres conjugués d'une hyperbole donnée, se compose des deux asymptotes.*

Des deux côtés adjacents de l'un des parallélogrammes considérés, l'un est tangent à l'hyperbole proposée, l'autre à son hyperbole conjuguée. Les équations des quatre côtés de ce parallélogramme seront donc

$$(1)\qquad y=mx\mp\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

$$(2)\qquad y=m'x\pm\sqrt{b^2-a^2m'^2}.$$

Les coefficients angulaires m et m' qui se rapportent aux directions de deux diamètres conjugués, doivent d'ailleurs satisfaire à l'équation de condition

$$(3)\qquad mm'=\frac{b^2}{a^2}.$$

On déduit de l'équation (3)

$$m'=\frac{b^2}{a^2m}.$$

L'équation (2) devient alors

$$y=\frac{b^2}{a^2m}x\pm\sqrt{b^2-\frac{a^2b^4}{a^4m^2}},$$

d'où

$$(4)\qquad a^2my=b^2x\pm ab\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

On tire de l'équation (1), en regardant dans les équations proposées y et x

comme les coordonnées des sommets du parallélogramme,

$$\sqrt{a^2m^2 - b^2} = \pm(mx - y).$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (4), il vient

$$a^2my = b^2x \pm ab(mx - y),$$

c'est-à-dire

$$am(ay \mp bx) = \mp b(ay \mp bx)$$

ou

$$(am \pm b)(ay \mp bx) = 0.$$

Les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble.

On satisfera à l'équation trouvée, en posant

$$am \pm b = 0,$$

ou bien

$$ay \mp bx = 0.$$

La première relation donne $m = \pm\frac{b}{a}$, et correspond aux diamètres conjugués dirigés suivant les asymptotes. La seconde relation donne

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Elle représente réellement le lieu demandé, et l'on voit que ce lieu n'est autre chose que l'ensemble des deux asymptotes.

201. IV. *Étant donné un arc d'hyperbole, retrouver les éléments de la courbe* (*fig.* 96).

En menant deux cordes parallèles quelconques mm', nn', et en joignant leurs milieux, on aura un diamètre transverse OH de la courbe. On en obtiendra un second OM, en prenant deux autres cordes parallèles pp' et qq'. Les deux diamètres construits feront connaître par leur intersection le centre O de l'hyperbole. On aura alors la direction du diamètre conjugué de l'un des diamètres tracés, en menant par le centre de l'hyperbole une parallèle aux cordes qui l'ont déterminé. On connaîtra donc les directions de deux diamètres conjugués et la demi-longueur $OH = a'$ de l'un d'eux. Pour déterminer la demi-longueur $OK = b'$ du second diamètre, menons une tangente à l'hyperbole par le point M, c'est-à-dire une parallèle aux cordes pp' et qq'. L'hyperbole étant rapportée aux axes OH et OK, l'équation de cette tangente sera

$$\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

Si l'on y fait $x = 0$, il vient

$$yy_1 = -b'^2 \quad \text{ou} \quad b'^2 = \text{OT}'.\text{MP},$$

en remplaçant y par $-\text{OT}'$. Le demi-diamètre cherché sera donc une moyenne proportionnelle aux longueurs OT' et MP. Connaissant l'angle HOK et les longueurs a' et b', on achèvera le parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués, et les diagonales de ce parallélogramme

seront les asymptotes de l'hyperbole. Les axes sont d'ailleurs les bissectrices des angles des asymptotes. Pour avoir leurs longueurs, on peut se servir de la tangente déjà tracée dont l'équation par rapport aux axes est

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

et qui donne $xx_1 = a^2$ pour $y = 0$. On doit remarquer que, connaissant a, on a immédiatement b, puisque les asymptotes sont tracées (189, II). Pour déterminer a, on peut aussi avoir recours au théorème du n° 196.

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE.

Rappel des notions précédentes.

202. L'équation d'une parabole peut toujours être ramenée à la forme

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

$2p$ est le *paramètre* de la courbe. Les axes étant supposés rectangulaires, l'axe des x est l'*axe* de la parabole. Elle n'a qu'un *sommet* qui est l'origine des coordonnées ; elle n'a pas de centre, ou son centre est à l'infini.

La valeur

$$y = \pm\sqrt{2px}, \tag{2}$$

déduite de l'équation (1), prouve que l'on ne peut donner à x que des valeurs de même signe que p : la parabole s'étend donc d'un seul côté. Lorsqu'on fait croître x (en valeur absolue) de 0 à ∞, y croît de même de 0 à ∞.

On obtient le *foyer* F en portant sur l'axe de la courbe (*fig.* 97), dans le sens où elle s'étend et à partir du sommet, le quart $\frac{p}{2}$ du paramètre $2p$.

Pour avoir la *directrice*, il suffit de se rappeler (135) que son équation est

$$x = -\frac{p}{2}.$$

On n'a donc qu'à prendre, de l'autre côté de l'axe des y, OD = OF, et à élever par le point D une perpendiculaire DL à l'axe de la courbe. La distance du foyer à la directrice est

donc égale au demi-paramètre p, et le sommet est au milieu de cette distance.

Si l'on considère un point M quelconque pris sur la courbe, le rayon vecteur MF a pour expression

$$x+\frac{p}{2}.$$

La courbe a bien la forme indiquée sur la figure. On le voit en remarquant que le coefficient angulaire de la tangente $\frac{p}{y}$ décroît depuis ∞ pour $y=0$ jusqu'à 0 pour $y=\infty$. L'arc OB tourne donc sa concavité vers les y négatifs (82). La courbe, en s'éloignant des axes coordonnés, tend à devenir parallèle à son axe.

Si l'on considère un point *intérieur* à la parabole, il aura, en valeur absolue, une ordonnée inférieure à celle du point de la courbe qui a la même abscisse. Si l'on considère un point *extérieur* à la courbe, il aura une abscisse moindre algébriquement que celle du point de la courbe qui a la même ordonnée. Par suite, selon qu'un point (x,y) est *intérieur* à la parabole, *extérieur* à la parabole, ou *lui appartient*, on a

$$y^2-2px<0,\quad y^2-2px>0,\quad y^2=2px.$$

Enfin, il est évident que, pour un point N *intérieur* à la courbe, on a, en comparant son rayon vecteur NF à sa distance NQ à la directrice,

$$NF<NQ.$$

Pour un point N *extérieur* à la courbe, on a au contraire

$$NF>NQ.$$

Ainsi *les points intérieurs à la parabole sont plus rapprochés du foyer que de la directrice ; c'est le contraire pour les points extérieurs.*

L'équation (1) donne

$$\frac{y^2}{x}=2p.$$

Les carrés des ordonnées de la courbe sont donc proportionnels aux distances de leurs pieds au sommet de la parabole.

Si l'on fait dans l'équation (1)

$$x=OF=\frac{p}{2},$$

on trouve

$$y=\pm p.$$

L'ordonnée du point de la courbe qui se projette au foyer représente donc le demi-paramètre ; en d'autres termes, *si l'on mène par le foyer une corde perpendiculaire à l'axe, elle représente le paramètre de la parabole.*

Menons par le sommet une droite inclinée à 45° sur l'axe de la parabole, c'est-à-dire bissectrice de l'angle des axes. Son équation étant $y = x$, *son second point d'intersection avec la parabole aura* $2p$ *pour ordonnée ou pour abscisse.*

203. *On peut regarder la parabole comme la limite d'une ellipse dont l'un des foyers et le sommet correspondant restent fixes, tandis que le grand axe croît indéfiniment.*

Nous savons, en effet (66), que si l'on rapporte une ellipse à son grand axe et à la tangente au sommet A′ (*fig.* 98), son équation devient

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2ab^2x = 0,$$

ou

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2. \qquad (1)$$

Les points A′ et F′ devant rester invariables, on peut poser

$$A'F' = a - c = \frac{p}{2}.$$

Il en résulte

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \left(a - \frac{p}{2}\right)^2 = ap - \frac{p^2}{4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{b^2}{a} = p - \frac{p^2}{4a} \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a} - \frac{p^2}{4a^2}.$$

A mesure que a augmente, $\frac{b^2}{a}$ converge vers p, tandis que $\frac{b^2}{a^2}$ tend vers zéro. A la limite, c'est-à-dire pour $a = \infty$, l'équation (1) devient donc

$$y^2 = 2px :$$

elle représente une parabole dont le paramètre est $2p$, c'est-à-dire qui a les points A′ et F′ pour sommet et pour foyer.

On voit maintenant pourquoi la quantité $2\frac{b^2}{a}$ [qui représente la corde menée par l'un des foyers de l'ellipse perpendiculairement au grand axe (202)] s'appelle souvent *paramètre* de l'ellipse.

On peut appliquer ce qui précède à l'hyperbole.

204. *Remarque.* — Nous avons trouvé (67) pour équation de

l'hyperbole rapportée à son axe transverse et à la tangente au sommet de droite A,

$$a^2y^2 - b^2x^2 - 2ab^2x = 0,$$

ou

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2. \tag{2}$$

$2\frac{b^2}{a}$ est encore le *paramètre* de l'hyperbole.

Si l'on pose d'une manière générale

$$\frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{b^2}{a^2} = q,$$

on voit que l'*équation*

$$y^2 = 2px + qx^2 \tag{A}$$

peut représenter les trois courbes du second degré; suivant qu'on a $q < 0$, $q > 0$, $q = 0$, *la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

Construction de la courbe.

205. *Première construction.* — L'équation $y^2 = 2px$ montre que l'ordonnée y de la courbe est une moyenne proportionnelle entre le paramètre $2p$ et l'abscisse x. On portera donc sur l'axe, à partir du sommet O et du côté où la courbe ne s'étend pas, une longueur $OR = 2p$. Les points P, P′, P″, ..., étant les pieds des ordonnées des points M, M′, M″, ..., de la parabole, on obtiendra ces points en décrivant des circonférences ayant RP, RP′, RP″, ..., pour diamètres, et en menant par leurs intersections H, H′, H″, ..., avec l'axe des y, des parallèles à l'axe de la parabole, jusqu'aux ordonnées qui correspondent aux points P, P′, P″, ...

206. *Seconde construction.* — Chaque point de la parabole devant être également distant du foyer et de la directrice, on peut aussi employer le procédé suivant pour construire la courbe par points.

Soient le foyer F et la directrice DL (*fig.* 100). Le sommet O sera au milieu de la distance FD qui sépare le foyer de la directrice. Considérons sur l'axe Ox un point P quelconque, situé au delà du point O. Pour trouver les points de la courbe qui se projettent en P, il suffit évidemment de décrire du foyer F comme centre, avec la distance PD du point P à la directrice pour rayon, une circonférence de cercle qui coupera

l'ordonnée élevée au point P en M et en M'. Les points M et M' appartiendront à la parabole puisqu'on aura MF = PD = MQ. Il y aura toujours rencontre, parce que FM = PD est toujours plus grand que PF. Chaque construction particulière donnera deux points de la courbe, placés symétriquement par rapport à l'axe Ox.

207. *Troisième construction.* — On peut tracer mécaniquement un arc de parabole d'un mouvement continu.

On place une règle le long de la directrice DL (*fig.* 101). Un fil est attaché, d'une part au foyer F, de l'autre au sommet R d'une équerre LQR, et sa longueur est égale à celle du grand côté QR de l'équerre. Si l'on fait glisser l'équerre par son petit côté le long de la règle, et si le fil est en même temps tendu le long de QR à l'aide d'une pointe à tracer, cette pointe décrira un arc OS de parabole ; car on aura à chaque instant

$$MF + MR = QR,$$

c'est-à-dire

$$MF = MQ.$$

Tangente et Normale.

208. L'équation de la tangente à la parabole en un point (x_1, y_1) est immédiatement (73), d'après l'équation de la courbe,

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$

Il faut joindre d'ailleurs à cette équation l'équation de condition

$$y_1^2 = 2px_1.$$

L'équation de la tangente, qu'on peut écrire

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1 \quad \text{ou} \quad yy_1 - 2px_1 = px - px_1,$$

revient donc à celle-ci :

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Pour *construire* la tangente, on peut chercher les points où elle coupe les axes. Si l'on suppose $y = 0$, on trouve

$$x = -x_1;$$

si l'on suppose $x = 0$, on trouve

$$y = \frac{px_1}{y_1} = \frac{y_1}{2}.$$

On voit qu'on peut encore mettre l'équation de la tangente sous la forme

$$\frac{y}{\frac{y_1}{2}} - \frac{x}{x_1} = 1.$$

Ce qu'on vient de dire montre que *chaque coordonnée de la tangente par rapport à l'origine ne dépend que de la coordonnée du point de contact sur l'axe considéré.*

Si l'on veut avoir la tangente au point M dont les coordonnées sont MP et OP (*fig.* 102), on n'aura donc qu'à prendre de l'autre côté du sommet, OT = OP ou bien, sur la partie positive de l'axe des y, $OH = \frac{MP}{2}$. En joignant le point M au point T ou au point H, on obtiendra la tangente à la parabole au point M.

La distance TP entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la tangente rencontre l'axe des x s'appelle la *sous-tangente* par rapport à cet axe. *La sous-tangente* TP, *par rapport à l'axe des x, est égale au double de l'abscisse du point de contact*, puisque OT = OP.

La distance HR entre le pied de l'abscisse du point de contact et le point où la tangente rencontre l'axe des y, est la sous-tangente par rapport à cet axe. D'après ce qu'on vient de dire, *la sous-tangente* HR, *par rapport à l'axe des y, est égale à la moitié de l'ordonnée du point de contact.*

209. L'équation de la normale en un point donné (x_1, y_1) de la parabole est

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

On en déduit

$$py - py_1 = -y_1 x + x_1 y_1,$$

ou

$$py + y_1 x = y_1 (p + x_1).$$

Si l'on suppose $y = 0$ dans cette équation, il vient

$$x = p + x_1.$$

Cette valeur représente l'abscisse du point N où la normale vient couper l'axe des x.

La distance NP entre le pied de l'ordonnée du point de contact et le point où la normale rencontre l'axe des x (*fig.* 102) s'appelle la *sous-normale* par rapport à cet axe. Cette sous-normale a pour expression

$$ON - OP \quad \text{ou} \quad p + x_1 - x_1 = p.$$

Ainsi, *dans la parabole, la sous-normale est constamment égale au demi-paramètre de la courbe.* (C'est là une propriété caractéristique de la parabole.)

On aurait pu y arriver immédiatement en remarquant que, d'après le triangle rectangle TMN, l'ordonnée MP du point de contact est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente TP et la sous-normale NP. On a donc

$$NP = \frac{y_1^2}{2x_1} = p.$$

On voit que, le point M se confondant à la limite avec le sommet de la parabole, le pied N de la normale sur l'axe de la courbe se confond avec un point situé à une distance du sommet égale à p ou double de OF.

210. *Si par un point* M *pris sur la parabole on mène une parallèle à l'axe du côté de la directrice, la tangente au point* M *est la bissectrice de l'angle formé par cette parallèle et par le rayon vecteur* MF (*fig.* 102).

Considérons le triangle FMT. On a (202)

$$MF = x_1 + \frac{p}{2}, \quad TF = OT + OF = x_1 + \frac{p}{2}.$$

Le triangle FTM est donc constamment isocèle, et l'angle TMF, égal à l'angle MTF, est aussi égal à l'angle alterne-interne TMQ, c'est-à-dire que la tangente MT est bien la bissectrice de l'angle FMQ.

La normale MN est, à son tour, la bissectrice de l'angle MFQ′, formé en prolongeant la parallèle à l'axe du côté opposé à la directrice.

Remarques. — I. Si l'on prolonge la tangente suivant MT′, l'angle T′MQ′, égal à l'angle TMQ, sera égal à l'angle TMF. Par conséquent, *le rayon vecteur* MF *et la parallèle* MQ′ *à l'axe, situés tous deux d'un même côté de la tangente en* M, *sont également inclinés sur cette tangente, de part et d'autre du point* M (*).

II. On peut facilement construire la tangente (*fig.* 102) en remarquant que le triangle FMQ (DL étant la directrice) est isocèle. La tangente MT étant bissectrice de l'angle FMQ, sera

(*) Tout rayon lumineux ou calorifique qui vient rencontrer la parabole parallèlement à son axe, se réfléchit donc au foyer. Réciproquement, si la source est placée au foyer, les rayons qui en émanent sont rendus parallèles par l'interposition de la parabole.

perpendiculaire sur le milieu de la base FQ de ce triangle. *On n'aura donc qu'à abaisser du point* M *la perpendiculaire* MQ *sur la directrice, à joindre* FQ, *et à abaisser* MT *perpendiculaire sur* FQ, *pour avoir la tangente au point* M.

III. Le pied H de la tangente MT sur FQ est le milieu de FQ ; le point O, sommet de la courbe, est le milieu de la distance FD du foyer à la directrice : le point H doit donc se trouver sur l'axe Oy. On en conclut que *le lieu des projections du foyer sur les tangentes à la parabole n'est autre que la tangente au sommet.*

IV. La figure MQFN étant un parallélogramme, on a

$$NF = MQ = MF.$$

Le triangle FMN est donc isocèle comme le triangle FMT, et *le foyer* F *est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle formé par l'axe avec la tangente et la normale en un point quelconque.*

211. Si l'on veut *mener à la parabole une tangente passant par un point extérieur donné*, les inconnues du problème seront les coordonnées x_1, y_1, du point de contact. En désignant par α, β, les coordonnées du point donné, on aura à résoudre les deux équations

$$\beta y_1 = p(\alpha + x_1), \tag{1}$$

$$y_1^2 = 2px_1. \tag{2}$$

La première exprime que la tangente cherchée passe par le point donné.

Si l'on regarde les inconnues x_1, y_1, comme des coordonnées courantes, il faudra déterminer les points où la droite représentée par l'équation (1), c'est-à-dire *la corde des contacts*, coupe la parabole proposée représentée alors par l'équation (2). En joignant les points d'intersection obtenus au point donné, on aura les deux tangentes qui répondent à la question.

Il est facile de vérifier que le problème est toujours possible et admet deux solutions, lorsque le point (α, β) est bien extérieur à la courbe.

212. On peut aussi, en s'appuyant sur ce qui précède, mener *géométriquement* une tangente à la parabole par un point extérieur.

Du point donné N comme centre, avec NF pour rayon, décrivons une circonférence (*fig.* 103). Le point N étant extérieur, sera plus près de la directrice que du foyer, et la circonférence décrite coupera la directrice en deux points L et L'.

On mènera les cordes FL et FL', et du point N on abaissera sur ces cordes les perpendiculaires NT et NT', qui seront les tangentes demandées. En effet, menons par les points L et L' des parallèles à l'axe jusqu'à la rencontre des droites NT et NT' en M et en M'. On aura

$$MF = ML, \quad M'F = M'L' :$$

les points M et M' appartiennent donc à la parabole. De plus, les droites NT et NT' coupent en deux parties égales les angles FML et FM'L' (210).

213. Si l'on veut *mener à la parabole une tangente parallèle à une direction donnée*, les inconnues du problème seront encore les coordonnées du point de contact. Soit m le coefficient angulaire qui correspond à la direction donnée. On aura à résoudre les deux équations

$$(1) \qquad m = \frac{p}{y_1},$$

$$(2) \qquad y_1^2 = 2px_1.$$

On voit immédiatement que le problème est toujours possible. Les équations (1) et (2) montrent d'ailleurs que le point de contact demandé résulte de l'intersection de la parabole proposée et de la droite $y_1 = \frac{p}{m}$, qui est parallèle à son axe.

Il est d'ailleurs préférable de chercher l'équation générale des tangentes à la parabole, indépendamment des coordonnées du point de contact. Prenons la droite $y = mx + n$, et cherchons la relation qui doit exister entre les constantes m et n, pour que cette droite soit tangente à la parabole $y^2 = 2px$.

Si l'on élimine y entre les deux équations, il vient

$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0.$$

Si la droite considérée est tangente, les racines de l'équation résultante doivent être égales, d'où la condition

$$(mn - p)^2 = m^2n^2,$$

c'est-à-dire

$$-2mn + p = 0 \quad \text{ou} \quad n = \frac{p}{2m}.$$

L'équation générale des tangentes à la parabole est donc

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

et en y donnant à m la valeur indiquée, on répondra immédiatement à la question : *la parabole n'admet qu'une seule tangente parallèle à une direction donnée.*

214. Si l'on veut résoudre *géométriquement* le problème proposé, on se rappellera que le lieu des projections du foyer sur les tangentes à la courbe est la tangente au sommet. Par suite, si la droite GG' marque la direction donnée (*fig.* 104), il suffira d'abaisser du foyer F sur cette droite la perpendiculaire FK qui coupera la tangente Oy au point H ; en menant par le point H une parallèle TH à GG', le problème sera résolu. Pour avoir le point de contact de cette tangente TH, on prolongera la perpendiculaire FK jusqu'à son point de rencontre Q avec la directrice ; et, par le point Q, on mènera une parallèle à l'axe. Le point M où cette parallèle coupera TH, sera le point de contact demandé. En effet, le point O étant le milieu de FD, le point H est le milieu de FQ. Par suite, MF = MQ. Le point M est donc à la parabole, et la droite THM est la bissectrice de l'angle FMQ.

Il est bon de remarquer que les dernières constructions indiquées (**212, 214**) *ne supposent pas la parabole tracée.*

Diamètres.

215. Pour trouver l'équation des diamètres de la parabole $y^2 = 2px$ ou $y^2 - 2px = 0$, rappelons-nous (**112**) qu'il faut égaler à zéro la somme des dérivées partielles du premier membre de l'équation par rapport à y et à x, après avoir multiplié la dérivée relative à y par le coefficient angulaire m du système de cordes considéré.

Il viendra donc pour l'équation demandée

$$2my - 2p = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{p}{m}.$$

Ainsi, comme nous le savions déjà (**113**), *tout diamètre de la parabole est parallèle à l'axe, et toute parallèle à l'axe est un diamètre.*

On peut vérifier facilement que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au système de cordes conjugué à ce diamètre* (**114**). En effet, la tangente au point (x_1, y_1) a pour coefficient angulaire $\frac{p}{y_1}$; et le coefficient angulaire des cordes conjuguées au diamètre qui passe par le point (x_1, y_1), satisfait à la relation

$$y_1 = \frac{p}{m}, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{p}{y_1}.$$

216. *Équation de la parabole rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente qui lui correspond.*

D'après les axes choisis, à une même valeur de x doivent correspondre deux valeurs de y égales et de signes contraires. L'équation de la courbe ne renferme donc que des puissances paires de y : ce qui exclut le terme en xy et le terme en y. De plus, l'origine étant le point de contact de la tangente prise pour axe des y, la parabole passe par l'origine : ce qui exclut le terme indépendant des variables. Ainsi l'équation, d'après ces premières remarques, serait de la forme

$$Ay^2 + Cx^2 + Ex = 0.$$

Mais, comme il s'agit d'une parabole, la condition $B^2 - 4AC = 0$ doit être remplie. Puisque $B = 0$, on a donc nécessairement $C = 0$; ce qui ramène à la forme

$$Ay^2 + Ex = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 = 2p'x.$$

L'équation trouvée étant de même forme que l'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet, toutes les propriétés et toutes les équations qui ne dépendent dans ce cas que du paramètre $2p$, dépendront d'une manière identique du paramètre $2p'$, lorsque la parabole sera rapportée à un diamètre et à la tangente correspondante.

En particulier, l'équation de la tangente à la parabole au point (x_1, y_1) étant, dans le premier système,

$$yy_1 = p(x + x_1),$$

cette équation sera dans le second système

$$yy_1 = p'(x + x_1);$$

ce qui montre que la sous-tangente sera toujours égale au double de l'abscisse du point de contact, que les axes choisis soient obliques ou rectangulaires.

Il est d'ailleurs facile d'exprimer p' en fonction de p.

Désignons par (x_1, y_1) les anciennes coordonnées OP et MP du point M (nouvelle origine). Nous aurons, en menant par le sommet O la corde OAB parallèle à la tangente My' (*fig.* 105):

$$MA = OT = OP = x_1$$

et

$$MT = \sqrt{MP^2 + TP^2} = \sqrt{y_1^2 + 4x_1^2} = OA.$$

Les coordonnées du sommet O par rapport aux nouveaux axes sont donc exprimées par

$$x_1 \quad \text{et} \quad \sqrt{y_1^2 + 4x_1^2}.$$

L'équation $y^2 = 2p'x$ devant être satisfaite par ces valeurs, on aura

$$y_1^2 + 4x_1^2 = 2p'x_1,$$

d'où

$$2p' = \frac{y_1^2}{x_1} + 4x_1.$$

Mais, par rapport aux anciens axes, on a

$$y_1^2 = 2px_1,$$

d'où

$$\frac{y_1^2}{x_1} = 2p.$$

Il vient donc

$$2p' = 2p + 4x_1.$$

Le nouveau paramètre $2p'$ est, par suite, égal à l'ancien paramètre $2p$ augmenté de quatre fois l'abscisse de la nouvelle origine par rapport aux anciens axes. Comme on peut écrire

$$\frac{p'}{2} = x_1 + \frac{p}{2},$$

on peut dire encore que *la distance du foyer à la nouvelle origine représente le quart du nouveau paramètre.*

Aire d'un segment parabolique.

217. Supposons qu'on demande l'aire comprise entre l'arc de parabole MOM′ et sa corde MM′ (*fig.* 106).

Rapportons la parabole au diamètre Ox conjugué à la corde MM′ et à la tangente correspondante Oy. Son équation sera alors

$$y^2 = 2p'x.$$

Si l'on désigne par u l'aire OPM, comprise entre l'arc OM et les coordonnées OP et MP du point M, par θ l'angle yOx, on aura (**164**)

$$u' = y \sin\theta = \sqrt{2p'} \cdot \sin\theta \cdot x^{\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte (*Compl. d'Alg.*, 160):

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2p'} \cdot \sin\theta \cdot x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Pour $x = 0$, on a $u = 0$. Par conséquent, la constante C est égale à zéro. On a donc simplement

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2p'x} \cdot \sin\theta \cdot x = \frac{2}{3}yx \sin\theta.$$

Dans cette formule, x et y sont les coordonnées du point M, extrémité de l'arc OM.

Considérons le parallélogramme MPOQ formé sur ces coordonnées. L'aire de ce parallélogramme aura pour expression $yx \sin \theta$. Donc l'aire mixtiligne MOP est les $\frac{2}{3}$ de l'aire du parallélogramme MPOQ. On prouvera de même que l'aire mixtiligne M'OP est les $\frac{2}{3}$ du parallélogramme M'POQ'. On arrive donc à ce résultat remarquable :

L'aire d'un segment parabolique tel que MOM', *est les* $\frac{2}{3}$ *du parallélogramme qui a pour côtés la corde et la flèche du segment, cette flèche étant mesurée sur le diamètre conjugué à la corde du segment.*

L'aire du triangle MOM' est la moitié de celle du parallélogramme MM'QQ'. Si l'on regarde le point O comme le *sommet* du segment MOM' et la corde MM' comme sa *base*, on peut donc dire encore qu'*un segment parabolique équivaut aux* $\frac{4}{3}$ *du triangle de même base et de même hauteur.*

Questions diverses.

218. I. *Vérifier par l'analyse que le lieu des projections du foyer sur les tangentes à la parabole* $y^2 = 2px$ *est la tangente au sommet.*

Prenons l'équation de la tangente sous la forme

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \tag{1}$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette tangente est

$$y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right) = -\frac{x}{m} + \frac{p}{2m}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) sont simultanées, lorsqu'on suppose que x et y représentent les coordonnées du point d'intersection des deux droites considérées. Si on les retranche membre à membre, on obtient

$$0 = mx + \frac{x}{m} = (m^2 + 1)x.$$

c'est-à-dire

$$x = 0.$$

équation de l'axe des y ou de la tangente au sommet.

219. II. *Trouver le lieu décrit par le sommet d'un angle déterminé dont les côtés restent constamment tangents à une parabole donnée.*

Soit

$$y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole proposée. Soient

$$(1) \qquad y = mx + \frac{p}{2m},$$

$$(2) \qquad y = m'x + \frac{p}{2m'},$$

les équations des deux tangentes à la courbe. Si elles font l'angle voulu α, on devra avoir

$$(3) \qquad -\operatorname{tang}\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

Si l'on considère les équations (1) et (2) comme simultanées, y et x représenteront les coordonnées du sommet de l'angle mobile.

On déduira de l'équation (1)

$$2my = 2m^2x + p,$$

d'où, en ordonnant par rapport à m,

$$(4) \qquad 2x.m^2 - 2y.m + p = 0.$$

Le résultat fourni par l'équation (2) traitée de la même manière ne peut différer que par le changement de m en m'. Par suite, l'équation (4) a pour racines m et m'. On a donc

$$m + m' = \frac{y}{x}, \quad mm' = \frac{p}{2x},$$

d'où

$$m - m' = \sqrt{(m+m')^2 - 4mm'} = \frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{x}.$$

L'équation (3) donne alors

$$-\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\sqrt{y^2 - 2px}}{2x + p}.$$

On en déduit, en élevant au carré,

$$4y^2 - 4\operatorname{tang}^2\alpha.x^2 - 4p(2 + \operatorname{tang}^2\alpha)x - p^2\operatorname{tang}^2\alpha = 0.$$

Cette équation est l'équation du lieu : elle représente évidemment une hyperbole.

Pour une même valeur de x, cette équation donne deux valeurs de y égales et de signes contraires. Par conséquent, l'hyperbole est rapportée à son axe transverse. Pour avoir l'abscisse du centre, il suffira d'égaler à zéro la dérivée partielle du premier membre de l'équation par rapport à x (**111**). Il viendra

$$-8\operatorname{tang}^2\alpha.x - 4p(2 + \operatorname{tang}^2\alpha) = 0.$$

c'est-à-dire

$$x = -\frac{2 + \operatorname{tang}^2\alpha}{2\operatorname{tang}^2\alpha}.p.$$

Si l'on transporte l'origine en ce point, les termes du second degré ne

changeront pas, le terme en x disparaîtra et le terme indépendant deviendra (125)

$$-p^2\tang^2\alpha+\frac{-4p(2+\tang^2\alpha)\times-\dfrac{2+\tang^2\alpha}{2\tang^2\alpha}\cdot p}{2}$$
$$=\frac{4p^2(1+\tang^2\alpha)}{\tang^2\alpha}=\frac{4p^2}{\sin^2\alpha}.$$

L'équation de l'hyperbole rapportée à son centre sera donc

$$4y^2-4\tang^2\alpha.x^2+\frac{4p^2}{\sin^2\alpha}=0,$$

ou

$$y^2-\tang^2\alpha.x+\frac{p^2}{\sin^2\alpha}=0.$$

On voit alors que les asymptotes de la courbe ont pour équations

$$y=\pm\tang\alpha.x.$$

Si on met l'équation de l'hyperbole sous la forme ordinaire

$$\frac{x^2}{\dfrac{p^2}{\sin^2\alpha\tang^2\alpha}}-\frac{y^2}{\dfrac{p^2}{\sin^2\alpha}}=1,$$

on trouve pour valeur de l'axe transverse

$$\frac{2p}{\sin\alpha\tang\alpha}=\frac{2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

et pour valeur de l'axe imaginaire

$$\frac{2p}{\sin\alpha}.$$

La demi-distance focale de l'hyperbole sera donc égale à

$$\sqrt{\frac{p^2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}+\frac{p^2}{\sin^2\alpha}}=\frac{p}{\sin^2\alpha}.$$

Mais la nouvelle abscisse du foyer de la parabole donnée est, d'après ce qui précède,

$$\frac{p}{2}+\frac{(2+\tang^2\alpha)p}{2\tang^2\alpha}=\frac{2p(1+\tang^2\alpha)}{2\tang^2\alpha}=\frac{p}{\sin^2\alpha}.$$

Ainsi le foyer de la parabole se confond avec le foyer de droite de l'hyperbole obtenue.

De plus, l'équation de la directrice de la parabole devient (par suite de la transposition de l'axe des y au centre de l'hyperbole)

$$x=-\frac{p}{2}+\frac{(2+\tang^2\alpha)p}{2\tang^2\alpha}=\frac{p}{\tang^2\alpha};$$

tandis que l'équation de la directrice de droite de l'hyperbole est (d'après la formule connue $x = \frac{a^2}{c}$)

$$x = \frac{\frac{p^2}{\sin^2\alpha \tang^2\alpha}}{\frac{p}{\sin^2\alpha}} = \frac{p}{\tang^2\alpha}.$$

La directrice de la parabole se confond donc aussi avec la directrice de droite de l'hyperbole.

Si l'on suppose *droit* l'angle des deux tangentes à la parabole, on doit poser

$$\tang\alpha = \infty,$$

c'est-à-dire, d'après la valeur

$$-\tang\alpha = \frac{2\sqrt{y^2 - 2px}}{2x + p},$$

$$2x + p = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{p}{2}.$$

On en conclut que *le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est précisément la directrice de la courbe.*

Il est à noter que, si les tangentes à la parabole doivent faire, au lieu de l'angle α, l'angle supplémentaire $\pi - \alpha$, comme l'équation qu'on vient d'étudier contient seulement $\tang^2\alpha$, rien ne sera changé à la solution. En effet, lorsque deux tangentes à la parabole forment l'angle $\pi - \alpha$, elles forment aussi l'angle α, et réciproquement. En outre, les points situés à droite de la directrice de la parabole correspondent aux tangentes dont l'angle est obtus, et les points situés à gauche aux tangentes dont l'angle est aigu; donc, la partie de droite de l'hyperbole convenant à l'angle α supposé obtus, la partie de gauche conviendra à l'angle $\pi - \alpha$.

Remarque. — Nous venons de dire que, de chacun des points extérieurs situés à droite de la directrice de la parabole partent deux tangentes dont l'angle est obtus, tandis que l'angle des tangentes qui partent des points situés à gauche de la directrice est aigu. On le vérifie immédiatement en reprenant l'équation

$$-\tang\alpha = \frac{2\sqrt{y^2 - 2px}}{2x + p} \quad \text{ou} \quad \tang\alpha = \frac{-2\sqrt{y^2 - 2px}}{2x + p}.$$

Tant que le point de départ (x, y) des tangentes sera à droite de la directrice, on aura

$$2x + p > 0,$$

c'est-à-dire

$$\tang\alpha < 0.$$

Lorsque ce point (x, y) sera à gauche de la directrice, son abscisse sera négative et plus grande que $\frac{p}{2}$ en valeur absolue. On aura donc

$$2x + p < 0,$$

c'est-à-dire

$$\tang\alpha > 0.$$

220. III. *Étant donné un arc de parabole, retrouver les éléments de la courbe.*

Si l'on mène (*fig.* 107) deux cordes parallèles mm', nn', leurs milieux détermineront un diamètre ML de la parabole. La parallèle T'MT menée par le point M aux cordes mm' et nn', sera la tangente à la courbe au point M; et si l'on fait l'angle TMF égal à l'angle LMT', la droite MF sera un lieu du foyer F (210). Deux autres cordes parallèles pp' et qq' permettront de déterminer un autre diamètre RQ et une autre tangente S'RS. Si l'on fait l'angle SRF égal à l'angle QRS', la droite RF sera un second lieu du foyer F qui se trouvera dès lors à l'intersection des droites MF et RF. La parallèle menée par le point F à la direction des diamètres donnera l'axe de la courbe. Si l'axe coupe l'arc proposé, on aura le sommet de la parabole en A. Sinon, on abaissera du foyer F sur la tangente T'MT la perpendiculaire FI; le point I appartenant à la tangente au sommet, on n'aura qu'à faire passer par le point I une perpendiculaire à l'axe : le pied de cette perpendiculaire sur l'axe sera le sommet. Si l'on prend AD = AF, le point D sera le pied de la directrice.

CHAPITRE VII.

DES SECTIONS CONIQUES ET CYLINDRIQUES.

Des sections planes d'une surface conique de révolution.

221. *Nous reviendrons au point de vue des anciens et nous assignerons une nouvelle origine commune aux trois courbes du second degré, en les étudiant comme sections d'un cône par un plan.*

Considérons une surface conique de révolution, c'est-à-dire une surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe fixe qu'elle coupe toujours au même point, et avec lequel elle fait toujours le même angle. Cet angle constant est le *demi-angle* de la surface qui a pour *sommet* le point d'intersection de l'axe et de la génératrice : comme il s'agit de droites illimitées, le sommet de la surface la partage en deux *nappes* indéfinies.

Désignons par 2β l'angle de la surface, et coupons-la (*fig.* 108) par un plan qui détermine la section AMB. Menons par l'axe HH' un plan perpendiculaire à celui de la section : ce plan coupera le plan de la section suivant la droite AB, et la surface conique suivant les génératrices SF et SG. Nous rapporterons la section AMB à la droite AB prise comme axe des x, et à la perpendiculaire Ay à cette droite : cette perpendiculaire Ay, intersection du plan sécant et du plan tangent à la surface conique au point A, est évidemment tangente en A à la courbe AMB (*Géom. descrip.*, Livre II).

L'angle SAx mesure l'angle du plan sécant et de la génératrice SA : nous le représenterons par α. Nous poserons en outre

$$SA = d.$$

Ceci posé, prenons un point M sur la section et menons son ordonnée MP : MP sera perpendiculaire au plan FSG (*Géom.*, 183). Par MP, conduisons un plan perpendiculaire à l'axe HH' : il coupera la surface (puisqu'elle est de révolution) suivant une circonférence de cercle IML, et l'on aura

$$MP^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = IP.PL.$$

Il suffit donc, pour avoir l'équation de la section AMB, d'exprimer les deux facteurs IP et PL.

Le triangle AIP donne immédiatement

$$\frac{IP}{AP \text{ ou } x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta},$$

c'est-à-dire

$$IP = \frac{x\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Menons par le point P la parallèle PDK à la génératrice SG. Nous aurons

$$PL = DC = AC - AD.$$

Le triangle SAC donne

$$AC = 2d\sin\beta.$$

Le triangle ADP donne ensuite

$$\frac{AD}{AP \text{ ou } x} = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta},$$

d'où

$$AD = \frac{x\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}.$$

Il en résulte

$$PL = 2d\sin\beta - \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}\cdot x.$$

L'équation de la section sera donc

$$(1) \qquad y^2 = 2d\sin\alpha\,\text{tang}\,\beta.x - \frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}\cdot x^2.$$

Cette équation peut représenter les trois courbes du second

degré (204) : elle prouve que la droite AB est l'axe focal de la section. Suivant que la quantité $\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}$ est positive, négative ou nulle, on obtient une ellipse, une hyperbole ou une parabole. L'angle α ne pouvant dépasser 180°, le rapport $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\beta}$ est essentiellement positif; par suite, $\alpha+2\beta$ ne pouvant surpasser 360° :

L'ellipse correspondra à

$$\sin(\alpha+2\beta)>0 \quad \text{ou à} \quad \alpha+2\beta<180°;$$

l'hyperbole correspondra à

$$\sin(\alpha+2\beta)<0 \quad \text{ou à} \quad \alpha+2\beta>180°;$$

la parabole correspondra à

$$\sin(\alpha+2\beta)=0 \quad \text{ou à} \quad \alpha+2\beta=180°.$$

On peut remarquer que lorsqu'on a $\alpha+2\beta<180°$, le plan sécant coupe toutes les génératrices de la surface sur une même nappe, ce qui correspond bien à la nature de l'ellipse, courbe fermée. Lorsqu'on a $\alpha+2\beta>180°$, le plan sécant coupe à la fois les deux nappes, mais ne rencontre sur chacune d'elles qu'une partie des génératrices : l'hyperbole est, en effet, composée de deux parties illimitées. Enfin, lorsqu'on a $\alpha+2\beta=180°$, le plan sécant parallèle à la génératrice SG, rencontre sur une même nappe toutes les génératrices moins SG; et la parabole est une courbe illimitée dans un seul sens.

222. *On peut demander*, réciproquement, *si sur une surface conique de révolution déterminée on peut toujours placer une courbe du second degré donnée par son équation.*

L'équation qui réunit les trois courbes du second degré, lorsqu'on les suppose rapportées à l'axe focal et à la tangente à l'un des sommets correspondants, est de la forme (204)

$$y^2=2px+qx^2. \tag{2}$$

La question posée revient donc à chercher si l'on peut toujours trouver pour les constantes d et α des valeurs admissibles, lorsqu'on identifie l'équation qu'on vient d'écrire et l'équation générale du n° 221.

On aura

$$p=d\sin\alpha\tan\beta \tag{3}$$

et

$$q=-\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}. \tag{4}$$

Mais (*Trig.*, 26)

$$\cos 2\beta - \cos(2\alpha + 2\beta) = 2\sin(\alpha + 2\beta)\sin\alpha.$$

L'équation (4) devient, par suite,

$$\cos(2\alpha + 2\beta) - \cos 2\beta = 2q\cos^2\beta,$$

d'où

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = 2\cos^2\beta - 1 + 2q\cos^2\beta = 2(1+q)\cos^2\beta - 1.$$

On a, en effet,

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1.$$

Le second membre de l'équation (4) ainsi transformée, devant tomber entre $+1$ et -1, puisque le premier est un cosinus, on devra avoir à la fois

$$2(1+q)\cos^2\beta - 1 < 1 \quad \text{et} \quad 2(1+q)\cos^2\beta - 1 > -1,$$

c'est-à-dire

$$\cos^2\beta < \frac{1}{1+q} \quad \text{et} \quad 1+q > 0.$$

Dans le cas de l'ellipse ($2a$ étant le grand axe de la courbe et $2b$ le petit axe), $q = -\frac{b^2}{a^2}$. Les deux inégalités précédentes étant alors nécessairement satisfaites, on obtiendra toujours pour $2\alpha + 2\beta$ et, par conséquent, pour α une valeur convenable. Cette valeur de α entraînera pour d une valeur positive, comme le montre l'équation (3).

Il en résulte qu'*une ellipse quelconque peut toujours être placée sur une surface conique de révolution déterminée.*

Dans le cas de l'hyperbole, $q = \frac{b^2}{a^2}$. q étant positif, l'inégalité $1+q>0$ est satisfaite d'elle-même, tandis que l'inégalité $\cos^2\beta < \frac{1}{1+q}$ devient

$$\cos^2\beta < \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Mais le demi-angle des asymptotes de l'hyperbole étant désigné par $\frac{1}{2}\theta$, nous savons (193) qu'on a

$$\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

L'inégalité $\cos^2\beta < \frac{a^2}{a^2+b^2}$ revient donc à

$$\cos^2\beta < \cos^2\frac{1}{2}\theta \quad \text{ou à} \quad \beta > \frac{1}{2}\theta$$

(puisque le demi-angle du cône est nécessairement aigu comme le demi-angle des asymptotes).

Ainsi, *une hyperbole ne peut être placée sur une surface conique de révolution, qu'autant que l'angle de la surface surpasse l'angle réel des asymptotes.*

Dans le cas de la parabole, $q = 0$, et les inégalités considérées sont satisfaites d'elles-mêmes.

Une parabole quelconque peut donc toujours être placée sur une surface conique de révolution déterminée.

Remarque. — Dans le cas de la parabole, l'équation (4) devient

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\beta,$$

et il est facile d'en déduire

$$\alpha = \pi - 2\beta,$$

comme cela doit être (**221**).

Des sections planes d'une surface cylindrique de révolution.

223. Reprenons l'équation générale des sections coniques sous la forme

$$(1) \qquad y^2 = \frac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}\cdot x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}\cdot x^2.$$

D'après le triangle rectangle SAE (*fig.* 108), on peut remplacer $d\sin\beta$ par le rayon AE du *parallèle* qui passe par le sommet A de la section.

Ceci posé, si le sommet de la surface conique se transporte à l'infini sur l'axe, elle dégénère en une surface cylindrique de révolution ; et si l'on suppose que les génératrices de la surface continuent à s'appuyer sur la section circulaire AE, le rayon de la surface cylindrique obtenue est $AE = r$.

Pour avoir l'équation de la section cylindrique, il faut faire dans l'équation (1) $2\beta = 0$ (ce qui donne $\cos\beta = 1$ et $\sin\beta = 0$), en même temps que $d\sin\beta = r$ (d devient ∞, et le produit indéterminé $d\sin\beta$ est réellement égal à r d'après la remarque qui précède). On trouve alors

$$y^2 = 2r\sin\alpha\,.\,x - \sin^2\alpha\,.\,x^2.$$

Cette équation ne peut représenter qu'une ellipse. Les axes de cette ellipse étant $2a$ et $2b$, on a (**204**)

$$\sin\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r\sin\alpha = \frac{b^2}{a},$$

d'où

$$b = r \quad \text{et} \quad a = \frac{r}{\sin\alpha};$$

c'est ce qu'indique immédiatement la *fig.* 109.

Les sections planes d'une surface cylindrique de révolution sont donc des ellipses dont le grand axe est quelconque, mais dont le petit axe est constamment égal au diamètre de la surface.

On retrouverait directement ce résultat en suivant la même marche qu'au n° **221**.

Des sections planes faites dans un cône circulaire oblique, perpendiculairement à son plan principal.

224. Considérons un cône circulaire oblique (*Géom.*, **227**). Le plan mené par l'axe SC (*fig.* 110) perpendiculairement au plan de la base FG est le *plan principal* du cône. Il contient (*Géom.*, **58**) la génératrice *maximum* SF et la génératrice *minimum* SG. Nous conserverons les mêmes notations que précédemment, et nous désignerons en outre par γ et par δ les angles que forment les génératrices SF et SG avec le plan de la base. Si l'on prend sur la section AMB un point M quelconque ayant MP et AP pour coordonnées, et si l'on mène par MP un plan parallèle à la base du cône, on déterminera une circonférence de cercle IML dont le point M aura aussi MP pour ordonnée; car MP perpendiculaire à AB est perpendiculaire au plan principal du cône, puisque le plan sécant est, par hypothèse, perpendiculaire à ce plan principal. On aura donc encore

$$\text{MP}^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = \text{IP}.\text{PL}.$$

Le triangle AIP donne immédiatement

$$\frac{\text{IP}}{\text{AP ou } x} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

d'où

$$\text{IP} = \frac{x\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Menons par le point P la parallèle PDK à la génératrice SG. Nous aurons

$$\text{PL} = \text{DE} = \text{AE} - \text{AD}.$$

Le triangle SAE donne

$$\frac{AE}{d} = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta}, \quad \text{d'où} \quad AE = \frac{d\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta}.$$

Le triangle ADP donne ensuite

$$\frac{AD}{AP \text{ ou } x} = \frac{\sin(\alpha+\pi-\gamma-\delta)}{\sin\delta}, \quad \text{d'où} \quad AD = \frac{x\sin(\gamma+\delta-\alpha)}{\sin\delta}.$$

On aura donc

$$PL = \frac{d\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta} - \frac{\sin(\gamma+\delta-\alpha)}{\sin\delta}\cdot x.$$

Par suite, l'équation $y^2 = IP.PL$ deviendra

$$y^2 = \frac{d\sin\alpha\sin(\gamma+\delta)}{\sin\gamma\sin\delta}\cdot x - \frac{\sin\alpha\sin(\gamma+\delta-\alpha)}{\sin\gamma\sin\delta}\cdot x^2.$$

L'angle $\gamma+\delta-\alpha$ est évidemment inférieur à 180°; mais il peut être négatif. L'équation obtenue représentera donc une ellipse si l'on a

$$\sin(\gamma+\delta-\alpha) > 0 \quad \text{ou} \quad \gamma+\delta-\alpha > 0;$$

une hyperbole si l'on a

$$\sin(\gamma+\delta-\alpha) < 0 \quad \text{ou} \quad \gamma+\delta-\alpha < 0;$$

une parabole si l'on a

$$\sin(\gamma+\delta-\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma+\delta-\alpha = 0.$$

Si l'on désigne par 2β l'angle FSG, on peut remplacer $\gamma+\delta$ par $180°-2\beta$, et les conditions précédentes deviennent

$$\alpha+2\beta < 180°, \quad \alpha+2\beta > 180°, \quad \alpha+2\beta = 180°,$$

comme au n° **221**.

Section anti-parallèle du cône oblique.

225. Cherchons dans quels cas la section plane obtenue est un cercle. Il faut que l'on ait (**52**)

$$\frac{\sin\alpha\sin(\gamma+\delta-\alpha)}{\sin\gamma\sin\delta} = 1$$

ou

$$\sin\alpha\sin(\gamma+\delta-\alpha) = \sin\gamma\sin\delta.$$

Mais

$$\cos(2\alpha-\gamma-\delta) - \cos(\gamma+\delta) = 2\sin\alpha\sin(\gamma+\delta-\alpha)$$

et

$$\cos(\gamma-\delta) - \cos(\gamma+\delta) = 2\sin\gamma\sin\delta.$$

L'équation de condition revient donc à

$$\cos(2\alpha - \gamma - \delta) = \cos(\gamma - \delta).$$

Or (*Trig.*, 8) les arcs qui ont un même cosinus sont compris dans les formules

$$(p) \qquad 2n\pi + a$$

et

$$(q) \qquad 2n\pi - a.$$

Il en résulte que ceux de ces arcs qui sont renfermés dans la même formule (p) ou (q) ont pour différence un nombre exact de circonférences, tandis que ceux qui ne sont pas renfermés dans la même formule ont pour somme un nombre exact de circonférences.

On devra donc avoir, soit

$$2\alpha - \gamma - \delta - (\gamma - \delta) = 2n'\pi \quad \text{ou} \quad \alpha - \gamma = n'\pi;$$

soit

$$2\alpha - \gamma - \delta + (\gamma - \delta) = 2n'\pi \quad \text{ou} \quad \alpha - \delta = n'\pi.$$

Comme les angles α, δ et γ sont inférieurs à π, on ne pourra donner à n' que la valeur zéro. Par suite, *la section plane d'un cône circulaire oblique est une circonférence de cercle :*

1° Lorsqu'on a $\alpha = \gamma$, c'est-à-dire (*fig.* 110) *lorsque le plan sécant est parallèle à la base du cône* (*Géom.*, 227);

2° Lorsqu'on a $\alpha = \delta$, c'est-à-dire *lorsque la trace* AB *du plan sécant sur le plan principal, et la trace* FG *de la base du cône sur le même plan, sont anti-parallèles par rapport aux côtés de l'angle* FSG (*Géom.*, 113) : d'où le nom d'*anti-parallèle* donné à cette seconde section circulaire.

Dans le cas du cône droit, les deux solutions se confondent.

226. *On peut très-facilement retrouver le résultat précédent par la Géométrie.*

En effet, si la section AMB est un cercle (*fig.* 110), on a à la fois

$$MP^2 = AP.PB \quad \text{et} \quad MP^2 = IP.PL,$$

d'où

$$AP.PB = IP.PL \quad \text{ou} \quad \frac{AP}{IP} = \frac{PL}{PB}.$$

Et si cette relation est satisfaite, les triangles API et BPL sont semblables. L'angle IAP est alors égal à l'angle PLB ou α (supplément de IAP) à δ (supplément de PLB).

Réciproquement, si $\alpha = \delta$, les triangles API et BPL sont semblables, et la relation

$$AP \cdot PB = IP \cdot PL$$

est satisfaite (*).

Des sections planes faites dans un cylindre circulaire oblique, perpendiculairement à son plan principal.

227. Si l'on suppose que le sommet du cône circulaire oblique s'éloigne à l'infini sur la génératrice SF, le cône dégénère en cylindre circulaire oblique (*Géom.*, **214**). Et si l'on admet que les génératrices de la surface continuent à s'appuyer sur la section circulaire AE, le diamètre de la base du cylindre sera

$$AE = 2r.$$

D'après le triangle SAE, on peut d'ailleurs poser

$$\frac{d}{2r} = \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)} \quad \text{ou} \quad d = \frac{2r\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}.$$

Si l'on reprend l'équation générale des sections du cône oblique (**224**), pour passer à l'équation de la section cylindrique, il faut d'abord y remplacer d par $\frac{2r\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$; ce qui donne

$$y^2 = \frac{2r\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot x - \frac{\sin\alpha\sin(\gamma+\delta-\alpha)}{\sin\gamma\sin\delta} \cdot x^2.$$

On doit faire ensuite dans le résultat obtenu

$$\delta = \pi - \gamma,$$

d'où

$$y^2 = \frac{2r\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot x - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} \cdot x^2.$$

Cette équation ne peut représenter qu'une ellipse. Les axes de cette ellipse étant $2a$ et $2b$, on a

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \frac{r\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{b^2}{a},$$

d'où

$$b = r \quad \text{et} \quad a = \frac{r\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

C'est ce qu'indique immédiatement la *fig.* 111.

(*) On fait usage de la propriété qu'on vient de démontrer dans la construction des cartes géographiques.

Les sections planes d'un cylindre circulaire oblique sont donc des ellipses dont le grand axe est quelconque, mais dont le petit axe est constamment égal au diamètre de la base du cylindre.

On retrouverait directement ce résultat, en suivant la même marche qu'au n° 224.

On voit immédiatement que la section obtenue sera un cercle si l'on a $\sin\alpha = \sin\gamma$, c'est-à-dire (puisqu'il s'agit d'angles inférieurs à 180°) si l'on a

$$\alpha = \gamma \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi - \gamma.$$

Dans le premier cas, la section est parallèle à la base du cylindre; dans le second, elle est évidemment *anti-parallèle* par rapport à cette base.

En raisonnant comme nous l'avons fait au n° 226, on vérifiera très-simplement ce résultat par la Géométrie.

Dans le cas du cylindre droit, les deux sections circulaires se confondent.

CHAPITRE VIII.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES RELATIVES AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Pôle et polaire dans les courbes du second degré.

228. Il s'agit de généraliser par rapport aux courbes du second degré les théorèmes déjà établis pour la circonférence de cercle (*Compl. de Géom.*, 33 et suivants).

Si, par un point P *pris dans le plan d'une section conique, on mène une sécante quelconque* CD *à cette conique, le lieu du point* I *conjugué harmonique du point* P *par rapport à la corde* CD, *est une droite conjuguée au diamètre* Px *qui passe par le point* P (*fig.* 112).

Nous prendrons pour axe des x le diamètre Px et pour axe des y la droite PR parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales. Le point I étant le conjugué harmonique du point P par rapport à la droite CD, nous aurons (*Compl. de Géom.*, 25)

$$\frac{\text{IC}}{\text{ID}} = \frac{\text{PC}}{\text{PD}}.$$

Les points H, C′ et D′ étant les pieds des ordonnées des points I, C et D, on aura nécessairement (à cause des parallèles)

$$\frac{\text{HC}'}{\text{HD}'} = \frac{\text{PC}'}{\text{PD}'};$$

c'est-à-dire, en désignant par x_1, y_1 et x_2, y_2, les coordonnées des extrémités C et D de la corde CD, par x et y les coordonnées du point I,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{x_1}{x_2}.$$

On en déduit

$$xx_2 - x_1x_2 = x_1x_2 - xx_1$$

ou

$$(x_1 + x_2)x - 2x_1x_2 = 0. \tag{1}$$

Pour avoir l'équation du lieu demandé, il faut éliminer les abscisses x_1 et x_2 qui particularisent la position de la corde CD. D'après les axes choisis, l'équation de la conique est de la forme

$$Ay^2 + Cx^2 + Ex + F = 0, \tag{2}$$

puisqu'à une même valeur de x doivent correspondre deux valeurs de y égales et de signes contraires. L'équation de la sécante CD qui passe par l'origine est de la forme

$$y = ax. \tag{3}$$

Si l'on élimine y entre les équations (2) et (3), il vient

$$(Aa^2 + C)x^2 + Ex + F = 0.$$

Les racines de l'équation obtenue sont précisément les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection C et D. On aura donc

$$x_1 + x_2 = -\frac{E}{Aa^2 + C} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{F}{Aa^2 + C}.$$

Transportant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve en simplifiant

$$Ex + 2F = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2F}{E},$$

équation d'une droite IH parallèle à l'axe des y.

On dit que le point P est le *pôle* de la droite IH, et que la droite IH est la *polaire* du point P, par rapport à la conique considérée.

229. *Remarque.* — Dans le cas de la parabole, au lieu de l'équation (2), on a pour équation de la courbe

$$Ay^2 + Ex + F = 0;$$

car il faut que C soit égal à zéro pour que la condition

$B^2 - 4AC = 0$ soit remplie. L'abscisse du point d'intersection du diamètre Px avec la parabole est alors $x = -\frac{F}{E}$; ce qui montre que ce point d'intersection est au milieu de la distance PH. En particulier, *la polaire du foyer de la parabole est la directrice.* La même propriété existe pour l'ellipse et pour l'hyperbole (voir 233).

230. Prenons l'équation générale des courbes du second degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

L'équation d'une tangente menée à la courbe donnée par un point (x_1, y_1) pris sur cette courbe est (74)

$$(2Ay_1 + Bx_1 + D)y + (By_1 + 2Cx_1 + E)x + Dy_1 + Ex_1 + 2F = 0.$$

Si l'on veut mener à la conique une tangente par un point *extérieur* (α, β), on aura immédiatement pour équation de la *corde des contacts* (144)

$$(L)\quad (2Ay_1 + Bx_1 + D)\beta + (By_1 + 2Cx_1 + E)\alpha + Dy_1 + Ex_1 + 2F = 0.$$

y_1 et x_1 représentent alors les coordonnées courantes et on peut les remplacer par y et x.

Si l'on choisit les axes, comme au n° 228, et si l'on place l'origine au point (α, β), on aura

$$B = D = \alpha = \beta = 0.$$

L'équation de la corde des contacts deviendra donc

$$Ex + 2F = 0.$$

En se reportant au n° 228, on peut dire alors que la polaire du point P (*supposé extérieur*) *n'est autre chose que la corde de contact* (*indéfiniment prolongée*) *des tangentes menées par le point* P *à la conique proposée.*

Remarques. — I. Si le point P est *intérieur*, la corde de contact est *imaginaire;* mais son équation continue toujours de représenter la polaire du point P.

II. *Si le pôle* P *est sur la courbe*, il faut faire $F = 0$. L'équation de la polaire ou de la corde des contacts devient $x = 0$, et *la polaire se confond* avec l'axe des y ou *avec la tangente menée à la courbe par le point* P.

III. Si le pôle P est au centre de la conique, on a $E = 0$. L'équation de la polaire est donc $x = \infty$, c'est-à-dire qu'elle se transporte à l'infini.

IV. Le pôle d'une sécante IH (*fig.* 112) est le point de rencontre P des tangentes qui correspondent aux points d'intersection de cette sécante et de la conique.

V. Les points P et H sont *réciproques*, c'est-à-dire que la polaire de l'un passe par l'autre. En effet, l'équation (L) de la corde des contacts ne change pas quand on permute les coordonnées β, α, et les coordonnées courantes y_1, x_1 ou y, x. Ainsi, IH étant la polaire du point P, la droite PR est à son tour la polaire du point H.

VI. Lorsque, l'origine étant toujours au point P, les axes auxquels la conique est rapportée sont quelconques, l'équation de la corde des contacts ou de la polaire du point P devient [en faisant $\alpha = \beta = 0$ dans l'équation (L)]

$$Dy + Ex + 2F = 0.$$

231. *Si le pôle* P *décrit la droite* PR, *toutes les polaires correspondantes aux diverses positions du point* P *se croisent au point* H, *pôle de* PR (*fig.* 112).

Pour toutes les polaires considérées, on a $\alpha = 0$. Leur équation, d'après les axes choisis, est donc (230)

$$2Ay\beta + Ex + 2F = 0.$$

Si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on trouve pour l'abscisse constante du pied des polaires sur l'axe des x,

$$x = -\frac{2F}{E},$$

c'est-à-dire celle du point H.

Réciproquement, *si l'on fait tourner la droite* PR *autour du point* P, *tous les pôles correspondants aux diverses positions de la droite* PR *se trouveront sur la droite* IH, *polaire du point* P.

Si nous conservons les mêmes axes, IH aura toujours pour équation

$$Ex + 2F = 0.$$

Désignons par (α, β) les coordonnées du pôle d'une droite quelconque passant par le point P. L'équation de cette droite sera de la forme (230)

$$2Ay\beta + (2Cx + E)\alpha + Ex + 2F = 0;$$

et comme elle passe par l'origine, son équation devra être satisfaite pour $y = 0$ et $x = 0$. Il viendra alors

$$E\alpha + 2F = 0,$$

relation qui prouve que le point (α, β) appartient à la droite IH.

232. *Conséquences.* — I. *Si des différents points d'une droite on trace des couples de tangentes à une conique, les cordes de contact viennent se croiser au pôle de la droite considérée* (230, 231).

II. *Si l'on mène par un même point une série de sécantes à une conique, les points de rencontre des couples de tangentes correspondantes appartiennent à la polaire du point considéré* (230, 231).

III. *En joignant les pôles de deux droites par rapport à une conique, on obtient la polaire de leur point de rencontre.* En effet, ces deux droites peuvent être regardées comme les positions différentes d'une même droite passant par leur point de rencontre (231).

IV. Il résulte de là que si deux polygones d'un même nombre de côtés tracés dans le plan d'une conique sont tels, que les sommets de l'un soient les pôles des côtés de l'autre, les côtés du premier polygone auront à leur tour pour pôles les sommets du second. On donne alors à ces polygones le nom de *polaires réciproques.*

En particulier, un polygone étant circonscrit à une conique, on obtient son polaire réciproque en formant le polygone inscrit qui correspond aux points de contact de ses côtés (230, II).

233. Prenons l'équation de l'ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués,

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

On peut toujours supposer le pôle P situé sur l'axe des x (*fig.* 113), soit $OP = \alpha$. L'équation de la polaire du point P sera alors (230)

$$\frac{x\alpha}{a'^2} = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a'^2}{\alpha}.$$

Si l'on désigne par OH la valeur $\frac{a'^2}{\alpha}$, il viendra donc

$$a'^2 = OP.OH.$$

On arriverait de la même manière à un résultat analogue pour l'hyperbole.

On peut donc énoncer le théorème suivant, qu'on rapprochera de celui déjà démontré (*Compl. de Géom.*, 34) : *Dans l'ellipse ou l'hyperbole, le demi-diamètre qui passe par le pôle est moyen proportionnel entre les distances* (*comptées sur ce diamètre*) *du centre de la courbe au pôle et à la polaire.*

La relation obtenue démontre immédiatement plusieurs des résultats déjà trouvés (230). Elle prouve en particulier que si le pôle est intérieur, la polaire est extérieure à la courbe, et réciproquement. Elle prouve aussi que le pôle et la polaire sont d'un même côté par rapport au centre, dans le cas où l'axe des x est un axe transverse.

Si la courbe est rapportée à ses axes, et si l'on place le pôle au foyer, ce qui revient à poser $\alpha = c$, on aura (en désignant par z la distance inconnue de la polaire au centre)

$$z = \frac{a^2}{c}.$$

Dans l'ellipse et l'hyperbole, comme dans la parabole (229), *chaque foyer a donc pour polaire la directrice correspondante.*

234. *Si l'on mène par le point* P *à la conique considérée les deux sécantes* AB *et* CD, *les cordes* AD *et* BC *se croiseront au point* I, *les cordes* AC *et* BD *prolongées se couperont en* H, *et la droite* IH *sera la polaire du point* P (*fig.* 114).

Prenons pour axe coordonnés les deux sécantes AB et CD. L'équation de la conique sera de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Désignons PC par q et PD par q', PA par p et PD par p'.

Les équations des cordes considérées seront

$$(AD) \qquad \frac{y}{q'} + \frac{x}{p} = 1,$$

$$(BC) \qquad \frac{y}{q} + \frac{x}{p'} = 1,$$

$$(AC) \qquad \frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1,$$

$$(BD) \qquad \frac{y}{q'} + \frac{x}{p'} = 1.$$

En ajoutant les deux premières équations membre à membre, on a l'équation d'une droite passant par le point I; en ajoutant de même les deux dernières, on a l'équation d'une droite passant par le point H. Or on trouve dans les deux cas le même résultat

$$\frac{q+q'}{qq'} \cdot y + \frac{p+p'}{pp'} \cdot x = 2;$$

cette dernière équation est donc celle de la droite IH.

Cherchons les sommes $q+q'$, $p+p'$, et les produits qq', pp'.

Si l'on fait $x=0$ dans l'équation de la conique, il viendra

$$Ay^2+Dy+F=0.$$

Les racines de cette équation, ordonnées des points d'intersection de l'axe des y avec la courbe, représenteront q et q'. On aura donc

$$q+q'=-\frac{D}{A} \quad \text{et} \quad qq'=\frac{F}{A}.$$

On aura de même, en faisant $y=0$ dans l'équation donnée,

$$Cx^2+Ex+F=0,$$

d'où

$$p+p'=-\frac{E}{C} \quad \text{et} \quad pp'=\frac{F}{C}.$$

L'équation de la droite IH deviendra alors

$$\frac{-\frac{D}{A}}{\frac{F}{A}}y+\frac{-\frac{E}{C}}{\frac{F}{C}}x=2,$$

c'est-à-dire

$$Dy+Ex+2F=0;$$

ce qui démontre le théorème (230, VI).

Remarques. — I. Ayant construit IH, en joignant le point P avec les points où IH coupe la courbe, on aura les tangentes issues du point P (230). C'est la construction la plus simple qu'on puisse employer pour mener les tangentes à une conique par un point extérieur.

II. Si les cordes AC et BD se trouvaient parallèles, la droite IH leur serait aussi parallèle.

III. Le point P étant le point de rencontre des sécantes AB et CD, la droite IH contient les pôles de ces sécantes (231). D'après cela, pour tracer une tangente par un point A donné sur la courbe, on mènera une corde AB quelconque. En construisant arbitrairement le quadrilatère ABCD de la *fig.* 114, et en opérant sur ce quadrilatère comme on vient de l'indiquer, on obtiendra un lieu rectiligne du pôle de AB. En faisant varier le quadrilatère ABCD tout en conservant AB, on obtiendra un second lieu rectiligne du même pôle. Si l'on se rappelle alors que les pôles de toutes les sécantes partant du point A appartiennent à la polaire du point A (231), et que cette

polaire est précisément la tangente en A (230, II), on n'aura qu'à joindre le pôle de AB au point A pour avoir la tangente demandée.

235. Théorème de Pascal. — *Dans tout hexagone inscrit à une conique, les points de concours des côtés opposés, prolongés deux à deux, sont en ligne droite* (*fig.* 115).

Les côtés *opposés* sont séparés par deux côtés *consécutifs*.

Soit l'hexagone inscrit ABCDEF. Nous prendrons pour axe des x la diagonale AD, pour axe des y une droite quelconque passant par le point A.

La conique aura une équation de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0. \tag{1}$$

Le système des deux droites AB et CD, dont l'une passe par l'origine, sera représenté par une équation du second degré de la forme

$$A'y^2 + B'xy + Cx^2 + D'y + Ex = 0. \tag{2}$$

Les coefficients des termes en x^2 et en x peuvent être supposés les mêmes dans les équations (1) et (2), parce que la conique et le système des deux droites rencontrent l'axe des x aux mêmes points A et D.

Pour une raison semblable, le système des deux droites AF et DE sera représenté par une équation du second degré de la forme

$$A''y^2 + B''xy + Cx^2 + D''y + Ex = 0. \tag{3}$$

Retranchons membre à membre les équations (1) et (2), (1) et (3), (2) et (3); il viendra

$$(A - A')y^2 + (B - B')xy + (D - D')y = 0, \tag{4}$$

ou

$$y[(A - A')y + (B - B')x + (D - D')] = 0;$$

$$(A - A'')y^2 + (B - B'')xy + (D - D'')y = 0, \tag{5}$$

ou

$$y[(A - A'')y + (B - B'')x + (D - D'')] = 0;$$

$$(A' - A'')y^2 + (B' - B'')xy + (D' - D'')y = 0, \tag{6}$$

ou

$$y[(A' - A'')y + (B' - B'')x + (D' - D'')] = 0.$$

L'équation (4) doit être satisfaite par les coordonnées des points communs à la conique et au système des droites AB

et CD. $y = 0$ représentant l'axe des x ou la droite AD, la droite BC est nécessairement représentée par l'équation

$$(7) \qquad (A - A')y + (B - B')x + D - D' = 0.$$

L'équation (5) devant être satisfaite par les coordonnées des points communs à la conique et au système des droites AF et DE, on verra de même que la droite EF a pour équation

$$(8) \qquad (A - A'')y + (B - B'')x + D - D'' = 0.$$

Enfin, l'équation (6) devant être satisfaite par les coordonnées des points communs aux deux systèmes rectilignes AB et CD, AF et DE, si l'on met de côté le facteur $y = 0$ ou l'axe des x, l'équation

$$(9) \qquad (A' - A'')y + (B' - B'')x + D' - D'' = 0$$

représentera une droite passant par les points de concours I et L des droites AB et DE, CD et AF. Mais, en retranchant les équations (7) et (8), on aura une équation satisfaite par les coordonnées du point H commun aux droites BC et EF; et cette soustraction conduit précisément à l'équation (9). Les trois points I, L, H, sont donc en ligne droite.

Remarque. — Le théorème de Pascal ne dépend pas de la grandeur des côtés de l'hexagone inscrit, c'est-à-dire qu'il subsiste lorsque quelques-uns de ces côtés deviennent des tangentes à la conique.

236. Théorème de Brianchon. — *Dans tout hexagone circonscrit à une conique, les diagonales qui joignent les sommets opposés (c'est-à-dire le premier et le quatrième, le second et le cinquième, le troisième et le sixième) se coupent en un même point (fig.* 116).

Soit l'hexagone circonscrit ABCDEF. En joignant les points de contact successifs, nous formerons l'hexagone inscrit *abcdef*, polaire-réciproque du circonscrit (232, IV). Soient *i*, *h*, *l*, les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone inscrit. Les sommets A et D étant les pôles des côtés *af* et *cd*, le point de rencontre *i* de ces côtés sera le pôle de la diagonale AD (232, III). De même, les points *h* et *l* seront les pôles des diagonales BE et CF. D'après le théorème de Pascal, les trois points *i*, *h*, *l*, sont en ligne droite; les polaires de ces points ou les diagonales de l'hexagone circonscrit se croiseront donc en un même point, pôle de la droite *ihl* (231).

Remarque. — Le théorème de Brianchon ne dépend pas de la grandeur des côtés de l'hexagone circonscrit, c'est-à-dire

qu'il subsiste encore lorsque, quelques-uns des angles de l'hexagone devenant égaux à deux droits, les côtés correspondants ne font plus qu'une seule tangente à la conique.

Du nombre de conditions nécessaires pour déterminer une courbe du second degré.

237. D'une manière générale, le nombre de *conditions* ou le nombre de *points* nécessaires à la détermination d'une courbe quelconque est indiqué par le nombre de constantes arbitraires ou de paramètres que renferme son équation. Il est bien entendu que cette équation est alors la plus complète possible, c'est-à-dire que la courbe occupe, par rapport aux axes, une position tout à fait quelconque.

Comme la définition adoptée pourrait accroître, *dans certains cas*, le nombre de conditions cherché au delà de celui qui est réellement nécessaire, il faut avoir soin de remarquer que les coefficients *distincts* qui contiennent les constantes arbitraires étant déterminés, il en est de même de la courbe. En réalité, il faut donc compter dans ces cas spéciaux, non les constantes arbitraires qui peuvent entrer d'une manière quelconque dans les coefficients des différents termes, mais ces coefficients eux-mêmes auxquels on peut alors réserver la qualification de paramètres. C'est ainsi que l'équation du cercle présentera toujours, en tout système de coordonnées, trois paramètres seulement, quelque définition qu'on ait adoptée. S'il s'agit de coordonnées rectilignes, les coefficients des termes en x^2 et en y^2 seront toujours égaux à l'unité ; celui du terme en xy sera toujours $+2\cos\theta$ (θ étant l'angle des axes): ces conditions dépendent de la nature, de l'espèce de la courbe, et ne comptent pas comme conditions particulières de détermination. Il ne restera donc à considérer que trois paramètres *variables*, qui seront les coefficients des termes du premier degré et le terme indépendant lui-même.

238. Si la courbe donnée occupe par rapport aux axes une position particulière, son équation elle-même devient particulière. Pour répondre à la question posée d'une manière certaine, c'est-à-dire *pour rentrer dans le cas précédent*, il faut effectuer une transformation d'axes *indéterminée*, en les faisant tourner autour de l'origine (*sans changer leur inclinaison mutuelle*), et en transportant cette origine en un point quelconque. Les formules à employer sont alors (les axes étant supposés rectangulaires)

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

On introduit ainsi trois nouvelles constantes arbitraires a, b, α, et en comptant, soit les paramètres de la nouvelle équation (c'est-à-dire les coefficients des termes distincts obtenus), soit le nombre total des constantes arbitraires, on aura le nombre de conditions demandé. Il est en effet essentiel de remarquer que, d'après les explications données plus haut, *le nombre de ces conditions est égal au plus petit des deux nombres qu'on trouve en supputant, soit le nombre des constantes arbitraires, soit le nombre des coefficients distincts.*

Si l'on part de l'équation du cercle rapporté à son centre $x^2+y^2=r^2$, on voit qu'on aura à considérer *quatre constantes arbitraires* r, a, b, α, mais qu'elles n'entreront que dans *trois termes distincts.* Donc la détermination d'une *circonférence de cercle* exige toujours *trois conditions.*

Si l'on part de l'équation particulière trouvée pour la cissoïde (70)

$$y^2=\frac{x^3}{d-x},$$

on voit immédiatement que les *quatre constantes arbitraires* d, a, b, α, entreront *dans plus de quatre termes distincts.* Donc la détermination d'une *cissoïde* exige toujours *quatre conditions.*

Remarque. — Il est évident que le nombre de conditions nécessaires pour la détermination d'une certaine courbe reste invariable, quel que soit le système de coordonnées adopté.

239. Ces généralités indiquées, considérons spécialement les courbes du second degré.

L'équation la plus générale de ces courbes pouvant toujours être mise sous la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+1=0$$

(en divisant les deux membres par le terme indépendant des variables), on voit que *la détermination d'une courbe du second ordre exige cinq conditions.*

Lorsque la courbe est une parabole, on doit avoir

$$B^2-4AC=0,$$

relation qui permet de réduire à quatre le nombre des constantes arbitraires (inférieur alors à celui des coefficients distincts).

En résumé, *la détermination d'une ellipse ou d'une hyper-*

bole exige cinq conditions, celle d'une parabole en exige quatre.

Remarque. — Astreindre une courbe à passer par un point donné, c'est l'astreindre à une condition. En effet, si la courbe représentée par l'équation $F(x, y) = 0$ doit passer par un point (p, q), les paramètres de la courbe devront être liés par l'équation de condition $F(p, q) = 0$.

240. *Équation d'une conique passant par cinq points donnés dans un plan.*

On peut toujours prendre pour axes deux droites sécantes déterminées par quatre des points donnés. L'équation de la conique sera de la forme

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = 0.$$

Soient $(0, p)$ et $(0, p')$ les deux points situés sur l'axe des x, $(q, 0)$ et $(q', 0)$ les deux points situés sur l'axe des y, (b, a) le cinquième point donné.

Si l'on fait $y = 0$ dans l'équation (1), il vient

$$Cx^2 + Ex + 1 = 0.$$

Les racines de cette équation, abscisses des points où la conique coupe l'axe des x, sont précisément p et p'. On aura donc

$$-\frac{E}{C} = p + p' \quad \text{et} \quad \frac{1}{C} = pp'.$$

On en déduit

$$C = \frac{1}{pp'} \quad \text{et} \quad E = -\frac{p + p'}{pp'}.$$

Si l'on fait $x = 0$ dans l'équation (1), il vient

$$Ay^2 + Dy + 1 = 0,$$

et l'on a de même

$$A = \frac{1}{qq'} \quad \text{et} \quad D = -\frac{q + q'}{qq'}.$$

Pour déterminer le dernier coefficient B, il suffit d'écrire que la conique passe par le dernier point donné (b, a), d'où

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + 1 = 0.$$

Comme on ne trouve en général qu'une seule valeur, d'ailleurs réelle et finie, pour chacun des coefficients A, B, C, D, E, on voit qu'on peut toujours faire passer une ellipse ou une hyperbole par cinq points donnés; mais qu'on n'en peut faire passer qu'une.

S'il s'agit d'une parabole, on ne doit donner que les quatre premiers points : on a ensuite, pour déterminer B, la relation

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Comme on en déduit $B = \pm 2\sqrt{AC}$, le problème admet deux solutions.

Il est clair que si trois des points donnés sont en ligne droite, c'est-à-dire si le cinquième point (a, b) est sur l'un des axes choisis, la courbe cherchée n'est autre que le système des deux axes. On le vérifie facilement en substituant dans l'équation (1) les valeurs trouvées pour les coefficients A, B, C, D, E. Si l'on chasse alors les dénominateurs et si l'on pose ensuite

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0,$$

l'équation se réduit à

$$xy = 0.$$

Si quatre des points donnés sont en ligne droite, la question est indéterminée; car des deux axes l'un est alors arbitraire, n'étant plus astreint qu'à passer par un seul point. Il en est ainsi à plus forte raison, si les cinq points donnés sont en ligne droite.

241. *Connaissant cinq points d'une conique, on peut en trouver autant de points qu'on veut, en s'appuyant sur le théorème de Pascal* (235).

Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés (*fig.* 115). Formons le contour ABCDE, et supposons qu'on mène par le point A une droite quelconque AF. Si on la considère comme une sécante coupant la courbe en un second point F, ce point F sera le sixième sommet de l'hexagone inscrit ABCDEF. Si l'on prolonge alors AB et DE jusqu'à leur point de rencontre I, CD et AF jusqu'à leur point de rencontre L, le point de rencontre H des droites BC et EF devra appartenir à la droite IL. Il suffira donc de prolonger le côté BC jusqu'en H sur IL, et de joindre le point H au sommet E. La droite HE prolongée viendra déterminer sur la sécante AF le sixième sommet F de l'hexagone inscrit ou un nouveau point de la conique. Comme la direction de la sécante AF est arbitraire, cette construction fournira autant de points de la conique qu'on voudra.

Si l'on veut avoir la tangente en l'un des cinq points donnés, on remarquera (*fig.* 117) que le pentagone inscrit ABCDE peut être considéré comme un hexagone inscrit dont l'un des côtés est devenu tangent à la conique. Si l'on veut mener la tangente en D, on supposera que le point de contact de ce côté est en D. On prolongera alors AE et CD jusqu'à leur

rencontre en I, puis BC et DE jusqu'à leur rencontre en H. Le point de rencontre L de AB avec la droite IH sera aussi le point de rencontre de la tangente en D avec la droite IH. Pour avoir cette tangente, il suffira donc de mener la droite LD.

242. Au lieu de déterminer la courbe proposée en donnant des points disposés d'une manière quelconque sur son contour, on peut faire concourir à sa détermination quelque point remarquable, comme un *sommet*, un *centre*, un *foyer*, etc.

Chacun de ces points devra nécessairement compter *pour deux conditions*. Car, s'il appartient à la courbe, ses coordonnées devront satisfaire d'abord à l'équation de la courbe, et ensuite à une autre relation formulant (en fonction des constantes arbitraires) sa propriété caractéristique. Si le point remarquable considéré n'appartient pas à la courbe, ses coordonnées seront déterminées isolément par deux équations de condition déduites de l'équation de la courbe et contenant par conséquent les constantes arbitraires.

Si l'on part de l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = 0,$$

on sait que les coordonnées du centre sont déterminées par les équations dérivées (**111**)

$$2Ay + Bx + D = 0, \quad By + 2Cx + E = 0.$$

Donc, *si l'on veut astreindre la conique à avoir pour centre le point* (p, q), *on devra avoir entre ses coefficients les deux relations*.

$$2Aq + Bp + D = 0, \quad Bq + 2Cp + E = 0.$$

Si l'on peut prendre le centre imposé pour origine des coordonnées, on mettra immédiatement l'équation de la conique sous la forme (**125**)

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + 1 = 0,$$

et l'on voit que cette équation ne renferme plus que trois constantes arbitraires.

S'il s'agit d'un sommet, on écrira que le point donné est sur la courbe, et qu'en ce point la tangente est perpendiculaire au diamètre correspondant : ce qui fournira encore deux conditions.

Si le point (α, β) *doit être un foyer de la conique*, on prendra l'équation focale de la courbe (**131**)

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (ly + mx + n)^2 = 0.$$

Cette équation ne contenant plus que trois constantes arbitraires, *on voit qu'en donnant un foyer, on astreint la courbe à deux conditions.*

243. On peut aussi déterminer la courbe à l'aide de certaines conditions relatives à des droites données.

Comme nous l'avons déjà dit (79), *pour exprimer qu'une conique est tangente à une droite donnée,* il suffit d'éliminer y, par exemple, entre l'équation de la courbe et celle de la droite, puis d'écrire que les deux racines de l'équation résultante sont égales. *On voit que la condition de tangence envers une droite donnée équivaut à une seule condition.* Ainsi, au lieu de demander de faire passer une conique par cinq points donnés, on pourra demander de déterminer la conique tangente à cinq droites données.

Pour exprimer qu'une droite donnée est un diamètre (113), *on écrit qu'elle passe par le centre de la conique* (*ellipse ou hyperbole*) *ou qu'elle est parallèle à l'axe de la courbe* (*parabole*). *La connaissance d'un diamètre équivaut donc à une seule condition.*

Pour exprimer qu'une droite donnée est un axe de la conique, on écrit qu'elle est un diamètre ; puis, en désignant par m' le coefficient angulaire de la droite, et par m le coefficient angulaire des cordes conjuguées, on remplace m par $-\frac{1}{m'}$ dans la relation générale (113)

$$-\frac{Bm+2C}{2Am+B}=m';$$

ce qui conduit à la seconde équation de condition. *Donner un axe de la courbe, c'est donc donner deux conditions.*

Si l'on peut prendre l'axe imposé pour axe des x, par exemple, l'équation de la conique se présente immédiatement sous la forme

$$Ay^2+Cx^2+Ex+1=0;$$

et l'on voit qu'il ne reste plus que trois constantes arbitraires.

Pour exprimer qu'une droite donnée $y=ax+b$ est directrice, on prend l'équation focale de la courbe

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(ly+mx+n)^2=0.$$

L'équation générale de la directrice étant alors $ly+mx+n=0$, il suffit d'identifier cette dernière équation avec l'équation $y-ax-b=0$.

On voit que donner une directrice, c'est astreindre la courbe à deux conditions.

Enfin, *pour exprimer qu'une droite est asymptote à une conique*, il suffit, comme nous l'avons déjà dit, d'écrire que l'équation qui résulte de l'élimination de y, par exemple, entre l'équation de la courbe et celle de la droite, a deux racines infinies. *Donner une asymptote, c'est donc aussi astreindre la conique à deux conditions.*

On peut aussi identifier l'équation de la droite donnée avec l'équation générale des asymptotes indiquée au n° **119**.

Si l'on est maître de choisir les axes, on peut prendre la droite donnée pour axe des y, et l'équation de la conique s'écrit immédiatement (**91**)

$$Bxy + Cx^2 + Ex + 1 = 0.$$

Il ne reste plus alors que trois constantes arbitraires.

Il résulte d'ailleurs de remarques précédentes (**108**, **120**) que les équations des asymptotes d'une hyperbole étant

$$y = mx + n, \quad y = m'x + n',$$

l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$(y - mx - n)(y - m'x - n') + p = 0.$$

Remarque. — Il faut noter avec soin que certaines conditions peuvent faire double emploi. Si, par exemple, on donne un centre et un axe, il ne faut pas croire que la courbe est astreinte à quatre conditions; l'axe passant par le centre, il ne faut plus alors qu'une condition pour le déterminer. On peut le vérifier en prenant la droite donnée pour axe des x. L'équation de la courbe devient

$$Ay^2 + Cx^2 + Ex + 1 = 0,$$

et les coordonnées p et q du centre doivent satisfaire aux équations dérivées

$$2Aq = 0, \quad 2Cp + E = 0.$$

Or la première de ces relations, à cause de $q = 0$, est satisfaite d'elle-même et n'établit aucune liaison entre les constantes arbitraires.

244. La détermination d'une courbe du second degre exigeant en général cinq conditions (quatre pour une parabole), si l'on astreint une conique à quatre conditions seulement (trois dans le cas de la parabole), le problème sera indéterminé. Si la conique, par exemple, doit passer par quatre points donnés, et si l'on suit la marche indiquée au n° **240**, le coefficient B restera arbitraire; c'est-à-dire qu'on aura une infinité de

courbes répondant à la question. On peut se proposer alors de trouver les lieux géométriques constitués par leurs points remarquables ou par les points qui occupent sur ces courbes, ou par rapport à elles, une position bien définie.

Deux exemples simples suffiront pour familiariser avec ce genre de questions.

1° *Trouver le lieu des foyers des paraboles qui ont une tangente commune et même sommet* (*fig.* 118).

Soient A et MT le sommet et la tangente donnés. Soit F un point du lieu. Le point A étant choisi pour origine et les axes étant rectangulaires, nous prendrons l'axe des y parallèle à la tangente MT.

Si l'on désigne par d la distance AT du sommet A à la tangente, l'équation de cette tangente sera

$$x = -d.$$

Si l'on désigne par (α, β) les coordonnées du point F, et si l'on abaisse sur la tangente la perpendiculaire FM, le point M d'intersection aura pour coordonnées $-d$ et β. La droite AM étant perpendiculaire à la droite FA (210, III), aura pour équation $\left(\text{celle de la droite FA étant } y = \frac{\beta}{\alpha}x\right)$,

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x.$$

Substituons-y les coordonnées du point M; il viendra

$$\beta = -\frac{\alpha}{\beta} \times -d$$

ou

$$\beta^2 = d\alpha.$$

Telle est l'équation du lieu : elle représente une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet, et ayant la distance d pour paramètre.

2° *Trouver le lieu des foyers des paraboles ayant même sommet et un point commun* (*fig.* 119).

Soient A et M le sommet et le point donnés. Nous prendrons pour origine le point A, et, les axes étant supposés rectangulaires, nous dirigerons l'axe des y vers le point M, dont les coordonnées seront alors o et y_1. Soit F ou (α, β) un point du lieu. L'équation de la droite FA sera

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x.$$

La directrice DL, qui correspond au foyer F, est perpendicu-

laire à FA, et coupe cette droite en un point D, dont les coordonnées sont évidemment $-\alpha$ et $-\beta$. L'équation de la directrice DL sera donc

$$y+\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x+\alpha).$$

Par suite, la distance du point M à cette directrice aura pour expression (45)

$$\frac{\beta y_1+\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

D'autre part, le rayon vecteur MF étant égal à $\sqrt{(y_1-\beta)^2+\alpha^2}$, on n'aura qu'à poser

$$\frac{\beta y_1+\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sqrt{(y_1-\beta)^2+\alpha^2},$$

pour avoir l'équation du lieu. En élevant au carré et en simplifiant, il vient, toutes réductions faites,

$$\alpha^2=\frac{\beta^3}{\frac{y_1}{4}-\beta}.$$

C'est l'équation d'une cissoïde (70) dont le diamètre du cercle générateur est égal à $\frac{y_1}{4}$; ses deux branches partent de l'origine, tangentiellement à l'axe des y, et son asymptote est la droite $y=\frac{y_1}{4}$.

245. Au sujet de ce qui précède (244), on peut remarquer que l'équation de toutes les coniques qui passent par quatre points donnés, peut se mettre sous la forme suivante.

Les quatre points donnés étant A, B, C, D (*fig.* 120), représentons par $P=0$ et $Q=0$ les équations des droites AB et CD, par $P'=0$ et $Q'=0$ les équations des droites AC et BD, par λ un coefficient indéterminé. L'équation

$$PQ+\lambda P'Q'=0$$

sera l'équation générale demandée. Cette équation est en effet du second degré, et elle est satisfaite par les coordonnées du point A qui rendent $P=0$ et $P'=0$, par les coordonnées du point B qui rendent $P=0$ et $Q'=0$, par les coordonnées du point C qui rendent $Q=0$ et $P'=0$, par les coordonnées du point D qui rendent $Q=0$ et $Q'=0$. En donnant une

valeur convenable à λ, on particularise à volonté une de ces courbes.

Parmi les coniques qui répondent à la question, se trouvent les trois couples de deux droites AB et CD, AC et BD, AD et BC (240).

Intersection de deux courbes du second degré.

246. Pour obtenir les coordonnées des points communs à deux coniques, il faut chercher les solutions communes à leurs équations

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

et

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

Ces équations étant du second degré, si l'on élimine entre elles l'une des inconnues, y par exemple, on obtiendra en général (*Alg. élém.*, 211) une équation du quatrième degré en x qui, résolue, fera connaître les abscisses des points communs aux deux coniques et, par suite, leurs ordonnées.

On voit par là que deux coniques ne peuvent se couper en plus de quatre points et, en effet, si elles avaient cinq points communs elles coïncideraient (240).

Il est facile d'obtenir l'équation générale des courbes du second degré qui passent par les points d'intersection des coniques données. Ajoutons les équations (1) et (2), après avoir multiplié la seconde par un facteur indéterminé λ. Il viendra

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0. \tag{3}$$

Tout système de valeurs de x et de y qui vérifie les équations (1) et (2), vérifie l'équation (3). Ainsi, l'équation (3) représente une conique passant par les points d'intersection des coniques données, et cette conique est quelconque puisque λ est un coefficient arbitraire.

On voit, réciproquement, que tout système de valeurs de x et de y qui vérifie les équations (1) et (3), vérifie nécessairement l'équation (2), puisque de

$$F(x, y) = 0 \quad \text{et de} \quad F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0,$$

on déduit

$$\lambda f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, y) = 0.$$

Il en résulte qu'il suffit de chercher les points d'intersection

des coniques représentées par les équations (1) et (3), pour avoir les points demandés. Or on peut disposer de λ, de manière que la conique représentée par l'équation (3) se réduise à un système de deux droites sécantes; et alors la question sera ramenée à chercher les points d'intersection de ces droites avec l'une des coniques proposées.

247. Pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux droites sécantes, nous avons vu (**108**, 3°) qu'il fallait (cette équation étant résolue par rapport à l'une des variables) que la quantité placée sous le radical fût un carré parfait. Si l'on résout par rapport à y, il est sous-entendu que le coefficient de x^2 sous le radical doit être plus grand que zéro (caractère de l'hyperbole).

On pourra donc former l'équation (3) indiquée au n° **246**, on la résoudra par rapport à y, et l'on écrira que le trinôme placé sous le radical est un carré parfait. On sera ainsi conduit à une équation du troisième degré par rapport à λ.

Les racines de cette équation qui seront réelles et qui rendront positif le coefficient de x^2 sous le radical, correspondront chacune à un système de deux droites sécantes passant par les points d'intersection des coniques données (si elles se coupent en effet).

Quand les deux coniques ont réellement quatre points communs, l'équation du troisième degré en λ a ses trois racines réelles, parce que par quatre points on peut en général faire passer trois couples de deux droites sécantes.

La première méthode indiquée, basée sur l'élimination, est préférable à la seconde.

Construction des racines réelles des équations à une inconnue.

248. Étant donnée une équation quelconque $F(x) = 0$, on peut la regarder comme résultant de l'élimination de y entre les deux équations $y = F(x)$ et $y = 0$; elle doit donc être satisfaite par les abscisses des points communs aux deux courbes représentées par ces équations. Comme l'équation $y = 0$ représente l'axe des x, on voit qu'il suffit, pour trouver les racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, de construire la courbe $y = F(x)$, et de déterminer les abscisses des points où elle coupe l'axe des x.

La construction graphique effectuée fera connaître les racines cherchées avec une certaine approximation facile à évaluer, et l'on pourra ensuite en approcher de plus en plus en faisant usage des méthodes connues (voir *Compl. d'Alg.*).

On peut aussi regarder l'équation $F(x) = 0$ comme résultant

de l'élimination de y entre deux équations $f(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$ *convenablement choisies.*

Si l'on construit à une échelle déterminée les courbes représentées par ces équations, les abscisses de leurs points d'intersection représenteront les racines réelles de l'équation $F(x) = 0$. *Pour qu'aucune racine réelle n'échappe*, il suffit qu'aucune racine réelle de $F(x) = 0$ ne puisse correspondre à une valeur imaginaire de y dans l'une des équations $f(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$, condition qui sera toujours remplie si l'équation ainsi associée à $F(x) = 0$ contient y *seulement au premier degré.*

249. *Application aux équations du quatrième degré.*

Toute équation algébrique pouvant être privée de son second terme (*Compl. d'Alg.*, **190**), nous prendrons une équation du quatrième degré ramenée à la forme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \tag{1}$$

On peut obtenir cette équation en éliminant y entre les équations

$$x^2 = y, \tag{2}$$

$$y^2 + py + qx + r = 0. \tag{3}$$

Le système formé des équations (1) et (2) est équivalent au système formé des équations (2) et (3). A toute valeur réelle de x satisfaisant à l'équation (1), correspond une valeur réelle de y déduite de l'équation (2). Les points d'intersection des courbes représentées par les équations (2) et (3) auront donc pour abscisses les racines réelles de l'équation (1).

Ces courbes sont des paraboles. Pour opérer plus simplement, on peut remarquer que le système des équations (2) et (3) est équivalent au système formé de l'équation (2) et de la somme des équations (2) et (3). On choisira donc finalement les équations

$$x^2 = y, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 + (p - 1)y + qx + r = 0. \tag{4}$$

Les axes étant supposés rectangulaires, l'équation (2) représente une parabole dont l'axe est celui des y et qui est rapportée à son sommet. On construira le *patron* de cette parabole (dont le paramètre est 1) une fois pour toutes. L'équation (4) représente une circonférence de cercle dont le centre a pour coordonnées

$$-\frac{q}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{p-1}{2},$$

et dont le rayon est égal à

$$\sqrt{\frac{q^2+(p-1)^2}{4}-r}.$$

Les points d'intersection de cette circonférence avec la parabole $x^2=y$, feront connaître (à l'échelle) les racines demandées.

250. *Application aux équations du troisième degré.*

On prendra l'équation du troisième degré sous la forme $x^3+px+q=0$, et on ramènera ce cas au précédent en multipliant les deux membres de l'équation donnée par le facteur x. On aura ainsi l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^2+qx=0,$$

qui admet en plus des racines cherchées la racine $x=0$ qu'on devra finalement rejeter.

Il suffira donc (249) de construire la parabole

$$x^2=y \tag{1}$$

et la circonférence

$$x^2+y^2+(p-1)y+qx=0; \tag{2}$$

leurs points d'intersection, autres que l'origine, feront connaître les racines demandées.

La circonférence représentée par l'équation (2) passant par l'origine, il sera inutile de calculer son rayon. Les coordonnées de son centre seront toujours $-\frac{q}{2}$ et $-\frac{p-1}{2}$.

On voit qu'en coupant une même parabole par des circonférences convenablement déterminées, on peut résoudre graphiquement toutes les équations du troisième et du quatrième degré.

Exemple. — Si l'on demandait de trouver les solutions communes aux deux équations (246)

$$x^2=5y+2,$$
$$xy=3x+8,$$

dont la première représente une parabole et la seconde une hyperbole, on éliminerait y entre ces deux équations, et l'on serait conduit à l'équation du troisième degré

$$x^3-17x-40=0.$$

Il faudrait donc chercher les abscisses des points d'intersection de la parabole $x^2 = y$ et de la circonférence

$$x^2 + y^2 - 18y - 40x = 0,$$

dont le centre a pour coordonnées 20 et 9.

251. *Application aux équations transcendantes.*

On opérerait d'une manière analogue pour résoudre graphiquement les équations transcendantes. Soit l'équation

$$x = \operatorname{tang} x.$$

On peut l'obtenir en éliminant y entre les deux équations

$$x = y \quad \text{et} \quad y = \operatorname{tang} x.$$

On construira donc la bissectrice de l'angle des axes et la tangentoïde $y = \operatorname{tang} x$, déjà étudiée au n° 104 (*fig.* 56). La courbe $y = \operatorname{tang} x$ étant composée d'une infinité de branches égales et infinies, il y aura un nombre illimité de points d'intersection; de sorte que, comme nous le savons (*Compl. d'Alg.*, 260), l'équation $x = \operatorname{tang} x$ admet un nombre illimité de racines réelles, une seule dans chaque quadrant.

CHAPITRE IX.

DES COURBES SEMBLABLES.

252 La définition que nous avons donnée des polygones semblables et semblablement placés (*Géom.*, 101; *Compl. de Géom.*, 65), peut s'appliquer aux courbes quelconques.

Soit une certaine courbe plane. Si l'on joint un même point de son plan à tous ses points, et si l'on divise les *rayons vecteurs* obtenus *dans un même rapport*, l'ensemble des points ainsi construits constitue une nouvelle courbe *semblable à la proposée et semblablement placée*. Le point de départ des rayons vecteurs est *le centre de similitude* des deux courbes, le rapport adopté est *leur rapport de similitude*.

Deux courbes étant semblables et semblablement placées (ou homothétiques), si l'on transporte l'une d'elles parallèlement à elle-même, la similitude de forme et de position continuera toujours d'exister. Les rayons vecteurs ne seront plus confondus, mais ils resteront à la fois parallèles et proportionnels.

Deux courbes étant semblables et semblablement placées, si l'on transporte l'une d'elles d'une manière tout à fait quelconque, la similitude de forme continuera d'exister, la similitude de position disparaîtra. Les rayons vecteurs resteront proportionnels, mais ne seront plus parallèles.

Les courbes semblables à une courbe d'espèce donnée sont en nombre illimité.

253. Avant d'aller plus loin, nous pouvons remarquer que *lorsque l'équation d'une courbe, réduite à sa forme la plus simple, ne contient qu'un seul paramètre, toutes les courbes de même espèce sont des courbes semblables*. En effet, si la similitude de ces courbes exigeait une condition quelconque, leur paramètre se trouverait déterminé, et toutes les courbes de la même famille se réduiraient à une seule.

Les équations les plus simples de la circonférence, de la parabole, de la cissoïde, de la spirale d'Archimède, étant

$$x^2+y^2=r^2, \quad y^2=2px, \quad y^2=\frac{x^3}{d-x}, \quad \rho=a\omega,$$

toutes les circonférences, toutes les paraboles, toutes les cissoïdes, toutes les spirales d'Archimède sont des courbes semblables.

254. Soient (*fig.* 121) les deux courbes AB et A'B', semblables et semblablement placées. Supposons que leur centre de similitude soit à l'origine des coordonnées. Désignons par k leur rapport de similitude. On aura, d'après la figure, pour deux points homologues quelconques M et M',

$$\frac{OM'}{OM}=\frac{OP'}{OP}=\frac{M'P'}{MP}=k.$$

x et y représentant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe AB, kx et ky représenteront donc les coordonnées du point homologue de la courbe A'B'; et l'équation de la courbe AB étant

$$F(x, y)=0,$$

l'équation de la courbe A'B' sera

$$F(kx, ky)=0.$$

On n'aura qu'à donner à k toutes les valeurs possibles, pour obtenir toutes les courbes homothétiques à la proposée.

Si l'on transporte la courbe A'B' parallèlement à elle-même, on pourra mesurer ce déplacement par celui qu'il faudrait attribuer aux axes pour ne pas changer l'équation de la courbe A'B'. En désignant par a et b les coordonnées de la nouvelle origine O' (*fig.* 121) par rapport aux anciens axes, on aura

$$x=a+x', \quad y=b+y';$$

or, par rapport aux axes O'x' et O'y', l'équation de la courbe A'B' est, d'après l'hypothèse,

$$F(kx', ky')=0.$$

Donc, par rapport aux axes primitifs, l'équation de la courbe A'B' après son déplacement sera

$$F[k(x-a), k(y-b)]=0.$$

Telle est l'équation générale des courbes semblables à la proposée et semblablement placées, lorsque le centre de similitude n'est pas au même point.

255. Si l'on transporte maintenant la courbe A'B' d'une manière quelconque dans le plan de la courbe AB, son mouvement se composera du

mouvement de translation qu'on vient d'effectuer (254), et d'un mouvement de rotation autour de la nouvelle origine O'. Supposons (*fig.* 122) que les axes accompagnent la courbe dans son mouvement total. Désignons par θ l'angle des axes primitifs, par α l'angle que forme actuellement $O'x'$ avec une parallèle menée à Ox par le point O'. L'équation de la courbe rapportée aux axes $O'x'$, $O'y'$, dans leur nouvelle position, sera toujours, d'après l'hypothèse,

$$F(kx', ky') = 0.$$

Les formules qui correspondent au passage d'axes obliques à d'autres axes obliques étant

$$x = a + \frac{x'\sin(\theta - \alpha) + y'\sin(\theta - \beta)}{\sin\theta},$$

$$y = b + \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta};$$

on aura ici, à cause de $\beta = \theta + \alpha$,

$$x = a + \frac{x'\sin(\theta - \alpha) - y'\sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$y = b + \frac{x'\sin\alpha + y'\sin(\theta + \alpha)}{\sin\theta}.$$

Pour avoir l'équation de la courbe A'B' par rapport aux axes primitifs, on devra donc remplacer x' et y' dans l'équation $F(kx', ky') = 0$ par les valeurs qu'on déduira des formules précédentes; et l'on obtiendra ainsi l'équation la plus générale des courbes semblables à la courbe proposée.

256. Pour vérifier si deux courbes données par leurs équations sont semblables, il faut comparer l'équation la plus générale des courbes semblables à la première, avec l'équation de la seconde courbe. En cherchant à identifier les deux équations considérées, on déterminera d'une part les valeurs des constantes arbitraires k, a, b, α, propres à faire connaître la disposition relative des deux courbes, et d'autre part les conditions essentielles de l'identification, c'est-à-dire indépendantes de ces constantes arbitraires, exprimeront précisément les conditions de similitude des courbes proposées.

Le calcul se simplifie, lorsqu'on veut chercher si deux courbes déjà semblablement placées sont semblables (254).

Similitude des courbes du second degré.

257. Soit d'abord une ellipse rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Cherchons la condition pour qu'elle soit semblable à une autre ellipse

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \qquad (2)$$

placée de la même façon, c'est-à-dire rapportée aussi à ses axes dirigés suivant les axes coordonnés.

L'équation des courbes homothétiques à la première ellipse est (254)

$$\frac{k^2x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Pour identifier les équations (2) et (3), il faut poser

$$\frac{k^2}{a^2}=\frac{1}{a_1^2} \quad \text{et} \quad \frac{k^2}{b^2}=\frac{1}{b_1^2}.$$

On en déduit

$$\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{b^2}{b_1^2}=k^2 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=k.$$

Donc, *pour que deux ellipses soient semblables, il faut que leurs axes de même nom soient proportionnels.*

On trouvera la même condition pour deux hyperboles (*).

Deux paraboles sont toujours semblables (253).

258. Servons-nous du résultat précédent pour trouver les caractères de similitude de deux coniques à centre rapportées à des axes rectangulaires quelconques. Leurs équations sont alors

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$
$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0.$$

Si on les rapporte à leurs axes principaux, on arrivera à des équations de la forme

$$My^2+Nx^2+P=0,$$
$$M'y^2+N'x^2+P'=0.$$

Les longueurs des demi-axes a et b, a_1 et b_1, des deux courbes étant

$$a=\sqrt{-\frac{P}{N}}, \quad b=\sqrt{-\frac{P}{M}},$$
$$a_1=\sqrt{-\frac{P'}{N'}}, \quad b_1=\sqrt{-\frac{P'}{M'}},$$

la condition de similitude des deux courbes sera

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1} \quad \text{ou} \quad \frac{N'}{N}=\frac{M'}{M}.$$

On en déduit

$$\frac{M-N}{M+N}=\frac{M'-N'}{M'+N'}.$$

Mais nous savons (123) que

$$M+N=A+C, \quad M'+N'=A'+C',$$
$$M-N=\sqrt{(A-C)^2+B^2}, \quad M'-N'=\sqrt{(A'-C')^2+B'^2}.$$

(*) Dans le cas de deux hyperboles, les axes homologues peuvent être l'un transverse, l'autre imaginaire. Le rapport de similitude est imaginaire, mais la condition générale de similitude est remplie. On peut dire, si l'on veut, que l'une des hyperboles est semblable à la *conjuguée* de l'autre, dans l'acception ordinaire du mot.

Il viendra donc

$$\frac{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{A+C}=\frac{\sqrt{(A'-C')^2+B'^2}}{A'+C'}$$

ou

$$\frac{(A-C)^2+B^2}{(A+C)^2}-1=\frac{(A'-C')^2+B'^2}{(A'+C')^2}-1,$$

c'est-à-dire finalement

$$\frac{B^2-4AC}{(A+C)^2}=\frac{B'^2-4A'C'}{(A'+C')^2}.$$

Telle est la condition cherchée. Elle montre que toutes les paraboles sont semblables, puisqu'elle est satisfaite d'elle-même dès qu'il s'agit de courbes de cette espèce.

259. Si l'on veut que les deux coniques soient à la fois semblables et semblablement placées, sans que leur centre de similitude soit au même point, il suffit de chercher l'équation générale des courbes semblables à la première et semblablement placées, en remplaçant dans son équation x et y par (254)

$$k(x-a) \quad \text{et} \quad k(y-b).$$

Il viendra

$$\begin{aligned}&Ak^2(y-b)^2+Bk^2(x-a)(y-b)+Ck^2(x-a)^2+Dk(y-b)\\&\qquad+Ek(x-a)+F=0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&Ak^2y^2+Bk^2xy+Ck^2x^2+(Dk-2bAk^2-aBk^2)y\\&+(Ek-2aCk^2-bBk^2)x+Ak^2b^2+Bk^2ab+Ck^2a^2\\&-Dkb-Eka+F=0.\end{aligned}$$

Pour identifier cette équation avec celle de la seconde conique, il faut poser

$$\begin{aligned}&Ak^2=A', \quad Bk^2=B', \quad Ck^2=C',\\&Dk-2bAk^2-aBk^2=D', \quad Ek-2aCk^2-bBk^2=E',\\&Ak^2b^2+Bk^2ab+Ck^2a^2-Dkb-Eka+F=F'.\end{aligned}$$

Il en résulte évidemment, comme conditions de similitude,

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

Les trois autres relations permettent ensuite de déterminer les constantes arbitraires a, b, k.

Donc, *pour que deux coniques à centre soient semblables et semblablement placées (sans avoir le même centre de similitude), il faut que, dans leurs équations, les coefficients des termes du second degré soient proportionnels.*

Si les deux coniques devaient avoir le même centre de similitude, la proportionnalité devrait exister aussi entre les coefficients des termes du premier degré (254). Ainsi l'on aurait, d'une part,

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

et de l'autre,

$$\frac{D}{D'} = \frac{E}{E'}.$$

260. *Remarque.* — En se reportant au chapitre qui traite des sections coniques, on peut vérifier très-facilement les conditions précédentes (257). Dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, si les plans sécants sont *parallèles,* on obtient évidemment des courbes *semblables.* Or dans ce cas l'angle α demeure constant; c'est-à-dire que le coefficient du terme en x^2 dans l'équation générale des sections coniques, ne changeant pas, il en est de même du rapport $\frac{b^2}{a^2}$ des carrés des axes, qui dès lors sont *proportionnels.*

CHAPITRE X.

DES COORDONNÉES POLAIRES (*).

261. Les notions données dans le I^er^ Livre sur le système des coordonnées polaires seraient insuffisantes dans l'application. Nous allons dans ce chapitre étudier ce système d'une manière spéciale, en nous bornant aux développements indispensables.

Variations des coordonnées ρ et ω.

262. Pour définir un point isolé, il suffit évidemment de faire varier l'angle ω de 0 à 2π et le rayon ρ de 0 à $+\infty$ (4); mais, lorsqu'on veut représenter par une seule équation les différentes branches d'une courbe telle que l'hyperbole ou les diverses circonvolutions d'une ligne telle que la spirale d'Archimède, il faut faire varier chacune des deux coordonnées ρ et ω depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. C'est ce que les exemples suivants vont montrer.

263. *Hyperbole.* — Soient F' le foyer de gauche et A' le sommet voisin. Nous prendrons pour pôle le point F' et pour axe polaire la droite F'A' (*fig.* 123).

M étant un point quelconque de la branche de droite, la valeur du rayon vecteur est donnée par la formule (172)

$$\rho = \frac{cx}{a} + a. \tag{1}$$

(*) Comme nous l'avons dit dans l'*Avertissement* placé en tête de ce troisième volume, nous devons le chapitre ci-dessus tout entier à l'obligeance de notre excellent collègue et ami M. Eug. Rouché, auquel ses travaux assurent déjà une place honorable parmi les mathématiciens de notre époque. Nous lui renouvelons ici l'expression de toute notre gratitude.

En projetant successivement OM et OF'M sur la direction F'A'x, on a

$$x = -c + \rho\cos\omega. \tag{2}$$

En éliminant x entre les relations (1) et (2), il vient pour l'équation polaire de la branche de droite de l'hyperbole

$$\rho = \frac{-\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\omega}.$$

Désignons par p le paramètre $\frac{b^2}{a}$ (**204**) et par e l'excentricité $\frac{c}{a}$ (**134**), ici supérieure à 1. Nous aurons, *en renversant*,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - e\cos\omega}{-p}. \tag{3}$$

En éliminant x entre les relations

$$\rho = -\left(\frac{cx}{a} + a\right) \quad \text{et} \quad x = -c + \rho\cos\omega,$$

on trouvera de même, pour équation polaire de la branche de gauche de l'hyperbole,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + e\cos\omega}{p}. \tag{4}$$

Ainsi lorsqu'on se borne aux valeurs positives de ρ, les deux branches de l'hyperbole ont des équations distinctes. Mais il est facile de voir que l'une quelconque de ces équations (3) et (4), suffit pour représenter l'hyperbole entière lorsqu'on admet les rayons vecteurs *négatifs*, c'est-à-dire *lorsqu'on convient de porter la valeur absolue d'un rayon vecteur négatif dans la direction opposée à celle qu'indiquerait la valeur correspondante de l'angle* ω.

En effet, $\omega = \mathrm{MF'}x$ étant la coordonnée angulaire d'un point quelconque M de la branche de droite (*fig.* 123), la formule (3) donne pour le rayon vecteur correspondant la valeur *positive*

$$\rho = \frac{-p}{1 - e\cos\omega}.$$

Si l'on remplace dans la formule (4) ω par $\pi + \omega$, on trouve

pour le rayon vecteur correspondant une valeur

$$\frac{p}{1+e\cos(\pi+\omega)} = \frac{p}{1-e\cos\omega} = -\rho,$$

qui est *négative* et égale en valeur absolue au rayon vecteur du point M. Pour construire le point $(\pi+\omega, -\rho)$, il faudra, d'après notre convention, porter la longueur $\rho = F'M$ sur la direction F'M opposée à la direction F'M' indiquée par l'angle $\pi+\omega$: *on retombe ainsi sur le point* M. Donc l'équation (4), qui donne déjà la branche de gauche *par des rayons vecteurs positifs*, reproduit la branche de droite *par des rayons vecteurs négatifs :* elle représente donc à elle seule toute l'hyperbole, et la considération des rayons vecteurs négatifs rend l'équation (3) inutile.

264. *Spirale d'Archimède.* — Nous avons déjà trouvé pour l'équation de cette courbe (72)

$$\rho = a\omega :$$

elle suppose qu'on a pris pour axe polaire la position initiale de la droite mobile et pour pôle la position initiale du point mobile (*fig.* 124).

En faisant varier successivement ω de 0 à 2π, de 2π à $4\pi, \ldots$, on obtient les spires successives OA'_1A_1, $A_1A'_2A_2, \ldots$; puis en faisant varier ω de 0 à -2π, de -2π à $-4\pi, \ldots$, et admettant les rayons vecteurs négatifs, on trouve une autre série de spires $OB_1B'_1$, $B'_1B_2B'_2, \ldots$, dont l'ensemble forme une seconde partie de la courbe, symétrique de la première par rapport à la perpendiculaire $y'Oy'$ menée par le pôle à l'axe polaire. Une droite quelconque issue du pôle rencontre les spires successives d'une même série, en une suite de points séparés les uns des autres par l'intervalle constant $2\pi a$ qui représente l'accroissement du rayon vecteur à chaque tour.

Si l'on se bornait aux valeurs positives de ρ et aux valeurs de ω comprises entre 0 et 2π, l'équation $\rho = a\omega$ ne donnerait que la première spire OA'_1A_1; pour les spires suivantes, il faudrait recourir aux équations

$$\rho = a\omega + 2\pi a, \quad \rho = a\omega + 4\pi a, \ldots.$$

De même, les spires de la partie symétrique exigeraient également des équations particulières et distinctes des précédentes.

L'extension donnée aux variations des coordonnées ρ et ω permet de remplacer par une seule formule cette double suite indéfinie d'équations. Entre les deux manières d'opérer, le choix ne peut donc être douteux. D'ailleurs, au point de vue

logique, le premier mode est seul en harmonie avec l'esprit de généralisation qui caractérise l'algèbre, c'est-à-dire avec la nature de l'instrument que Descartes a si bien adapté à l'étude de la géométrie.

Passage des coordonnées rectilignes aux coordonnées polaires.

265. Nous avons déjà vu (28) que, lorsqu'on prenait pour pôle l'origine des coordonnées rectilignes rectangulaires et pour axe polaire la partie positive de l'axe des x, les formules à employer pour passer du système rectiligne au système polaire étaient

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega.$$

L'équation d'une courbe représentée en coordonnées rectangulaires par

$$F(x, y) = 0,$$

sera donc en coordonnées polaires

$$F(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = 0.$$

266. *Application à la ligne droite.* — L'équation générale de la ligne droite

$$Ay + Bx = C$$

devient ainsi (38)

$$\frac{C}{\rho} = A\sin\omega + B\cos\omega.$$

Si C est nul, la droite passe par l'origine, c'est-à-dire par le pôle, et l'équation se réduit à

$$A\sin\omega + B\cos\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \text{arc tang}\left(-\frac{B}{A}\right) = \text{constante}.$$

Dans tout autre cas, on peut diviser par C et poser $\frac{A}{C} = P$, $\frac{B}{C} = Q$. Il est donc permis d'énoncer cette proposition : *Toute droite est représentée en coordonnées polaires par l'équation*

$$\omega = \alpha$$

ou par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = P\sin\omega + Q\cos\omega,$$

suivant qu'elle passe ou non par le pôle.

Si l'on fait successivement dans l'équation d'une droite qui

ne passe pas par le pôle, $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$\rho = \frac{1}{Q} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{P}.$$

Les inverses des coefficients Q et P étant les valeurs de ρ pour $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$, représentent précisément, *en grandeur et en signe*, les segments que la droite intercepte à partir du pôle sur l'axe polaire xOx' et sur la perpendiculaire yOy' élevée à cet axe par le pôle. De là un moyen simple de construire, *sans ambiguïté*, une droite donnée par une équation numérique. Soit, par exemple, la droite

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin\omega}{2} + \frac{\cos\omega}{3}.$$

On aura $+3$ pour le segment OA sur l'axe xOx' (*fig.* 125) et -2 pour le segment OB sur yOy'. On construira donc OA et OB à l'échelle du dessin, et, en joignant les points A et B, on obtiendra la droite cherchée.

267. *Application à la circonférence de cercle.* — En désignant par d et α les coordonnées polaires du centre et par r le rayon, nous avons déjà trouvé pour équation polaire de la circonférence (54)

$$\rho^2 - 2d\rho\cos(\omega - \alpha) + d^2 = r^2.$$

Elle résulterait immédiatement de l'équation en coordonnées rectangulaires

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

en remplaçant p et q par leurs valeurs $d\cos\alpha$ et $d\sin\alpha$, x et y par leurs valeurs $\rho\cos\omega$ et $\rho\sin\omega$.

Cette équation polaire se réduit à $\rho = r$ *lorsque le centre est au pôle, et à*

$$\rho = 2d\cos(\omega - \alpha)$$

lorsque la circonférence passe par le pôle : ces deux dernières équations sont d'un usage très-fréquent.

Pour présenter une application de la seconde, cherchons la *condition pour que trois points* (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2), (ρ_3, ω_3), *soient sur une même circonférence passant par l'origine.*

Il suffit d'éliminer d et α entre les trois équations de condition

$$\rho_1 = 2d\cos(\omega_1 - \alpha), \quad \rho_2 = 2d\cos(\omega_2 - \alpha), \quad \rho_3 = 2d\cos(\omega_3 - \alpha).$$

Or si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par $\sin(\omega_2 - \omega_3)$, $\sin(\omega_3 - \omega_1)$, $\sin(\omega_1 - \omega_2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \sin(\omega_2 - \omega_3) + \rho_2 \sin(\omega_3 - \omega_1) + \rho_3 \sin(\omega_1 - \omega_2) \\
&= 2d\cos\alpha[\cos\omega_1 \sin(\omega_2 - \omega_3) + \cos\omega_2 \sin(\omega_3 - \omega_1) \\
&\qquad + \cos\omega_3 \sin(\omega_1 - \omega_2)] \\
&+ 2d\sin\alpha[\sin\omega_1 \sin(\omega_2 - \omega_3) + \sin\omega_2 \sin(\omega_3 - \omega_1) \\
&\qquad + \sin\omega_3 \sin(\omega_1 - \omega_2)].
\end{aligned}$$

Et comme les deux parenthèses du second membre de l'équation résultante sont identiquement nulles, on a simplement pour la condition cherchée

$$\rho_1 \sin(\omega_2 - \omega_3) + \rho_2 \sin(\omega_3 - \omega_1) + \rho_3 \sin(\omega_1 - \omega_2) = 0.$$

Équations polaires des sections coniques.

268. Pour opérer d'une manière uniforme, on prend pour pôle un foyer et pour axe polaire la droite qui va de ce foyer au sommet voisin. Nous avons déjà vu que, dans un tel système de coordonnées, l'*hyperbole* était représentée par l'équation (263)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + e\cos\omega}{p}.$$

Considérons maintenant la *parabole*. F étant le pôle et FAX l'axe polaire (*fig.* 126), on a

$$\rho = \frac{p}{2} + x$$

pour la valeur du rayon vecteur FM (202). Si l'on projette sur FAX les deux chemins AM et AFM, il vient

$$x = \frac{p}{2} + \rho\cos(\pi - \omega) = \frac{p}{2} - \rho\cos\omega.$$

Éliminant x entre les deux relations posées, on trouve

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + \cos\omega}{p}$$

pour l'équation polaire de la parabole.

Supposons enfin l'*ellipse* rapportée à son foyer de droite F comme pôle et à la droite FAx comme axe polaire (*fig.* 127). Le rayon vecteur FM aura pour expression (136)

$$\rho = a - \frac{cx}{a}.$$

En projetant les deux chemins OM et OFM sur l'axe polaire, il vient

$$x = c - \rho\cos(\pi - \omega) = c + \rho\cos\omega.$$

En éliminant x entre les deux relations obtenues, il vient

$$\rho = \frac{\dfrac{b^2}{a}}{1 + \dfrac{c}{a}\cos\omega},$$

c'est-à-dire que l'équation polaire de l'ellipse est, d'après les notations adoptées,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + e\cos\omega}{p}.$$

269. *La comparaison des résultats précédents* (**268**) *montre que l'équation*

$$\text{(R)} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1 + e\cos\omega}{p}$$

représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'excentricité e est inférieure, supérieure ou égale à l'unité.

On a souvent à discuter des équations numériques qui rentrent dans le type

$$\text{(S)} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{C + B\cos\omega + A\sin\omega}{D}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + \dfrac{B}{C}\left(\cos\omega + \dfrac{A}{B}\sin\omega\right)}{\dfrac{D}{C}}.$$

Pour revenir immédiatement à la forme (R), il suffit alors de poser

$$\frac{A}{B} = \operatorname{tang}\theta.$$

L'équation devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + \dfrac{B}{C\cos\theta}\cos(\omega - \theta)}{\dfrac{D}{C}},$$

et il ne reste plus qu'à poser $\omega - \theta = \omega'$, c'est-à-dire à faire tourner l'axe polaire de l'angle θ.

On voit facilement, d'après la transformation effectuée, que l'équation (S) représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la somme A^2+B^2 est inférieure, supérieure ou égale à C^2.

270. Il est encore utile de connaître les équations polaires de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leur centre comme pôle et à l'axe focal comme axe polaire.

Il suffit de remplacer x et y par $\rho\cos\omega$ et $\rho\sin\omega$ dans les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

On trouve ainsi

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}, \quad \frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\omega}{a^2}-\frac{\sin^2\omega}{b^2}.$$

Des tangentes.

271. Pour que deux courbes

$$\frac{1}{\rho}=f(\omega), \quad \frac{1}{\rho}=\varphi(\omega),$$

aient en commun deux points M et M′ dont les coordonnées angulaires sont α et $\alpha+h$, il faut et il suffit qu'on ait les deux relations

$$f(\alpha)=\varphi(\alpha), \quad f(\alpha+h)=\varphi(\alpha+h),$$

qu'on peut encore écrire

$$f(\alpha)=\varphi(\alpha), \quad \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\frac{\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha)}{h}.$$

Si l'on fait décroître h jusqu'à zéro, on obtient à la limite les conditions (*Compl. d'Alg.*, 114),

$$f(\alpha)=\varphi(\alpha), \quad f'(\alpha)=\varphi'(\alpha),$$

pour exprimer que les deux courbes considérées sont tangentes au point M.

272. D'après cela, les valeurs de P et de Q qui rendent une droite (266)

$$\frac{1}{\rho}=P\sin\omega+Q\cos\omega,$$

tangente à la courbe $\frac{1}{\rho}=f(\omega)$ au point M dont la coordonnée

angulaire est α, sont données par les deux équations

$$f(\alpha) = P \sin\alpha + Q\cos\alpha, \quad f'(\alpha) = P\cos\alpha - Q\sin\alpha.$$

On en déduit, en opérant par voie de réduction,

$$(A)\ P = f(\alpha)\sin\alpha + f'(\alpha)\cos\alpha, \quad Q = f(\alpha)\cos\alpha - f'(\alpha)\sin\alpha.$$

On a donc *pour l'équation de la tangente*

$$\frac{1}{\rho} = f(\alpha)[\cos\omega\cos\alpha + \sin\omega\sin\alpha] + f'(\alpha)[\sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha],$$

c'est-à-dire

$$(B) \qquad \frac{1}{\rho} = f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

273. Dans la pratique, on construira cette droite au moyen de ses segments sur Ox et sur Oy (266). On pourra ainsi, dans la discussion d'une courbe, tracer *à priori* et sans ambiguïté la tangente en tel point qu'on voudra. Les valeurs (A) de P et de Q sont d'ailleurs les expressions générales des inverses de ces segments : $\frac{1}{P}$ est le segment sur Oy et $\frac{1}{Q}$ le segment sur Ox.

Exemple. — Soit la parabole (268)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}(1 + \cos\omega).$$

Le foyer F est pris pour pôle et la droit FAx pour axe polaire (*fig.* 128)

L'équation de la tangente au point M dont la coordonnée angulaire est α est

$$\frac{1}{\rho} = f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

On a ici

$$f(\alpha) = \frac{1}{p}(1 + \cos\alpha) \quad \text{et} \quad f'(\alpha) = -\frac{1}{p}\sin\alpha.$$

En substituant et en simplifiant, il viendra donc pour l'équation de la tangente

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}[\cos(\omega - \alpha) + \cos\omega].$$

On a, en substituant les valeurs de $f(\alpha)$ et de $f'(\alpha)$ dans l'ex-

pression de Q,

$$Q = \frac{1}{p}(1 + \cos\alpha).$$

Par suite, l'inverse du segment déterminé par la tangente MT sur l'axe FAx sera

$$\frac{1}{FT} = Q = \frac{1}{p}(1 + \cos\alpha) = \frac{1}{FM}.$$

Ce segment FT sera donc égal au rayon vecteur FM, et l'on retrouve ainsi simplement la construction connue de la tangente (210).

274. *Aux points maximums et minimums*, la tangente doit être parallèle à l'axe polaire. Le segment intercepté sur cet axe doit donc être infini, et, par suite, son inverse Q doit être nul. Donc, en vertu des relations (A), les points maximums ou minimums ont pour coordonnées angulaires les racines de l'équation

$$(C) \qquad f(\alpha)\cos\alpha - f'(\alpha)\sin\alpha = 0.$$

En égalant à zéro la valeur de P, on trouve de même l'équation

$$(D) \qquad f(\alpha)\sin\alpha + f'(\alpha)\cos\alpha = 0,$$

pour déterminer les points où la tangente est perpendiculaire à l'axe polaire.

275. L'inclinaison φ de la tangente sur l'axe polaire est évidemment donnée par la relation (266)

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{Q}{P} = \frac{f'(\alpha)\sin\alpha - f(\alpha)\cos\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha + f(\alpha)\sin\alpha},$$

c'est-à-dire, en divisant les deux termes par $f'(\alpha)\cos\alpha$,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}}{1 + \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\operatorname{tang}\alpha}.$$

Si l'on pose

$$-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \operatorname{tang}\mu,$$

on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\mu}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\mu} = \operatorname{tang}(\alpha + \mu),$$

ou

$$\varphi = \alpha + \mu.$$

D'où l'on voit, en considérant le triangle OMT (*fig.* 129), que l'angle μ est égal à l'angle OMT ou à son opposé SMV. Donc *l'angle μ que la partie de la tangente qui correspond au sens positif de la coordonnée angulaire ω fait avec le prolongement du rayon vecteur, est donné par la formule*

$$\operatorname{tang} \mu = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

qu'on peut encore écrire (*Compl. d'Alg.*, **122**)

$$\text{(E)} \qquad \operatorname{tang} \mu = -\frac{\frac{1}{\rho}}{\left(\frac{1}{\rho}\right)'} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

On peut d'ailleurs démontrer géométriquement comme il suit cette formule importante (*fig.* 130). CMC′ étant une courbe rapportée au pôle O et à l'axe polaire Ox, soient $M(\rho, \omega)$ le point où l'on veut mener la tangente SMT et $M'(\rho+\Delta\rho, \omega+\Delta\omega)$ un point voisin. Décrivons du point O comme centre l'arc de cercle MM_1. Dans le triangle rectiligne MM_1M', nous aurons :

$$\frac{\sin M_1M'M}{\sin M_1MM'} = \frac{M_1M}{M_1M'} = \frac{M_1M \times \text{arc } M_1M}{M_1M' \times \text{arc } M_1M} = \frac{M_1M}{\text{arc } M_1M} \times \frac{\rho\,\Delta\omega}{\Delta\rho}.$$

A la limite, lorsque le point M′ vient se confondre avec le point M, l'angle $M_1M'M$ tend vers $OMT = \mu$ et $\sin M_1M'M$ vers $\sin \mu$; l'angle $M'M_1M$ tendant vers un angle droit, l'angle M_1MM' tend vers $\frac{\pi}{2} - \mu$, et $\sin M_1MM'$ vers $\cos \mu$. Le premier membre de l'égalité précédente tend donc vers $\operatorname{tang} \mu$; le premier facteur du second membre tend d'ailleurs vers 1. On aura donc à la limite

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\rho}{\lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

276. Dans le système des coordonnées polaires, la *sous-tangente* (que nous désignerons par S_t) est la perpendiculaire OT menée par le pôle au rayon vecteur OM et terminée à la tangente MT. La *sous-normale* (que nous désignerons par S_n) est la partie ON de cette même perpendiculaire com-

prise entre le pôle O et la normale MN (*fig.* 130). On a évidemment

$$\text{(F)} \qquad S_t = OT = \rho \operatorname{tang} \mu = \frac{\rho^2}{\rho'},$$

$$\text{(G)} \qquad S_n = ON = \frac{\rho}{\operatorname{tang} \mu} = \rho'.$$

277. Enfin, les *tangentes au pôle* s'obtiennent d'une manière très-simple : elles répondent évidemment aux valeurs de ω pour lesquelles ρ s'annule.

278. Voici quelques applications des formules (E), (F), (G).

1° *Dans la spirale d'Archimède* $\rho = a\omega$, on a

$$S_n = \rho' = a;$$

la sous-normale y est donc constante. De là un moyen très-simple de construire la tangente. On décrit un cercle du pôle comme centre avec a pour rayon (*fig.* 131), et l'on mène par le point M, où l'on veut avoir la tangente, une perpendiculaire MT à la droite MP qui joint le point M à l'extrémité P du rayon $OP = a$, perpendiculaire au rayon vecteur OM. Au pôle, la spirale est d'ailleurs tangente à l'axe polaire (277).

2° *Cherchons la courbe dont la tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur du point de contact.*

La relation (E)

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = \text{const.} \qquad \text{peut s'écrire} \qquad \frac{\rho'}{\rho} = m.$$

C'est la traduction analytique de la condition imposée. On en déduit (*Compl. d'Alg.*, 125, 129),

$$l.\rho = m\omega, \quad \text{d'où} \quad \rho = e^{m\omega}.$$

Le rayon vecteur ρ, égal à 1 pour $\omega = 0$, croît de 1 à ∞ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. La courbe fait donc (*fig.* 132), à partir du point A pour lequel on a $OA = 1$, une infinité de circonvolutions de plus en plus grandes. Lorsque ω varie de 0 à $-\infty$, ρ varie de 1 à 0 : donc, à partir du point A, la courbe continue à tourner autour du pôle (dans un sens contraire) en s'en rapprochant indéfiniment (*).

Cette ligne, qu'on nomme *spirale logarithmique*, jouit encore de la propriété suivante : *l'extrémité* N *de la sous-normale décrit une spirale égale à la première, mais différemment placée.*

(*) Le pôle est, dans ce cas, un *point asymptotique*.

En effet, la formule (G) donne pour le rayon vecteur du point N (*Compl. d'Alg.*, 124, 129),

$$\rho_1 = \mathrm{ON} = \rho' = me^{m\omega}.$$

D'ailleurs, la coordonnée angulaire du même point est

$$\omega_1 = \omega + \frac{\pi}{2}.$$

L'équation du lieu des points N sera donc

$$\rho_1 = me^{m\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

ou, plus simplement, en enlevant les indices,

$$\rho = me^{m\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{1.m}\, e^{m\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{m\left[\omega - \frac{\pi}{2} + \frac{1.m}{m}\right]}.$$

Pour ramener cette équation à la forme

$$\rho = e^{m\theta},$$

il suffit donc de poser

$$\omega - \frac{\pi}{2} + \frac{1.m}{m} = \theta,$$

c'est-à-dire de prendre un nouvel axe polaire incliné sur le premier d'un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{lm}{m}$.

On démontre aisément que *l'extrémité de la sous-tangente décrit aussi une spirale égale à la première.*

3° *Considérons enfin la courbe décrite par un point* M *d'un cercle mobile* O′ *qui roule sans glisser sur un cercle fixe* O *de même rayon* (*fig.* 133).

Prenons pour pôle le point A où se trouvait le point générateur M, lorsque ce point était le point de contact des deux cercles O et O′, et adoptons OAx pour axe polaire. Quand le cercle O′ a roulé de l'arc CA, le point M occupe une position telle, qu'on ait arc CM = arc CA. Le triangle ACM est donc un triangle isocèle dont la médiane CI est la tangente commune aux deux cercles au point C. Ainsi la droite AI est parallèle à OC et, de plus, égale à la moitié du rayon vecteur AM. Donc, en projetant le contour OAI sur OC et en désignant par R le rayon commun des deux cercles, on aura

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}\cos\omega + \frac{\rho}{2},$$

d'où

$$\rho = 2R(1 - \cos\omega).$$

Cette courbe, tangente à l'axe polaire au pôle A (277), s'élève au-dessus de cet axe qu'elle vient ensuite couper en A' à une distance $AA' = 4R$, et se termine par un arc A'D'A symétrique du premier ADA'. La formule (E) donne

$$\operatorname{tang}\mu = \operatorname{tang} TMV = \frac{2R(1-\cos\omega)}{2R\sin\omega} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} TMV = \operatorname{tang} MCI = \cot CMI.$$

Les deux droites MC et MT sont donc perpendiculaires; et par suite, *la droite* MC, *qui joint le point* M *au point de contact* C *des deux cercles, est la normale à la courbe décrite, au point* M.

Cette propriété de la courbe considérée qu'on nomme *épicycloïde* (71), n'est qu'un cas particulier de ce beau théorème général dû à Descartes : *Lorsqu'une courbe roule sans glisser sur une autre courbe supposée fixe, un point quelconque lié à la première décrit une troisième courbe dont la normale, en un point quelconque, s'obtient en joignant ce point au point de contact correspondant des deux courbes primitives.*

La démonstration de Descartes est d'ailleurs très-simple. Remplaçons les deux courbes par deux polygones ayant leurs côtés respectivement égaux. L'un de ces polygones restant fixe, tandis que le second se meut de manière à appliquer successivement chacun de ses côtés sur le côté égal du premier, un point quelconque M lié au polygone mobile décrira une série d'arcs de cercle dont les centres seront les divers sommets du polygone fixe; donc, dans une position quelconque du point M, la normale à l'arc qu'il décrit passera par le sommet qui est actuellement commun aux deux polygones. Cela posé, il suffit de faire croître indéfiniment le nombre des côtés des polygones et de passer à la limite, pour avoir la proposition énoncée.

Des asymptotes.

279. Pour que la courbe

$$\frac{1}{\rho} = f(\omega)$$

ait une branche infinie, il faut que $f(\omega)$ s'annule pour une certaine valeur de ω; en d'autres termes, il faut que l'équa-

tion

$$f(\omega) = 0$$

ait une ou plusieurs racines réelles.

Plaçons-nous dans cette hypothèse, et soit α une racine réelle de l'équation précédente. L'équation générale de la tangente (272)

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{\rho} = f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha)$$

se réduit (en vertu de la condition $f(\alpha) = 0$ et en supposant $f'(\alpha)$ différent de zéro) à

$$\text{(H)} \qquad \frac{1}{\rho} = f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

La tangente a donc pour limite une droite déterminée; cette droite, qui est représentée par l'équation (H), a reçu le nom d'*asymptote*. On la construira à l'aide de ses segments sur Ox et sur Oy (266), ou bien au moyen de l'un d'eux et de la direction connue α de l'asymptote. Le principal avantage de l'emploi de l'équation (H) consiste en ce que, dans la discussion d'une courbe, on peut tracer *à priori et sans ambigüité* les asymptotes.

Les expressions générales des inverses des segments sur Ox et sur Oy (272), qui deviennent, d'après l'hypothèse $f(\alpha) = 0$,

$$-f'(\alpha)\sin\alpha \quad \text{et} \quad f'(\alpha)\cos\alpha,$$

montrent que lorsque $f'(\alpha)$ s'annule en même temps que $f(\alpha)$, ces deux segments deviennent infinis; il n'y a plus de limite déterminée pour la tangente. On dit alors que l'asymptote se transporte à l'infini. A proprement parler, il n'y a plus d'asymptote, mais seulement une direction asymptotique.

280. Appliquons cette théorie à l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + e\cos\omega}{p}$$

qui représente (269) les trois sections coniques.

Pour que l'équation

$$1 + e\cos\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\omega = -\frac{1}{e}$$

ait des racines réelles, il faut et il suffit que e soit égal ou supérieur à 1; ce qui exclut le cas de l'ellipse, comme on devait s'y attendre.

Pour $e = 1$, l'équation $\cos\omega = -1$ a une infinité de racines réelles; mais comme, pour obtenir toute la courbe, il suffit de faire varier ω de 0 à 2π, on ne doit prendre que la racine $\alpha = \pi$. D'ailleurs, la dérivée $f'(\alpha) = -e\sin\alpha$ s'annulant pour $\alpha = \pi$, l'asymptote se transporte à l'infini; la branche de courbe tend, en s'élevant sans cesse, à devenir parallèle à la direction $\alpha = \pi$ de l'axe géométrique de la parabole.

Pour $e > 1$, l'équation $\cos\omega = -\frac{1}{e}$ a deux racines réelles comprises entre 0 et 2π, l'une α, moindre que π, l'autre égale à $2\pi - \alpha$. On a ici

$$f(\alpha) = \frac{1}{p}(1 + e\cos\alpha),$$

d'où

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{p}e\sin\alpha.$$

Il y a donc pour l'hyperbole deux asymptotes données par les équations (il faut remplacer successivement dans l'équation (H) α par α et $2\pi - \alpha$)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{e\sin\alpha}{p}\sin(\alpha - \omega), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{e\sin\alpha}{p}\sin(\alpha + \omega).$$

L'angle α étant compris entre 0 et π, on a

$$\sin\alpha = +\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} = +\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} = \frac{b}{c}.$$

D'ailleurs

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Le segment intercepté sur $F'A'x$ (*fig.* 134) par l'une ou l'autre asymptote est donc (on pourrait répéter le même calcul pour la seconde asymptote)

$$\frac{1}{-f'(\alpha)\sin\alpha} = \frac{p}{e\sin^2\alpha} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2}{c^2}} = c,$$

résultat qui est d'accord avec les propriétés connues de l'hyperbole.

On prendra donc sur $F'A'x$ une longueur $F'O = c$, et en menant deux droites POP', QOQ', respectivement parallèles aux directions F'G, F'G', indiquées par les angles α et $2\pi - \alpha$, on aura les asymptotes.

Cela fait, la discussion de la courbe est très-facile. Le rayon

vecteur ρ, d'abord égal à $\frac{p}{1+e} = c - a$ pour $\omega = 0$, croît et devient infini pour $\omega = \alpha$; de là une première portion A'B' de la courbe, partant du point A' obtenu en prenant $OA' = a$ et se dirigeant vers l'asymptote OP'. Pour ω plus grand que α, ρ est *négatif* et décroît *en valeur absolue* jusqu'à la valeur $\frac{-p}{1-e} = c + a$ qu'il atteint pour $\omega = \pi$: on obtient ainsi une autre branche, qui part de l'infini suivant la direction PO et arrive au point A obtenu en prenant $OA = a$. Enfin, de π à $2\pi - \alpha$, on obtient la branche AC par des rayons négatifs; et de $2\pi - \alpha$ à 2π, on trouve, par des rayons vecteurs positifs, la branche C'A' qui vient rejoindre la première A'B'.

281. Dans la pratique, on évite souvent de longs calculs au moyen de la remarque suivante :

Lorsqu'une fonction $f(\omega)$ est le produit de deux facteurs $\psi(\omega)$, $\varphi(\omega)$, dont l'un $\varphi(\omega)$ s'annule seul pour $\omega = \alpha$, il suffit pour avoir $f'(\alpha)$ de prendre la dérivée du facteur $\varphi(\omega)$, et de remplacer ω par α dans l'expression $\psi(\omega)\varphi'(\omega)$.

En effet, l'équation

$$f(\omega) = \psi(\omega)\varphi(\omega)$$

donne, par dérivation (*Compl. d'Alg.*),

$$f'(\omega) = \psi'(\omega)\varphi(\omega) + \psi(\omega)\varphi'(\omega);$$

d'où, en observant que $\varphi(\alpha) = 0$,

$$f'(\alpha) = \psi(\alpha)\varphi'(\alpha).$$

Supposons qu'on veuille déterminer l'asymptote du *folium de Descartes* (**102**), dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^3\omega + \cos^3\omega}{3\sin\omega\cos\omega} = \frac{1}{3\sin\omega\cos\omega}(\sin^3\omega + \cos^3\omega) = \psi(\omega)\varphi(\omega).$$

L'asymptote répond à la valeur de ω qui satisfait à l'équation

$$\sin^3\omega + \cos^3\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^3\omega = -1;$$

cette valeur est

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

On voit que $\varphi(\omega)$ est nulle pour cette valeur particulière. On aura

$$\varphi'(\omega) = 3\sin\omega\cos\omega(\sin\omega - \cos\omega),$$

$$\psi(\omega)\varphi'(\omega) = \sin\omega - \cos\omega$$

et

$$f'(\alpha) = \psi\left(\frac{3\pi}{4}\right)\varphi'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$\frac{1}{\rho} = f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha) = \sqrt{2}\sin\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right),$$

et le segment qu'elle intercepte sur Ox est

$$\frac{1}{-f'(\alpha)\sin\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = -1.$$

Ce résultat s'accorde avec celui déjà trouvé (**102**).

Discussion d'une courbe.

282. Proposons-nous de chercher la forme de la courbe représentée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a + b\cos\omega}{ab\sin\omega}, \tag{1}$$

où a et b sont des nombres positifs (*fig.* 135, 136, 137).

D'une manière générale, une courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire, lorsque son équation n'est pas modifiée par le changement de ω en $-\omega$, ou bien par le changement de ρ en $-\rho$ et de ω en $\pi - \omega$.

Une courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire menée par le pôle à l'axe polaire, lorsque son équation n'est pas modifiée par le changement de ω en $\pi - \omega$, ou bien par le changement de ρ en $-\rho$ et de ω en $2\pi - \omega$.

Si l'on change d'axe polaire, et si le nouvel axe polaire fait l'angle α avec l'ancien, on aura pour nouvelle coordonnée angulaire

$$\theta = \omega - \alpha.$$

Il faudra donc remplacer ω par $\alpha + \theta$. Si le nouvel axe polaire est un axe de symétrie, l'équation ne sera pas modifiée par le changement de θ en $-\theta$ ou de ρ en $-\rho$ et de θ en $\pi - \theta$. En écrivant les conditions nécessaires pour qu'il en soit ainsi, on trouvera les valeurs de α qui correspondent aux axes de symétrie de la courbe (si ces axes existent).

Ceci posé, revenons à l'équation (1). Il suffit d'y faire varier ω de 0 à 2π, puisque l'angle ω ne figure que par ses fonctions circulaires (c'est là une remarque générale). La courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire yOy' à l'axe polaire, puisque ρ se change en $-\rho$ lorsque ω devient $2\pi - \omega$; elle passe par le pôle en touchant l'axe polaire, puisqu'on a $\rho = 0$ pour $\omega = 0$. La courbe passe en outre par le point B situé sur Oy à une distance OB du pôle égale à b. Les deux tangentes en ce point (qui est *double* à cause de la symétrie) interceptent sur l'axe polaire des

segments OA et OA′ égaux à a. La formule (A) donne en effet (272), en représentant par $f(\omega)$ le second membre de l'équation (1).

$$OA = -\frac{1}{f'(\alpha)\sin\alpha} = -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = a,$$

$$OA' = -\frac{1}{f'(\alpha)\sin\alpha} = \frac{1}{f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -a.$$

(En faisant successivement $\omega = \frac{\pi}{2}$ et $\omega = \frac{3\pi}{2}$ dans l'équation (1), on trouve

$$\rho = b \quad \text{et} \quad \rho = -b,$$

ce qui ramène bien au même point B.)

On décrira donc un cercle du pôle comme centre avec a pour rayon, et on obtiendra les tangentes au point B en joignant ce point aux extrémités A et A′ du diamètre AA′ (*fig.* 135, 136, 137).

Pour que la courbe représentée par l'équation (1) admette des branches infinies, il faut et il suffit (279) qu'on puisse satisfaire, par des valeurs réelles de ω, à l'équation

$$a + b\cos\omega = 0; \tag{2}$$

ce qui exige que a ne surpasse pas b. On est ainsi conduit à distinguer les trois cas suivants : $a > b$, $a < b$, $a = b$.

PREMIER CAS. $a > b$.

La courbe est alors fermée (*fig.* 135), et le tableau ci-dessous

$$\left.\begin{array}{ll} \omega = 0, & \rho = 0, \\ \omega = \frac{\pi}{2}, & \rho = b, \\ \omega = \pi, & \rho = 0, \end{array}\right\} \rho \text{ est positif dans cet intervalle,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \omega = \pi, & \rho = 0, \\ \omega = \frac{3\pi}{2}, & \rho = -b. \\ \omega = 2\pi, & \rho = 0, \end{array}\right\} \rho \text{ est négatif dans cet intervalle,}$$

montre que la courbe part du pôle suivant la direction Ox, s'élève jusqu'à une certaine limite, revient au pôle en touchant de nouveau en ce point l'axe polaire; puis, dans une seconde révolution, décrit un second ovale OFBO, symétrique du premier OBEO par rapport à Oy, et situé tout entier comme lui au-dessus de l'axe polaire. Pour compléter ces notions, il suffit de chercher le maximum du rayon vecteur. En mettant l'équation (1) sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a\left(\sin^2\frac{1}{2}\omega + \cos^2\frac{1}{2}\omega\right) + b\left(\cos^2\frac{1}{2}\omega - \sin^2\frac{1}{2}\omega\right)}{2ab\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(a+b)\cot\frac{1}{2}\omega + (a-b)\tan\frac{1}{2}\omega}{2ab},$$

on voit que ce maximum ρ_1 correspond au minimum du numérateur du second membre, c'est-à-dire a lieu pour

$$(a+b)\cot\frac{1}{2}\omega = (a-b)\tan\frac{1}{2}\omega \quad \text{ou} \quad \cos\omega = -\frac{b}{a}.$$

En effet, ce numérateur est une somme de deux parties dont le produit est constant (*Alg. élém.*, 223). En désignant par α et $2\pi - \alpha$ les deux angles compris entre o et 2π qui satisfont à la relation $\cos\omega = -\frac{b}{a}$, on trouve (puisque le produit constant est $a^2 - b^2$)

$$\rho_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{b}{\sin\alpha}.$$

Le cercle de rayon ρ_1 contient donc la courbe. D'après cela, menons par le point A' la tangente A'I au cercle décrit du pôle comme centre avec $OB = b$ pour rayon; prolongeons A'I jusqu'à sa rencontre C avec Oy; OC sera le rayon maximum ρ_1, et en continuant le rayon OI jusqu'à sa rencontre E avec le cercle OC, nous aurons le point où ce cercle limite touche l'ovale OBEO. Même construction pour l'autre ovale. En effet, on a d'abord

$$\cos\mathrm{IOA} = -\cos\mathrm{IOA'} = -\frac{b}{a},$$

d'où

$$\mathrm{IOA} = \alpha;$$

puis

$$\mathrm{CO} = \frac{\mathrm{OI}}{\cos\mathrm{IOC}} = \frac{b}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{b}{\sin\alpha} = \rho_1.$$

DEUXIÈME CAS. $a < b$.

L'équation (2) est alors satisfaite par deux valeurs α et $2\pi - \alpha$ de ω. La courbe a donc deux asymptotes. En profitant de la remarque du n° 281, on trouve immédiatement leurs équations (279)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{a}, \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{\sin(\alpha + \omega)}{a}.$$

La première intercepte sur Oy et sur Ox (*fig.* 136) les segments

$$\frac{1}{f'(\alpha)\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{-f'(\alpha)\sin\alpha},$$

c'est-à-dire (en vertu de la relation $a + b\cos\alpha = o$)

$$\frac{-a}{\cos\alpha} = b = \mathrm{OB} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \mathrm{OT};$$

elle passe donc par le point B (qui est alors extérieur au cercle OA).

D'ailleurs elle fait avec Oy un angle dont le sinus est égal à

$$\frac{OT}{\sqrt{OB^2+OT^2}}=\frac{a}{b}.$$

Donc cette asymptote n'est autre chose que la tangente BI′ menée par le point B au cercle OA; la deuxième asymptote est la tangente symétrique BI.

En résumé, ω variant de 0 à α, la courbe part du pôle suivant la direction Ox, s'élève rapidement, passe en B où elle est tangente à BA, puis reste située dans l'angle opposé à ABI′ jusqu'à ce qu'elle rejoigne à l'infini son asymptote BE′. De α à π, on obtient par des rayons vecteurs *négatifs* la branche EO qui, de π à $2\pi-\alpha$, se continue de O en F par des rayons vecteurs positifs. Enfin de $2\pi-\alpha$ à 2π, des rayons *négatifs* donnent la branche E′BO. (On voit que chacune des branches OBE′, OBF′ présentera au delà du point B un point d'inflexion.)

Troisième cas. $a=b$.

Le point B est alors situé sur le cercle OA. L'équation de la courbe se réduit à

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{a}\cot\frac{1}{2}\omega.$$

L'axe polaire est parallèle à la direction des branches infinies et il y a une asymptote unique donnée par l'équation (279)

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sin\omega}{2a};$$

c'est la parallèle à l'axe polaire menée par le point C situé sur Oy à une distance $OC=2a$.

De $\omega=0$ à $\omega=\pi$, on obtient par des rayons positifs la branche OBF tangente en B à la droite BA; puis de π à 2π, on trouve par des rayons *négatifs* la branche EBO.

283. La courbe que nous venons de discuter représente la projection horizontale de la ligne d'ombre de la surface de la vis à filet triangulaire. Elle se prête à une définition géométrique très-simple.

Du point B (*fig.* 138), menons une sécante quelconque qui rencontre en N le cercle OA; joignons ON, puis menons à angle droit sur ON la droite OMI qui rencontre en M la sécante, et en I la parallèle BI à ON. Les triangles semblables BMI, NOM, donnent

$$\frac{MO}{ON}=\frac{MI}{BI}\quad\text{ou}\quad\frac{\rho}{a}=\frac{b\sin\omega-\rho}{b\cos\omega},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho}=\frac{a+b\cos\omega}{ab\sin\omega}. \tag{1}$$

Ainsi la courbe considérée est le lieu géométrique des points M que l'on obtient en menant par un point fixe B des droites qui coupent un cercle fixe O, et en élevant chaque fois une perpendiculaire OM sur le rayon ON qui va au point de section, jusqu'à la rencontre de la sécante correspondante.

Comme chaque sécante coupe le cercle en deux points, il y a deux points de la courbe sur chaque sécante. Le milieu de la longueur comprise entre ces deux points est toujours sur le cercle décrit sur OB comme diamètre. Le lecteur pourra vérifier facilement cette dernière propriété et retrouver par une discussion géométrique les diverses formes de courbes que nous avons déduites de l'équation (1).

Application des coordonnées polaires à la démonstration de quelques théorèmes.

284. L'emploi du système polaire permet de démontrer avec rapidité et élégance un grand nombre de théorèmes, qu'on ne trouverait que très-péniblement à l'aide du système rectiligne. Nous en donnerons quelques exemples.

1° L'équation de la tangente à la parabole au point M (*fig.* 139) dont la coordonnée angulaire est $MFx = 2\alpha$, est (273)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - 2\alpha) + \cos\omega}{p}.$$

La tangente en un second point N dont la coordonnée angulaire $NFx = 2\beta$, ayant pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - 2\beta) + \cos\omega}{p},$$

coupe la première tangente en un point T, dont la coordonnée angulaire TFx est donnée par la relation

$$\cos(\omega - 2\alpha) = \cos(\omega - 2\beta).$$

Des deux solutions

$$\omega - 2\alpha = \omega - 2\beta,$$
$$\omega - 2\alpha = -(\omega - 2\beta),$$

la première doit être rejetée puisqu'elle conduit à $\alpha = \beta$; la seconde, seule admissible, se réduit à

$$\omega = \alpha + \beta$$

ou

$$TFx = \frac{1}{2}(MFx + NFx):$$

elle démontre donc ce théorème : *Dans toute parabole, la droite qui joint le foyer à l'intersection de deux tangentes, divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs des deux points de contact.*

2° Il résulte de là que si l'on considère trois tangentes T_1, T_2, T_3, à la parabole

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - 2\alpha_1) + \cos\omega}{p},$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - 2\alpha_2) + \cos\omega}{p},$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - 2\alpha_3) + \cos\omega}{p},$$

et que l'on désigne respectivement par (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2), (ρ_3, ω_3) les points d'intersection M_1, M_2, M_3, de T_2 et de T_3, de T_3 et de T_1, de T_1 et de T_2, on aura

$$\omega_1 = \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$\omega_2 = \alpha_3 + \alpha_1,$$
$$\omega_3 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Par suite, en portant dans les équations précédentes les valeurs qui y satisfont et en rapprochant les expressions obtenues, on pourra écrire

$$\frac{2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{p} = \frac{\cos\alpha_1}{\rho_1} = \frac{\cos\alpha_2}{\rho_2} = \frac{\cos\alpha_3}{\rho_3}$$
$$= \frac{\cos\alpha_1\sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \cos\alpha_2\sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \cos\alpha_3\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho_1\sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \rho_2\sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \rho_3\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Le numérateur de ce dernier rapport étant identiquement nul, il faut que son dénominateur le soit aussi, afin que ce rapport, qui a une valeur nécessairement différente de zéro, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Or la relation

$$\rho_1\sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \rho_2\sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \rho_3\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

exprime précisément (267) que les trois points M_1, M_2, M_3, et le pôle F sont sur une même circonférence. On parvient donc à ce théorème :

Le cercle circonscrit au triangle déterminé par les points d'intersection mutuels de trois tangentes à la parabole, passe par le foyer.

Ce théorème permet de déterminer immédiatement les éléments d'une parabole dont on donne quatre tangentes.

3° Quand on veut étudier les relations qui existent entre les longueurs de deux diamètres conjugués et leur angle, dans l'ellipse ou dans l'hyperbole, c'est au système polaire qu'il

faut recourir. Pour reconnaître la vérité de cette assertion, il suffit de considérer les formules (270, 275)

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\rho}{\rho'}. \tag{2}$$

La première donne en effet les longueurs de ces diamètres, et la seconde donne leur angle puisque la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle à son conjugué.

Par conséquent, si, après avoir calculé ρ', on élimine entre les deux relations précédentes l'angle ω qui distingue un diamètre de son conjugué, on obtiendra une équation qui renfermera *nécessairement* toutes les relations qui lient les longueurs de deux diamètres conjugués et leur inclinaison mutuelle.

Bornons-nous au cas de l'ellipse. Le calcul se fait très-simplement lorsqu'on écrit l'équation (1) sous l'une des deux formes suivantes

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{a^2}\right) = \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\sin^2\omega, \\ \dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{b^2} = \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\cos^2\omega; \end{cases} \tag{3}$$

et lorsqu'on remplace l'équation (2) par celle-ci

$$\frac{1}{\sin^2\mu} = 1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}. \tag{4}$$

Le carré de la dérivée de l'une des deux équations (3) est, en vertu de ces mêmes équations,

$$\frac{\rho'^2}{\rho^6} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 \sin^2\omega\cos^2\omega = -\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

ou

$$\rho^4 - (a^2 + b^2)\rho^2 + a^2b^2\left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) = 0.$$

On a donc enfin, d'après la relation (4),

$$\rho^4 - (a^2 + b^2)\rho^2 + \frac{a^2b^2}{\sin^2\mu} = 0. \tag{K}$$

Les racines de cette équation correspondent aux diamètres conjugués qui font entre eux l'angle μ. En désignant par a'^2 et

b'^2 les carrés des demi-longueurs de ces diamètres conjugués, on aura donc

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad a'b' = \frac{ab}{\sin\mu};$$

ce sont les deux théorèmes d'Apollonius (**137**).

La correspondance du maximum de μ à l'égalité des diamètres conjugués devient intuitive d'après l'équation (**K**), qui fournit en même temps la limite de μ (*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Construire les courbes représentées par les équations suivantes :

$$4y^2 - 12xy + 11x^2 + 4y - 10x + a = 0 \text{ (ellipse)}$$

(on fera successivement $a = -4$, $a = 10$, $a = 3$);

$$25y^2 - 10xy - 4x^2 + 20y + 26x + a = 0 \text{ (hyperbole)}$$

(on fera successivement $a = -33$, $a = -49$, $a = -41$);

$$(9y^2 - 6xy + x^2 - 6y + ax + b = 0 \text{ (parabole)}$$

(on fera successivement $a = -5$ et $b = 15$, $a = 9$ et $b = -13$, $a = 2$ et $b = -6$, $a = 2$ et $b = 8$, $a = 2$ et $b = 1$).

II. Construire les courbes représentées par les équations suivantes (hyperbole) :

$$4xy + 5x^2 - 2y + 3x - 1 = 0, \quad 5xy - 10x^2 + 3y - x + 3 = 0,$$
$$2xy + 5y - x + 2 = 0, \quad 3xy - y + 3x - 1 = 0,$$
$$3xy - 5x + 7 = 0, \quad 5xy - 2x = 0,$$
$$xy + 2y - 1 = 0, \quad 3xy + 2y = 0, \quad 8xy + 1 = 0, \quad 2xy = 0.$$

(*) Cette démonstration ingénieuse a déjà été publiée par M. Eug. Rouché dans les *Nouvelles Annales* (t. XVII, p. 436). Elle rectifie une erreur didactique échappée à un penseur très-distingué de notre époque. « Le point de vue moderne, dit Auguste Comte dans son remarquable *Traité de Géométrie analytique*, conduirait très-naturellement au premier théorème d'Apollonius s'il était encore ignoré. Mais quant au second, il faut avouer avec franchise que la marche moderne n'y conduirait pas spontanément; en sorte que la démonstration analytique doit ici consister en une pure vérification. » L'erreur provient de la considération exclusive du système rectiligne. De même qu'en Géométrie descriptive on emploie simultanément plusieurs plans verticaux destinés à montrer sous toutes ses faces le corps que l'on étudie, de même en Géométrie analytique on doit varier les systèmes de coordonnées; et le plus heureux ou le plus habile est celui qui, dans chaque cas, sait choisir le système le plus en harmonie avec la nature de la recherche qu'il poursuit.

III. Construire les courbes représentées par les équations suivantes (parabole) :

$$8x^2-7y+5x-1=0,\quad 4x^2-3y-4x+1=0,\quad x^2-5y+2x+4=0,$$
$$5x^2+9y+3x-2=0,\quad 11y^2+3y-2x-5=0,\quad 9y^2+2y+4x-1=0.$$

IV. Ramener les équations suivantes à leur forme la plus simple par la transformation des coordonnées :

$$y^2-4xy+5x^2+2y-2x-1=0,$$
$$5y^2+9xy+x^2-y+2x-5=0,$$
$$4y^2-4xy+x^2+y+3x-1=0,$$
$$9xy-3x^2+5y-5x+2=0,$$
$$3y^2-12xy+y-x+1=0.$$

V. Chercher les relations qui doivent exister entre les coefficients de l'équation générale du second degré à deux variables, pour qu'elle représente l'une quelconque des variétés indiquées dans le Chapitre I[er].

VI. Chercher les conditions nécessaires pour que l'équation générale du second degré représente une hyperbole équilatère.

VII. La tangente en un point donné de l'ellipse et la perpendiculaire élevée par l'un des foyers sur le rayon vecteur du point de contact, concourent sur la directrice correspondante (le même théorème est vrai pour l'hyperbole et la parabole).

VIII. Dans une courbe du second degré, on mène une corde qui coupe l'une des directrices en un certain point; si l'on joint ce point au foyer correspondant, la droite obtenue est la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs des extrémités de la corde et le prolongement de l'autre.

IX. Construire une ellipse connaissant un foyer et trois points de la courbe (même problème pour l'hyperbole et la parabole : pour la parabole, deux points suffisent).

X. Démontrer que dans les trois courbes les tangentes issues d'un même point sont également inclinées sur les rayons vecteurs de ce point, et que chacun d'eux est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs des deux points de contact qui aboutissent au même foyer. (Dans le cas de la parabole, l'un des foyers se transporte à l'infini).

XI. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, deux diamètres conjugués interceptent sur une tangente et à partir du point de contact, deux segments dont le produit constant est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

XII. Trouver le lieu du sommet d'un triangle invariable qui se meut dans son plan de manière que les extrémités de sa base décrivent deux axes rectangulaires donnés.

XIII. Circonscrire à une ellipse donnée un rectangle équivalent à un carré donné (maximum et minimum d'un pareil rectangle).

XIV. Deux cercles étant donnés dans un plan, on mène au premier une tangente qui coupe le second cercle en deux points par lesquels on lui mène des tangentes : trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes.

XV. On donne un cercle et une droite situés dans un plan. De chaque point du cercle on mène une perpendiculaire sur la droite, et l'on prend chaque fois le milieu M de cette perpendiculaire : trouver le lieu des points M et discuter l'équation obtenue (*Concours d'admission à l'École Centrale*, 1861).

XVI. On considère dans un cercle donné un système de cordes parallèles, et l'on demande le lieu des points qui divisent ces cordes en moyenne et extrême raison (*Concours d'admission à l'École Centrale*, 1861).

XVII. Si par un point d'une hyperbole on mène une parallèle à l'une des asymptotes jusqu'à la rencontre de l'une des directrices, cette parallèle est égale au rayon vecteur du point considéré par rapport au foyer correspondant.

XVIII. Construire une hyperbole connaissant un foyer ou une directrice, une asymptote et un point.

XIX. Trouver le lieu des centres des cercles par rapport auxquels deux circonférences données sont à la fois tangentes extérieurement ou intérieurement.

XX. On donne dans une circonférence déterminée un diamètre fixe AB; on mène les cordes CD parallèles à une direction connue, et pour chaque corde on joint respectivement les extrémités C et D aux extrémités A et B du diamètre fixe : on demande le lieu des points M d'intersection des droites AC et BD ainsi obtenues (*Concours d'admission à l'École Centrale*, 1861).

XXI. Étant données deux droites AB, AC, on leur mène par un point fixe O des sécantes telles que ODE. On prend ensuite sur la sécante considérée OM = DE (partie interceptée sur cette sécante par les droites données) : on demande le lieu des points M.

XXII. Par deux points donnés A et B, on mène les droites AM et BM telles que l'angle MAB soit double de l'angle MBA : on demande le lieu des points d'intersection M. — Usage qu'on peut faire de ce lieu pour résoudre le problème de la *trisection de l'angle*.

XXIII. On donne dans un plan une droite AB et deux points fixes C et D. Prenant un point quelconque S sur la droite AB, on élève aux droites SC et SD par les points C et D les perpendiculaires CM et DM : trouver le lieu des points d'intersection M de ces perpendiculaires (*Concours d'admission à l'École Centrale*, 1861).

XXIV. Trouver le lieu des projections du sommet d'une parabole sur toutes les tangentes à la courbe.

XXV. Mener une normale à la parabole par un point quelconque pris dans le plan de la courbe. — Lieu des points d'où l'on peut mener seulement deux normales à la parabole : propriétés de ce lieu.

XXVI. Trouver le lieu des centres des cercles astreints à être tangents à un cercle et à une droite donnés.

XXVII. On donne un cercle O et un point A. Par ce point, on mène une corde dont on prend le milieu I. On abaisse IP perpendiculaire sur le diamètre fixe qui passe par le point A, on prend sur cette perpendiculaire PM = AI, et l'on demande le lieu des points M. Discussion. (*Concours d'admission à l'École Centrale,* 1861.)

XXVIII. Trouver le lieu des sommets des triangles qui ont une même base donnée et dont les angles à la base ont une différence constante.

XXIX. Trouver le lieu des sommets des hyperboles qui ont un même foyer et une même asymptote.

XXX. Construire une hyperbole connaissant un sommet, une asymptote et l'excentricité $\frac{c}{a}$ de la courbe.

XXXI. Construire une parabole tangente à quatre droites données (284, 2°).

XXXII. Former l'équation de toutes les paraboles qui ont une même directrice et une même tangente : trouver le lieu des foyers et le lieu des sommets de toutes ces paraboles.

XXXIII. Déterminer graphiquement les points de rencontre d'une droite donnée et d'une courbe du second degré, sans construire la courbe (on connaît les éléments d'où dépend dans chaque cas le tracé de la courbe).

XXXIV. Trouver le lieu géométrique des milieux des cordes d'une courbe du second degré qui viennent concourir en un point quelconque de son plan.

XXXV. Par un point quelconque pris dans le plan d'une parabole, on mène une sécante à la courbe : on trace les normales qui correspondent aux points d'intersection obtenus, et l'on demande le lieu décrit par leur point de rencontre.

XXXVI. Étant donnée une parabole, la sécante MAB se meut sous la condition que les normales menées à la parabole par les points d'intersection A et B se croisent en un point C de cette courbe; par le point C, on mène à la parabole la tangente CM qui vient couper la sécante MAB au point M : lieu des points M (*Concours d'admission à l'École Polytechnique,* 1860).

XXXVII. Par un point P extérieur, on mène à une conique une sécante PAB; par les points de rencontre A et B, on mène des tangentes qui se coupent en M; de ce point on abaisse une perpendiculaire sur AB : lieu des pieds de ces perpendiculaires. Prouver : 1° que le lieu passe en P; 2° qu'il est le même pour toutes les coniques homofocales; 3° qu'il peut être considéré comme le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur certaines droites qui sont tangentes à une courbe dont on demande l'équation (*Concours d'admission à l'École Normale,* 1861).

XXXVIII. Si par un point quelconque donné dans le plan d'une conique

on mène deux sécantes de direction fixe, les produits des segments compris sur chaque sécante entre leur point commun et leurs points d'intersection avec la courbe, resteront dans un rapport constant quel que soit le point considéré (Newton).

XXXIX. Construire une parabole dont on donne quatre points.

XL. Déterminer une courbe tangente à l'axe des y telle, que cette courbe partage dans un rapport constant le rectangle déterminé par les coordonnées d'un point de la courbe.

XLI. Construire les courbes

$$\rho = A\cos(\omega - \alpha) + B\cos(\omega - \beta) + \ldots + M\cos(\omega - \gamma) \quad (\textit{Cercle}),$$

$$\rho\omega = a \quad (\textit{Spirale hyperbolique}).$$

$$\rho = a + b\cos\omega \quad (\textit{Limaçon de Pascal}).$$

XLII. Construire les courbes

$$\frac{1}{\rho} = \cos^2\omega, \qquad \rho = \operatorname{tang} 3\omega,$$

$$\rho = a\omega\sin\omega, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\sin\omega}{\cos^2\omega}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\omega - \sin\omega}{\omega + \sin\omega}, \qquad \rho = \log\sin\omega.$$

XLIII. Construire les courbes

$$\rho = 1 - 3\cos 3\omega, \qquad \frac{1}{\rho} = \sin\omega(2\cos\omega - 1), \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{2 - 3\cos\omega}{\sin\omega}.$$

XLIV. Trouver et discuter en coordonnées polaires le lieu des projections du centre d'une ellipse : 1° sur les tangentes; 2° sur les normales à la courbe.

XLV. Dans toute conique, MM′ étant une corde passant par le foyer F, les expressions $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'}$, $\frac{FM.FM'}{MM'}$, sont constantes.

XLVI. Une corde variable d'une conique étant vue d'un foyer sous un angle constant, trouver le lieu des projections de ce foyer sur la corde.

XLVII. On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy et un point fixe P; une droite variable AB, passant constamment par le point P, coupe respectivement ces deux axes aux points A et B : 1° trouver en coordonnées rectilignes le lieu des points M de rencontre des parallèles menées aux deux axes par les points A et B; 2° chercher le lieu décrit par les sommets situés sur l'axe focal du lieu précédent, lorsque le point P se déplace suivant une droite déterminée (*Concours d'admission à l'École Centrale*, 1862).

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE QUATRIÈME.

NOTIONS FONDAMENTALES DE GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

Représentation du point.

285. Il faut d'abord montrer à l'aide de quels systèmes de coordonnées on peut indiquer la position d'un point dans l'espace.

Si l'on projette, par exemple, suivant une certaine direction, le point donné sur un plan, la projection obtenue sera déterminée par deux coordonnées relatives à deux axes tracés dans ce plan, et il suffira de connaître la distance du point à sa projection (distance qui sera comptée alors sur un axe parallèle à la droite projetante), pour pouvoir le retrouver à volonté dans l'espace.

D'après cela, le système de coordonnées le plus usité sera composé de trois droites non situées dans un même plan, issues ordinairement du même point, et le plus souvent perpendiculaires entre elles. Ces droites, qui, indéfiniment prolongées, partagent l'espace en huit angles trièdres invariables, sont les axes coordonnés; leur point de rencontre est l'origine des coordonnées; les trois plans qu'elles déterminent sont les plans coordonnés. Ces plans sont obliques ou perpendiculaires entre eux, suivant que les axes coordonnés sont eux-mêmes obliques ou perpendiculaires.

Les axes étant désignés par Ox, Oy, Oz (*fig.* 140), le plan xOy peut être regardé comme le plan sur lequel on projette le point M parallèlement à l'axe Oz; la distance du point M au plan xOy sera alors mesurée parallèlement à cet axe. Les *trois* coordonnées du point M dans l'espace seront donc mp, mq, Mm.

On voit que, si l'on mène par le point M trois plans respectivement parallèles aux plans coordonnés, ces trois plans

détermineront précisément sur les trois axes les longueurs $Op = mq$, $Oq = mp$, $OR = Mm$, égales aux coordonnées qui correspondent à ces axes. En désignant alors par x, y, z, les trois coordonnées du point M, nous pourrons écrire

$$x = Op, \quad y = Oq, \quad z = OR;$$

et si l'on construit sur les coordonnées du point M (comptées sur les trois axes à partir de l'origine) un parallélipipède, oblique ou rectangle suivant les directions des axes, le point M sera le sommet de ce parallélipipède opposé à l'origine.

Enfin, on peut dire encore que les coordonnées du point M mesurent ses distances aux trois plans coordonnés, la distance relative à chaque plan étant comptée parallèlement au troisième axe.

La figure montre qu'on a les trois coordonnées du point M, en menant Mm parallèle à Oz, puis mp parallèle à Oy.

286. En se reportant aux indications déjà données en géométrie analytique plane (2), on voit que chaque axe présente, à droite et à gauche de l'origine, une partie positive et une partie négative. Dans chacun des huit angles trièdres formés par les plans coordonnés, un point peut avoir les mêmes coordonnées en valeur absolue; mais, d'après les conventions adoptées, aucune ambiguïté ne sera possible. En effet, les coordonnées de ce point seront :

x,	y,	z,	dans l'angle trièdre	$Oxyz$,
x,	$-y$,	z,	.....	$Oxy'z$,
$-x$,	$-y$,	z,	.....	$Ox'y'z$,
$-x$,	y,	z,	.....	$Ox'yz$,
$-x$,	y,	$-z$,	.....	$Ox'yz'$,
x,	y,	$-z$,	.....	$Oxyz'$,
x,	$-y$,	$-z$,	.....	$Oxy'z'$,
$-x$,	$-y$,	$-z$,	.....	$Ox'y'z'$.

Les coordonnées changent toutes de signes, lorsqu'on passe d'un angle trièdre à son symétrique.

287. *Remarques.* — I. Par suite, deux points M et M′ situés sur une même droite passant par l'origine et à égale distance de cette origine, ont des coordonnées égales et de signes contraires (*fig.* 141). La réciproque est vraie.

II. Pour les points situés dans un plan coordonné, la coordonnée hors de ce plan est nulle. Pour les points situés sur l'un des axes coordonnés, les deux coordonnées hors de cet

axe sont nulles. Les coordonnées de l'origine sont $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Les coordonnées d'un point de l'espace peuvent varier entre $+\infty$ et $-\infty$.

Quand nous écrirons le point (x', y', z'), il faudra entendre le point dont les coordonnées sont x', y', z'.

288. On emploie encore, surtout en astronomie, le système polaire suivant.

Soit un plan fixe zOx (*fig.* 142). Le point M pourra être déterminé par son rayon vecteur $OM = \rho$ par rapport au point O, par l'angle ω de ce rayon vecteur avec l'axe Oz, par l'angle φ du plan zOM avec le plan fixe zOx. L'angle φ, compté positivement dans un sens convenu (de Ox vers Oy par exemple), fait connaître le plan zOM, et le point M est ensuite marqué dans ce plan à l'aide de ses coordonnées polaires ρ et ω.

Représentation des surfaces.

289. Lorsqu'un point se déplace arbitrairement dans l'espace, ses trois coordonnées varient d'une manière tout à fait indépendante. Mais si ce point est astreint à se trouver sur une certaine surface, les valeurs de deux de ses coordonnées (celles qui déterminent sa projection sur le plan xOy par exemple) suffisent pour déterminer la troisième coordonnée. En menant par le point obtenu sur le plan xOy une parallèle à l'axe Oz, on viendra en effet percer la surface considérée en un ou plusieurs points parfaitement définis, et dont le z dépendra précisément des valeurs de x et de y et des propriétés spéciales de la surface. Il existera donc dans ce cas entre les coordonnées x, y, z, une relation particulière qui permettra de déduire z des valeurs de x et de y. Cette relation

$$z = f(x, y) \quad \text{ou} \quad F(x, y, z) = 0$$

est *l'équation de la surface* proposée, puisqu'elle traduit algébriquement la condition nécessaire pour que le point mobile se trouve constamment sur cette surface.

Dans chaque système de coordonnées, tant que la surface ne changera pas, son équation restera la même, sauf les modifications qu'un changement de position par rapport aux axes peut y apporter.

290. *Réciproquement,* toute équation à trois variables

$$z = f(x, y) \quad \text{ou} \quad F(x, y, z) = 0$$

représente une surface.

Considérons d'abord l'équation $z = a$. Tous les points qui ont le même z étant dans un plan mené parallèlement au plan xOy à la distance donnée a, l'équation $z = a$ représente un plan parallèle au plan des xy.

Ainsi, *toute équation à une seule variable* $f(z) = 0$ *représente en général un ou plusieurs plans parallèles à celui des deux autres coordonnées.*

En particulier, les trois plans coordonnés ont pour équations respectives

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Prenons maintenant l'équation

$$z = f(x).$$

Construisons (*fig.* 143) la courbe AB représentée dans le plan des zx par cette équation. Concevons la surface cylindrique qui a pour trace sur le plan des zx la courbe AB et dont la génératrice est parallèle à l'axe Oy. Tout point de cette surface aura un x et un z satisfaisant à l'équation $z = f(x)$, quel que soit d'ailleurs son y puisque cette dernière coordonnée n'entre pas dans l'équation. Il en résulte immédiatement qu'*une équation à deux variables* $F(z, x) = 0$ *représente en général une surface cylindrique dont la génératrice est parallèle à l'axe de la troisième coordonnée.*

Si l'équation à deux variables est du premier degré, la courbe AB *devient une droite, et le cylindre représenté est un plan parallèle à l'axe sur lequel on compte la troisième coordonnée.*

Il est utile de remarquer immédiatement que, si l'on voulait seulement représenter la courbe AB, il faudrait joindre à l'équation $z = f(x)$ l'équation $y = 0$.

Considérons enfin l'équation

$$z = f(x, y) \quad \text{ou} \quad F(x, y, z) = 0.$$

Si l'on fait $z = a$, il vient

$$a = f(x, y) \quad \text{ou} \quad F(x, y, a) = 0.$$

On obtient ainsi tous les points de la surface cylindrique (à génératrice parallèle aux z), représentée par l'équation

$$F(x, y, a) = 0,$$

qui sont contenus dans le plan $z = a$ parallèle au plan des xy, c'est-à-dire en général *une courbe*. Qu'on fasse varier a infiniment peu, de manière à faire monter ou descendre infiniment peu le plan sécant $z = a$; on obtiendra en général une autre courbe qui ne pourra que différer aussi très-peu de la précé-

dente. Le lieu de l'équation $z = f(x, y)$ ou $F(x, y, z) = 0$ sera donc composé d'une infinité de courbes planes aussi rapprochées qu'on voudra, dans des plans parallèles au plan des xy. Ce lieu sera par suite *une surface* dont la forme dépendra des limites que l'équation donnée impose aux valeurs de z.

Représentation des lignes.

291. Lorsqu'un point est astreint à parcourir une certaine ligne, une seule de ses coordonnées étant fixée, les deux autres le sont nécessairement. Si l'on donne $z = a$, le point cherché sera à l'intersection du plan $z = a$ et de la ligne donnée. Il existe donc alors une double relation entre z et x d'une part, entre z et y de l'autre, et les deux équations correspondantes $z = f(x)$, $z = \varphi(y)$, exprimant les conditions nécessaires pour que le point mobile se trouve constamment sur la ligne proposée, sont *les équations* de cette ligne.

La représentation d'une ligne dans l'espace exige donc deux équations simultanées.

292. *Réciproquement*, deux équations à trois variables

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

prises ensemble, représentent une ligne.

En effet, chacune d'elles, considérée isolément, représentant une surface (290), leur ensemble représente l'intersection de ces deux surfaces, c'est-à-dire une ligne.

On voit, d'après cela, que le mode de représentation d'une ligne peut varier à l'infini, puisqu'on peut faire passer par une même ligne une infinité de surfaces. Si entre les deux équations données on élimine successivement y et x, on pourra remplacer le premier système par celui-ci

$$F_1(x, z) = 0, \quad \Phi_1(y, z) = 0$$

ou

$$z = f(x), \quad z = \varphi(y).$$

Employer ce dernier système, c'est regarder la ligne donnée comme l'intersection des deux surfaces cylindriques qui la projettent sur le plan des zx et sur le plan des zy. L'adoption de ces surfaces projetantes est ordinairement préférable. Pour avoir la troisième projection de la ligne sur le plan des xy, il suffira d'éliminer z entre les équations des deux premières surfaces.

D'après ce qu'on vient de dire, les trois axes coordonnés ont respectivement pour équations

$$z = 0 \text{ et } y = 0, \quad z = 0 \text{ et } x = 0, \quad y = 0 \text{ et } x = 0.$$

293. *Remarque.* — Trois équations à trois variables représentent autant de points qu'elles offrent de groupes de valeurs communes. En effet, deux surfaces se coupant suivant une ligne, trois surfaces se coupent en général suivant un ou plusieurs points. Les équations simultanées $x = a$, $y = b$, $z = c$, représentent l'intersection de trois plans respectivement parallèles aux plans coordonnés; et l'on est ramené à la détermination du point telle que nous l'avons indiquée au n° 285.

294. Nous terminerons cette introduction en établissant deux formules usuelles qui nous seront nécessaires dès le chapitre suivant.

Soit le parallélipipède OM (*fig.* 140) construit sur les coordonnées x, y, z du point M rapporté aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Le carré de la diagonale OM aura pour expression

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ce qui prouve que la distance δ d'un point quelconque à l'origine des coordonnées, a pour expression, dans l'hypothèse d'axes rectangulaires,

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Mais, si l'on désigne par α, β, γ, les angles de la diagonale OM avec les trois axes, les trois triangles rectangles OMp, OMq, OMR, donneront aussi

$$x = OM\cos\alpha, \quad y = OM\cos\beta, \quad z = OM\cos\gamma.$$

En substituant dans la relation précédente et en simplifiant, il viendra

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ainsi, comme nous l'avons déjà démontré (*Trig.*, 17), *la somme des carrés des cosinus des angles formés par une droite quelconque avec trois axes rectangulaires est toujours égale à l'unité.*

Considérons maintenant (même figure) les deux droites OM et OM′ dont l'angle est V; appelons α', β', γ', les angles de la droite OM′ avec les trois axes. On peut aller du point O au point M, soit directement, soit en suivant le contour OpmM. Les projections de OM et de OpmM sur OM′ seront donc égales (*Trig.*, 16). On aura, par suite,

$$OM\cos V = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'$$

ou, en remplaçant x, y, z, par $OM\cos\alpha$, $OM\cos\beta$, $OM\cos\gamma$, et en supprimant le facteur OM,

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Donc *le cosinus de l'angle de deux directions est égal à la somme des produits des cosinus des angles que ces deux directions forment respectivement avec trois axes rectangulaires.*

La condition de perpendicularité des deux directions données est

$$\cos V = 0$$

ou

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

295. *Déplacement de l'origine.*—Nous effectuerons successivement le changement d'origine et le changement de direction des axes. Pour obtenir les formules générales de transformation, il suffira ensuite de réunir les deux résultats obtenus.

Si l'on transporte les axes coordonnés parallèlement à eux-mêmes, et si p, q, r, représentent les coordonnées de la nouvelle origine par rapport aux anciens axes (*fig.* 144), on aura évidemment (x, y, z, étant les coordonnées du point M rapporté aux axes primitifs $Oxyz$; x', y', z', les coordonnées du même point, rapporté aux nouveaux axes $O'x'y'z'$):

$$x = p + x',$$
$$y = q + y',$$
$$z = r + z'.$$

En effet, on peut aller du point O au point M, soit directement, soit en suivant la ligne brisée OO'M. Si l'on projette les deux chemins sur l'axe Ox, on a

$$OQ = Oq + qQ = Oq + O'Q',$$

c'est-à-dire

$$x = p + x', \ldots.$$

296. *Changement de direction des axes.* — Nous supposerons les axes primitifs Ox, Oy, Oz, rectangulaires. La marche à suivre serait d'ailleurs tout à fait analogue, si on les supposait quelconques comme les nouveaux axes Ox', Oy', Oz' (*fig.* 145).

On peut aller du point O au point M, soit directement, soit en suivant le contour gauche OQ'P'M. Les projections de OM et du contour OQ'P'M sur les trois axes Ox, Oy, Oz, seront donc égales. Comme les axes primitifs sont rectangulaires, les

projections de OM sur ces axes seront précisément les coordonnées x, y, z. On aura donc, en désignant par α, α', α'', les angles formés par Ox, par β, β', β'', les angles formés par Oy, par γ, γ', γ'', les angles formés par Oz, avec les trois axes Ox', Oy', Oz' :

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'',$$
$$y = x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'',$$
$$z = x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma''.$$

Les axes primitifs étant rectangulaires, on a d'ailleurs (294) :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$
$$\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1.$$

Si les nouveaux axes sont rectangulaires, il faut en outre joindre à ces relations les trois conditions (294) :

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$
$$\cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0,$$
$$\cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma = 0.$$

297. Si l'on voulait repasser des nouveaux axes aux anciens, on remarquerait que α, β, γ, sont les angles formés par Ox'; α', β', γ', les angles formés par Oy'; α'', β'', γ'', les angles formés par Oz', avec les axes Ox, Oy, Oz. On écrirait donc immédiatement :

$$x' = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$
$$y' = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma',$$
$$z' = x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'';$$

et les équations de condition seraient :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1,$$
$$\cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1,$$
$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1,$$
$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = 0,$$
$$\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' = 0,$$
$$\cos\gamma\cos\alpha + \cos\gamma'\cos\alpha' + \cos\gamma''\cos\alpha'' = 0.$$

298. *Formules d'Euler.* — Les formules de transformation précédentes, relatives au changement de direction des axes, ont l'inconvénient d'introduire dans les calculs neuf angles, dont trois suffisent d'après les six relations auxiliaires indiquées.

On peut alors, d'après le mode dû à Euler, fixer la position des nouveaux axes rectangulaires par rapport aux anciens, en employant directement les trois constantes angulaires suivantes. La première θ correspond à l'angle zOz' (*fig.* 146), ou à l'angle formé par les deux plans xOy, $x'Oy'$ (*Géom.*, 190). La seconde φ est l'angle formé par l'intersection OI des deux plans xOy, $x'Oy'$, avec l'axe primitif Ox. La troisième ψ est l'angle formé par la même intersection avec le nouvel axe Ox'.

Pour exprimer les neuf angles α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'', ou mieux les huit premiers, puisque $\gamma'' = \theta$, en fonction des nouvelles constantes θ, φ et ψ, on pourrait avoir recours à la Trigonométrie sphérique. Mais il est plus rationnel de remarquer que l'intersection OI ou Ox'' des deux plans xOy, $x'Oy'$, est perpendiculaire au plan zOz', et dès lors aux intersections Oy'' et Oy''' de ce plan avec les plans xOy et $x'Oy'$ (ce qui entraîne $y''Oy''' = \theta$). On peut donc passer d'abord, dans le plan xOy, du système rectangulaire xOy au système rectangulaire $x''Oy''$ (l'angle $x''Ox$ étant égal à φ), à l'aide des formules connues (26):

$$x = x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi,$$
$$x = x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi.$$

On passera ensuite, dans le plan $x'Oy'$, du système rectangulaire $x''Oy'''$ au système rectangulaire $x'Oy'$. L'angle $x'Ox''$ étant égal à ψ, on aura

$$x'' = x' \cos\psi - y' \sin\psi,$$
$$y''' = x' \sin\psi + y' \cos\psi.$$

On passera enfin, dans le plan zOz', du système rectangulaire zOy'' au système rectangulaire $z'Oy'''$. L'angle $y''Oy'''$ étant égal à θ, on aura

$$y'' = y''' \cos\theta - z' \sin\theta,$$
$$z = y''' \sin\theta + z' \cos\theta.$$

On a ainsi six équations entre x, y, z, x', y', z', x'', y'', y'''. En éliminant entre ces équations les inconnues auxiliaires x'', y'', y''', on arrivera aux formules d'Euler, qui lient les anciennes coordonnées x, y, z, aux nouvelles x', y', z', à l'aide des constantes angulaires θ, φ et ψ. Ces formules sont :

$$x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + z'\sin\varphi\sin\theta,$$
$$y = x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\cos\varphi\sin\theta,$$
$$z = x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta.$$

299. *Sections planes d'une surface.* — Si l'on suppose que

l'intersection d'une surface $F(x, y, z) = 0$ par un plan soit rapportée à deux axes rectangulaires $O'x'$, $O'y'$, tracés dans ce plan, on pourra opérer comme il suit pour trouver l'équation de la courbe obtenue.

Les axes primitifs Ox, Oy, Oz, étant rectangulaires, on passera, à l'aide des formules d'Euler, aux axes aussi rectangulaires $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$; puis, dans l'équation de la surface rapportée aux nouveaux axes, on supposera $z' = 0$ (290).

On simplifiera le calcul en faisant immédiatement $z' = 0$ dans les formules précédentes. On peut aussi supposer l'axe $O'x'$ parallèle à l'intersection OI des deux plans xOy, $x'O'y'$, c'est-à-dire faire $\psi = 0$. Enfin, on peut placer la nouvelle origine O' sur l'axe Oz, de manière à annuler ses deux coordonnées p et q par rapport aux axes Ox et Oy, et à ne conserver que sa troisième coordonnée r par rapport à l'axe Oz. L'équation de la section déterminée sur la surface par le plan $x'O'y'$, s'obtiendra alors en remplaçant les coordonnées x, y, z, dans l'équation de la surface, par les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \cos\theta, \\ z &= r + y' \sin\theta. \end{aligned}$$

300. *Passage du système rectiligne au système polaire.* — Si l'on veut passer (*fig.* 147) du système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ au système polaire défini au n° 288, on aura

$$\begin{aligned} x &= OP \cos\varphi = \rho \sin\omega \cos\varphi, \\ y &= OP \sin\varphi = \rho \sin\omega \sin\varphi, \\ z &= \rho \cos\omega. \end{aligned}$$

α, β, ω, étant les angles formés par le rayon vecteur OM avec les trois axes Ox, Oy, Oz, on a aussi

$$x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho \cos\beta, \quad z = \rho \cos\omega,$$

en y joignant la condition

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\omega = 1.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sin\omega \cos\varphi &= \cos\alpha, \\ \sin\omega \sin\varphi &= \cos\beta. \end{aligned}$$

On en déduit réciproquement

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\cos\omega = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

301. *Distance de deux points.* — Pour la distance d'un point à l'origine, nous avons trouvé en coordonnées rectangulaires (294)

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cherchons maintenant la distance de deux points M et M' (*fig.* 148) dont les coordonnées sont x, y, z, x', y', z'.

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en MX, MY, MZ. Nous aurons (en désignant par X, Y, Z, les nouvelles coordonnées du point M')

$$MM' = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Mais on a (295)

$$x' = x + X, \quad y' = y + Y, \quad z' = z + Z.$$

Il en résulte

$$X = x' - x, \quad Y = y' - y, \quad Z = z' - z.$$

Par suite, la distance δ cherchée a pour expression

$$\delta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Si l'on suppose les coordonnées obliques, on prendra d'abord un système de coordonnées rectangulaires $Ox_1y_1z_1$ de même origine, et l'on aura pour la distance OM, estimée en fonction des coordonnées x_1, y_1, z_1, du point M,

$$\delta = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Puis on passera au système oblique $Oxyz$ proposé. On aura (en se reportant au n° 296) :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x\cos\alpha + y\cos\alpha' + z\cos\alpha'', \\
y_1 &= x\cos\beta + y\cos\beta' + z\cos\beta'', \\
z_1 &= x\cos\gamma + y\cos\gamma' + z\cos\gamma'', \\
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\
\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1, \\
\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1.
\end{aligned}$$

On aura en outre (294) :

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' &= \cos(xOy), \\
\cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' &= \cos(yOz), \\
\cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma &= \cos(zOx).
\end{aligned}$$

En substituant dans la relation

$$\delta = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

les valeurs de x_1, de y_1, et de z_1, en tenant compte des six relations auxiliaires, il viendra pour la distance d'un point à l'origine en coordonnées obliques, en fonction de ses coordonnées x, y, z, et des angles des axes

$$\delta = \sqrt{x^2+y^2+z^2+2xy\cos(x,y)+2yz\cos(y,z)+2zx\cos(z,x)}.$$

Par suite la distance de deux points (x, y, z), (x', y', z'), en coordonnées obliques, aura pour expression (en opérant par transport d'axes, comme nous l'avons fait dans le cas des coordonnées rectangulaires,)

$$\delta = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2+2(x'-x)(y'-y)\cos(x,y)+2(y'-y)(z'-z)\cos(y,z)+2(z'-z)(x'-x)\cos(z,x)}.$$

Ces formules conduisent immédiatement aux différentes équations de la *sphère* en coordonnées rectilignes.

302. *Point milieu d'une droite.* — Soit une droite MM′ ayant pour extrémités les points (x, y, z), (x', y', z'). Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point M, les nouvelles coordonnées du point milieu de la droite seront (en désignant par X, Y, Z, les nouvelles coordonnées du point M′)

$$\frac{X}{2}, \quad \frac{Y}{2}, \quad \frac{Z}{2}.$$

On aura d'ailleurs (295)

$$X = x'-x, \quad Y = y'-y, \quad Z = z'-z;$$

et en représentant par x_1, y_1, z_1, les coordonnées primitives du milieu de MM′,

$$x_1 = x + \frac{X}{2} = x + \frac{x'-x}{2} = \frac{x+x'}{2}, \quad y_1 = y + \frac{Y}{2} = y + \frac{y'-y}{2} = \frac{y+y'}{2}, \quad z_1 = z + \frac{Z}{2} = z + \frac{z'-z}{2} = \frac{z+z'}{2}.$$

En prenant respectivement les moyennes des coordonnées des extrémités d'une droite, on obtient donc les coordonnées de son milieu.

CHAPITRE III.

DE LA LIGNE DROITE.

Équations de la ligne droite.

303. Étant donnée une ligne droite dans l'espace, si l'on considère les deux cylindres ou les deux plans qui la projettent respectivement sur le plan des xz (parallèlement à l'axe des y) et sur le plan des yz (parallèlement à l'axe des x), les équations de cette droite seront de la forme (292)

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

D'une manière générale, deux équations du premier degré, à une, deux ou trois variables, représentent toujours une ligne droite. En effet, nous savons qu'une équation du premier degré à une ou à deux variables représente un plan (290); deux pareilles équations représentent donc l'intersection des deux plans correspondants, c'est-à-dire une ligne droite. Et si l'on a deux équations du premier degré à trois variables, on peut les ramener au type précédent en éliminant successivement entre elles les variables y et x.

Ainsi, d'une manière générale, nous représenterons analytiquement une ligne droite par les deux équations simultanées

$$x = az + p, \tag{1}$$

$$y = bz + q. \tag{2}$$

La première (jointe à l'équation $y = 0$) représente la projection de la droite sur le plan des xz; la seconde (jointe à l'équation $x = 0$) représente la projection de la droite sur le plan des yz. Pour avoir la projection de la droite sur le plan des xy, il suffit d'éliminer z entre les équations (1) et (2). Il vient pour équation de cette projection (en y joignant la condition $z = 0$)

$$\frac{x - p}{a} = \frac{y - q}{b}. \tag{3}$$

304. Les constantes a et b sont les coefficients angulaires des projections de la droite sur le plan des xz et sur le plan des yz. En faisant $z = 0$ dans les équations (1) et (2), on trouve

$$x = p, \quad y = q.$$

Par suite les constantes p et q sont les coordonnées du point où la droite donnée perce le plan des xy.

Les équations d'une droite renferment *quatre constantes arbitraires*, parce que le nombre des conditions de détermination ne pouvant varier, tandis que celui des équations nécessaires a doublé, il doit en être de même du nombre des paramètres.

Lorsqu'une droite passe par l'origine des coordonnées, on a

$$p = q = 0.$$

Ses équations sont donc simplement

$$x = az, \quad y = bz.$$

Pour trouver la trace d'une droite sur l'un des plans coordonnés, il suffit (comme nous venons de le faire) de supposer nulle la coordonnée hors de ce plan dans les équations des projections de la droite sur les deux autres plans coordonnés. Par exemple, pour avoir le point où la droite rencontre le plan des xz, on fera $y = 0$ dans les équations (2) et (3) : il viendra

$$z = -\frac{q}{b}, \quad x = p - \frac{q}{b}a.$$

305. *Équations générales des droites passant par un point donné.*

Soit (x', y', z') le point donné. Ses coordonnées devront satisfaire aux deux équations

$$x = az + p, \tag{1}$$

$$y = bz + q. \tag{2}$$

On aura donc les équations de condition

$$x' = az' + p, \tag{3}$$

$$y' = bz' + q. \tag{4}$$

En retranchant membre à membre les équations (1) et (3), (2) et (4), il viendra

$$x - x' = a(z - z'), \tag{A}$$

$$y - y' = b(z - z'). \tag{B}$$

On a ainsi éliminé les constantes p et q. Les équations (A) et (B) sont les équations demandées. Elles ne renferment plus que deux paramètres arbitraires, parce que les droites qu'elles représentent ne peuvent plus être assujetties qu'à une condi-

tion. Si l'une d'elles doit être *parallèle* à une droite donnée, les constantes a et b se trouvent déterminées, puisque deux droites parallèles ont des projections parallèles sur un même plan (*Géom.*, 171).

306. *Équations d'une droite passant par deux points donnés.* Soient les deux points (x', y', z'), (x'', y'', z''). La projection de la droite sur le plan des xz devra passer par les points de ce plan qui ont pour coordonnées (x', z') et (x'', z''). L'équation de cette projection sera donc

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'). \tag{1}$$

De même, la projection de la droite sur le plan des yz devra passer par les points de ce plan qui ont pour coordonnées (y', z'), (y'', z''); et l'équation de cette projection sera

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z'). \tag{2}$$

Les équations demandées sont donc les équations (1) et (2). On peut les mettre sous la forme

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}.$$

307. *Angles d'une droite avec les trois axes coordonnés supposés rectangulaires.* Si la droite donnée ne passe pas par l'origine, on lui mènera par ce point la parallèle OM. Désignons par α, β, γ, les angles de la droite OM (*fig.* 140) avec les trois axes. Nous aurons, en considérant le point M dont les coordonnées sont x, y, z,

$$x = \mathrm{OM}\cos\alpha, \quad y = \mathrm{OM}\cos\beta, \quad z = \mathrm{OM}\cos\gamma.$$

D'ailleurs (294)

$$\mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Par suite

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Mais les équations de la droite OM étant

$$x = az, \quad y = bz,$$

il viendra, en remplaçant dans les formules précédentes x et y par leurs valeurs en fonction de z et en simplifiant,

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Remarques. — I. On déduit de ces valeurs

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Les équations d'une droite peuvent donc se mettre sous la forme

$$x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}z + p,$$

$$y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}z + q$$

ou

$$\frac{x-p}{\cos\alpha} = \frac{y-q}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

II. Les axes étant rectangulaires, les angles formés par la droite OM avec les trois plans coordonnés sont évidemment les *compléments* de ceux qu'elle forme avec les trois axes (*Géom.*, 186).

308. *Angle de deux droites données par leurs équations.* Si les droites proposées ne passent pas par l'origine, on mènera par ce point à ces droites deux parallèles, dont les équations seront

$$\begin{cases} x = az, \\ y = bz, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a'z, \\ y = b'z. \end{cases}$$

Désignons par α, β, γ, α', β', γ', les angles de ces parallèles avec les trois axes, et par V leur angle. Nous aurons (294), les axes étant supposés rectangulaires,

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Nous aurons aussi (307)

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\alpha' = \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\beta' = \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

En substituant ces valeurs dans la valeur de cosV, il viendra

$$\cos V = \frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Pour que les deux droites données soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$\cos V = 0,$$

c'est-à-dire

$$aa'+bb'+1=0.$$

On retrouverait facilement la condition de parallélisme de deux droites $a=a'$, $b=b'$ (305), en posant

$$\cos V = 1$$

ou

$$(aa'+bb'+1)^2=(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1).$$

309. *Trouver le point d'intersection de deux droites données par leurs équations.*

Soient les droites

$$(A)\quad \begin{cases} x=az+p, \\ y=bz+q, \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} x=a'z+p', \\ y=b'z+q'. \end{cases}$$

Les trois cordonnées du point commun à ces deux droites doivent satisfaire (d'une manière exclusive) aux quatre équations posées. L'intersection effective ne sera donc possible que lorsque les huit paramètres qui entrent dans ces quatre équations, satisferont à l'équation de condition obtenue en éliminant entre elles les variables x, y, z. En géométrie plane il ne pouvait en être ainsi, puisque l'intersection, même transportée à l'infini, devait toujours exister. Mais, dans l'espace, deux droites données étant ou non situées dans un même plan, la possibilité de l'intersection doit d'abord être établie.

En retranchant membre à membre et deux à deux les équations (A) et (B), il vient

$$(1) \qquad o = (a - a')z + p - p',$$

$$(2) \qquad o = (b - b')z + q - q'.$$

On déduit des équations (1) et (2)

$$z = \frac{p' - p}{a - a'} \quad \text{et} \quad z = \frac{q' - q}{b - b'}.$$

On obtiendra alors immédiatement l'équation de condition cherchée, en égalant les deux valeurs de z.

Pour que deux droites soient dans un même plan, leurs paramètres doivent donc satisfaire à la relation

$$(3) \qquad \frac{p' - p}{a - a'} = \frac{q' - q}{b - b'} \quad \text{ou} \quad \frac{a - a'}{b - b'} = \frac{p - p'}{q - q'}.$$

Lorsque cette condition est remplie, les coordonnées du point d'intersection sont (en substituant dans la valeur de x le première valeur de z, et dans celle de y la seconde valeur de z) :

$$z = \frac{p' - p}{a - a'},$$

$$x = az + p = \frac{ap' - pa'}{a - a'},$$

$$y = bz + q = \frac{bq' - qb'}{b - b'}.$$

310. *Distance d'une droite donnée à l'origine des coordonnées, les axes étant supposés rectangulaires.*

Soient

$$(1) \qquad x = az + p,$$

$$(2) \qquad y = bz + q,$$

les équations de la droite donnée; soit OP la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite. Les coordonnées du point P, pied de la perpendiculaire sur la droite, étant x, y, z, on aura

$$\text{OP} \quad \text{ou} \quad \delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

c'est-à-dire, en remplaçant x et y par leurs valeurs déduites des équations (1) et (2),

$$\delta = \sqrt{(az + p)^2 + (bz + q)^2 + z^2}$$

ou

$$\delta = \sqrt{(a^2+b^2+1)z^2+2(ap+bq)z+p^2+q^2}.$$

Il reste à exprimer que la variable z correspond bien au point P. Pour cela, nous remarquerons que, pour cette valeur de z, δ est un minimum, c'est-à-dire que sa dérivée par rapport à z doit être nulle. Nous aurons donc (*Compl. d'Alg.*, 123, 2°; 129)

$$\frac{2(a^2+b^2+1)z+2(ap+bq)}{2\sqrt{(a^2+b^2+1)z^2+2(ap+bq)z+p^2+q^2}}=0$$

ou

$$z=-\frac{ap+bq}{a^2+b^2+1}.$$

Il viendra donc pour la distance cherchée

$$\delta=\sqrt{\frac{(ap+bq)^2-2(ap+bq)^2+(p^2+q^2)(a^2+b^2+1)}{a^2+b^2+1}},$$

ou, en simplifiant,

$$\delta=\sqrt{\frac{(aq-bp)^2+p^2+q^2}{a^2+b^2+1}}.$$

311. *Distance d'un point donné à une droite donnée.*

Les axes étant toujours supposés rectangulaires, soient la droite

$$\begin{cases} x=az+p, \\ y=bz+q, \end{cases}$$

et le point (x', y', z').

Si l'on prend pour nouvelle origine le point (x', y', z') en y transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, les équations de la droite deviendront

$$\begin{cases} x=az+(az'+p-x'), \\ y=bz+(bz'+q-y'). \end{cases}$$

La distance δ de la nouvelle origine à la droite donnée aura donc pour expression (310)

$$\delta=\sqrt{\frac{[a(bz'+q-y')-b(az'+p-x')]^2+(az'+p-x')^2+(bz'+q-y')^2}{a^2+b^2+1}}$$

ou

$$\delta=\sqrt{\frac{[a(q-y')-b(p-x')]^2+(az'+p-x')^2+(bz'+q-y')^2}{a^2+b^2+1}}.$$

CHAPITRE IV.

DU PLAN.

Équation du plan.

312. Chaque mode de génération du plan conduira plus ou moins facilement à son équation,

1° Considérons d'abord le plan comme engendré par le mouvement d'une droite qui glisse parallèlement à elle-même sur une autre droite (*Géom.*, 156).

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

les équations de la *génératrice;*

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q', \end{cases}$$

celles de la *directrice.*

La condition de rencontre constante entre ces deux droites sera (309)

$$(3)\qquad \frac{a - a'}{b - b'} = \frac{p - p'}{q - q'}.$$

La génératrice restant parallèle à elle-même, les coefficients angulaires a et b sont constants, tandis que les paramètres linéaires p et q varient [en satisfaisant toujours à l'équation (3)] lorsque la génératrice passe d'une position à une autre.

Mais, pour tous les points de la surface engendrée, on a, d'après les équations (1),

$$p = x - az, \quad q = y - bz.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), on aura la relation générale qui lie les coordonnées des points du plan, c'est-à-dire l'*équation* de cette surface, sous la forme

$$\frac{a - a'}{b - b'} = \frac{x - az - p'}{y - bz - q'}.$$

On voit que *cette équation est du premier degré à trois variables.*

Une marche analogue conduirait à l'équation du plan considéré comme engendré par le mouvement d'une droite issue

d'un point fixe et s'appuyant constamment sur une droite donnée (*Géom.*, 156).

2° On peut aussi regarder le plan comme engendré par le mouvement d'une droite qui coupe toujours une autre droite en un même point, en lui restant constamment perpendiculaire (*Géom.*, 159).

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

les équations de la droite fixe, et un point (x', y', z') pris sur cette droite. Les équations de la perpendiculaire mobile menée à la droite fixe par le point (x', y', z') seront (305)

$$(2) \qquad \begin{cases} x - x' = a'(z - z'), \\ y - y' = b'(z - z'), \end{cases}$$

en y joignant la condition (308)

$$(3) \qquad aa' + bb' + 1 = 0.$$

Pour tous les points de la surface engendrée, on aura donc

$$a' = \frac{x - x'}{z - z'}, \quad b' = \frac{y - y'}{z - z'}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), on obtiendra l'équation du plan sous la forme

$$a\frac{x - x'}{z - z'} + b\frac{y - y'}{z - z'} + 1 = 0$$

ou

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0.$$

3° Soit enfin (*fig.* 149) le plan ABC qui coupe les trois axes aux points A, B, C. Abaissons de l'origine sur ce plan la perpendiculaire $OH = \delta$, et soient α, β, γ, les angles qu'elle forme avec les trois axes. M étant un point quelconque du plan, on pourra aller du point O au point M, soit en suivant le chemin OHM, soit en suivant le chemin OQPM formé par les coordonnées du point M. Les projections de ces deux chemins sur OH seront donc égales. Or la projection de OHM sur OH se réduit à OH ou δ. On aura donc pour tous les points de la surface

$$\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

ce qui est une nouvelle forme de l'équation du plan.

313. Dans tous les exemples qui précèdent, nous avons

trouvé pour équation du plan une équation du premier degré à trois variables. *Montrons réciproquement qu'une pareille équation de la forme*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

représente toujours un plan.

On pourrait démontrer qu'une droite est contenue tout entière dans la surface correspondante, dès qu'elle a deux points sur cette surface. On peut aussi procéder de la manière suivante.

Si l'on fait $y = 0$ dans l'équation (1), on trouve l'équation de la trace de la surface considérée sur le plan des xz. Cette trace (*fig.* 150) est la droite

$$Ax + Cz + D = 0.$$

De même, les traces de la surface sur le plan des yz et sur le plan des xy, obtenues en faisant successivement $x = 0$ et $z = 0$ dans l'équation (1), sont les droites

$$By + Cz + D = 0,$$
$$Ax + By + D = 0.$$

Étudions maintenant les *coupes* de la surface par des plans parallèles au plan des xy. Si l'un de ces plans est $z = a$, il rencontre la surface suivant la droite

$$\begin{cases} z = a, \\ Ax + By + Ca + D = 0. \end{cases}$$

Cette droite est parallèle à la droite $Ax + By + D = 0$, intersection de la surface et du plan des xy. De plus, le point où elle perce le plan des yz a pour coordonnées

$$x = 0, \quad z = a \quad \text{et} \quad y = -\frac{Ca + D}{B}.$$

Mais cette dernière valeur prouve qu'on a pour ce point

$$By + Cz + D = 0,$$

c'est-à-dire qu'il appartient à la trace de la surface sur le plan des yz. On peut donc regarder cette surface comme engendrée par le mouvement d'une droite qui glisse parallèlement à une direction donnée, en s'appuyant constamment sur une droite fixe. L'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

représente donc bien un plan.

314. *Remarques.* — I. Le plan représenté par l'équation (1) coupe les trois axes; car, en faisant successivement deux variables nulles dans son équation, on trouve

$$x = -\frac{D}{A}, \quad y = -\frac{D}{B}, \quad z = -\frac{D}{C}.$$

Désignons *les coordonnées du plan à l'origine* par p, q, r; il viendra

$$p = -\frac{D}{A}, \quad q = -\frac{D}{B}, \quad r = -\frac{D}{C},$$

d'où

$$A = -\frac{D}{p}, \quad B = -\frac{D}{q}, \quad C = -\frac{D}{r}.$$

L'équation du plan prend alors la forme très-symétrique

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

II. Si l'une des variables manque, l'équation représente un plan parallèle à l'axe qui correspond à cette variable (290).

Si deux variables manquent, l'équation représente un plan parallèle à celui des deux axes sur lesquels on compte ces variables (290).

III. Il n'entre réellement que trois constantes arbitraires dans l'équation du plan (nombre de points nécessaires pour le déterminer), puisque les véritables paramètres de l'équation sont les rapports de trois des coefficients au quatrième. On peut donc mettre l'équation du plan sous la forme (en divisant tout par — D)

$$ax + by + cz = 1.$$

Si l'on divise par C, on peut écrire aussi

$$z = mx + ny + p.$$

Cette seconde forme montre immédiatement (en faisant successivement $y = 0$ et $x = 0$) que m et n sont les coefficients angulaires des traces du plan sur les plans des xz et des yz, tandis que p est l'ordonnée du point commun au plan proposé et à l'axe des z (ce qu'on voit en faisant ensemble $x = 0$ et $y = 0$).

IV. Lorsqu'un plan passe par l'origine, son équation doit être satisfaite pour $x = y = z = 0$; elle est donc de la forme

$$Ax + By + Cz = 0;$$

le coefficient D disparaît.

315. *Équation générale des plans passant par un point donné.*

Soit le point donné (x', y', z'). Si le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

passe par ce point, on aura l'équation de condition

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0. \tag{2}$$

On peut s'en servir pour diminuer d'une unité le nombre des paramètres de l'équation générale. En retranchant membre à membre les équations (1) et (2), il vient

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0; \tag{3}$$

c'est l'équation demandée.

Si l'on veut en outre que le plan cherché soit parallèle à un plan donné

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{4}$$

on remarquera que les traces de deux plans parallèles sur un troisième sont parallèles. Les traces des plans représentés par les équations (1) et (4), sur le plan des xz et sur celui des yz, ont pour équations

$$Ax + Cz + D = 0, \quad A'x + C'z + D' = 0,$$
$$By + Cz + D = 0, \quad B'y + C'z + D' = 0.$$

Pour que les deux plans soient parallèles, on devra donc avoir

$$-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'} \quad \text{et} \quad -\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Deux plans sont donc parallèles, lorsque les coefficients des variables dans leurs équations sont proportionnels.

En revenant à la question indiquée, on voit qu'on doit poser

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = k.$$

L'équation (3) prend alors la forme (k disparaissant comme facteur commun)

$$A'(x - x') + B'(y - y') + C'(z - z') = 0. \tag{5}$$

Elle représente, dans ce cas, le plan mené par le point (x', y', z') parallèlement au plan

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

316. *Équation du plan qui passe par trois points donnés.* Si le plan $Ax + By + Cz + D = 0$ passe par les trois points (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), on aura, pour déterminer les trois paramètres $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, les trois équations du premier degré

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0. \end{aligned}$$

Tant que les trois points donnés ne seront pas en ligne droite, on trouvera pour les inconnues du problème des valeurs finies et déterminées.

317. *Distance de l'origine à un plan, angles de la normale au plan avec les trois axes supposés rectangulaires.* En désignant par α, β, γ, les angles formés avec les trois axes par la perpendiculaire abaissée de l'origine sur un plan quelconque, et par δ la longueur de cette perpendiculaire, nous avons vu (312, 3°) que l'équation générale du plan pouvait être mise sous la forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \delta$$

ou

$$\frac{x\cos\alpha}{\delta} + \frac{y\cos\beta}{\delta} + \frac{z\cos\gamma}{\delta} = 1.$$

Identifions cette équation avec l'équation usuelle

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ou

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1.$$

Il viendra

$$\frac{\cos\alpha}{\delta} = -\frac{A}{D}, \quad \frac{\cos\beta}{\delta} = -\frac{B}{D}, \quad \frac{\cos\gamma}{\delta} = -\frac{C}{D}.$$

Si l'on élève ces relations au carré et si on les ajoute membre à membre, il vient (294)

$$\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{D^2}.$$

On en déduit

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Comme il s'agit d'une distance absolue, le radical devra recevoir dans cette formule le même signe que D.

On aura ensuite

$$\cos\alpha = -\frac{A\delta}{D} = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = -\frac{B\delta}{D} = \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = -\frac{C\delta}{D} = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dans ces dernières formules, le radical est susceptible d'un double signe qui correspond aux deux angles que la normale forme en réalité avec chaque axe, et l'on peut, sans inconvénient, changer le signe des numérateurs.

Remarque. — Les angles de la normale au plan donné avec les trois axes sont aussi ceux de ce plan avec les trois plans coordonnés. L'angle de la normale avec l'axe des x, par exemple, correspond à l'angle du plan avec le plan des yz (*Géom.*, 190).

318. *Angle de deux plans, les axes étant supposés rectangulaires.*

Pour trouver l'angle des deux plans

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

le plus simple est de chercher l'angle V des deux perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces plans (*Géom.*, 190). Soient α, β, γ, α', β', γ', les angles respectivement formés par ces deux perpendiculaires avec les trois axes. On aura (294)

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

D'ailleurs (317)

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\gamma' = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Il viendra donc

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Si les deux plans sont perpendiculaires, on a

$$\cos V = 0,$$

c'est-à-dire

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Telle est la condition de perpendicularité de deux plans.

Les deux plans seraient *parallèles*, si l'on avait

$$\cos V = 1,$$

c'est-à-dire

$$(AA' + BB' + CC')^2 = (A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2).$$

En développant cette relation, on retrouverait facilement les conditions déjà indiquées (315).

319. *Distance d'un point à un plan, les axes étant supposés rectangulaires.*

Soient (x', y', z') et $Ax + By + Cz + D = 0$ le point et le plan donnés. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes, en prenant le point donné pour nouvelle origine. L'équation du plan proposé deviendra (295)

$$A(x + x') + B(y + y') + C(z + z') + D = 0$$

ou

$$Ax + By + Cz + (Ax' + By' + Cz' + D) = 0.$$

La distance de la nouvelle origine à ce plan, c'est-à-dire la distance cherchée, aura alors pour expression (317)

$$\delta = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Comme il s'agit d'une distance absolue, on devra donner au dénominateur de l'expression le même signe qu'au numérateur.

Remarque. — Il est essentiel de noter que la distance d'un point à un plan est une fonction du premier degré, entière et rationnelle, des coordonnées de ce point. Il en serait encore de même (d'après les formules de transformation) si les axes coordonnés étaient obliques.

Comme on déduit de la valeur de δ

$$Ax' + By' + Cz' + D = \delta\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

on voit que toute fonction de cette forme représente le pro-

duit d'un certain nombre par la distance du point considéré au plan représenté par cette même fonction égalée à zéro.

On peut rapprocher ces résultats de ceux fournis par la géométrie plane (45, 131).

320. *Intersection de deux plans.*

Les équations de deux plans étant

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{2}$$

ces deux équations, considérées simultanément, représenteront leur intersection (292).

Pour avoir les équations des plans qui projettent cette intersection sur les plans coordonnés (303), il suffira d'éliminer successivement les variables x, y, z, entre les équations (1) et (2).

CHAPITRE V.

DU PLAN ET DE LA LIGNE DROITE.

321. *Équation du plan passant par un point et une droite donnés.*

Soient

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

les équations de la droite donnée ; x', y', z', les coordonnées du point donné.

La droite devant être tout entière dans le plan cherché, on exprimera que les coordonnées de tous ses points satisfont à l'équation du plan en écrivant celle-ci sous la forme

$$(x - az - p) + \lambda(y - bz - q) = 0, \tag{1}$$

λ étant une indéterminée qu'on fera disparaître en ayant égard à la seconde condition imposée. Le plan devant passer par le point (x', y', z'), on aura en effet

$$(x' - az' - p) + \lambda(y' - bz' - q) = 0. \tag{2}$$

Si l'on élimine λ entre les équations (1) et (2), il viendra pour l'équation demandée

$$\frac{x - az - p}{y - bz - q} = \frac{x' - az' - p}{y' - bz' - q}. \tag{3}$$

La forme de l'équation (3) montre que si le point donné se trouvait sur la droite donnée, le problème serait indéterminé.

322. *Intersection d'une droite et d'un plan.*
Soient

$$x = az + p, \tag{1}$$

$$y = bz + q, \tag{2}$$

la droite donnée, et

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

le plan donné.

Ces trois équations sont simultanées, seulement pour les coordonnées du point cherché. En substituant les valeurs de x et de y tirées des équations (1) et (2) dans l'équation (3), il vient

$$A(az + p) + B(bz + q) + Cz + D = 0,$$

d'où

$$z = -\frac{Ap + Bq + D}{Aa + Bb + C}. \tag{4}$$

Connaissant le z du point d'intersection, les équations (1) et (2) font immédiatement connaître son x et son y.

Remarques. — I. La valeur de z donnée par l'équation (4) sera *infinie,* et il en sera de même des valeurs de x et de y, si l'on a

$$Aa + Bb + C = 0,$$

sans que la même condition soit remplie par le numérateur de l'expression considérée.

Donc, *pour qu'un plan et une droite soient parallèles, on doit avoir entre les coefficients de leurs équations les relations*

$$\begin{cases} Aa + Bb + C = 0, \\ Ap + Bq + D \gtrless 0. \end{cases} \tag{5}$$

II. La valeur de z donnée par l'équation (4) sera *indéterminée,* et il en sera de même des valeurs correspondantes de x et de y, si l'on a à la fois

$$\begin{cases} Aa + Bb + C = 0, \\ Ap + Bq + D = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Donc, *pour qu'une droite soit située dans un plan, on doit avoir les relations* (6) *entre les coefficients de leurs équations.*

L'équation $Ap + Bq + D = o$ indique que la droite donnée perce le plan des xy en un point de la trace du plan proposé sur le même plan coordonné.

323. *Mener par une droite donnée un plan parallèle à une autre droite donnée.*

Les équations des deux droites données étant

$$(1) \qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q', \end{cases}$$

et celle du plan cherché étant

$$(3) \qquad Ax + By + Cz + D = o,$$

on devra avoir d'après ce qui précède (322)

$$Aa + Bb + C = o, \quad Ap + Bq + D = o, \quad Aa' + Bb' + C = o:$$

trois équations pour déterminer les trois inconnues $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$.

On peut aussi remarquer que le plan qui passe par la première droite a une équation de la forme (321)

$$(4) \qquad (x - az - p) + \lambda(y - bz - q) = o,$$

λ étant une indéterminée qu'on fera disparaître en ayant égard à la seconde condition imposée. Le plan cherché devant être parallèle à la seconde droite donnée, on devra avoir, d'après la forme de l'équation (4) (322, *Rem.*, I),

$$a' + \lambda b' - (a + \lambda b) = o,$$

d'où

$$\lambda = \frac{a - a'}{b' - b}.$$

De plus, on devra avoir

$$p' + \lambda q' - (p + \lambda q) \gtrless o.$$

En substituant la valeur de λ dans l'équation (4), il vient pour l'équation demandée

$$(5) \qquad \frac{x - az - p}{y - bz - q} = \frac{a - a'}{b - b'}.$$

Cette équation montre que si les deux droites données sont parallèles (305), le problème est indéterminé.

324. *Droite et plan perpendiculaires.*

Les axes étant supposés rectangulaires, soient la droite

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

et le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

α, β, γ, étant les angles formés par la droite proposée avec les trois axes, on a (307, *Rem.*, I)

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Mais si cette droite est perpendiculaire au plan donné, on a aussi (317)

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{A}{C}, \quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{B}{C}.$$

Il viendra par suite

$$a = \frac{A}{C}, \tag{1}$$

$$b = \frac{B}{C}. \tag{2}$$

Ainsi, *pour qu'une droite et un plan soient perpendiculaires* (*), *les coefficients de leurs équations doivent satisfaire aux conditions* (1) *et* (2).

Les équations de la droite menée perpendiculairement au plan $Ax + By + Cz + D = 0$ par le point (x', y', z') seront donc

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z')$$

ou

$$\frac{x - x'}{A} = \frac{y - y'}{B} = \frac{z - z'}{C}.$$

La longueur comprise sur cette perpendiculaire entre son point de départ et le plan proposé a déjà été calculée (319).

325. *Angle d'une droite et d'un plan, les axes étant supposés rectangulaires.*

On peut admettre que la droite donnée passe par l'origine, puisqu'on peut toujours la remplacer (eu égard à la question posée) par la parallèle qui lui serait menée par ce point.

(*) On arriverait aux mêmes résultats, en remarquant que la projection de la droite et la trace du plan sur chacun des plans coordonnés doivent être perpendiculaires (*Géom. descr.*).

Soient donc

$$\begin{cases} x = az, \\ y = bz, \end{cases}$$

ses équations, et

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

celle du plan considéré.

L'angle de la droite et du plan étant l'angle de la droite avec sa projection sur le plan, si l'on abaisse d'un point quelconque de la droite (par conséquent de l'origine) une perpendiculaire sur le plan, l'angle des deux droites sera le complément de l'angle cherché.

Or la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan a pour équations (324)

$$\begin{cases} x = \frac{A}{C} z, \\ y = \frac{B}{C} z. \end{cases}$$

Si l'on désigne par U l'angle de cette perpendiculaire et de la droite donnée, et par V l'angle cherché, on aura donc (308)

$$\sin V = \cos U = \frac{\frac{A}{C} a + \frac{B}{C} b + 1}{\sqrt{\frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} + 1}\ \sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

c'est-à-dire

$$\sin V = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Pour que la droite donnée soit parallèle ou perpendiculaire au plan donné, il faut qu'on ait $\sin V = 0$ ou $\sin V = 1$; on retombe ainsi sur les conditions de parallélisme ou de perpendicularité déjà indiquées (322, 324).

326. *Plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan, les axes étant supposés rectangulaires.*

Désignons par M et N les deux droites données. Si l'on voulait avoir les équations mêmes de la plus courte distance, il faudrait (*Géom.*, 185) faire passer par la droite M un plan P parallèle à la droite N, puis mener par chacune des droites M et N un plan perpendiculaire au plan P (322, 318); l'intersection des deux plans obtenus serait la plus courte distance demandée (320).

Si l'on veut simplement connaître la longueur δ de la plus courte distance, on peut opérer comme il suit.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q', \end{cases}$$

les équations des droites M et N. Le plan P (mené par la droite M parallèlement à la droite N) aura pour équation (323)

$$(3)\qquad \frac{x - az - p}{y - bz - q} = \frac{a - a'}{b - b'}.$$

La distance d'un point quelconque (x, y, z) de la droite N au plan P est égale à δ (*Géom.*, 169). L'équation (3) pouvant s'écrire

$$(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')z+q(a-a')-p(b-b')=0,$$

on aura (319)

$$\delta = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')z+q(a-a')-p(b-b')}{\sqrt{(b-b')^2+(a-a')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

En remplaçant x et y en fonction de z par leurs valeurs déduites des équations (2), il vient, en simplifiant (z disparaît alors comme cela doit être)

$$(4)\qquad \delta = \frac{(a-a')(q-q')-(b-b')(p-p')}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

Comme il s'agit d'une distance absolue, le radical prendra dans la formule (4) le signe du numérateur.

Si les droites données se coupent, on a (309)

$$\frac{a-a'}{b-b'} = \frac{p-p'}{q-q'},$$

c'est-à-dire

$$(a-a')(q-q')-(b-b')(p-p')=0,$$

et l'on trouve

$$\delta = 0.$$

Si les droites données sont parallèles, on a

$$a = a', \quad b = b',$$

et par suite

$$ab' = ba'.$$

La valeur de δ se présente alors sous une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, nous remarquerons qu'on a dans ce cas

$$a - a' = b - b' \quad \text{et} \quad ab' - ba' = (a - a')(a - b).$$

On peut donc faire disparaître le facteur commun $a - a'$, et il reste

$$\delta = \frac{(q - q') - (p - p')}{\sqrt{2 + (a - b)^2}}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Chercher l'équation de la bissectrice de l'angle de deux droites dont les équations sont données sous la forme (307, *Rem.*, I)

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}, \quad \frac{x}{\cos\alpha'} = \frac{y}{\cos\beta'} = \frac{z}{\cos\gamma'}.$$

$$\left[\text{On devra trouver } \frac{x}{\cos\alpha + \cos\alpha'} = \frac{y}{\cos\beta + \cos\beta'} = \frac{z}{\cos\gamma + \cos\gamma'}\right].$$

II. Trouver l'équation du plan tangent à la sphère, en le considérant comme plan mené perpendiculairement à l'extrémité d'un rayon.

III. Trouver le lieu géométrique des points tels, que la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés soit égale à une constante donnée.

IV. Trouver le lieu géométrique des points tels, que la somme des carrés de leurs distances à deux points donnés soit égale à une constante donnée.

V. Trouver le lieu des points également éclairés par deux lumières données.

VI. Faire passer par une droite donnée un plan qui fasse avec un plan donné un angle donné.

VII. Démontrer que les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre, se coupent mutuellement en parties égales.

VIII. Trouver le lieu de tous les points qui sont à égale distance de deux points donnés.

IX. Chercher l'expression du volume d'un tétraèdre, en fonction des coordonnées de ses quatre sommets.

X. Chercher les rayons des sphères inscrite et circonscrite à un tétraèdre donné.

XI. Trouver le lieu décrit par le centre de gravité d'un tétraèdre qui s'appuie sur une base fixe, et dont le quatrième sommet est astreint à rester sur la surface d'une sphère donnée.

LIVRE CINQUIÈME.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

DES DIFFÉRENTES CLASSES DE SURFACES.

Notions préliminaires.

327. Le changement des axes coordonnés ne peut modifier ni le degré, ni la nature de l'équation de la surface considérée. En effet, les formules de transformation (296) étant du premier degré et de la forme $x = ax' + by' + cz' + d$, l'équation demeurera en général du degré m après la transformation, si elle était avant de ce degré ; elle restera de même algébrique ou transcendante.

Une surface du degré ou de l'ordre m ne peut être coupée par un plan que suivant une courbe au plus du degré m. Car, si l'on prend le plan sécant pour plan des xy, et si l'on fait ensuite $z = 0$ dans l'équation de la surface, on aura l'équation de la section dans le plan sécant, laquelle sera au plus du degré m.

Une droite ne peut aussi rencontrer une surface du degré m en plus de m points. Car si l'on prend la droite donnée pour axe des x, et si l'on fait ensuite dans l'équation de la surface $y = 0$ et $z = 0$, on aura une équation qui sera au plus du degré m et qui fera connaître les abscisses des points de rencontre de l'axe des x avec la surface.

Le plan sécant fait partie de la surface représentée par l'équation proposée, lorsque, après la transformation, l'hypothèse $z = 0$ rend l'équation satisfaite. Il y a alors décomposition de l'équation en facteurs.

De même, l'axe des x est tout entier sur la surface, lorsque l'équation est vérifiée d'elle-même pour $y = 0$ et $z = 0$.

328. Toute surface peut être regardée comme engendrée par une courbe qui se meut (en variant ou non de forme) suivant une loi déterminée : cette courbe est la *génératrice* de la surface. Si l'on exprime la loi de son mouvement, en l'astreignant à rencontrer d'autres courbes, ces courbes sont les *directrices* de la surface.

La génératrice et les directrices peuvent être planes ou gauches. Si la génératrice (alors plane) doit rester constamment parallèle à un même plan, ce plan est un *plan directeur* de la surface.

Le classement rationnel des surfaces est basé sur la nature de leur génératrice et sur la loi de son mouvement ; c'est-à-dire que deux surfaces sont de même espèce lorsqu'elles ont pour génératrice la même ligne mue de la même manière : c'est alors par leurs directrices qu'on les distingue.

329. D'une manière générale, pour trouver l'équation d'une surface, on écrit d'abord les deux équations de la ligne génératrice : la mobilité de cette ligne est exprimée par l'indétermination de quelques-uns des paramètres qui s'y rapportent. Soit n le nombre de ces paramètres. On écrit ensuite les équations qui règlent le mouvement de la génératrice, par exemple, les équations des courbes directrices. Ces dernières courbes devront être, dans l'hypothèse faite, au nombre de $n-1$. En effet, s'il y en avait n, en éliminant les variables x, y, z, entre les deux équations de la génératrice et les deux équations de chaque courbe directrice, on obtiendrait successivement n équations de condition entre les n paramètres arbitraires qui seraient déterminés une fois pour toutes ; la génératrice resterait donc immobile, et il n'y aurait plus de surface.

S'il y a $n-1$ courbes directrices au contraire, on arrive ainsi à $n-1$ équations de condition entre les n paramètres arbitraires ; en y joignant les deux équations de la génératrice, on obtient $n+1$ équations entre les n paramètres et les trois variables x, y, z, de sorte qu'en éliminant ces n paramètres entre les équations posées, on obtient une dernière équation qui exprime une relation constante entre les coordonnées x, y, z, d'un point quelconque de la génératrice et qui est l'équation de la surface.

Enfin, si l'on donnait, toujours dans les mêmes hypothèses, moins de $n-1$ courbes directrices, on aurait entre les n paramètres moins de $n-1$ équations de condition ; et pour les éliminer, il faudrait en supposer quelques-uns constants. Dans ce cas, l'équation de la surface obtenue contenant ces mêmes paramètres, on la ferait varier à volonté en modifiant les paramètres conservés : on n'aurait donc plus une surface déterminée.

Il est bien entendu que les conditions du mouvement de la génératrice peuvent être introduites en partie au moment même où l'on écrit les équations de cette génératrice ; ce qui diminue d'autant le nombre des paramètres arbitraires.

Des surfaces cylindriques.

330. *Toute surface cylindrique est engendrée par une droite qui glisse parallèlement à elle-même, en s'appuyant sur une certaine courbe directrice.*

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

les équations de la génératrice ;

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ \varphi(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

celles de la directrice.

Les coefficients a et b sont constants et déterminent la direction de la génératrice ; les coefficients p et q varient au contraire, lorsque la génératrice passe d'une position à une autre. Quelle que soit la nature de la courbe directrice, on pourra éliminer les variables x, y, z, entre les groupes d'équations (1) et (2). On trouvera ainsi entre les paramètres arbitraires p et q la relation

$$(3)\qquad F(p, q) = 0.$$

Cette relation exprimera la condition qui lie p et q lorsque leurs valeurs simultanées correspondent à une génératrice de la surface cylindrique : en éliminant p et q entre les équations (1) et (3), on aura donc *l'équation des surfaces cylindriques,* dont le type général est dès lors

$$(4)\qquad F(x - az, \quad y - bz) = 0 ;$$

car les caractéristiques f et φ variant, il en sera de même de la caractéristique F.

Si l'on tire de l'équation (3) $p = \Phi(q)$, on peut encore mettre l'équation (4) sous la forme

$$x - az = \Phi(y - bz).$$

Remarquons que l'équation (3) représente précisément la trace de la surface cylindrique sur le plan des xy. *On passera donc immédiatement de l'équation de la trace de la surface sur le plan des xy à l'équation même de la surface, en remplaçant dans l'équation de la trace x et y par les différences* $x - az$ *et* $y - bz$.

331. Étant donnée une équation

$$\Psi(x, y, z) = 0, \tag{A}$$

il est facile de reconnaître si elle représente ou non une surface cylindrique.

Dans le cas de l'affirmative, on peut prendre

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

pour équations de la génératrice, et mettre l'équation (A) sous la forme

$$\Psi(az + p,\ bz + q,\ z) = 0. \tag{A'}$$

D'ailleurs la même substitution met à la place de l'équation (4), qui représente toutes les surfaces cylindriques (**330**), l'équation

$$F(p, q) = 0. \tag{3}$$

Il faut donc, si l'équation (A) représente réellement une surface cylindrique, qu'on puisse identifier les équations (3) et (A') indépendamment de toutes valeurs attribuées à p et à q, c'est-à-dire il faut qu'en égalant à zéro les coefficients de z dans l'équation (A'), on obtienne deux valeurs réelles pour les quantités a et b. Ces valeurs réelles détermineront la direction des génératrices de la surface, et l'équation (A') donnera alors pour courbe directrice la trace de la surface sur le plan des xy, trace qu'on obtiendra d'ailleurs directement en faisant $z = 0$ dans l'équation (A).

332. *Exemples.* — 1° Supposons que la trace de la surface sur le plan des xy soit le cercle

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{1}$$

et qu'elle ait pour génératrice la droite

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q. \end{cases}$$

D'après la remarque faite à la fin du n° 330, on n'aura qu'à remplacer dans l'équation (1) les variables x et y par les différences $x - az$, $y - bz$. Il viendra ainsi pour l'équation de la surface du cylindre circulaire oblique considéré

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2.$$

2° Cherchons si l'équation

$$x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-1=0$$

représente une surface cylindrique.

Suivant la règle donnée (331), il faut remplacer x et y par $az+p$ et $bz+q$. Il vient

$$(a^2+b^2+2-2a-2b)z^2+2(a-1)pz+2(b-1)qz+p^2+q^2-1=0.$$

On doit alors trouver pour a et b des valeurs réelles qui fassent disparaître z de l'équation résultante. Remarquons que les termes en pz et en qz, quoique contenant la même puissance de z, ont dû être écrits séparément. En effet, a et b devant être constants, ne peuvent être exprimés en fonction des variables p et q. Les conditions d'identification avec le type général seront donc ici

$$a=1, \quad b=1, \quad a^2+b^2+2-2a-2b=0.$$

Ces trois conditions concordant, l'équation proposée représente une surface cylindrique dont la trace sur le plan des xy est le cercle

$$p^2+q^2-1=0$$

ou

$$x^2+y^2=1,$$

et dont la génératrice est parallèle à la droite

$$\begin{cases} x=z, \\ y=z. \end{cases}$$

Des surfaces coniques.

333. *Toute surface conique est engendrée par une droite qui passe constamment par un point fixe, en s'appuyant sur une certaine courbe directrice.*

Désignons par x', y', z', les coordonnées du point fixe ou du *sommet* du cône; par

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y, z)=0, \\ \varphi(x, y, z)=0, \end{cases}$$

les équations de la courbe directrice.

On exprimera que la génératrice de la surface passe constamment par le sommet, en écrivant ses équations sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} x-x'=a(z-z'), \\ y-y'=b(z-z'). \end{cases}$$

Les seuls paramètres variables sont ici les coefficients a et b dont les valeurs déterminent à chaque instant la position de la génératrice. Quelle que soit la nature de la courbe directrice, on pourra éliminer les variables x, y, z, entre les groupes d'équations (1) et (2). On trouvera ainsi entre les paramètres arbitraires a et b la relation

$$\text{(3)} \qquad F(a, b) = 0.$$

Cette relation exprime la condition qui lie a et b lorsque leurs valeurs simultanées correspondent à une génératrice de la surface conique. En éliminant a et b entre les équations (2) et (3), on aura donc *l'équation des surfaces coniques*, dont le type général est dès lors

$$\text{(4)} \qquad F\left(\frac{x-x'}{z-z'}, \frac{y-y'}{z-z'}\right) = 0;$$

car les caractéristiques f et φ variant, il en sera de même de la caractéristique F.

Si l'on tire de l'équation (3)

$$a = \Phi(b),$$

on peut encore mettre l'équation (4) sous la forme

$$\frac{x-x'}{z-z'} = \Phi\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right).$$

Si le sommet du cône est placé à l'origine, on doit faire

$$x' = y' = z' = 0.$$

L'équation (4) devient alors

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{z} = \Phi\left(\frac{y}{z}\right).$$

334. Il est facile de vérifier si une équation donnée

$$\text{(A)} \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

représente une surface conique.

Supposons qu'il en soit ainsi, et que le sommet du cône soit à l'origine. Les équations de la génératrice seront de la forme

$$\begin{cases} x = az, \\ y = bz, \end{cases}$$

L'équation (A) deviendra donc

$$\psi(az,\ bz,\ z) = 0. \tag{A'}$$

Si l'on opère la même substitution dans l'équation

$$F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right) = 0$$

qui représente toutes les surfaces coniques dont le sommet est à l'origine, on obtient l'équation (3)

$$F(a,\ b) = 0. \tag{3}$$

Si l'équation (A) représente réellement une surface conique, on doit pouvoir identifier l'équation (A') avec l'équation (3) indépendamment de toutes valeurs attribuées à a et à b. Il faut par suite que, dans l'équation (A'), z disparaisse de lui-même, ce qui exige que tous les termes de l'équation (A') contiennent z à la même puissance, ou que les termes de l'équation (A) soient du même degré en comptant les trois variables x, y, z. On arrive ainsi à ce beau théorème dû à Monge, qu'on peut regarder comme le créateur de la géométrie des surfaces :

Toute équation homogène à trois variables représente une surface conique dont le sommet est à l'origine des coordonnées.

Réciproquement, *toute équation représentant une surface conique devient homogène par rapport aux variables x, y, z, considérées simultanément, lorsqu'on transporte l'origine des coordonnées au sommet du cône.*

En résumé, pour vérifier si l'équation *non homogène*

$$\psi(x,\ y,\ z) = 0 \tag{A}$$

représente une surface conique, on transportera les axes parallèlement à eux-mêmes en un point $(x',\ y',\ z')$. Si l'on peut trouver alors pour x', y', z', des valeurs réelles qui rendent l'équation homogène en faisant disparaître tous les termes dont le degré collectif est inférieur au sien, l'équation (A) correspondra à une surface conique ayant pour sommet le point $(x',\ y',\ z')$.

335. Lorsque la courbe directrice est la trace de la surface sur le plan des xy, ses équations sont

$$f(x,\ y) = 0, \quad z = 0.$$

En y joignant les équations de la génératrice

$$\begin{cases} x - x' = a(z - z'), \\ y - y' = b(z - z'), \end{cases}$$

on obtient, en éliminant z,

$$x = x' - az', \quad y = y' - bz'.$$

Transportant les valeurs trouvées dans $f(x, y) = 0$, il vient

$$f(x' - az', \; y' - bz') = 0$$

pour la relation générale entre a et b. Éliminant a et b à l'aide des équations de la génératrice, l'équation générale des surfaces coniques devient dans ce cas

$$f\left[x' - \frac{(x - x')z'}{z - z'}, \; y' - \frac{(y - y')z'}{z - z'}\right] = 0$$

ou

$$f\left(\frac{zx' - xz'}{z - z'}, \; \frac{zy' - yz'}{z - z'}\right) = 0. \qquad (4\,bis)$$

On pourra donc écrire immédiatement l'équation de la surface conique, en remplaçant, dans l'équation de sa trace sur le plan des xy, x et y par les rapports $\frac{zx' - xz'}{z - z'}$ *et* $\frac{zy' - yz'}{z - z'}$.

336. *Exemples.* — 1° Supposons que la trace de la surface sur le plan des xy soit le cercle

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad (1)$$

et qu'elle ait pour génératrice la droite

$$\begin{cases} x - x' = a(z - z'), \\ y - y' = b(z - z'). \end{cases}$$

D'après la remarque du n° **335**, on n'aura qu'à remplacer x et y, dans l'équation (1), par les rapports

$$\frac{zx' - xz'}{z - z'} \quad \text{et} \quad \frac{zy' - yz'}{z - z'}.$$

On aura ainsi, pour l'équation de la surface du cône circulaire oblique considéré,

$$(zx' - xz')^2 + (zy' - yz')^2 = r^2(z - z')^2.$$

Si le cône est droit, son sommet se trouve, d'après l'équation (1), sur l'axe des z. On a donc

$$x' = y' = 0.$$

Par suite, l'équation du cône circulaire droit dont l'axe se con-

fond avec l'axe des z, est

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\frac{z}{z'} - 1\right)^2.$$

Les équations des cônes circulaires étant du second degré, en coupant ces cônes par des plans, on obtiendra comme sections des courbes du second degré (**221**, **224**, **327**).

2° Cherchons si l'équation

$$2x^2 - 3y^2 + 2xz - yz + 4x + 5z - 3,4 = 0,$$

représente une surface conique.

Comme cette équation n'est pas homogène, il faut y remplacer (**334**) x, y, z, par $x + x'$, $y + y'$, $z + z'$.

Les termes du second degré ne changeront pas, les termes du premier degré auront pour coefficients les dérivées partielles du premier membre de l'équation, x, y, z étant remplacées dans ces dérivées par x', y', z'. Enfin, le terme indépendant sera le premier membre de l'équation proposée sauf la même substitution.

On doit donc poser

$$4x' + 2z' + 4 = 0, \quad -6y' - z' = 0, \quad 2x' - y' + 5 = 0,$$
$$2x'^2 - 3y'^2 + 2x'z' - y'z' + 4x' + 5z' - 3,4 = 0.$$

On tire des trois premières relations

$$x = -\frac{14}{5}, \quad y' = -\frac{3}{5}, \quad z' = \frac{18}{5};$$

et comme ces valeurs vérifient la quatrième relation, l'équation proposée représente une surface conique dont le sommet a pour coordonnées les résultats qu'on vient d'obtenir, et dont la trace sur le plan des xy est l'hyperbole

$$2x^2 - 3y^2 + 4x - 3,4 = 0.$$

Des surfaces conoïdes.

337. *Toute surface conoïde est engendrée par une droite qui glisse parallèlement à un certain plan directeur, en s'appuyant à la fois sur une droite fixe et sur une certaine courbe directrice.*

Nous considérerons seulement le cas le plus simple, celui où l'axe fixe se confond avec l'axe des z et le plan directeur avec le plan des xy. On doit alors prendre pour équations de la génératrice

$$(1) \qquad \begin{cases} z = p, \\ y = ax. \end{cases}$$

Soient

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ \varphi(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

celles de la seconde directrice.

Les coefficients a et p varient lorsque la génératrice passe d'une position à une autre. Quelle que soit la nature de la seconde directrice, on pourra éliminer les variables x, y, z, entre les groupes d'équations (1) et (2). On trouvera ainsi, entre les paramètres arbitraires a et p, la relation

$$F(a, p) = 0. \tag{3}$$

Cette relation exprime la condition qui lie a et p lorsque leurs valeurs simultanées correspondent à une génératrice de la surface conoïde. En éliminant a et p entre les équations (1) et (3), on aura l'équation des surfaces conoïdes dans l'hypothèse choisie. Il viendra donc immédiatement pour cette équation

$$F\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0. \tag{4}$$

Si l'on tire de l'équation (3) $p = \Phi(a)$, on peut encore mettre l'équation (4) sous la forme

$$z = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On voit, toujours dans l'hypothèse spéciale où l'on s'est placé, que l'équation de la surface est homogène par rapport aux seules variables y et x, en laissant z de côté ou en considérant cette variable comme une constante. C'est là un théorème analogue à celui démontré au n° 334.

En résumé, *toute équation à trois variables, homogène par rapport à deux des variables qui y entrent, représente un conoïde ayant pour plan directeur celui de ces deux variables et pour directrice rectiligne l'axe qui correspond à la troisième variable.*

338. La recherche de l'équation (4) devient très-facile lorsqu'on prend pour seconde courbe directrice la trace de la surface conoïde sur un plan parallèle au plan des xz par exemple.

Les équations de cette seconde directrice sont alors

$$\begin{cases} y = q, \\ f(x, z) = 0. \end{cases}$$

Les équations de la génératrice étant toujours

$$\begin{cases} z = p, \\ y = ax, \end{cases}$$

l'équation (3) devient ici

$$f\left(\frac{q}{a},\ p\right)=0; \tag{3}$$

et l'on a par suite, à la place de l'équation (4),

$$f\left(\frac{qx}{y},\ z\right)=0. \tag{4}$$

On obtient donc alors immédiatement l'équation de la surface conoïde, en remplaçant dans l'équation de sa seconde directrice, x par $\frac{qx}{y}$.

339. *Exemple. — Conoïde rectiligne droit ou oblique.*

Si la seconde directrice, située dans un plan parallèle au plan des xz, est aussi une ligne droite, ses équations sont de la forme

$$\begin{cases} y=q, \\ x=mz+n. \end{cases}$$

L'équation de la surface est donc (338)

$$\frac{qx}{y}=mz+n \quad \text{ou} \quad myz+ny=qx.$$

C'est une surface du second degré, dont toutes les sections planes sont des courbes du second degré (327).

Des surfaces de révolution.

340. *Toute surface de révolution est engendrée par une certaine courbe tournant autour d'un axe fixe.*

Tous les points de la courbe mobile décrivent alors des circonférences de cercle dont les plans sont perpendiculaires à l'axe et les centres sur l'axe : on donne à ces cercles le nom de *parallèles* de la surface. Toute section plane suivant l'axe détermine un *méridien* de la surface : d'après la symétrie de la surface autour de son axe, tous les méridiens sont égaux.

Il est facile maintenant de donner une autre définition des surfaces de révolution, qui permet de former leur équation générale, en rentrant dans le mode adopté jusqu'ici.

Toute surface de révolution est engendrée par une circonférence de cercle dont le centre parcourt une droite fixe et dont le plan reste perpendiculaire à cet axe, le rayon de cette circonférence variant d'ailleurs de manière qu'elle s'appuie constamment sur une certaine courbe directrice (qui ne sera le méridien de la surface qu'autant qu'elle sera plane).

Soient

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

les équations de l'axe de la suface. Il s'agit de représenter la circonférence génératrice. On peut évidemment la regarder comme provenant de l'intersection d'un plan perpendiculaire à l'axe et d'une sphère de rayon variable ayant pour centre fixe un point de l'axe (celui où il perce le plan des xy par exemple), c'est-à-dire que les équations de la génératrice seront (**301, 312**)

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by + z = d, \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 = \mathrm{R}^2. \end{cases}$$

Soient enfin

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ \varphi(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

les équations de la courbe directrice.

Les seuls paramètres variables sont ici d et R^2, dont les valeurs déterminent à chaque instant la position de la génératrice. Quelle que soit la nature de la courbe directrice, on pourra éliminer les variables x, y, z, entre les groupes d'équations (1) et (2). On trouvera ainsi, entre les paramètres arbitraires d et R^2, la relation

$$(3) \qquad \mathrm{F}(d, \mathrm{R}^2) = 0.$$

Cette relation exprime la condition qui lie d et R^2 lorsque leurs valeurs simultanées correspondent à une génératrice de la surface proposée. En éliminant d et R^2 entre les équations (1) et (3), on aura l'équation des surfaces de révolution dont le type général est dès lors

$$(4) \qquad \mathrm{F}[ax + by + z, (x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2] = 0.$$

Si l'on tire de l'équation (3) $\mathrm{R}^2 = \Phi(d)$, on peut encore mettre l'équation (4) sous la forme

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 = \Phi(ax + by + z).$$

341. L'équation des surfaces de révolution prend une forme beaucoup plus simple, lorsque l'axe de la surface se confond avec l'axe des z. On peut alors regarder le cercle générateur comme provenant de l'intersection du cylindre variable

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$$

et du plan

$$z = d.$$

L'équation (3)

$$F(d, R^2) = 0$$

ou

$$R^2 = \Phi(d),$$

donne alors pour équation de la surface

$$(4) \qquad F(z, x^2 + y^2) = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = \Phi(z).$$

On voit par là que *toute équation qui donne pour la somme des carrés des deux variables x et y une fonction de z, représente une surface de révolution autour de l'axe des z.*

342. Considérons le cas où, l'axe de la surface étant toujours l'axe des z, la courbe directrice est la trace de la surface sur le plan des xz.

Les équations de cette courbe directrice ou de ce méridien sont alors

$$y = 0, \quad f(x, z) = 0.$$

Comme les équations de la génératrice sont

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = d,$$

en éliminant x, y, z, entre les quatre équations posées, on obtient comme équation de condition entre d et R,

$$f(d, R) = 0.$$

Par suite l'équation de la surface est

$$f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0.$$

On l'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation du méridien de la surface dans le plan des xz, x par $\sqrt{x^2 + y^2}$.

On opérera d'une manière analogue, si l'on donne la trace de la surface sur le plan des yz.

343. *Exemples.* — 1° *Cherchons l'équation de la surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe fixe avec lequel elle n'est pas dans un même plan.*

Prenons pour axe des z l'axe de la surface, et supposons que la plus courte distance entre l'axe et la génératrice dans une position déterminée se confonde avec l'axe des x. Cette génératrice, qu'on pourra regarder d'après ce qui précède comme la directrice de la surface (**340**), aura donc pour équations (puisqu'elle sera alors parallèle au plan des yz)

$$(1) \qquad \begin{cases} x = p, \\ y = bz. \end{cases}$$

Les équations d'un parallèle de la surface seront

$$(2) \qquad \begin{cases} z = d, \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

En éliminant x, y, z, entre ces quatre équations, il vient

$$(3) \qquad p^2 + b^2 d^2 = R^2.$$

Par suite, l'équation de la surface sera (en éliminant d et R entre les équations (2) et (3)

$$x^2 + y^2 - b^2 z^2 = p^2.$$

Si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on obtient la trace de la surface sur le plan des xz. La courbe méridienne de la surface est donc l'hyperbole

$$x^2 - b^2 z^2 = p^2.$$

Si l'on avait donné d'abord cette courbe méridienne comme directrice de la surface, on aurait trouvé immédiatement son équation (**342**) en remplaçant dans l'équation de la directrice x par $\sqrt{x^2 + y^2}$. On doit encore remarquer que, si l'on avait pris pour directrice la droite

$$\begin{cases} x = p, \\ y = -bz, \end{cases}$$

on aurait obtenu la même surface, puisque b n'entre qu'au carré dans l'équation trouvée. La surface peut donc être engendrée par le mouvement d'une seconde droite, ayant sur le plan des yz une projection symétrique de celle de la première directrice par rapport à l'axe Oz.

2° Considérons encore le cas du *tore*, c'est-à-dire la *surface engendrée par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan et qui ne passe pas par son centre.*

Nous prendrons l'axe de la surface pour axe des z, et pour courbe directrice du cercle générateur (**340**) le cercle donné que nous supposerons placé dans le plan des xz.

Le cercle directeur aura alors pour équations (en désignant par l la distance de son centre à l'axe des z)

$$y = 0, \quad (x - l)^2 + z^2 = r^2;$$

et pour obtenir l'équation de la surface, il suffira (**342**) de remplacer dans l'équation du cercle directeur dans le plan des xz,

x par $\sqrt{x^2+y^2}$. Il viendra donc pour équation du tore

$$\sqrt{x^2+y^2}-b^2+z^2=r^2.$$

Cette équation est du quatrième degré.

344. *Nota.* — Nous ne pourrions, sans sortir du cadre que nous nous sommes imposé, parler ici des surfaces réglées, développables ou gauches. Nous renverrons le lecteur sur ce sujet, soit au grand ouvrage de Monge, soit à l'*Analyse appliquée* de Leroy.

CHAPITRE II.

DU PLAN TANGENT.

345. Considérons une courbe et sa projection sur un plan. A mesure qu'une sécante à cette courbe tournera dans l'espace autour de l'un de ses points d'intersection de manière à devenir tangente, sa projection tournera également dans le plan considéré de manière à devenir tangente à la courbe projetée.

Il en résulte que si l'on donne une courbe par ses équations

$$f(x,z)=0, \quad \varphi(y,z)=0,$$

les équations de la tangente à la courbe en un point (x_1, y_1, z_1) seront (73. 303)

$$(1)\qquad \begin{cases} x-x_1=-\dfrac{f'_{z_1}}{f'_{x_1}}(z-z_1), \\ y-y_1=-\dfrac{\varphi'_{z_1}}{\varphi'_{y_1}}(z-z_1). \end{cases}$$

Si les équations de la courbe ne représentent plus ses cylindres projetants, c'est-à-dire si elles sont de la forme

$$F(x,y,z)=0, \quad \Phi(x,y,z)=0,$$

on aura d'après des théorèmes connus (*Compl. d'Alg.*, 139, 142) et en regardant x et y comme des fonctions de z, variable indépendante,

$$(2)\qquad \begin{cases} F'_z+F'_y.y'+F'_x.x'=0, \\ \Phi'+\Phi'_y.y'+\Phi'_x.x'=0. \end{cases}$$

On pourrait alors, pour avoir les équations de la tangente au point (x_1, y_1, z_1), déduire des équations (2) les valeurs de

$$y'=-\frac{\varphi'_{z_1}}{\varphi'_{y_1}}$$

et de

$$x' = -\frac{f'_{z_1}}{f'_{x_1}}.$$

Mais il revient évidemment au même de remplacer au contraire dans les équations (2) y' et x' par leurs valeurs déduites des équations (1). On a ainsi

$$y' = -\frac{\varphi'_{z_1}}{\varphi'_{y_1}} = \frac{y - y_1}{z - z_1} \quad \text{et} \quad x' = -\frac{f'_{z_1}}{f'_{y_1}} = \frac{x - x_1}{z - z_1};$$

et par suite pour équations générales de la tangente à la courbe au point (x_1, y_1, z_1)

$$(3) \quad \begin{cases} (z - z_1)\,\mathrm{F}'_{z_1} + (y - y_1)\,\mathrm{F}'_{y_1} + (x - x_1)\,\mathrm{F}'_{x_1} = 0, \\ (z - z_1)\,\Phi'_{z_1} + (y - y_1)\,\Phi'_{y_1} + (x - x_1)\,\Phi'_{x_1} = 0. \end{cases}$$

Le plan mené perpendiculairement à la tangente par son point de contact est le plan *normal* à la courbe en ce point. Toutes les droites menées par ce point dans le plan normal, sont les *normales* à la courbe au point donné.

346. Si l'on considère isolément l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0,$$

elle représente une surface qui est coupée par la surface

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

suivant une courbe dont la tangente au point (x_1, y_1, z_1) est représentée par les équations (3). Si l'on fait varier la fonction Φ en conservant toujours le point (x_1, y_1, z_1), on fera varier les courbes d'intersection ainsi que leurs tangentes au point (x_1, y_1, z_1) : on peut demander *le lieu de toutes ces tangentes* qui sont celles qu'on peut mener à la surface $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ par le point considéré.

Or, Φ variant tandis que F reste constant, les coordonnées de ces différentes tangentes satisferont continuellement à la première des équations (3), qui, dès lors, représente le lieu demandé. Ce lieu est donc, en général, un plan qu'on qualifie de *plan tangent* à la surface F au point (x_1, y_1, z_1).

Ainsi *le plan qui contient toutes les tangentes menées à la surface* $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ *par le point* (x_1, y_1, z_1) *pris sur cette surface, ou le plan mené tangentiellement à la surface par le point* (x_1, y_1, z_1), *a pour équation*

$$(x - x_1)\,\mathrm{F}'_{x_1} + (y - y_1)\,\mathrm{F}'_{y_1} + (z - z_1)\,\mathrm{F}'_{z_1} = 0.$$

347. La perpendiculaire menée au plan tangent par le point de contact (x_1, y_1, z_1) est la *normale* à la surface en ce point.

La normale à la surface $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ au point (x_1, y_1, z_1), aura donc

pour équations (324)

$$x - x_1 = \frac{F'_{x_1}}{F'_{z_1}}(z - z_1), \quad y - y_1 = \frac{F'_{y_1}}{F'_{z_1}}(z - z_1),$$

ou

$$\frac{x - x_1}{F'_{x_1}} = \frac{y - y_1}{F'_{y_1}} = \frac{z - z_1}{F'_{z_1}}.$$

348. *Exemple.* — Les axes étant rectangulaires, soit la sphère

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

dont le centre est le point (α, β, γ) et dont le rayon est R. Le plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) de la surface aura pour équation (346)

$$(1) \quad (x-x_1)(x_1-\alpha)+(y-y_1)(y_1-\beta)+(z-z_1)(z_1-\gamma)=0,$$

en y joignant la condition

$$(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2=R^2.$$

Cette condition permet de mettre l'équation du plan tangent sous la forme (2)

$$(2) \quad (x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+(z-\gamma)(z_1-\gamma)=R^2.$$

En effet, le terme $(x-x_1)(x_1-\alpha)$ du premier membre de l'équation (1) peut s'écrire

$$[(x-\alpha)-(x_1-\alpha)](x_1-\alpha)=(x-\alpha)(x_1-\alpha)-(x_1-\alpha)^2;$$

et on peut transformer de la même manière les autres termes de ce premier membre.

Les équations de la normale à la sphère au point (x_1, y_1, z_1) seront (347)

$$\frac{x-x_1}{x_1-\alpha}=\frac{y-y_1}{y_1-\beta}=\frac{z-z_1}{z_1-\gamma}.$$

Ces équations montrent que la normale passe par le centre de la sphère. Ainsi toutes les normales à la sphère sont ses rayons.

349. Nous avons dit (346) que le lieu des tangentes menées à une surface par l'un de ses points était en général un plan. Il peut en être autrement aux *points singuliers* qu'une surface peut présenter. Par exemple, au sommet d'un cône, si l'on y suppose l'origine placée, les trois dérivées partielles F'_{x_1}, F'_{y_1}, F'_{z_1}, se trouveront nulles pour $x_1=y_1=z_1=0$, en vertu de l'homogénéité de l'équation (334). L'équation du plan tangent (346) se réduira alors à une identité. Et en effet, toutes les génératrices du cône étant à elles-mêmes leurs propres tangentes, le lieu des tangentes menées à la surface par son sommet n'est pas un plan, puisque c'est la surface elle-même. Il en serait de même s'il s'agissait de mener un plan tangent à une surface de révolution en l'un des points où l'axe perce la surface, si le méridien de la surface ne coupait pas l'axe sous un angle de 90°, c'est-à-dire que le lieu des tangentes serait encore un cône, droit dans ce cas.

350. *On entend par* CONTOUR APPARENT *d'une surface sur un plan la projection sur ce plan de tous les points de la surface pour lesquels le plan tangent est perpendiculaire au plan de projection choisi.*

Il est facile de trouver l'équation du contour apparent d'une surface sur l'un des plans coordonnés, celui des xy par exemple.

Les axes étant rectangulaires, les plans tangents correspondants au contour cherché seront parallèles à l'axe des z : leur équation ne devra donc pas contenir cette variable, ce qui entraîne (346) la condition

$$F'_z = 0.$$

On n'aura alors qu'à éliminer z entre l'équation de la surface $F(x, y, z) = 0$ et l'équation de condition $F'_z = 0$, pour obtenir l'équation du contour apparent de la surface sur le plan des xy.

Soit la sphère

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2. \qquad (1)$$

On aura

$$F'_z = 2(z-\gamma).$$

Par suite on doit faire $z = \gamma$ dans l'équation (1), et l'on trouve le cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$$

pour contour apparent de la sphère sur le plan des xy.

351. Il arrive qu'au lieu de donner la directrice d'une surface (328), on indique qu'elle doit être *circonscrite* à une autre surface donnée. Il faut alors déterminer la *courbe de contact* des deux surfaces, et la prendre pour directrice de la surface cherchée.

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'une surface cylindrique. Si la surface à laquelle elle doit être circonscrite a pour équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

cette équation pourra être prise pour l'une de celles dont l'ensemble représente la courbe de contact.

Pour en obtenir une seconde, il suffit de remarquer que, pour tous les points de la courbe de contact, le plan tangent doit être commun aux deux surfaces.

En effet, soit (x_1, y_1, z_1) un point de la courbe de contact. Le plan tangent mené au point (x_1, y_1, z_1) de la surface $F(x, y, z) = 0$, aura pour équation (346)

$$(x-x_1)F'_{x_1}+(y-y_1)F'_{y_1}+(z-z_1)F'_{z_1} = 0. \qquad (1)$$

Ce plan contiendra la génératrice de la surface cylindrique qui passe par le point (x_1, y_1, z_1), puisque cette génératrice est à elle-même sa propre tangente. Les équations de cette génératrice étant

$$\begin{cases} x-x_1 = a(z-z_1), \\ y-y_1 = b(z-z_1), \end{cases} \qquad (2)$$

on aura, en remplaçant dans l'équation (1) les différences $x - x_1$ et $y - y_1$ par leurs valeurs déduites des équations (2),

$$aF'_{x_1} + bF'_{y_1} + F'_{z_1} = 0.$$

Cette relation s'appliquant à un point quelconque de la courbe de contact, pourra être prise pour sa seconde équation, et l'on rentrera dans le cas général (330).

CHAPITRE III.

APERÇU DE QUELQUES THÉORIES GÉNÉRALES.

Du centre.

352. *Le centre d'une surface est un point qui divise en deux parties égales toute corde de cette surface qui y passe.*

Supposons que la surface considérée ait un centre et que l'origine des coordonnées y soit placée. Toute corde passant par l'origine sera divisée par ce point en deux parties égales, de sorte que les extrémités de cette corde auront des coordonnées égales et de signes contraires (287, 1). L'équation de la surface restera donc la même, lorsqu'on remplacera d'une manière générale x par $-x$, y par $-y$, z par $-z$.

Réciproquement, si l'équation d'une surface n'est pas modifiée par la substitution de $-x$, de $-y$ et de $-z$ à la place de x, de y et de z, l'origine des coordonnées est un centre de la surface. Car si par le point M dont les coordonnées sont x, y, z, on mène une droite passant par l'origine, et si on la prolonge jusqu'au point M′ de manière que l'origine soit au milieu de la longueur MM′, les coordonnées du point M′ seront précisément $-x$, $-y$, $-z$; donc le point M′ appartiendra à la surface.

Ainsi, *que l'équation d'une surface soit algébrique ou transcendante, l'origine des coordonnées sera un centre lorsqu'on pourra, sans changer l'équation, remplacer x, y, z, par $-x$, $-y$, $-z$.*

353. Soit en particulier une équation algébrique irréductible. Si la surface qu'elle représente a pour centre l'origine des coordonnées, tous ses termes seront de même parité, c'est-à-dire tous de degré pair ou tous de degré impair, de manière à ne pas changer de signes ou à en changer tous à la fois. En effet, remplaçons x par $-x$, y par $-y$, z par $-z$, dans le terme général $Px^n y^p z^{m-n-p}$. Si n, p et $m-n-p$ sont tous trois pairs, c'est-à-dire si m est *pair*, le terme considéré ne changera pas de signe. Il en sera encore de même si sur les trois exposants il y en a un pair et deux impairs. Si n, p et $m-n-p$ sont tous trois impairs, c'est-à-dire si m est *impair*, le terme considéré changera de signe. Il en sera encore de même si sur les trois exposants il y en a deux pairs et un impair.

Remarque. — Dans le cas où l'équation est de degré impair, elle ne doit donc pas contenir de terme indépendant des variables. Et alors, s'il y a un centre, il est situé sur la surface elle-même.

354. La méthode pour déterminer le centre d'une surface algébrique découle immédiatement de ce qui précède.

En effet, si le centre supposé n'est pas à l'origine, on le reconnaît à ce que les termes de l'équation sont de parité différente. En désignant par p, q, r, les coordonnées du centre cherché, on effectue alors une transformation d'axes indéterminée, en les transportant parallèlement à eux-mêmes au point (p, q, r); ce qui revient à remplacer dans l'équation : x, y, z, par $x+p, y+q, z+r$. Si l'équation transformée est de degré pair, on égale à zéro les coefficients de tous ses termes de degré impair; si elle est de degré impair, on égale à zéro les coefficients de tous ses termes de degré pair. On obtient ainsi des équations qui permettent de déterminer les coordonnées p, q, r du centre, lorsqu'il existe.

Remarque. — S'il s'agit d'une équation transcendante, après avoir effectué la transformation de coordonnées indiquée, on change dans l'équation x, y, z, en $-x$, $-y$, $-z$. Les deux équations ainsi obtenues doivent rester identiques, si la nouvelle origine est un centre; et si leur identification est possible, elle conduit aux coordonnées p, q, r, du centre cherché.

Des surfaces diamétrales.

355. *On entend par surface diamétrale d'une surface, une autre surface lieu des milieux d'un système de cordes menées dans la première surface parallèlement à une direction donnée.*

Pour trouver l'équation générale des surfaces diamétrales d'une surface dont l'équation est donnée, voici théoriquement la marche qu'on peut suivre.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation proposée. Soient m et n les coefficients angulaires des projections des cordes parallèles données sur le plan des xz et sur celui des yz. Désignons par X, Y, Z, les coordonnées du point milieu d'une quelconque d'entre elles. Transportons en ce point l'origine des coordonnées. Les équations de la corde considérée deviendront alors

$$x = mz,$$

$$y = nz,$$

et celle de la surface sera

$$F(x+X, y+Y, z+Z) = 0.$$

Pour avoir les z des points d'intersection de la corde et de la surface, il suffira de remplacer dans l'équation de la surface x par mz et y par nz. L'équation résultante

$$F(mz+X, nz+Y, z+Z) = 0$$

devra alors, puisque le milieu de la corde est à l'origine, présenter d'une manière générale deux racines égales et de signes contraires. On divisera donc le premier membre de cette équation par le binôme $z^2 - h^2$ qui correspond aux racines $+h$ et $-h$. On continuera la division jusqu'au reste du premier degré en z. On posera les conditions nécessaires pour la nullité de ce reste, et l'on obtiendra deux équations entre lesquelles il suffira d'éliminer l'indéterminée h pour avoir l'équation générale des surfaces diamétrales de la surface $F(x, y, z) = 0$. L'indétermination de h

correspond précisément à la variation nécessaire de l'origine (X, Y, Z), choisie au milieu d'un corde quelconque.

Remarque. — Le calcul se simplifiera lorsqu'il s'agira d'une surface du second degré. En effet, l'équation résultante en z étant alors nécessairement du second degré, il suffira d'y égaler à zéro le coefficient du terme du premier degré, pour exprimer la condition analytique imposée, c'est-à-dire pour obtenir l'équation des surfaces diamétrales.

Détermination des surfaces et des courbes dans l'espace.

356. Le nombre de conditions ou le nombre de points nécessaires à la détermination d'une surface placée d'une manière quelconque par rapport aux axes, est indiqué par le plus petit des résultats qu'on trouve en comptant, d'une part le nombre des paramètres ou des constantes arbitraires qui entrent dans l'équation, de l'autre le nombre des coefficients qu'elle présente (235).

Chaque point *remarquable* ou *singulier* doit alors compter pour *trois* conditions. En effet, s'il n'appartient pas à la surface, ses coordonnées seront déterminées isolément par trois équations de condition déduites de celle même de la surface; et s'il lui appartient, ses coordonnées devront d'abord satisfaire à l'équation de la surface, et ensuite à deux autres relations formulant (en fonction des constantes arbitraires) sa propriété caractéristique. Par exemple, donner le centre d'une surface, c'est l'astreindre à trois conditions.

Pour exprimer qu'un plan est tangent à une surface, on remarque que les équations du plan et de la surface deviennent simultanées pour les coordonnées du point de contact. On aura donc, pour ce point,

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$F(x, y, z)=0.$$

En se reportant à l'équation générale du plan tangent (346), on doit avoir en outre

$$\frac{A}{F'_x}=\frac{B}{F'_y}=\frac{C}{F'_z}.$$

Entre les quatre équations posées, on éliminera les coordonnées inconnues du point de contact, de sorte que le contact indiqué sera exprimé par une seule équation de condition entre les paramètres de l'équation de la surface et ceux de l'équation du plan. *Dire qu'une surface est tangente à un plan, c'est donc l'astreindre à une seule condition.*

Quant aux lignes dans l'espace, comme elles ont alors deux équations, le nombre des constantes arbitraires ou des coefficients distincts devient double du nombre de points nécessaires à la détermination de la courbe. Nous l'avons déjà fait remarquer (304).

Condition de similitude.

357. Tout ce que nous avons dit (Livre III, chapitre IX) touchant la *similitude* des figures planes, peut se transporter dans l'espace et s'appli-

quer aux surfaces. On verra facilement, en particulier, que *lorsque deux surfaces du second ordre sont semblables et semblablement placées, les coefficients des termes du second degré dans leurs équations sont proportionnels.*

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Chercher l'équation du cylindre circonscrit à une sphère donnée, connaissant la direction des génératrices.

II. Trouver l'équation d'un cône dont on connaît le sommet et qui est circonscrit à une surface donnée.

III. Trouver l'équation d'un cône dont le sommet est à l'origine et qui est circonscrit à une sphère donnée.

IV. Chercher l'équation de la surface conoïde circonscrite à une sphère donnée (la directrice rectiligne étant toujours l'axe des z, et le plan directeur le plan des xy).

V. Chercher l'équation de la surface conoïde dont la seconde directrice est une ellipse ayant son centre sur l'axe des x, et ses axes parallèles à l'axe des y et à l'axe des z (conoïde de la voûte d'arête en tour ronde).

VI. Chercher l'équation de la surface conoïde engendrée par une droite qui s'appuie constamment sur une hélice et sur l'axe de cette hélice, en restant perpendiculaire à cet axe (hélicoïde gauche).

VII. Chercher l'équation de la surface engendrée par la révolution d'une hélice autour d'une parallèle à son axe.

VIII. Étude des sections obtenues en coupant un tore par un plan passant par son centre. Cas où la section se compose de deux cercles égaux.

IX. Trouver l'équation du plan tangent commun à deux sphères données; en déduire l'équation des surfaces coniques circonscrites à ces sphères.

LIVRE SIXIÈME.

ÉTUDE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

DU CENTRE ET DES SURFACES DIAMÉTRALES DANS LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

358. L'équation générale du second degré à trois variables est de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz \\ \qquad +2Gx+2Hy+2Kz+L=0. \end{array}\right.$$

Pour simplifier la discussion de cette équation, nous commencerons par exposer ce qui se rapporte à la recherche du centre et des surfaces diamétrales dans les surfaces du second degré.

Du centre.

359. Appliquons la méthode indiquée (**352**), c'est-à-dire transportons les axes coordonnés parallèlement à eux-mêmes en un point (p, q, r). En développant les calculs et en posant à part

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} 2G_1=2Ap+2Dq+2Er+2G, \\ 2H_1=2Bq+2Dp+2Fr+2H, \\ 2K_1=2Cr+2Ep+2Fq+2K, \end{array}\right.$$

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} L_1=Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Dpq+2Epr+2Fqr \\ \qquad +2Gp+2Hq+2Kr+L, \end{array}\right.$$

l'équation (1) deviendra

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz \\ \qquad +2G_1x+2H_1y+2K_1z+L_1=0. \end{array}\right.$$

On voit que, *dans la nouvelle équation* (2), *les coefficients des termes du second degré n'ont pas varié; les coefficients des termes du premier degré sont les dérivées partielles correspondantes du premier membre de l'équation* (1), *sauf la substi-*

tution de p, q, r, à la place de x, y, z; le terme indépendant est le premier membre de l'équation (1), *sauf la même substitution.*

Si le point (p, q, r) se confond avec le centre de la surface, on devra avoir (352)

$$(3) \qquad 2G_1 = 0, \quad 2H_1 = 0, \quad 2K_1 = 0;$$

et l'équation (1) se trouvera ramenée à la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + L_1 = 0.$$

Remarque. — On peut indiquer une expression plus simple de L_1. Multiplions respectivement les équations (a) par p, q, r, après avoir divisé leurs deux membres par 2, et retranchons leur somme de l'équation (b). Il viendra, puisque les relations (3) sont supposées satisfaites,

$$(b') \qquad L_1 = Gp + Hq + Kr + L.$$

360. Si la surface considérée admet en effet un centre, le système des équations (3) qui est composé de trois équations du premier degré à trois inconnues p, q, r, donne pour ces inconnues des valeurs finies et déterminées. Si l'une de ces valeurs au moins est infinie, le centre de la surface se transporte à l'infini. Si ces valeurs se présentent sous forme indéterminée, le centre est indéterminé ou il y a une infinité de centres.

Soient

$$p = \frac{N}{M}, \quad q = \frac{N'}{M}, \quad r = \frac{N''}{M},$$

les valeurs générales de p, q, r. Le dénominateur commun M est, d'après les équations (3) (*Alg. élém.*, 155),

$$(4) \qquad M = ABC - AF^2 - BE^2 - CD^2 + 2DEF,$$

tandis que les numérateurs ont pour expressions

$$N = -GBC + GF^2 - EHF + DHC - DFK + EKB,$$
$$N' = -AHC + AFK - EDK + DGC - GFE + E^2H,$$
$$N'' = -ABK + AFH - GDF + D^2K - DHE + GEB.$$

Remarquons que les équations (3) étant du premier degré représentent chacune un plan. D'une manière générale, si M est différent de zéro, ces trois plans se coupent en un seul point, centre de la surface. Si $M = 0$, sans que la même condition soit remplie par les trois numérateurs N, N', N'', ces plans n'ont aucun point commun, soit parce qu'ils

sont parallèles, soit parce que l'un d'eux est parallèle à l'intersection des deux autres; et le centre de la surface se transporte à l'infini. Si $M = 0$ en même temps que les trois numérateurs N, N', N'', les plans considérés ont une infinité de points communs, soit parce qu'ils se coupent suivant la même droite, soit parce qu'ils se confondent; et la surface admet une infinité de centres. Il pourrait encore arriver dans ce cas que tous ces centres fussent transportés à l'infini ou qu'il n'y eût pas de centre (439, 3°).

Des surfaces diamétrales.

361. Appliquons à l'équation générale du second degré la méthode indiquée (355). Il faut d'abord transporter les axes au milieu (X, Y, Z) d'une des cordes parallèles à la direction indiquée. Les équations de cette corde deviendront ainsi

$$x = mz,$$
$$y = nz.$$

L'équation de la surface prendra d'ailleurs une forme analogue à celle de l'équation (2) du n° 359, p, q, r, étant remplacés par X, Y, Z, dans les valeurs (a) et (b) des coefficients G_1, H_1, K_1 et L_1. On doit ensuite substituer mz et nz à la place de x et de y dans l'équation obtenue, pour avoir les z des points d'intersection de la corde considérée avec la surface. L'équation résultante sera

$$(A m^2 + B n^2 + C + 2D mn + 2Em + 2Fn) z^2 + (2G_1 m + 2H_1 n + 2K_1) z + L_1 = 0.$$

Pour trouver l'équation générale des surfaces diamétrales des surfaces du second degré, il reste à exprimer que les deux racines de l'équation en z sont égales et de signes contraires, c'est-à-dire à égaler à zéro le coefficient du terme du premier degré en z. L'équation cherchée est donc

$$2G_1 m + 2H_1 n + 2K_1 = 0. \tag{5}$$

Cette équation s'obtiendra en ajoutant les dérivées partielles (359) *du premier membre de l'équation* (1), *les deux premières dérivées étant respectivement multipliées par les coefficients angulaires m et n.*

Par suite, si l'on représente par $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface proposée, on pourra mettre l'équation générale de ses surfaces diamétrales sous la forme

$$F'_x \cdot m + F'_y \cdot n + F'_z = 0. \tag{5 bis}$$

L'équation (5) *ou* (5 *bis*) *étant nécessairement du premier degré, toutes les surfaces diamétrales des surfaces du second degré sont des plans.*

362. Remarquons (359) que les équations

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0, \tag{6}$$

sont précisément celles qui déterminent le centre de la surface. Donc, *dans les surfaces à centre, tous les plans diamétraux passent par le centre.*

Réciproquement, *tout plan passant par le centre est un plan diamétral;* car on pourra toujours faire coïncider l'équation (5 *bis*) avec l'équation de ce plan, en donnant aux coefficients m et n des valeurs convenables.

363. Dans les surfaces dénuées de centre, les plans représentés par les équations (6) sont parallèles à une même droite (qu'ils peuvent contenir) ou parallèles entre eux (360): les deux cas rentrent l'un dans l'autre. *Les plans diamétraux sont alors parallèles à cette droite ou parallèles entre eux.*

En effet, supposons que les plans $F'_x = 0$ et $F'_y = 0$ se coupent suivant une droite à laquelle le plan $F'_z = 0$ soit parallèle ; si le plan $F'_x . m + F'_y . n + F' = 0$ n'était pas parallèle à la droite

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \end{cases}$$

on trouverait pour x, y, z, un système de valeurs finies qui satisferaient aux équations (6); et la surface aurait un centre.

De même, si les plans $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$, sont parallèles, les coefficients des variables dans leurs équations seront proportionnels (315) : désignons-les par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''. Les coefficients des variables dans l'équation générale $F'_x . m + F'_y . n + F'_z = 0$, seront alors :

$$ma + na' + a'', \quad mb + nb' + b'', \quad mc + nc' + c'',$$

c'est-à-dire proportionnels aux précédents. Donc tous les plans diamétraux sont alors parallèles aux plans qui déterminent le centre de la surface (362), c'est-à-dire parallèles entre eux.

Des plans principaux.

364. *On entend par plan principal un plan diamétral perpendiculaire à la direction des cordes qui lui sont conjuguées.*

Ces cordes sont dites *principales*, et la section de la surface par un plan principal est une *section principale*.

Supposons les axes rectangulaires. Les équations de la droite menée par l'origine parallèlement au système de cordes considéré sont

$$\begin{cases} x = mz, \\ y = nz. \end{cases}$$

L'équation générale des plans diamétraux qui est (361)

$$F'_x \cdot m + F'_y \cdot n + F'_z = 0,$$

peut s'écrire en ordonnant

$$(5\ ter)\quad \begin{cases} (Am + Dn + E)x + (Dm + Bn + F)y \\ + (Em + Fn + C)z + Gm + Hn + K = 0. \end{cases}$$

Les conditions de perpendicularité entre le plan diamétral et ses cordes conjuguées seront donc (324)

$$(c)\qquad \frac{Am + Dn + E}{m} = \frac{Dm + Bn + F}{n} = \frac{Em + Fn + C}{1}.$$

Ces deux équations permettront de trouver les valeurs de m et de n qui correspondent aux plans principaux, et, par suite, de déterminer ces plans.

Pour les résoudre, il est plus simple d'introduire une nouvelle inconnue s, en représentant par cette indéterminée les rapports dont on vient d'indiquer l'égalité. On aura alors, entre les inconnues m, n, s, les trois équations

$$(c\ bis)\quad \begin{cases} Am + Dn + E = ms \quad \text{ou} \quad (A - s)m + Dn + E = 0, \\ Dm + Bn + F = ns \quad \text{ou} \quad Dm + (B - s)n + F = 0, \\ Em + Fn + C = s \quad \text{ou} \quad Em + Fn + (C - s) = 0. \end{cases}$$

Éliminons m et n entre deux de ces équations et la troisième. L'équation résultante en s permettra de déterminer cette inconnue, et, par conséquent, m et n. On obtient ainsi la relation générale

$$(d)\quad \begin{cases} (A - s)(B - s)(C - s) - F^2(A - s) - E^2(B - s) \\ \qquad - D^2(C - s) + 2DEF = 0 \end{cases}$$

ou

$$(7)\quad \begin{cases} s^3 - (A + B + C)s^2 + (AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2)s \\ \qquad - M = 0, \end{cases}$$

en se rappelant que nous avons désigné par M le dénomina-

teur commun des formules de résolution des trois équations du premier degré, qui déterminent les coordonnées du centre de la surface (360).

On aura en même temps

$$(8)\quad m=\frac{DF-E(B-s)}{(A-s)(B-s)-D^2},\qquad n=\frac{DE-F(A-s)}{(A-s)(B-s)-D^2}.$$

Lorsque la surface considérée a un centre, M est différent de zéro; et l'équation (7), qui est du troisième degré, admet toujours pour s une valeur réelle différente de zéro, qui conduit à des valeurs aussi réelles pour les coefficients m et n.

On voit par là qu'une surface du second ordre à centre admet au moins un plan principal, dont l'équation (5 *ter*) peut s'écrire [puisqu'on a égalé à s les rapports (c)]

$$(9)\qquad s(mx+ny+z)+Gm+Hn+K=0.$$

365. Dans les surfaces dénuées de centre ou qui en ont une infinité, le dénominateur commun M (360) est égal à zéro. Il en résulte que l'équation (7) admet dans ce cas une racine nulle. Pour cette racine nulle, le plan principal représenté par l'équation (9) n'existe plus, à moins que la condition

$$(10)\qquad Gm+Hn+K=0$$

ne soit satisfaite.

Si cette condition n'est pas satisfaite, le plan principal correspondant à la racine $s=0$ se transporte à l'infini. Si cette condition est satisfaite, le plan principal considéré est indéterminé, c'est-à-dire qu'à la racine $s=0$ correspondent une infinité de plans principaux.

Pour s'assurer que la condition (10) revient à $N''=0$ (360), on n'a qu'à faire $s=0$ dans les équations (8), et à remplacer m et n dans l'équation (10) par les valeurs ainsi obtenues.

En supprimant la racine $s=0$, l'équation (7) devient (dans l'hypothèse de $M=0$)

$$(7\ bis)\quad s^2-(A+B+C)s+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)=0;$$

et il est facile de voir que les deux autres racines ne peuvent être nulles à la fois, car on aurait alors les deux équations de condition

$$A+B+C=0,\quad AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2=0.$$

Or, si du carré de la première équation on retranche le double de la seconde, il vient

$$A^2+B^2+C^2+2D^2+2E^2+2F^2=0;$$

ce qui entraînerait la disparition de tous les termes du second degré dans l'équation (1), qui ne représenterait plus une surface du second ordre.

Mais pour pouvoir affirmer que toute surface du second degré admet au moins un plan principal non situé à l'infini, il faut encore démontrer que l'équation (7 *bis*) ne peut avoir de racines imaginaires ou, ce qui revient au même, que *l'équation* (7) *a toujours ses trois racines réelles.*

366. Pour y arriver, on peut suivre la marche directe et extrêmement ingénieuse due à M. Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, 3e année) et simplifiée par M. Gerono (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XV).

Nous remarquerons d'abord que si l'équation (7) admet une racine double ou une racine triple, ses trois racines seront réelles et même commensurables (*Compl. d'Alg.*, 214). Il suffit donc d'examiner le cas où les trois racines sont inégales.

Plaçons-nous d'abord dans le cas particulier où l'on suppose que les coefficients D et E sont nuls; l'équation (7) ou l'équation (*d*) (364) devient alors

$$(A - s)(B - s)(C - s) - F^2(A - s) = 0.$$

Elle se sépare en deux autres

$$(e) \qquad A - s = 0,$$

$$(f) \qquad (B - s)(C - s) - F^2 = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle a pour racines *réelles* les trois quantités

$$s = A,$$

$$s_1 = \frac{B + C}{2} - \sqrt{F^2 + \left(\frac{B - C}{2}\right)^2},$$

$$s_2 = \frac{B + C}{2} + \sqrt{F^2 + \left(\frac{B - C}{2}\right)^2}.$$

Reprenons maintenant l'équation (*d*) et cherchons quelles valeurs prend son premier membre lorsqu'on y remplace la variable s par les quatre valeurs $-\infty$, s_1, s_2, $+\infty$.

La première et la dernière substitution donnent pour résultats $+\infty$ et $-\infty$ (*Compl. d'Alg.*, 172); car *il ne faut pas perdre de vue que dans l'équation* (*d*) *le premier terme est* $-s^3$.

En vertu de la relation (*f*), la seconde et la troisième sub-

stitution donnent

$$-E^2(B-s_1)-D^2(C-s_1)+2DEF,$$
$$-E^2(B-s_2)-D^2(C-s_2)+2DEF.$$

En tenant toujours compte de la relation (f), on peut mettre le premier de ces résultats sous la forme

$$-\frac{1}{B-s_1}[E^2(B-s_1)^2+D^2(B-s_1)(C-s_1)-2DEF(B-s_1)]$$
$$=-\frac{1}{B-s_1}[E^2(B-s_1)^2+D^2F^2-2DEF(B-s_1)]$$
$$=-\frac{1}{B-s_1}[E(B-s_1)-DF]^2.$$

On opérera de même pour le second, de sorte que les résultats des deux substitutions opérées seront finalement

$$(g)\qquad -\frac{1}{B-s_1}[E(B-s_1)-DF]^2,$$

$$(h)\qquad -\frac{1}{B-s_2}[E(B-s_2)-DF]^2.$$

Il n'y a donc, pour connaître les signes de ces résultats, qu'à chercher ceux des différences $B-s_1$, $B-s_2$. On a

$$B-s_1=\frac{B-C}{2}+\sqrt{F^2+\left(\frac{B-C}{2}\right)^2},$$
$$B-s_2=\frac{B-C}{2}-\sqrt{F^2+\left(\frac{B-C}{2}\right)^2}.$$

La première différence est essentiellement positive, la seconde essentiellement négative. Par suite, le résultat (g) est *négatif*, le résultat (h) est *positif*.

Ainsi les signes du premier membre de l'équation (d) sont (pour les substitutions $-\infty$, s_1, $s_2 > s_1$, $+\infty$)

$$+,\quad -,\quad +,\quad -.$$

L'équation (d) ou l'équation (7) admet donc nécessairement *trois racines réelles;* ce qui nous permet d'affirmer sans aucune restriction *que toute surface du second degré, à centre ou dénuée de centre, admet au moins un plan principal.*

Remarques. — Nous avons supposé implicitement que chacune des différences $B-s_1$, $B-s_2$, était différente de zéro.

Or, si l'on a $F = 0$, il vient $s_1 = C$, $s_2 = B$. Mais dans ce cas l'équation (d) devient

$$(A - s)(B - s)(C - s) - E^2(B - s) - D^2(C - s) = 0;$$

et les résultats des susbtitutions s_1 et s_2 sont

$$-E^2(B - s_1) \quad \text{et} \quad -D^2(C - s_2).$$

Si l'on suppose $s_2 > s_1$ ou $B > C$, le premier résultat reste *négatif*, le second demeure *positif*.

Si l'on a à la fois

$$F = 0, \quad E = 0,$$

l'équation (d) se réduit à

$$(A - s)(B - s)(C - s) - D^2(C - s) = 0.$$

On a toujours

$$s_1 = C, \quad s_2 = B.$$

Les résultats des substitutions s_1 et s_2 sont alors

$$0 \quad \text{et} \quad -D^2(C - s_2).$$

En supposant $s_2 > s_1$, le second est *positif*. L'équation admet donc dans ce cas une racine nulle et une racine positive; elle a donc nécessairement ses trois racines réelles.

Enfin, si l'on a

$$F = 0, \quad E = 0, \quad D = 0,$$

l'équation (d) devient

$$(A - s)(B - s)(C - s) = 0,$$

et ses trois racines réelles sont A, B, C.

367. Soient s et s' deux racines inégales de l'équation (7) (364). A la valeur s, correspondront les deux coefficients angulaires m et n [364 (8)]; à la valeur s', les deux coefficients m' et n'.

Nous savons que si α, β, γ, α', β', γ', sont les angles formés par chacune des directions principales obtenues avec les trois axes, on a (307, I)

$$m = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad m' = \frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'},$$

$$n = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \quad n' = \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}.$$

Par suite, en substituant dans les équations (*c bis*) (364), on aura

$$(c'\ bis)\quad \begin{cases} (A-s)\cos\alpha + D\cos\beta + E\cos\gamma = 0, \\ (A-s')\cos\alpha' + D\cos\beta' + E\cos\gamma' = 0, \\ D\cos\alpha + (B-s)\cos\beta + F\cos\gamma = 0, \\ D\cos\alpha' + (B-s')\cos\beta' + F\cos\gamma' = 0, \\ E\cos\alpha + F\cos\beta + (C-s)\cos\gamma = 0, \\ E\cos\alpha' + F\cos\beta' + (C-s')\cos\gamma' = 0. \end{cases}$$

Multiplions respectivement les premières équations de chaque groupe par $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, et les secondes par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; puis de la somme des premières, retranchons la somme des secondes. Il viendra évidemment

$$(i)\quad (s-s')(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') = 0,$$

d'où

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0;$$

ce qui montre que *les directions principales qui correspondent à deux racines inégales sont perpendiculaires entre elles.*

CHAPITRE II.

RÉDUCTION ET DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ A TROIS VARIABLES.

368. Reprenons l'équation

$$(1)\quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ +2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0. \end{cases}$$

Si l'on suppose les axes coordonnés rectangulaires et si l'on prend pour plan des xy le plan principal de la surface (366), chaque couple de valeurs données à x et à y devra conduire pour z à deux valeurs égales et de signes contraires. Par suite, l'équation ne pourra renfermer de termes contenant z au premier degré. De plus, on pourra faire tourner les axes des x et des y dans leur plan, en les laissant perpendiculaires entre eux, de manière à faire disparaître aussi le terme en xy. Les formules à employer étant

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

le nouveau coefficient du produit xy sera

$$2D\cos 2\alpha + (B - A)\sin 2\alpha;$$

ce qui conduira à la relation

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2D}{A - B}.$$

Cette relation donnant toujours pour l'angle α une valeur admissible, on voit qu'on pourra dans tous les cas ramener l'équation (1) à la forme

$$(I) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + 2Qx + 2Q'y + L_1 = 0,$$

en désignant par P, P', P'', 2Q, 2Q', L_1, les valeurs des coefficients modifiés par la transformation effectuée.

369. Il est utile de montrer que *les valeurs des coefficients* P, P', P'', *sont précisément les racines de l'équation* (7) (364). En effet, si l'on passe des coordonnées rectangulaires auxquelles la surface représentée par l'équation (1) est rapportée, aux coordonnées rectangulaires pour lesquelles disparaissent les trois produits des variables, les formules à employer seront (296)

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'', \\ y &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'', \\ z &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma''. \end{aligned}$$

On devra y joindre, en particulier, les équations de condition

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1. \end{aligned}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ..., représenteront précisément les valeurs qui doivent satisfaire aux équations (*c bis*) (364) mises sous la forme (*c' bis*) (367).

Or si l'on multiplie respectivement ces équations par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et qu'on les ajoute, on obtient la relation

$$\begin{aligned} &A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \\ &+ 2D\cos\alpha\cos\beta + 2E\cos\alpha\cos\gamma + 2F\cos\beta\cos\gamma = s, \end{aligned}$$

dont le premier membre est le coefficient qu'on obtient pour x'^2, lorsqu'on substitue dans l'équation (1) les valeurs données par les formules de transformation. Il en résulte immédiatement que $P = s$, c'est-à-dire que P est l'une des racines

de l'équation (7); de même, P′ et P″ seront les deux autres racines de cette équation.

On a d'ailleurs

$$Q = G\cos\alpha + H\cos\beta + K\cos\gamma,$$
$$Q' = G\cos\alpha' + H\cos\beta' + K\cos\gamma'.$$

370. *L'équation* (I) *représente encore toutes les surfaces du second ordre.* Il faut maintenant distinguer entre les surfaces qui ont un centre et celles qui n'en ont pas.

Si la surface a un centre (ce qui comprend le cas où elle en a une infinité), on peut y transporter l'origine et faire disparaître ainsi tous les termes du premier degré (359, 360). *L'équation* (I) *prendra alors définitivement la forme*

$$(II) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = R.$$

On a

$$R = -L_1 \ (359, \textit{Rem.}),$$

c'est-à-dire

$$R = -(Gx + Hy + Kz + L),$$

x, y, z représentant les coordonnées du centre considéré par rapport aux axes primitifs.

En effet, le changement de direction des axes ne pouvant influer sur le terme indépendant, il restera le même qu'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes après ou avant leur changement de direction.

Si la surface proposée n'a pas de centre, les équations obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de l'équation (I), savoir :

$$2Px + 2Q = 0, \quad 2P'y + 2Q' = 0, \quad 2P''z = 0,$$

devront donner pour l'une au moins des coordonnées du centre (x, y, z) une valeur infinie; *cette condition ne peut être remplie que si le coefficient de l'un des carrés des variables a été rendu nul de lui-même par les tranformations du n°* 368. Nous aurons donc, par exemple,

$$P = 0.$$

De plus, on pourra par le transport parallèle des axes, non pas faire évanouir tous les termes du premier degré de l'équation (I), puisque la surface n'a pas de centre (359), mais éliminer un terme du premier degré et le terme indépendant

des variables. Si l'on chasse ainsi le terme en y, *l'équation* (I), *dans le cas des surfaces dénuées de centre, prendra définitivement la forme*

$$(\text{III}) \qquad P'y^2 + P''z^2 + 2Qx = 0.$$

En résumé, à l'aide de transformations convenablement dirigées, on peut toujours ramener l'équation générale des surfaces à centre à la forme (II), et l'équation générale des surfaces dénuées de centre à la forme (III). Il nous reste à séparer les différentes espèces de surfaces comprises sous ces deux formes.

371. Avant de commencer cette discussion, il est utile de remarquer que *l'équation des surfaces à centre conserve la forme* (II) *pour une infinité de systèmes d'axes obliques.*

En effet, si l'on place l'origine au centre, les termes du premier degré n'existeront pas, et les plans coordonnés seront des plans diamétraux de la surface (362). Si l'on dirige l'axe des z parallèlement à la direction conjuguée au plan des xy, les termes en xz et en yz disparaîtront. Enfin, en faisant tourner l'axe des x et l'axe des y d'un angle convenable dans leur plan, on pourra aussi se débarrasser du terme en xy. Les plans coordonnés forment alors un système de *plans diamétraux conjugués,* parce qu'à chaque groupe de valeurs de deux des variables correspondent deux valeurs de la troisième variable égales et de signes contraires; c'est-à-dire que chaque plan coordonné divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe situé hors du plan considéré.

De même, *l'équation des surfaces dénuées de centre conserve la forme* (III) *pour une infinité de systèmes d'axes obliques.*

En effet, on peut, comme dans le cas précédent, faire disparaître les produits des variables. Le terme en z, par exemple, disparaîtra aussi en même temps que l'un des carrés x^2 des variables (370). On peut ensuite transporter les axes parallèlement à eux-mêmes, l'origine restant dans le plan des xy, de manière à éliminer à la fois le terme en y et le terme indépendant. Les plans des xy et des xz sont alors des plans diamétraux; mais (d'après la forme de l'équation) les cordes parallèles à l'axe des x ne perçant la surface qu'en un seul point, leur milieu est à l'infini ainsi que le plan diamétral qui leur est conjugué. *On voit que les surfaces dénuées de centre n'admettent pas de plans diamétraux conjugués.*

Surfaces à centre.

372. Les axes étant rectangulaires, considérons l'équation

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{P}x^2+\mathrm{P}'y^2+\mathrm{P}''z^2=\mathrm{R}.$$

On peut toujours supposer R *positif;* si R était négatif, on n'aurait qu'à changer les signes des deux membres. On aura les cas suivants à distinguer :

1° *Les trois coefficients* P, P′, P″, *peuvent avoir le même signe;*

2° *Deux de ces coefficients peuvent être positifs, en même temps que le troisième négatif;*

3° *Un de ces coefficients peut être positif, en même temps que les deux autres négatifs;*

4° *Un ou deux des coefficients* P, P′, P″, *peuvent être nuls;*

5° *Le terme constant* R *peut être nul.*

1° ELLIPSOÏDE.

373. Si les trois coefficients P, P′, P″, supposés de même signe, étaient négatifs, l'équation (II) ne représenterait rien ou représenterait un ellipsoïde imaginaire. Nous supposerons donc les trois coefficients du premier membre *positifs* comme le terme indépendant.

Faisons successivement dans l'équation de la surface

$$y=0 \text{ et } z=0, \quad x=0 \text{ et } z=0, \quad x=0 \text{ et } y=0.$$

Nous trouverons ainsi, pour les coordonnées des points où la surface coupe les axes,

$$x=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}}}=\pm a,$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}'}}=\pm b,$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}''}}=\pm c.$$

Nous en déduirons

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}=\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{R}}=\frac{1}{b^2}, \quad \frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{R}}=\frac{1}{c^2},$$

et l'équation de la surface prendra la forme

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Les points où la surface est percée par les axes sont ses *sommets* (en ces points le plan tangent mené à la surface est perpendiculaire à l'axe); les portions d'axes qu'elle intercepte sont les longueurs *de ses axes*. L'ellipsoïde a donc *six sommets* et *trois axes réels* dont les longueurs sont :

$$AA' = 2a, \quad BB' = 2b, \quad CC' = 2c \ (\textit{fig.}\ 151).$$

Les trois plans coordonnés sont les trois plans principaux de la surface. Les sections principales correspondantes sont les ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

qui ont respectivement pour axes les axes $2a$ et $2b$, $2a$ et $2c$, $2b$ et $2c$, de la surface.

Si l'on coupe la surface par un plan $z = d$, l'équation de la courbe d'intersection est, dans le plan sécant,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{d^2}{c^2}.$$

Cette courbe est une ellipse dont les axes sont

$$2a\sqrt{1 - \frac{d^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad 2b\sqrt{1 - \frac{d^2}{c^2}}.$$

Cette ellipse se confond d'abord avec la section principale faite par le plan des xy, lorsqu'on suppose $d = 0$, diminue d'une manière continue à mesure que d augmente, et se réduit à un point pour $d = c$. Au delà, elle devient imaginaire. On peut donc regarder l'ellipsoïde, surface évidemment fermée dans tous les sens, comme engendrée par le mouvement d'une ellipse dont le plan reste parallèle au plan des xy, dont le centre trace l'axe des z, et dont les axes varient d'une manière convenable depuis $2a$ et $2b$ jusqu'à zéro, tout en présentant constamment le rapport $\frac{a}{b}$ (257).

Lorsque les trois axes $2a$, $2b$, $2c$, sont *inégaux*, l'ellipsoïde est dit à *trois axes inégaux*.

Lorsque *deux* des axes sont *égaux*, on obtient un ellipsoïde qui est de *révolution* autour du troisième axe. En effet, supposons $a = b$. Il viendra pour équations de la section faite parallèlement au plan des xy à la distance d,

$$z = d, \quad x^2 + y^2 = a^2\left(1 - \frac{d^2}{c^2}\right).$$

Cette section sera donc une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe des z. L'équation de la courbe méridienne dans le plan des xz sera l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Si les *trois* axes $2a$, $2b$, $2c$, sont *égaux*, l'ellipsoïde devient *la sphère*

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

2° HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

374. Supposons dans l'équation (II) les coefficients P et P′ *positifs*, et le coefficient P″ *négatif*. Si nous faisons successivement dans l'équation de la surface

$$y=0 \text{ et } z=0, \quad x=0 \text{ et } z=0, \quad x=0 \text{ et } y=0,$$

nous trouverons pour les coordonnées des points où la surface coupe les axes

$$x=\pm\sqrt{\frac{R}{P}}=\pm a,$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{R}{P'}}=\pm b,$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{R}{P''}}=\pm ci.$$

Nous en déduirons

$$\frac{P}{R}=\frac{1}{a^2}, \quad \frac{P'}{R}=\frac{1}{b^2}, \quad \frac{P''}{R}=-\frac{1}{c^2},$$

et l'équation de la surface prendra la forme

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Les points où la surface est percée par les axes sont *ses sommets;* les portions d'axes qu'elle intercepte sont les longueurs de *ses axes;* l'hyperboloïde à une nappe a donc *quatre sommets* et *trois axes* dont *deux* sont *réels* et *un imaginaire*. Les longueurs de ces axes sont $AA'=2a$, $BB'=2b$, $CC'=2c$ (*fig.* 152).

Les trois plans coordonnés sont les trois plans principaux de la surface. Les sections principales correspondantes sont,

dans le plan des xy, l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

dont les axes sont $2a$ et $2b$; dans le plan des xz et dans le plan des yz, les hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

dont les axes sont $2a$ et $2c$, $2b$ et $2c$.

Si l'on coupe la surface par un plan $z=d$, parallèle au plan des axes réels, l'équation de la courbe d'intersection est dans le plan sécant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{d^2}{c^2}.$$

Cette courbe est une ellipse dont les axes sont

$$2a\sqrt{1+\frac{d^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad 2b\sqrt{1+\frac{d^2}{c^2}}.$$

Cette ellipse se confond d'abord avec la section principale faite par le plan des xy, lorsqu'on suppose $d=0$, augmente d'une manière continue à mesure que d augmente, et devient infinie pour $d=\infty$. On peut donc regarder l'hyperboloïde à une nappe, surface évidemment formée d'une seule nappe continue s'étendant à l'infini dans tous les sens, comme engendrée par le mouvement d'une ellipse dont le plan reste parallèle au plan des deux axes réels, dont le centre décrit l'axe imaginaire, et dont les axes varient d'une manière convenable depuis $2a$ et $2b$ jusqu'à l'infini, en présentant constamment le rapport $\frac{a}{b}$. La section principale dans le plan des deux axes réels porte le nom d'*ellipse de gorge*.

Lorsque les axes *réels* $2a$ et $2b$ sont *égaux*, on obtient un hyperboloïde à une nappe qui est de *révolution* autour de l'axe *imaginaire*. En effet, les équations de la section faite parallèlement au plan des xy à la distance d, sont

$$z=d, \quad x^2+y^2=a^2\left(1+\frac{d^2}{c^2}\right).$$

Cette section sera donc une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe des z. La courbe méridienne dans le plan des xz sera l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3° HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES.

375. Supposons dans l'équation (II) le coefficient P *positif* et les deux coefficients P′ et P″ *négatifs*. Si nous faisons successivement, dans l'équation de la surface, $y = 0$ et $z = 0$, $x = 0$ et $z = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, nous trouverons pour les coordonnées des points où la surface coupe les axes

$$x = \pm\sqrt{\frac{R}{P}} = \pm a,$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{R}{P'}} = \pm bi,$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{R}{P''}} = \pm ci.$$

Nous en déduirons

$$\frac{P}{R} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{P'}{R} = -\frac{1}{b^2}, \quad \frac{P''}{R} = -\frac{1}{c^2},$$

et l'équation de la surface prendra la forme

$$(H_2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

L'hyperboloïde à deux nappes a donc *deux sommets* et *trois axes*, dont *un réel* et *deux imaginaires*. Les longueurs de ces axes sont $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $CC' = 2c$ (*fig.* 153).

Les trois plans coordonnés sont les trois plans principaux de la surface. Dans le plan des yz, la surface n'a aucun point réel. Les sections principales dans le plan des xy et dans celui des xz sont les hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dont les axes sont $2a$ et $2b$, $2a$ et $2c$.

Si l'on coupe la surface par un plan $x = d$ parallèle au plan des axes imaginaires, l'équation de la courbe d'intersection sera dans le plan sécant

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{d^2}{a^2} - 1.$$

C'est l'équation d'une ellipse dont les axes sont

$$2b\sqrt{\frac{d^2}{a^2} - 1} \quad \text{et} \quad 2c\sqrt{\frac{d^2}{a^2} - 1}.$$

Cette ellipse reste imaginaire tant que d^2 est plus petit que a^2. Pour $d^2 = a^2$, elle devient un point, puis augmente d'une manière continue jusqu'à l'infini à mesure que d croît depuis a jusqu'à ∞ ou décroît depuis $-a$ jusqu'à $-\infty$. On peut donc regarder l'hyperboloïde à deux nappes comme engendré par une ellipse dont le plan reste parallèle au plan des deux axes imaginaires, dont le centre décrit l'axe réel, et dont les axes varient d'une manière convenable depuis zéro jusqu'à l'infini, en présentant constamment le rapport $\frac{b}{c}$.

On voit que l'hyperboloïde à deux nappes est formé de deux nappes continues, s'étendant à l'infini dans deux sens opposés, et séparées par un intervalle où il n'existe aucun point de la surface.

Lorsque les axes *imaginaires* $2b$ et $2c$ sont *égaux*, l'hyperboloïde est de *révolution* autour de l'axe *réel*. En effet, les équations de la section faite parallèlement au plan des yz à la distance d sont

$$x = d, \quad y^2 + z^2 = b^2\left(\frac{d^2}{a^2} - 1\right).$$

Cette section est donc une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe des x. La courbe méridienne dans le plan des xz est l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

4° CYLINDRES ELLIPTIQUE ET HYPERBOLIQUE.

376. Supposons nul dans l'équation (II) le coefficient P''. Il viendra

$$Px^2 + P'y^2 = R.$$

C'est l'équation d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z (290). Si P et P' sont de même signe, la trace de ce cylindre sur le plan des xy est une ellipse; dans le cas contraire, c'est une hyperbole.

Lorsque la trace d'un *cylindre elliptique* sur le plan des xy se réduit à un point (dans le cas de $R = 0$), le cylindre se réduit à une droite qui est ici l'axe des z.

Lorsque la trace d'un *cylindre hyperbolique* sur le plan des xy se réduit à deux droites qui se coupent (dans le cas de $R = 0$), le cylindre se réduit à deux plans qui se coupent; l'intersection de ces plans est ici l'axe des z.

Les cylindres représentés par l'équation

$$Px^2 + P'y^2 = R$$

ont une infinité de centres distribués sur l'axe des z (c'est-à-dire suivant une même droite) (360).

Si l'on a dans l'équation (II) $P'' = 0$ et $P' = 0$, il vient

$$P x^2 = R.$$

Cette équation représente deux plans parallèles au plan des yz et menés à égale distance de ce plan, qui se réduisent au plan des yz si $R = 0$, et deviennent imaginaires lorsque P et R n'ont pas le même signe.

La surface admet alors une infinité de centres distribués dans un même plan (qui est ici le plan des yz) (360).

5° CÔNES DU SECOND DEGRÉ.

377. Supposons $R = 0$ dans l'équation (II). Il viendra

$$P x^2 + P' y^2 + P'' z^2 = 0.$$

Cette équation étant homogène par rapport aux trois variables x, y, z, représente (333) une surface conique dont le sommet est à l'origine des coordonnées.

Si les trois coefficients P, P', P'', sont de même signe, le cône se réduit à son sommet ou à son centre, et on peut le regarder aussi bien comme un ellipsoïde qui se réduit à son centre.

Si P et P' sont *positifs* en même temps que P'' *négatif*, on peut regarder le cône obtenu comme un hyperboloïde à une nappe (374), dont l'ellipse de gorge se réduit à un point qui est le sommet du cône.

Si P est *positif* en même temps que P' et P'' *négatifs*, on peut le regarder comme un hyperboloïde à deux nappes (375), dont l'axe réel se réduit à un point.

On voit que les cônes du second degré sont des cônes droits, à base elliptique ou hyperbolique.

Surfaces dénuées de centre.

378. Les axes étant rectangulaires, considérons l'équation

$$P' y^2 + P'' z^2 + 2Qx = 0. \qquad \text{(III)}$$

On peut toujours supposer P' *positif* et Q *négatif*. En effet, si P' était négatif, on n'aurait qu'à changer les signes de tous les termes; et si Q était alors positif, on le rendrait négatif en changeant le sens des x positifs. Les cas à distinguer se réduiront donc aux suivants :

1° *Le coefficient* P'' *peut être positif comme le coefficient* P';

2° *Le coefficient* P″ *peut être négatif;*

3° *L'un des coefficients* P′, P″, *peut être nul.*

1° PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

379. Les deux coefficients P′, P″, étant *positifs*, et le coefficient Q *négatif* dans l'équation (III), la surface ne coupera les trois axes qu'à l'origine qui sera alors *son sommet*.

Les plans des xy et des xz sont des plans principaux, et leur intersection Ox est *l'axe* du paraboloïde. Les droites parallèles à l'axe Ox ne percent la surface qu'en un point, et tous ses plans diamétraux sont parallèles à cet axe.

Les sections principales qui correspondent aux plans des xy et des xz sont les paraboles

$$P'y^2 + 2Qx = 0 \quad \text{et} \quad P''z^2 + 2Qx = 0.$$

Posons les paramètres

$$-\frac{2Q}{P'} = 2p, \quad -\frac{2Q}{P''} = 2p'.$$

On en déduira

$$\frac{P'}{Q} = -\frac{1}{p}, \quad \frac{P''}{Q} = -\frac{1}{p'},$$

et l'équation de la surface deviendra

$$\text{(P.E)} \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Si l'on coupe la surface (*fig.* 154) par un plan $x = d$ parallèle au plan des yz au delà duquel la surface ne présente aucun point réel, l'équation de la courbe d'intersection sera dans le plan sécant

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2d.$$

C'est l'équation d'une ellipse dont les axes sont

$$\sqrt{2pd} \quad \text{et} \quad \sqrt{2p'd}.$$

Cette ellipse n'est réelle que si d est positif. Pour $d = 0$, elle se réduit à l'origine, puis elle augmente d'une manière continue jusqu'à l'infini, à mesure que d croît depuis 0 jusqu'à ∞. On peut donc regarder le paraboloïde elliptique, surface évidemment formée d'une seule nappe continue s'étendant à l'infini dans un seul sens, comme engendrée par le mouvement d'une ellipse dont le plan reste parallèle au plan des yz,

dont le centre décrit l'axe des x, et dont les axes varient d'une manière convenable depuis o jusqu'à ∞, en présentant constamment le rapport $\sqrt{\frac{p}{p'}}$.

Lorsque les paramètres $2p$ et $2p'$ des paraboles principales sont *égaux*, on obtient un paraboloïde qui est de *révolution* autour de l'axe Ox. En effet, il vient alors pour équations de la section faite parallèlement au plan des yz à la distance d

$$x = d, \quad y^2 + z^2 = 2pd.$$

Cette section sera donc une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe des x. La courbe méridienne dans le plan des xz sera la parabole

$$z^2 = 2px.$$

2° PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

380. Le coefficient P′ étant *positif* et les deux coefficients P″ et Q étant *négatifs* dans l'équation (III), la surface ne coupe aussi les trois axes qu'à l'origine, *sommet* de la surface.

Les plans des xy et des xz sont des plans principaux, et l'axe Ox est *l'axe* du paraboloïde. Les droites parallèles à l'axe Ox ne percent la surface qu'en un point, et tous ses plans diamétraux sont parallèles à cet axe.

Les sections principales qui correspondent aux plans des xy et des xz sont les paraboles (*fig.* 155)

$$P'y^2 + 2Qx = 0 \quad \text{et} \quad P''z^2 + 2Qx = 0.$$

Posons les paramètres

$$-\frac{2Q}{P'} = 2p, \quad -\frac{2Q}{P''} = -2p'.$$

On en déduira

$$\frac{P'}{Q} = -\frac{1}{p}, \quad \frac{P''}{Q} = \frac{1}{p'};$$

et l'équation de la surface deviendra

$$\text{(P.H)} \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Si l'on coupe la surface par un plan $x = d$, l'équation de la courbe d'intersection sera dans le plan sécant

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2d.$$

C'est l'équation d'une hyperbole dont les axes sont

$$\sqrt{2pd} \quad \text{et} \quad \sqrt{2p'd}.$$

Lorsque d est *positif*, l'axe transverse de cette hyperbole est dirigé suivant l'axe des y et l'axe imaginaire suivant l'axe des z; c'est l'*inverse*, lorsque d est *négatif*. Pour $d = 0$, cette hyperbole se réduit à deux droites, puis elle varie d'une manière continue à mesure que d croît de 0 à ∞ ou décroît de 0 à $-\infty$. On peut donc regarder le paraboloïde hyperbolique, surface évidemment formée d'une seule nappe continue qui s'étend à l'infini dans tous les sens, comme engendrée par le mouvement d'une hyperbole dont le plan reste parallèle au plan des yz, dont le centre décrit l'axe de la surface, et dont les axes varient d'une manière convenable depuis 0 jusqu'à ∞, en présentant constamment le rapport

$$\sqrt{\frac{p}{p'}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{p'}{p}}.$$

Les hyperboles situées à gauche du plan des yz sont ainsi les hyperboles *conjuguées* de celles situées à droite de ce plan, et la courbure de la surface dirigée dans l'une des régions suivant l'axe des y est dirigée dans l'autre suivant l'axe des z.

Les deux droites

$$y = \pm z\sqrt{\frac{p}{p'}}, \tag{1}$$

suivant lesquelles le plan des yz coupe la surface, sont les projections communes sur ce même plan des asymptotes de toutes les hyperboles génératrices; c'est-à-dire que ces asymptotes sont toutes situées dans les deux plans représentés par l'équation (1).

Nota. — Si l'on supposait, dans ce qui précède (379, 380), $Q = 0$, on aurait l'équation

$$P'y^2 + P''z^2 = 0.$$

Cette équation représenterait l'axe des x ou deux plans sécants suivant cet axe [cas déjà examinés (376)].

3° CYLINDRE PARABOLIQUE.

381. Supposons nul dans l'équation (III) le coefficient P''. Il viendra

$$P'y^2 + 2Qx = 0.$$

C'est l'équation d'un cylindre dont les génératrices sont paral-

lèles à l'axe des z (290). La trace de ce cylindre sur le plan des xy est une parabole.

Si l'on supposait à la fois $P' = 0$, $P'' = 0$, on trouverait $x = 0$, équation du plan des yz [c'est un cas déjà rencontré (376)].

382. *En résumé*, on trouve parmi les surfaces que peut représenter l'équation générale du second degré à trois variables :

1° Une surface fermée : *l'ellipsoïde*, dont la sphère n'est qu'un cas particulier, et dont les variétés sont *un point* ou *rien ;*

2° Une surface illimitée dans un seul sens et continue : *le paraboloïde elliptique ;*

3° Deux surfaces illimitées dans tous les sens et continues : *l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique ;*

4° Une surface illimitée dans tous les sens, mais non continue, c'est-à-dire formée de deux nappes séparées : *l'hyperboloïde à deux nappes ;*

5° *Les cônes elliptique et hyperbolique*, cas particuliers des hyperboloïdes ;

6° *Les cylindres elliptique, hyperbolique et parabolique* qui, comme cas particuliers, peuvent donner *une seule droite, deux plans sécants ou parallèles, un seul plan, rien.*

CHAPITRE IV.

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Des diamètres dans les surfaces du second degré.

383. Prenons l'équation générale des *surfaces à centre*

$$\text{(II)} \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = R.$$

L'équation d'un plan diamétral sera (361)

$$Pxm + P'yn + P''z = 0,$$

en représentant par les équations

$$\begin{cases} x = mz, \\ y = nz, \end{cases}$$

la droite conjuguée à ce plan diamétral, qui passe par le centre de la surface.

Cherchons l'intersection de la surface par un plan parallèle au plan diamétral. L'équation de ce plan sera de la forme (315)

$$(1) \qquad Pxm + P'yn + P''z + d = 0.$$

L'équation de la projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy s'obtiendra en éliminant z entre les équations (II) et (1) : cette équation sera

$$(PP'' + P^2m^2)x^2 + (P'P'' + P'^2n^2)y^2 + 2PP'mnxy$$
$$+ 2Pdmx + 2P'dny + d^2 - P''R = f(x, y) = 0.$$

Comme les coefficients des termes du second degré y sont indépendants de d, on voit que *les sections faites dans une surface du second degré par des plans parallèles sont des courbes semblables et semblablement placées* (259).

De plus, le centre de la projection de la courbe de l'espace étant la projection du centre de cette courbe, les coordonnées de ce centre satisferont à l'équation du plan sécant et aux équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$; c'est à-dire au système

$$Pmx + P'ny + P''z + d = 0,$$
$$(PP'' + P^2m^2)x + PP'mny + Pdm = 0,$$
$$(P'P'' + P'^2n^2)y + PP'mnx + P'dn = 0.$$

Donc, en éliminant d entre ces trois équations, on aura *le lieu des centres des sections parallèles*. On trouve ainsi, en substituant dans les deux dernières équations la valeur de d déduite de la première,

$$PP''x - PP''mz = 0,$$
$$P'P''y - P'P''nz = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = mz, \\ y = nz. \end{cases}$$

Le lieu cherché est donc précisément la droite passant par le centre, qui est conjuguée au plan diamétral parallèle à la direction des sections, ou le *diamètre* de la surface conjugué à ce plan diamétral ou à cette direction.

Les diamètres qui correspondent dans les surfaces à centre à *trois plans diamétraux conjugués* (371), sont des *diamètres conjugués* de la surface; et ces diamètres considérés deux à deux déterminent leurs plans diamétraux conjugués.

Toutes les droites qui passent par le centre de la surface sont des diamètres. On peut donc encore définir *les diamètres* d'une surface du second degré en disant que ce sont *les intersections des plans diamétraux*.

L'intersection de deux plans principaux est *un axe* de la surface : les points où un axe perce la surface en sont des *sommets*, pourvu que les plans tangents en ces points soient perpendiculaires à l'axe.

384. Dans les surfaces *dénuées de centre*,

$$(III) \qquad P'y^2 + P''z^2 + 2Qx = 0.$$

l'équation générale des plans diamétraux est

$$Qm + P'yn + P''z = 0;$$

c'est-à-dire que *tous ces plans sont parallèles à l'axe des x* (363). Un diamètre est encore *le lieu des centres des sections semblables et semblablement placées déterminées dans la surface par des plans parallèles*, et tous les diamètres de la surface sont parallèles à l'axe des x; les diamètres sont donc encore les intersections des plans diamétraux. On le démontrera comme il suit.

Soit un plan

$$x = ay + bz + d. \tag{2}$$

L'équation de la projection de la courbe d'intersection de ce plan et de la surface (III) sur le plan des yz s'obtiendra en éliminant x entre les équations (III) et (2). Cette équation étant

$$P'y^2 + P''z^2 + 2Qay + 2Qbz + 2Qd = 0,$$

les coordonnées du centre de la courbe obtenue devront satisfaire aux relations

$$P'y + Qa = 0,$$
$$P''z + Qb = 0;$$

et ces relations (indépendantes de d et de x) montrent que le lieu des centres des sections parallèles au plan (2) est bien une droite parallèle à l'axe Ox (*).

385. Il est facile de démontrer que, *dans les surfaces à centre, le plan tangent mené à la surface par l'extrémité d'un diamètre est parallèle au plan diamétral conjugué à ce diamètre.*

En effet, soient (x_1, y_1, z_1) les coordonnées du point de contact. Considérons l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = R \tag{II}$$

des surfaces à centre. Les équations du diamètre passant par le point (x_1, y_1, z_1) de la surface seront

$$x = \frac{x_1}{z_1} z, \qquad y = \frac{y_1}{z_1} z.$$

Le plan diamétral conjugué à ce diamètre aura donc pour équation (361

$$Pxx_1 + P'yy_1 + P''zz_1 = 0.$$

Quant au plan tangent mené à la surface par le point (x_1, y_1, z_1), son

(*) Le plan diamétral conjugué à un diamètre se transporte ici à l'infini ; en d'autres termes, il n'y a pas de plan diamétral pour les cordes parallèles à l'axe Ox, lesquelles ne percent la surface qu'en un point.

Lorsque le plan sécant est parallèle à l'axe Ox, on obtient des sections *paraboliques* (416, 420), et alors le lieu des centres ou le diamètre se transporte lui-même à l'infini : cela tient à ce que le plan sécant est lui-même dans ce cas un plan diamétral.

équation est

$$P x_1(x-x_1)+P' y_1(y-y_1)+P'' z_1(z-z_1)=0$$

ou

$$(T) \qquad P x x_1+P' y y_1+P'' z z_1=R,$$

en vertu de la condition

$$P x_1^2+P' y_1^2+P'' z_1^2=R.$$

Le théorème est donc démontré (315) pour les surfaces à centre.

386. *Dans les surfaces dénuées de centre,* le plan diamétral conjugué à un diamètre se transportant à l'infini (384), il faut modifier l'énoncé de ce théorème.

Prenons l'équation

$$(III) \qquad P' y^2+P'' z^2+2Qx=0$$

des surfaces dénuées de centre. Le plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) aura pour équation

$$Q(x-x_1)+P' y_1(y-y_1)+P'' z_1(z-z_1)=0$$

ou

$$(T') \qquad P' y y_1+P'' z z_1+Q(x+x_1)=0,$$

en vertu de la condition

$$P' y_1^2+P'' z_1^2+2Q x_1=0.$$

D'ailleurs, tout plan diamétral mené par le diamètre qui passe au point (x_1, y_1, z_1) aura pour équation

$$Qm+P' ny+P'' z=0,$$

en désignant par m et n les coefficients qui déterminent la direction des cordes qui lui sont conjuguées. La relation

$$Qm+P' ny_1+P'' z_1=0$$

sera donc satisfaite ; et elle exprime précisément la condition pour que le plan tangent (T') et le système de cordes conjuguées au plan diamétral considéré soient parallèles (322).

On peut donc dire que, *dans les surfaces dénuées de centre, le plan tangent mené à la surface par l'extrémité d'un diamètre, est parallèle à toutes les cordes conjuguées aux différents plans diamétraux qui passent par ce diamètre.*

Conditions pour qu'une surface du second degré soit de révolution.

387. D'après ce qui précède, une surface du second degré ne devient de *révolution* qu'autant que deux des coefficients de l'équation la plus simple de la surface considérée deviennent *égaux*.

Ainsi l'*ellipsoïde* est de révolution autour de l'axe des z lorsqu'on a $a = b$ ou $P = P'$ (373); de même *l'hyperboloïde à une nappe,* lorsqu'on a $a = b$ ou $P = P'$ (374). *L'hyperboloïde à deux nappes* est de révolution autour de l'axe des x, lorsqu'on a $b = c$ ou $P' = P''$ (375); de même *le paraboloïde elliptique,* lorsqu'on a $p = p'$ ou $P' = P''$ (379). Lorsque les trois coefficients P, P', P'' sont égaux, on obtient *la sphère* (373).

Lorsque la surface du second degré proposée est de révolution, *l'équation en s* (364, 369) *admet donc deux ou trois racines égales.*

Une surface de révolution admet évidemment une infinité de plans principaux, tous les plans qui passent par son axe étant des plans principaux (367).

388. Cherchons les conditions nécessaires pour que l'équation générale du second degré représente une surface de révolution. Nous pourrions faire usage de la remarque que l'équation en s doit présenter deux racines égales; mais il est plus simple de procéder comme il suit.

Si l'équation

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz \\ \qquad +2Gx+2Hy+2Kz+L=0, \\ \text{ou} \qquad F(x,y,z)=0, \end{cases}$$

représente une surface de révolution, toute sphère

$$(2)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \quad \text{ou} \quad \varphi(x,y,z)=0,$$

dont le centre (α, β, γ) appartiendra à son axe, la coupera suivant deux *parallèles* communs aux deux surfaces.

λ étant un coefficient arbitraire, l'équation

$$(3)\qquad F(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)=0$$

représentera une surface qui passera par tous les points communs aux deux surfaces considérées; et l'on peut déterminer λ par la condition que cette surface soit précisément l'ensemble des deux plans qui correspondent aux parallèles communs.

L'équation (3) peut s'écrire

$$\begin{aligned}(A+\lambda)x^2+(B+\lambda)y^2+(C+\lambda)z^2+2Dxy+2Exz+2Fyz \\ +2(G-\lambda\alpha)x+2(H-\lambda\beta)y+2(K-\lambda\gamma)z \\ +L+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2)=0.\end{aligned}$$

Prenons les dérivées partielles de son premier membre, et égalons-les à zéro. Il viendra (en divisant par 2)

$$(4)\qquad \begin{cases} (A+\lambda)x+Dy+Ez+G-\lambda\alpha=0, \\ (B+\lambda)y+Dx+Fz+H-\lambda\beta=0, \\ (C+\lambda)z+Ex+Fy+K-\lambda\gamma=0. \end{cases}$$

Si l'équation (3) représente en effet l'ensemble de deux plans parallèles, les trois équations dérivées (4) devront représenter un seul et même plan, lieu des centres de la surface obtenue (376). On aura donc, en

identifiant ces équations, les conditions

$$\frac{A+\lambda}{G-\lambda\alpha}=\frac{D}{H-\lambda\beta}=\frac{E}{K-\lambda\gamma},$$
$$\frac{D}{G-\lambda\alpha}=\frac{B+\lambda}{H-\lambda\beta}=\frac{F}{K-\lambda\gamma},$$
$$\frac{E}{G-\lambda\alpha}=\frac{F}{H-\lambda\beta}=\frac{C+\lambda}{K-\lambda\gamma}.$$

On en déduit

$$\frac{A+\lambda}{D}=\frac{G-\lambda\alpha}{H-\lambda\beta}=\frac{D}{B+\lambda}=\frac{E}{F}\quad\text{et}\quad\frac{G-\lambda\alpha}{K-\lambda\gamma}=\frac{D}{F}=\frac{E}{C+\lambda}.$$

Il en résulte

$$(5)\qquad\begin{cases}A+\lambda=\dfrac{DE}{F},\\ B+\lambda=\dfrac{DF}{E},\\ C+\lambda=\dfrac{EF}{D},\end{cases}$$

et par suite

$$(6)\qquad A-\frac{DE}{F}=B-\frac{DF}{E}=C-\frac{EF}{D}\gtrless 0;$$

car la valeur de λ doit rester la même et être différente de zéro.

On peut aussi écrire

$$(7)\qquad F(G-\lambda\alpha)=E(H-\lambda\beta)=D(K-\lambda\gamma),$$

équations de l'axe de la surface de révolution, puisque α, β, γ représentent les coordonnées d'un point quelconque de cet axe.

Les relations (6) *expriment les conditions cherchées.*

389. *Remarques.* — I. Si l'on avait seulement $D=0$, les équations (6) ne pourraient être satisfaites. Donc, *lorsqu'il ne manque qu'un seul rectangle dans l'équation générale du second degré, la surface ne peut être de révolution.*

II. Si l'on a

$$D=0\quad\text{et}\quad E=0,$$

les équations (6) semblent satisfaites; mais si l'on élimine le rapport indéterminé $\frac{D}{E}$ entre les deux dernières équations (5), il vient

$$\frac{B+\lambda}{F}=\frac{F}{C+\lambda}.$$

D'ailleurs la première équation (5) donne alors

$$\lambda=-A\gtrless 0.$$

Par suite, *la condition unique pour que la surface soit de révolution est la suivante*

$$F^2=(B-A)(C-A).$$

On a d'ailleurs

$$F(G-\lambda\alpha)=0 \quad \text{ou} \quad \alpha=-\frac{G}{A}.$$

L'axe est donc parallèle au plan des yz. En remplaçant le rapport $\frac{D}{E}$ par sa valeur, on aura

$$\frac{H-\lambda\beta}{K-\lambda\gamma}=\frac{B-A}{F} \quad \text{ou} \quad F(H-\lambda\beta)=(B-A)(K-\lambda\gamma),$$

pour équation de la projection de l'axe sur le plan des yz.

III. Enfin, si l'on a

$$D=0, \quad E=0, \quad F=0,$$

les équations (6) semblent satisfaites; mais la relation

$$F^2=(B+\lambda)(C+\lambda),$$

trouvée dans le cas précédent, donne alors

$$\lambda=-B \quad \text{et} \quad \lambda=-C,$$

c'est-à-dire

$$B=C.$$

Donc, *dans le cas où les trois produits des variables manquent, pour que la surface soit de révolution, il faut que les coefficients de deux des carrés des variables soient égaux.*

Quant à l'axe, d'après la forme affectée alors par l'équation (1), *il est parallèle à l'axe des x,* et ses équations sont

$$H-\lambda\beta=0, \quad K-\lambda\gamma=0 \quad \text{ou} \quad \beta=-\frac{H}{B}, \quad \gamma=-\frac{K}{B}.$$

Intersection de deux surfaces du second degré.

390. *Lorsque deux surfaces du second degré sont semblables, elles se coupent suivant une seule courbe toujours plane.*

En effet, les coefficients des termes du second degré étant *proportionnels* (357), on peut mettre les équations des deux surfaces sous la forme

$$(1) \quad Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0,$$

$$(2) \quad Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+gx+hy+kz+l=0.$$

Si on retranche ces équations, on obtient l'équation d'une surface qui passe par tous les points d'intersection des deux premières; *et cette surface est le plan*

$$(G-g)x+(H-h)y+(K-k)z+L-l=0.$$

391. *Lorsque deux surfaces quelconques du second degré se coupent suivant une courbe plane, elles présentent en général une seconde intersection qui est également plane.* C'est ce qu'on exprime ordinairement en disant : *Lorsque la courbe d'entrée de deux surfaces du second ordre l'une dans l'autre est plane, la courbe de sortie l'est aussi.*

On peut prendre le plan de la première section pour plan des xy. En faisant alors $z = 0$ dans les équations des deux surfaces, on devra trouver des résultats identiques. Si les équations des deux surfaces sont

$$(1)\quad Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0,$$

$$(2)\quad A'x^2+B'y^2+C'z^2+D'xy+E'xz+F'yz+G'x+H'y+K'z+L'=0,$$

on pourra donc poser

$$(3)\qquad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{D}{D'}=\frac{G}{G'}=\frac{H}{H'}=\frac{L}{L'}=\mu.$$

Retranchons alors les équations (1) et (2) après avoir multiplié la seconde par μ. Il viendra, eu égard aux conditions (3),

$$(4)\quad (C-C'\mu)z^2+(E-E'\mu)xz+(F-F'\mu)yz+(K-K'\mu)z=0.$$

L'équation (4) représente une surface qui passe par les points d'intersection des surfaces (1) et (2). Cette surface se compose évidemment de deux plans, dont l'un est le plan des xy qui correspond à $z = 0$. Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Si les deux surfaces étaient semblables, on aurait aussi (357)

$$\frac{C}{C'}=\frac{E}{E'}=\frac{F}{F'}=\mu.$$

Le second plan

$$(C-C'\mu)z+(E-E'\mu)x+(F-F'\mu)y+K-K'\mu=0$$

se transporterait donc à l'infini; et il n'y aurait qu'une seule ligne d'intersection plane (390).

La courbe de sortie peut d'ailleurs être imaginaire.

Il peut arriver aussi que l'équation du second plan se réduise à

$$(C-C'\mu)z=0 \quad \text{ou à} \quad z=0.$$

Dans ce cas, les deux surfaces ne se coupent pas, mais *se touchent* ou sont *circonscrites* l'une à l'autre suivant la courbe unique située dans le plan des xy.

392. *Lorsque deux surfaces du second ordre ont un même plan principal, leur intersection se projette sur ce plan principal suivant une courbe du second degré.*

Prenons le plan principal commun pour plan des xy; les équations des deux surfaces seront évidemment de la forme

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Gx+Hy+L=0,$$
$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+D'xy+G'x+H'y+L'=0.$$

Retranchons ces équations membre à membre, après avoir multiplié la première par C' et la seconde par C. L'équation obtenue pourra être prise

pour l'une des équations de l'intersection des deux surfaces; et elle sera du second degré en x et en y, ce qui vérifie l'énoncé.

En général, les courbes à double courbure, intersections de deux surfaces du second ordre, se projettent suivant des courbes qui sont du quatrième degré (*Alg. élém.*, 211).

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSOIDE.

393. L'équation de l'élipsoïde rapporté à ses axes étant (373)

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

cherchons la nature *des sections planes* de la surface.

Ces sections seront toujours *des courbes du second degré* (327). D'ailleurs *la projection d'une courbe du second degré sur un plan ne peut être qu'une courbe du second degré de même espèce.*

En effet, le cylindre projetant cette courbe est lui-même un cylindre du second degré, c'est-à-dire qu'il est coupé par un plan non parallèle aux génératrices suivant une courbe du second degré. Or, si la courbe de l'espace est elliptique ou fermée, la courbe projetée sera fermée ou elliptique. Si la courbe de l'espace est une parabole, la courbe projetée s'étendra à l'infini dans un seul sens et sera une parabole. Si la courbe de l'espace est une hyperbole, la courbe projetée s'étendra à l'infini dans deux sens différents et sera une hyperbole.

Ceci posé, coupons l'ellipsoïde (E) par le plan quelconque

$$z=ex+fy+g.$$

On obtiendra l'équation de la projection de la section sur le plan des xy, en éliminant z entre l'équation (E) et celle du plan considéré. Il viendra

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{e^2}{c^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{f^2}{c^2}\right)y^2+\frac{2ef}{c^2}\cdot xy+\ldots=0.$$

La quantité B^2-4AC est ici

$$\frac{4e^2f^2}{c^4}-4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{e^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{f^2}{c^2}\right),$$

c'est-à-dire essentiellement *négative*. On en conclut que *toutes les sections planes de l'ellipsoïde sont des ellipses.*

394. Cherchons si, parmi ces sections elliptiques, il en est de *circulaires*.

Nous aurons recours à la méthode générale indiquée précédemment (299). Les formules de transformation à employer seront

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \cos\theta, \\ z &= r + y' \sin\theta. \end{aligned}$$

Il faut se rappeler que θ correspond à l'angle formé par le plan sécant avec le plan xOy, et φ à l'angle formé par l'intersection de ces deux plans avec l'axe Ox.

Les trois axes de l'ellipsoïde étant supposés *inégaux*, nous regarderons $2a$ comme le *grand axe*, $2b$ comme l'*axe moyen*, $2c$ comme le *petit axe*.

La transformation étant effectuée, il faudra voir si des valeurs réelles des paramètres arbitraires r, θ et φ, peuvent rendre la section obtenue circulaire. Si tous ces paramètres se trouvent ainsi déterminés, la section circulaire sera unique.

Si l'un d'eux (r par exemple) reste indéterminé, la section sera circulaire dès que le plan sécant aura la direction indiquée par les valeurs fixes des autres paramètres.

Nous aurons, en faisant le calcul,

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) x'^2 - 2\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{a^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{b^2}\right) x'y'$$
$$+ \left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right) y'^2$$
$$+ 2r\sin\theta y' + r^2 - 1 = 0.$$

Pour que la section soit circulaire, on doit donc satisfaire aux deux conditions

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2},$$

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{a^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{b^2} = 0.$$

La seconde revient à

$$(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta = 0.$$

Puisqu'on a $a > b$, elle conduit donc à

$$\varphi = 0 \quad \textit{ou à} \quad \varphi = 90^\circ \quad \textit{ou à} \quad \theta = 90^\circ.$$

Suivant l'hypothèse adoptée, la première relation donne alors

$$(1)\qquad \frac{1}{a^2}=\frac{\cos^2\theta}{b^2}+\frac{\sin^2\theta}{c^2}\quad\text{ou}\quad \sin^2\theta=\frac{c^2(b^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$

$$(2)\qquad \frac{1}{b^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{c^2}\quad\text{ou}\quad \sin^2\theta=\frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)},$$

$$(3)\qquad \frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}=\frac{1}{c^2}\quad\text{ou}\quad \sin^2\varphi=\frac{b^2(a^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)}.$$

On ne peut pas supposer $\varphi=0$, puisqu'on trouve dans ce cas pour $\sin^2\theta$ une valeur négative. On ne peut pas supposer $\theta=90^\circ$, la valeur correspondante de $\sin^2\varphi$ étant plus grande que 1. Il faut donc s'arrêter à l'hypothèse $\varphi=90^\circ$ qui conduit à une valeur positive et moindre que l'unité pour $\sin^2\theta$.

Comme r n'entre pour rien dans le calcul précédent, on voit que la double valeur de θ donnée par la relation (2) fournira *deux séries de plans parallèles qui détermineront dans l'ellipsoïde des sections circulaires.*

Ces deux séries, *symétriques par rapport au plan des xy,* sont d'ailleurs *parallèles à l'axe moyen de la surface ou perpendiculaires au plan des xz,* d'après la condition $\varphi=90^\circ$.

De

$$\sin^2\theta=\frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)}$$

on déduit facilement

$$\operatorname{tang}\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}.$$

Par suite, les équations des plans des deux sections circulaires passant par le centre seront

$$z=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\cdot x.$$

Si l'on suppose $a=b$, ces deux plans se confondent avec le plan des xy; et en effet, l'ellipsoïde devient *de révolution* autour de l'axe des z.

Remarque. — On peut facilement retrouver ces résultats par la géométrie, en remarquant que lorsque le plan sécant passe par l'axe moyen de la surface, la section elliptique obtenue dont le centre se confond avec celui de la surface, a pour axes cet axe moyen et le diamètre suivant lequel le plan sécant coupe le plan du grand axe et du petit axe. Ce diamètre appartenant à la section principale correspondante, peut varier depuis le petit axe jusqu'au grand axe, et, par consé-

quent, devenir égal à l'axe moyen. On n'aura donc qu'à couper l'ellipse $(2a, 2c)$ par un arc décrit du centre avec le rayon b, pour retrouver graphiquement les directions précédentes.

395. Le plan tangent en un point (x_1, y_1, z_1), de l'ellipsoïde a pour équation (346)

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1.$$

Le diamètre qui passe au point (x_1, y_1, z_1) a pour équations

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}.$$

Le plan diamétral conjugué à ce diamètre aura donc à son tour pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=0.$$

Ce plan sera par suite, comme nous l'avons déjà dit (385), parallèle au plan tangent mené à la surface par l'extrémité (x_1, y_1, z_1) du diamètre.

On peut se proposer de mener à l'ellipsoïde un plan tangent parallèle à un plan donné ou passant par une droite donnée ou un point donné. Nous ne nous arrêterons pas à ces questions.

396. Nous avons déjà vu (371) qu'on pouvait rapporter les surfaces à centre à une infinité de systèmes d'axes obliques, pour lesquels leur équation conservait la forme de l'*équation aux axes*. Dans ce cas, les axes coordonnés constituent un système de diamètres conjugués de la surface, et les plans coordonnés sont des plans diamétraux conjugués. En désignant par $2a', 2b', 2c'$, les longueurs interceptées par la surface sur ses axes obliques, c'est-à-dire les longueurs de ses diamètres conjugués, son équation sera donc

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

En la mettant sous cette forme, on peut facilement vérifier que les sections déterminées dans la surface par des plans parallèles sont des courbes semblables et semblablement placées (383).

De plus, on voit que les propriétés de l'ellipsoïde qui ne dépendent que des axes principaux $2a$, $2b$, $2c$, seront exprimées de la même manière en fonction des axes obliques, $2a'$, $2b'$, $2c'$.

397. *Dans l'ellipsoïde, la somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des axes principaux.*

Soient deux systèmes de diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$, et $2a''$, $2b''$, $2c''$. Désignons par $2a'''$ le diamètre suivant lequel se coupent les plans $(2a', 2b')$ et $(2a'', 2b'')$, et par $2b'''$ et $2c'''$ les diamètres conjugués respectifs de $2a'''$ dans ces deux plans.

D'après la géométrie à deux dimensions (155), le système $(2a', 2b', 2c')$ présente la même somme de carrés que le système $(2a''', 2b''', 2c')$; en effet, a''' et b''' étant des diamètres conjugués dans le plan $(2a', 2b')$, on a $a'^2 + b'^2 = a'''^2 + b'''^2$.

Le système $(2a'', 2b'', 2c'')$ présente à son tour la même somme de carrés que le système $(2a''', 2b'', 2c''')$.

Mais les deux systèmes $(2a''', 2b''', 2c')$ et $(2a''', 2b'', 2c''')$ contenant un diamètre commun $2a'''$, les deux autres diamètres qui lui sont conjugués dans chaque système sont dans un même plan *qui est le plan diamétral correspondant au diamètre commun* (383). Dès lors ces deux systèmes présentent des sommes de carrés identiques, et il est démontré qu'il en est de même pour les systèmes proposés. L'un des systèmes choisis pouvant être celui des axes, on aura donc

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

398. *Dans l'ellipsoïde, le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant et égal au volume du parallélipipède rectangle construit sur les axes.*

En effet, en se reportant au numéro précédent, les deux parallélipipèdes $(2a', 2b', 2c')$, $(2a''', 2b''', 2c')$, sont équivalents comme ayant des bases équivalentes (156) et même hauteur. Il en sera de même des deux parallélipipèdes $(2a'', 2b'', 2c'')$ et $(2a''', 2b'', 2c''')$. Donc, les deux parallélipipèdes $(2a''', 2b''', 2c')$ et $(2a''', 2b'', 2c''')$ étant à leur tour équivalents, puisque les diamètres $2b'''$ et $2c'$, $2b''$ et $2c'''$, sont respectivement conjugués dans le même plan, on en conclura l'équivalence des volumes des parallélipipèdes $(2a', 2b', 2c')$, $(2a'', 2b'', 2c'')$. Et, comme l'un des systèmes choisis peut être celui des axes, on aura (en désignant par V le volume du parallélipipède construit sur les trois diamètres conjugués quelconques $2a'$, $2b'$, $2c'$), (*Trig.*, 86),

$$V = 8abc.$$

Les parallélipipèdes ainsi construits sur trois diamètres conjugués sont *circonscrits* à la surface (385).

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS DES DEUX HYPERBOLOIDES.

Hyperboloïde à une nappe.

399. L'équation de l'hyperboloïde à une nappe rapporté à ses axes étant (374)

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

cherchons la nature des *sections planes* de la surface. Coupons-la par un plan quelconque

$$z=ex+fy+g.$$

On obtiendra l'équation de la projection de la section sur le plan des xy, en éliminant z entre l'équation (H_1) et celle du plan considéré. Il viendra

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{e^2}{c^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{f^2}{c^2}\right)y^2-\frac{2ef}{c^2}xy-\ldots=0.$$

La quantité B^2-4AC est ici

$$\frac{4e^2f^2}{c^4}-4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{e^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{f^2}{c^2}\right).$$

Cette quantité peut évidemment être *négative*, *positive* ou *nulle*. On en conclut qu'*on peut, en coupant par un plan un hyperboloïde à une nappe, obtenir les trois courbes du second degré.*

400. Supposons que les axes de l'hyperboloïde rangés par ordre de grandeur soient $2c$, $2a$, $2b$ (en regardant toujours l'axe imaginaire comme le plus petit). On démontrera, en suivant la même marche que pour l'ellipsoïde, qu'on peut obtenir *deux séries de sections circulaires parallèles au plus grand axe réel ou perpendiculaires au plan des deux autres axes et symétriques par rapport au plan des xy.*

En se reportant au n° 394, on aura pour ces sections

$$\operatorname{tang}\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+c^2}};$$

et les équations des plans des deux sections circulaires pas-

sant par le centre seront

$$z = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 + c^2}} \cdot x.$$

Si l'on suppose $a = b$, ces deux plans se confondent avec le plan des xy. En effet, l'hyperboloïde devient *de révolution* autour de l'axe imaginaire.

Remarque. — On peut facilement retrouver ces résultats par la Géométrie. Remarquons que lorsque le plan sécant qui passe par le plus grand des deux axes réels de la surface, la coupe suivant une section elliptique dont le centre se confond avec celui de la surface, cette ellipse a pour axes le plus grand des deux axes réels et le diamètre suivant lequel le plan sécant coupe le plan des deux autres axes de la surface. Ce diamètre appartenant à la section principale correspondante, peut varier depuis le plus petit axe réel jusqu'à l'infini, et, par conséquent, devenir égal au plus grand axe réel. On n'aura donc qu'à couper l'hyperbole $(2a, 2c)$ par un arc décrit du centre avec le rayon b, pour retrouver graphiquement les directions précédentes.

401. Le plan tangent mené en un point (x_1, y_1, z_1) de l'hyperboloïde à une nappe a pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

Ce plan est parallèle au plan diamétral conjugué au diamètre qui passe par le point de contact.

L'équation de l'hyperboloïde à une nappe rapporté à un système de diamètres conjugués dont les longueurs sont $2a'$, $2b'$, $2c'$, est

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

On a d'ailleurs, entre ces diamètres conjugués et les axes, les relations constantes (**397**, **398**)

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$
$$V = 8abc.$$

V est le volume du parallélipipède oblique construit sur les trois diamètres conjugués considérés.

402. Considérons à la fois l'hyperboloïde à une nappe et le cône qu'on obtient (**377**) en réduisant à zéro le second mem-

bre de l'équation (H_1). Des deux équations

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$(C_1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

on déduit, en désignant par Z et z les ordonnées du cône et de l'hyperboloïde qui correspondent à un même système de valeurs pour x et pour y :

$$Z^2-z^2=c^2,$$

d'où

$$Z-z=\frac{c^2}{Z+z}.$$

Si l'on suppose que Z et z soient de même signe, on voit qu'à mesure qu'on s'éloignera de l'origine la somme $Z+z$ croîtra indéfiniment en valeur absolue. La différence $Z-z$ tendra donc vers zéro sans jamais atteindre cette limite. Le cône représenté par l'équation (C_1) est *le cône asymptote* de l'hyperboloïde (H_1).

Si l'on coupe les deux surfaces par un même plan, les sections obtenues seront évidemment des courbes semblables et semblablement placées, et il en sera de même de leurs projections sur les plans coordonnés.

Pour connaître la nature d'une section plane de l'hyperboloïde, il suffira donc de chercher celle de la section déterminée par le même plan dans le cône asymptote. D'ailleurs, en menant par le sommet de ce cône ou par l'origine un plan parallèle au plan sécant proposé, on voit : 1° que la section sera elliptique, si ce plan parallèle n'a que ce point commun avec le cône; 2° que la section sera hyperbolique, s'il coupe le cône suivant deux génératrices; 3° que la section sera parabolique, s'il est tangent au cône.

En effet, dans le premier cas, le plan sécant rencontre toutes les génératrices sur une même nappe. Dans le second cas, il rencontre toutes les génératrices des deux nappes (sauf celles qui correspondent au plan parallèle mené par le sommet). Dans le troisième cas, le plan sécant rencontre toutes les génératrices d'une seule nappe (sauf celle qui est contenue dans le plan tangent parallèle, lequel plan laisse les deux nappes de côtés différents par rapport à sa surface).

Le cône asymptote est *intérieur* à l'hyperboloïde à une nappe : on a $Z > z$.

403. L'équation de l'hyperboloïde à une nappe peut s'écrire :

$$(H_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2} \\ \text{ou} \\ \left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\left(1-\dfrac{x}{a}\right). \end{cases}$$

Posons

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=m\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{m}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=n\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \end{cases}$$

m et n étant deux quantités indéterminées.

On peut regarder l'équation (H_1) comme résultant de l'élimination de l'indéterminée m entre les deux équations (1) ou de l'élimination de l'indéterminée n entre les deux équations (2). Or, si l'on fait varier m et n, chacun des groupes (1) et (2) représente un système de lignes droites. *Il existe donc et l'on peut tracer deux pareils systèmes sur la surface de l'hyperboloïde à une nappe.*

404. *Deux droites d'un même système ne peuvent être dans un même plan, et deux droites de systèmes différents sont toujours dans un même plan.*

Prenons deux droites du système (1), savoir

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=m\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{m}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \end{cases}$$

et

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=m'\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{m'}\left(1-\dfrac{x}{a}\right). \end{cases}$$

L'équation générale des plans qui passent par la droite (3)

est (321)

$$(5)\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}-m\left(1+\frac{x}{a}\right)+\lambda\left[\frac{y}{b}-\frac{z}{c}-\frac{1}{m}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]=0.$$

Si la droite (4) peut être dans un même plan avec la droite (3), il faut qu'en éliminant y et z entre les équations (4) et l'équation (5), on obtienne une équation qui puisse être vérifiée indépendamment de toute valeur attribuée à x. On trouve ainsi

$$(6)\quad (m'-m)\left(1+\frac{x}{a}\right)+\lambda\left(\frac{1}{m'}-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)=0.$$

Cette équation conduit à la condition $m=m'$; c'est-à-dire que deux droites d'un même système ne peuvent être dans un même plan qu'à la condition de se confondre.

Si l'on prend au contraire une droite du système (1) et une droite du système (2), l'équation (6) devient

$$(6\ bis)\quad \left(n-\frac{\lambda}{m}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)-\left(m-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)=0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée indépendamment de toute valeur attribuée à x, il suffit de prendre $\lambda=mn$. Donc deux droites de systèmes différents sont toujours dans un même plan.

405. *Par un point pris sur l'hyperboloïde à une nappe, il passe toujours une droite de chaque système.*

En effet, le point (x_1, y_1, z_1) appartenant à la surface, l'une des équations (1) mise sous la forme

$$\frac{y_1}{b}+\frac{z_1}{c}=m\left(1+\frac{x_1}{a}\right),$$

et l'une des équations (2) mise sous la forme

$$\frac{y_1}{b}+\frac{z_1}{c}=n\left(1-\frac{x_1}{a}\right),$$

conduiront toujours à des valeurs admissibles pour les indéterminées m et n; et ces valeurs, substituées dans les groupes (1) et (2), feront connaître les droites des deux systèmes qui passent par le point (x_1, y_1, z_1).

Il est facile, en outre, de montrer qu'*aucune autre droite appartenant à la surface ne peut passer par le point* (x_1, y_1, z_1). Supposons qu'elle existe; elle ne peut appartenir d'abord à aucun des deux systèmes indiqués (404). On pourra donc,

par un de ses points, faire passer une droite du système (1), et, par ses différents points, des droites du système (2). Ces dernières droites viendront couper la première, puisque deux droites de systèmes différents sont toujours dans un même plan; mais ces droites qui appartiennent au système (2), s'appuyant sur deux droites fixes concourantes, seraient alors dans un même plan : ce qui est impossible (404).

406. On peut encore vérifier comme il suit que, par un point de l'hyperboloïde à une nappe, il passe deux droites appartenant à la surface (une de chacun des systèmes définis (403), d'après ce qui précède). Prenons l'équation de l'hyperboloïde rapporté à un système de diamètres conjugués quelconques

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Coupons la surface par le plan $x=a'$: nous obtiendrons dans ce plan et sur la surface les deux droites

$$y=\pm\frac{b'}{c'}z.$$

Le plan $x=a'$ est le plan tangent mené à la surface par l'extrémité du diamètre $2a'$ (385).

407. Par l'une des droites de l'un des systèmes, menons un plan quelconque qui coupe la surface. L'intersection devant être une ligne du second ordre (dont l'équation dans le plan sécant devra se décomposer alors en deux facteurs linéaires), le plan considéré coupera l'hyperboloïde à une nappe suivant une seconde droite appartenant à l'autre système (404). Les sections obtenues de cette manière constituent *les sections rectilignes* de l'hyperboloïde à une nappe, sections que ne peut évidemment admettre l'ellipsoïde (393).

408. Considérons les deux droites de la surface qui passent par le point (x_1, y_1, z_1). Le plan tangent en ce point contient ces deux droites qui sont à elles-mêmes leurs propres tangentes (346) : son équation étant

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=1,$$

sa trace sur le plan des xy aura pour expression

$$(t)\qquad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Si l'on veut mener deux tangentes à l'ellipse de gorge par le point extérieur (x_1, y_1), projection sur le plan de cette ellipse du point (x_1, y_1, z_1) de l'espace, l'équation (t) représentera précisément la corde de contact correspondante (**144**). Mais les droites de la surface qui passent par le point (x_1, y_1, z_1) ont nécessairement pour projections sur le plan des xy les droites qui joignent le point (x_1, y_1) à leurs traces sur le même plan, traces qui sont les points où la corde représentée par l'équation (t) coupe la surface.

Donc *les projections des droites de la surface sur le plan des xy sont tangentes à l'ellipse de gorge.*

On démontrera de même que *les projections de ces droites sur les autres plans coordonnés sont tangentes aux hyperboles principales.*

409. Transporter au centre de l'hyperboloïde les droites des systèmes (1) et (2), c'est supprimer le terme 1 dans les équations de ces deux groupes. En éliminant alors m ou n entre les équations (1) ou entre les équations (2), on obtient l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

qui représente le cône asymptote.

On voit donc que *toutes les droites des deux systèmes transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de la surface constituent son cône asymptote.*

Tout plan passant par le centre de la surface et la coupant suivant une hyperbole coupe le cône asymptote suivant deux génératrices qui sont les asymptotes de cette hyperbole (**243**).

Les génératrices du cône asymptote ou les asymptotes des hyperboles tracées sur la surface et ayant même centre qu'elle, constituent les *diamètres infinis* de l'hyperboloïde à une nappe (**187**, *Rem.*, **I**).

Quand on rapporte la surface à trois diamètres infinis pris pour axes, les intersections de la surface par les plans coordonnés sont des hyperboles rapportées à leurs asymptotes ; l'équation a donc nécessairement la forme

$$dxy+eyz+fyz=r.$$

Remarquons enfin que, trois génératrices d'un cône du second degré ne pouvant jamais être dans un même plan, il en résulte immédiatement que *trois droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe ne peuvent jamais être parallèles à un même plan :* caractère distinctif important à signaler.

410. Prenons trois droites du système (1) : étant sur l'hy-

perboloïde à une nappe, elles ne pourront être parallèles à un même plan, et elles seront deux à deux situées dans des plans différents (409, 404). Toute droite s'appuyant sur ces trois droites sera tout entière sur la surface, parce qu'elle y aura trois points (327), et elle appartiendra au système (2). Ainsi *on peut regarder un hyperboloïde à une nappe comme engendré par une droite glissant constamment sur trois droites fixes situées deux à deux dans des plans différents, et non parallèles à un même plan.* La réciproque est vraie.

411. Il est évident à priori que l'*hyperboloïde à deux nappes* (375) *ne peut admettre de sections rectilignes* (407). On pourrait d'ailleurs le démontrer par un calcul direct, en cherchant dans quel cas l'équation d'une section plane peut se décomposer en deux facteurs linéaires.

Ceci admis, il est facile d'établir la réciproque de la proposition énoncée au numéro précédent :

Lorsqu'une droite se meut en s'appuyant constamment sur trois droites fixes non parallèles à un même plan et situées deux à deux dans des plans différents, elle engendre un hyperboloïde à une nappe.

Soient (*fig.* 156) D, D′, D″, les trois directrices données. On peut, par chacune d'elles, faire passer deux plans respectivement parallèles aux deux autres directrices, et former ainsi un parallélipipède. Nous placerons l'origine au centre de ce parallélipipède, et nous dirigerons les axes coordonnés parallèlement aux trois directrices. Leurs équations seront alors ($2d$, $2e$, $2f$, représentant les arêtes du parallélipipède obtenu):

$$\text{pour D} \begin{cases} y = e, \\ z = -f, \end{cases} \quad \text{pour D}' \begin{cases} x = -d, \\ z = f, \end{cases} \quad \text{pour D}'' \begin{cases} x = d, \\ y = -e. \end{cases}$$

Les équations de la génératrice seront d'ailleurs

$$\begin{cases} x = mz + p, \\ y = nz + q. \end{cases}$$

Pour que la génératrice rencontre les trois directrices, il faut satisfaire aux conditions

$$e = -nf + q, \quad -d = mf + p, \quad \frac{d-p}{m} = \frac{-e-q}{n}.$$

Pour avoir l'équation de la surface engendrée, il suffit d'éliminer m, n, p, q, entre les trois équations de condition et les deux équations de la génératrice.

On a d'abord, en éliminant p et q,

$$e = -nf + y - nz, \quad -d = mf + x - mz,$$

$$\frac{d - x + mz}{m} = \frac{-e - y + nz}{n}$$

La dernière de ces équations peut s'écrire

$$\frac{d-x}{m} + z = \frac{-e-y}{n} + z \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} = \frac{x-d}{y+e}.$$

D'ailleurs les deux premières donnent

$$n = \frac{y-e}{z+f} \quad \text{et} \quad m = \frac{x+d}{z-f},$$

d'où

$$\frac{m}{n} = \frac{(x+d)(z+f)}{(y-e)(z-f)}.$$

L'équation de la surface sera donc, en égalant les deux valeurs de $\frac{m}{n}$,

$$(x-d)(y-e)(z-f) = (x+d)(y+e)(z+f).$$

En simplifiant, il vient finalement

$$dyz + exz + fxy + def = 0.$$

Cette équation représente une surface à centre. Étant à génératrices rectilignes, cette surface ne peut être ni un ellipsoïde, ni un hyperboloïde à deux nappes; ce n'est pas non plus un cône ni un cylindre (334, 330): c'est donc un hyperboloïde à une nappe rapporté à un système de diamètres infinis (409).

Remarque. — On voit que l'hyperboloïde à une nappe est à la fois une surface réglée et une surface gauche ; car deux positions successives de la génératrice rectiligne ne pouvant être dans un même plan, la surface n'est pas développable.

Hyperboloïde à deux nappes.

412. L'équation de l'hyperboloïde à deux nappes étant (375)

$$(H_2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on vérifiera facilement (399) que *les sections planes de la surface peuvent être des ellipses, des hyperboles ou des paraboles.*

Supposons que les axes de l'hyperboloïde à deux nappes rangés par ordre de grandeur soient $2b$, $2c$, $2a$, en regardant les axes imaginaires comme plus petits que l'axe réel, et d'autant plus petits que la valeur absolue de leur carré est plus grande. Nous aurons alors $b^2 > c^2$, et il sera facile de démontrer que *l'hyperboloïde à deux nappes admet deux séries de sections circulaires, parallèles au plus petit axe imaginaire, ou perpendiculaires au plan des deux autres axes, et symétriques par rapport au plan des xy.*

En se reportant au n° 394, on aura pour ces sections

$$\operatorname{tang}\theta = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}}.$$

413. L'équation du plan tangent en un point (x_1, y_1, z_1) de l'hyperboloïde à deux nappes est

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

Ce plan est parallèle au plan diamétral qui est conjugué au diamètre du point de contact.

L'équation de l'hyperboloïde à deux nappes rapporté à un système de diamètres conjugués dont les longueurs sont $2a'$, $2b'$, $2c'$, est

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

On a d'ailleurs entre les diamètres conjugués et les axes les relations constantes (397, 398)

$$a'^2 - b'^2 - c'^2 = a^2 - b^2 - c^2,$$
$$V = abc.$$

V est le volume du parallélipipède oblique construit sur les trois diamètres conjugués considérés.

414. Considérons à la fois l'hyperboloïde à deux nappes et le cône qu'on obtient en réduisant à zéro le second membre de l'équation (H_2). Des deux équations

$$(H_2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(C_2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

on déduit, en désignant par Z et z les ordonnées du cône et

de l'hyperboloïde qui correspondent à un même système de valeurs pour x et pour y,

$$Z^2 - z^2 = c^2, \quad \text{d'où} \quad Z - z = \frac{c^2}{Z + z}.$$

Si l'on suppose Z et z de même signe, on voit qu'à mesure qu'on s'éloigne de l'origine, la différence $Z - z$ tend vers zéro. L'équation (C_2) représente donc *le cône asymptote* de l'hyperboloïde à deux nappes.

Si l'on coupe les deux surfaces par un même plan, les sections obtenues seront des courbes semblables et semblablement placées, et il en sera de même de leurs projections sur les plans coordonnés.

Le cône asymptote est *extérieur* à l'hyperboloïde à deux nappes : on a $Z > z$.

415. Considérons les deux hyperboloïdes

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(H_2) \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Ces deux hyperboloïdes sont dits *conjugués;* leurs axes réels et imaginaires sont *échangés.* Ils ont *le même cône asymptote*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

et ce cône est alors compris entre les deux surfaces (*fig.* 157).

Deux hyperboloïdes conjugués sont coupés par le même plan suivant des courbes semblables (**257**, Note, **402**, **414**).

Soit la droite

$$\begin{cases} x = mz, \\ y = nz; \end{cases}$$

Cherchons le z de son point d'intersection avec les deux hyperboloïdes conjugués. Nous réunirons alors les équations (H_1) et (H_2) sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

et il viendra

$$z = \pm \sqrt{\frac{\pm 1}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{1}{c^2}}}.$$

Comme on peut attribuer à m et à n telles valeurs qu'on veut,

le dénominateur de l'expression placée sous le radical peut être positif, négatif ou nul. Les deux hyperboloïdes admettent donc des diamètres réels finis ou infinis, et des diamètres imaginaires. Les diamètres infinis sont *communs* aux deux hyperboloïdes : *ce sont les génératrices du cône asymptote* (409); *mais les diamètres réels de l'un sont les diamètres imaginaires de l'autre, et réciproquement.*

Quand l'hyperboloïde à deux nappes est rapporté à un système de diamètres infinis, son équation est de la forme

$$dxy + exz + fyz = r;$$

car un plan passant par le centre de la surface et la coupant suivant une hyperbole, rencontre le cône asymptote suivant les asymptotes de cette hyperbole (409).

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS DES DEUX PARABOLOIDES.

Paraboloïde elliptique.

416. L'équation la plus simple du paraboloïde elliptique est (379)

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x. \qquad \text{(P.E)}$$

Cherchons la nature *des sections planes* de la surface, et coupons-la par un plan quelconque

$$z = ex + fy + g.$$

On obtiendra l'équation de la projection de la section sur le plan des xy, en éliminant z entre l'équation (P.E) et celle du plan considéré. Il viendra

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{f^2}{p'}\right) y^2 + \frac{e^2}{p'} x^2 + \frac{2ef}{p'} xy + \ldots = 0.$$

La quantité $B^2 - 4AC$ est ici

$$\frac{4e^2f^2}{p'^2} - 4\left(\frac{1}{p} + \frac{f^2}{p'}\right)\frac{e^2}{p'} = -\frac{4e^2}{pp'}.$$

Toutes les sections sont donc des ellipses, sauf le cas de $e = 0$ où elles sont des paraboles. Mais, pour $e = 0$, le plan proposé est parallèle à l'axe Ox du paraboloïde. On peut donc dire que *les sections planes du paraboloïde elliptique sont des*

ellipses lorsqu'elles sont inclinées sur l'axe, et des paraboles lorsqu'elles sont parallèles à l'axe; elles ne sont jamais des hyperboles.

Remarquons que, dans le cas de $e = 0$, l'équation de la projection de la parabole obtenue sur le plan des xy devient

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{f^2}{p'}\right) y^2 + \frac{2fg}{p'} y + \frac{g^2}{p'} = 2x.$$

Cette parabole a donc son axe parallèle à celui du paraboloïde, et son paramètre reste constant si f ne change pas. Donc *les plans parallèles à l'axe déterminent comme sections des paraboles égales, lorsqu'ils sont parallèles entre eux.*

Les plans parallèles au plan des xy déterminent des paraboles toutes égales à la parabole principale située dans ce plan. Les plans parallèles au plan des xz déterminent des paraboles toutes égales à la parabole principale située dans ce plan. On peut donc regarder le paraboloïde elliptique comme engendré par la parabole $y^2 = 2px$ se mouvant parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole principale $z^2 = 2p'x$; *ou* comme engendré par la parabole $z^2 = 2p'x$ se mouvant parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole principale $y^2 = 2px$.

417. Cherchons si, parmi les sections elliptiques du paraboloïde, il en est de *circulaires*.

Les formules de transformation

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \cos\theta, \\ z &= r + y' \sin\theta, \end{aligned}$$

appliquées à l'équation du paraboloïde elliptique, donnent

$$\frac{\sin^2\varphi}{p} x'^2 + \left(\frac{\cos^2\varphi \cos^2\theta}{p} + \frac{\sin^2\theta}{p'}\right) y'^2 + \frac{2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\theta}{p} x'y' - 2x' \cos\varphi + 2(r \sin\theta + \sin\varphi \cos\theta) y' + r^2 = 0.$$

Pour que la section soit circulaire, on doit donc satisfaire aux deux conditions

$$\frac{\sin^2\varphi}{p} = \frac{\cos^2\varphi \cos^2\theta}{p} + \frac{\sin^2\theta}{p'},$$
$$\sin\varphi \cos\varphi \cos\theta = 0.$$

La seconde exige qu'on ait

$$\varphi = 0 \quad ou \quad \varphi = 90^\circ \quad ou \quad \theta = 90^\circ.$$

Suivant l'hypothèse adoptée, la première relation devient alors

$$(1) \qquad \frac{\cos^2\theta}{p} + \frac{\sin^2\theta}{p'} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin^2\theta = \frac{p'}{p'-p},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{p} = \frac{\sin^2\theta}{p'} \quad \text{ou} \quad \sin^2\theta = \frac{p'}{p},$$

$$(3) \qquad \frac{\sin^2\varphi}{p} = \frac{1}{p'} \quad \text{ou} \quad \sin^2\varphi = \frac{p}{p'}.$$

Supposons $p > p'$. On ne pourra s'arrêter qu'à l'hypothèse $\varphi = 90^\circ$, qui conduit pour $\sin^2\theta$ à une valeur positive et moindre que l'unité.

La double valeur de θ donnée par la relation (2) fournira deux séries de plans parallèles déterminant dans le paraloïde elliptique des sections circulaires.

Ces deux séries, symétriques par rapport au plan des xy, sont d'ailleurs parallèles à l'axe Oy ou perpendiculaires au plan de la parabole principale de plus petit paramètre (on a $\varphi = 90^\circ$).

De la valeur de $\sin^2\theta$ on déduit facilement

$$\operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{\frac{p'}{p-p'}}.$$

Par suite, les équations des plans des deux sections circulaires passant par le sommet de la surface seront

$$z = \pm\sqrt{\frac{p'}{p-p'}}\,.x.$$

Si l'on suppose $p = p'$, ces deux plans se confondent avec le plan des yz. En effet, le paraboloïde elliptique devient alors *de révolution* autour de l'axe Ox.

418. Le plan tangent en un point (x_1, y_1, z_1) du paraboloïde elliptique a pour équation (346)

$$(1) \qquad (y-y_1)\frac{y_1}{p} + (z-z_1)\frac{z_1}{p'} - (x-x_1) = 0,$$

en y joignant la condition

$$(2) \qquad \frac{y_1^2}{p} + \frac{z_1^2}{p'} = 2x_1.$$

On peut donc mettre l'équation (1) sous la forme

$$\frac{yy_1}{p} + \frac{zz_1}{p'} = x + x_1.$$

Nous savons (386) que le plan tangent mené à la surface par l'extrémité du diamètre qui passe au point (x_1, y_1, z_1), est parallèle à toutes les directions conjuguées aux plans diamétraux qui passent par ce diamètre.

419. D'après cette dernière remarque, transportons l'origine des coordonnées au point (x_1, y_1, z_1). Prenons pour axe des x le diamètre qui passe en ce point; le plan des xy sera alors un des plans diamétraux menés par le même point dans la surface. Ce plan diamétral coupera la surface suivant une parabole (416). Choisissons pour axe des y la tangente menée à cette parabole par l'origine, et pour axe des z une parallèle à la direction conjuguée au plan diamétral considéré. Le plan de yz se confondra alors (346, 418) avec le plan tangent mené à la surface par le point (x_1, y_1, z_1). L'axe des z étant conjugué au plan des xy, l'équation de la surface ne devra pas contenir de terme du premier degré en z. De plus, pour $z = 0$, l'équation doit se réduire à celle d'une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente correspondante. Elle sera donc nécessairement de la forme

$$\frac{y^2}{p_1} + \frac{z^2}{p'_1} = 2x.$$

Ainsi, l'équation du paraboloïde elliptique conserve la même forme, lorsqu'on rapporte la surface à un diamètre pris pour axe des x et au plan tangent correspondant pris pour plan des yz, l'axe des z étant mené dans ce plan parallèlement à la direction conjuguée au plan diamétral choisi pour plan des xy.

Paraboloïde hyperbolique.

420. L'équation la plus simple du paraboloïde hyperbolique est (380)

(P.H) $$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Cherchons la nature *des sections planes* de la surface, et coupons-la par un plan quelconque

$$z = ex + fy + g.$$

Dans le cas du paraboloïde elliptique, nous avons trouvé que, pour l'équation de la projection de la section sur le plan des xy, la quantité $B^2 - 4AC$ se réduisait à

$$-\frac{4e^2}{pp'}.$$

Comme on passe de l'équation du paraboloïde elliptique à

celle du paraboloïde hyperbolique en changeant p' en $-p'$, la quantité B^2-4AC deviendra dans le cas du paraboloïde hyperbolique

$$\frac{4e^2}{pp'}.$$

Toutes les sections planes de cette surface sont donc des hyperboles, sauf le cas de $e=0$ où elles sont des paraboles. On peut donc dire que *les sections planes du paraboloïde hyperbolique sont des hyperboles lorsqu'elles rencontrent l'axe, et des paraboles lorsqu'elles sont parallèles à l'axe; elles ne sont jamais des ellipses.*

Remarquons que, dans le cas de $e=0$, l'équation de la projection de la parabole obtenue sur le plan des xy devient

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{f^2}{p'}\right)y^2-\frac{2fg}{p'}y-\frac{g^2}{p'}=2x.$$

Cette parabole a donc son axe parallèle à celui du paraboloïde, et son paramètre reste constant si f ne change pas. Donc *les plans parallèles à l'axe déterminent comme sections des paraboles égales, lorsqu'ils sont parallèles entre eux.*

Les plans parallèles au plan des xy déterminent des paraboles toutes égales à la parabole principale située dans ce plan; les plans parallèles au plan des xz déterminent des paraboles toutes égales à la parabole principale située dans ce plan. On peut donc regarder le paraboloïde hyperbolique comme engendré par la parabole $y^2=2px$ se mouvant parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole principale $z^2=-2p'x$; *ou* comme engendré par la parabole $z^2=-2p'x$ se mouvant parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole principale $y^2=2px$ (*fig.* 158).

On voit (416) que les deux paraboloïdes admettent *un mode commun de génération*. Seulement, dans le cas du paraboloïde elliptique, les axes de la parabole génératrice et de la parabole directrice ont la même direction, et une direction opposée dans le cas du paraboloïde hyperbolique.

Comme le paraboloïde hyperbolique ne présente pas de sections elliptiques, *il n'y a pas lieu de chercher s'il comporte des sections circulaires.*

On peut donc concevoir la génération des surfaces du second ordre à l'aide du cercle, sauf le cas du paraboloïde hyperbolique.

421. Le plan tangent en un point (x_1, y_1, z_1) du paraboloïde

hyperbolique a pour équation

$$\frac{yy_1}{p} - \frac{zz_1}{p'} = x + x_1.$$

On voit que le plan tangent à l'origine ou au sommet de la surface n'est autre que le plan des yz : résultat évident à priori, puisque l'axe des y et celui des z sont tangents aux deux paraboles principales. Ce plan tangent coupe la surface suivant les deux droites

$$y = \pm z\sqrt{\frac{p}{p'}};$$

c'est suivant ces droites que se projettent les asymptotes des hyperboles déterminées par les plans parallèles au plan des yz (380).

422. D'après ce que nous avons dit pour le paraboloïde elliptique (**418**, **419**), l'équation du paraboloïde hyperbolique conserve la même forme lorsqu'on rapporte la surface à un diamètre pris pour axe des x et au plan tangent correspondant pris pour plan des yz, l'axe des z étant mené dans ce plan parallèlement à la direction conjuguée au plan diamétral pris pour plan des xy.

423. L'équation du paraboloïde hyperbolique peut s'écrire

$$\text{(P.H)} \qquad \left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}}\right) = 2x.$$

Posons

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{p'}} = 2mx, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{p'}} = \dfrac{1}{m}, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{p'}} = \dfrac{1}{n}, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{p'}} = 2nx, \end{cases}$$

m et n étant deux quantités indéterminées.

On peut regarder l'équation (P.H) comme résultant de l'élimination de l'indéterminée m entre les équations (1) *ou* de l'indéterminée n entre les équations (2). Or, si l'on fait varier m et n, chacun des groupes (1) et (2) représente un système de lignes droites. *Il existe donc et l'on peut tracer deux pareils systèmes sur la surface du paraboloïde hyperbolique.*

424. *Deux droites d'un même système ne peuvent être dans un même plan, et deux droites de systèmes différents sont toujours dans un même plan.*

Prenons deux droites du système (1), savoir

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{p'}} = 2mx, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{p'}} = \dfrac{1}{m}, \end{cases}$$

et

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{p'}} = 2m'x, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{p'}} = \dfrac{1}{m'}. \end{cases}$$

L'équation générale des plans qui passent par la droite (3) est (321)

$$(5)\qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} - 2mx + \lambda\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} - \frac{1}{m}\right) = 0.$$

Si la droite (4) peut être dans un même plan avec la droite (3), il faut qu'en éliminant y et z entre les équations (4) et l'équation (5), on obtienne une équation qui puisse être vérifiée indépendamment de toute valeur attribuée à x (322). On trouve ainsi

$$(6)\qquad 2(m' - m)x + \lambda\left(\frac{1}{m'} - \frac{1}{m}\right) = 0.$$

Cette équation conduit à la condition $m = m'$, c'est-à-dire que deux droites d'un même système ne sont dans un même plan que si elles se confondent.

Si l'on prend, au contraire, une droite du système (1) et une droite du système (2), l'équation (6) devient

$$(6\ bis)\qquad 2(\lambda n - m)x + \frac{1}{n} - \frac{\lambda}{m} = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite indépendamment de toute valeur attribuée à x, il suffit de prendre $\lambda = \dfrac{m}{n}$. Donc deux droites de systèmes différents sont toujours dans un même plan.

Les droites du système (1) sont évidemment parallèles au plan

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = 0 \quad \text{ou} \quad y = z\sqrt{\frac{p}{p'}};$$

les droites du système (2) à leur tour sont parallèles au plan

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 0 \quad \text{ou} \quad y = -z\sqrt{\frac{p}{p'}}.$$

On donne à ces deux plans, qui passent par l'axe du paraboloïde et sont symétriques par rapport au plan des zx, le nom de *plans directeurs* de la surface. On peut d'ailleurs prendre, pour plans directeurs, deux autres plans quelconques parallèles au premier.

425. *Par un point pris sur le paraboloïde hyperbolique, il passe toujours une droite de chaque système.*

En effet, le point (x_1, y_1, z_1) appartenant à la surface, l'une des équations (1) mise sous la forme

$$\frac{y_1}{\sqrt{p}} + \frac{z_1}{\sqrt{p'}} = 2mx_1,$$

et l'une des équations (2) mise sous la forme

$$\frac{y_1}{\sqrt{p}} - \frac{z_1}{\sqrt{p'}} = 2nx_1,$$

conduiront toujours à des valeurs admissibles pour les indéterminées m et n, et ces valeurs substituées dans les groupes (1) et (2), feront connaître les droites des deux systèmes qui passent par le point (x_1, y_1, z_1).

Il est facile, en outre, de montrer qu'*aucune autre droite ne peut passer par ce point*. Si elle existe, elle ne peut appartenir d'abord à aucun des deux systèmes indiqués (424). On pourra alors par un de ses points faire passer une droite du système (1), et, par ses différents points, des droites du système (2). Ces dernières droites viendront couper la première, puisque deux droites de systèmes différents sont toujours dans un même plan. Ces droites appartenant au système (2) s'appuieraient donc sur deux droites fixes concourantes et seraient dans un même plan, ce qui est impossible (424).

426. On peut encore vérifier comme il suit que, par un point du paraboloïde hyperbolique, il passe deux droites (une de chaque système d'après ce qui précède). En effet, prenons l'équation de la surface rapportée à un diamètre et au plan tangent correspondant (422)

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Coupons la surface par le plan $x = 0$. On obtient, dans ce plan et sur la surface, les deux droites

$$y = \pm z \sqrt{\frac{p_1}{p'_1}}.$$

427. Par l'une des droites de l'un des systèmes, menons un plan qui coupe la surface. L'intersection devant être une ligne du second degré (dont l'équation dans le plan sécant devra se décomposer alors en deux facteurs linéaires), le plan considéré coupera le paraboloïde suivant une seconde droite appartenant à l'autre système. Les sections obtenues de cette manière constituent les *sections rectilignes* du paraboloïde hyperbolique, *sections que ne peut évidemment admettre le paraboloïde elliptique.*

428. Considérons les deux droites de la surface qui passent par le point (x_1, y_1, z_1). Le plan tangent en ce point contient ces deux droites. Son équation étant

$$\frac{yy_1}{p} - \frac{zz_1}{p'} = x + x_1,$$

sa trace sur le plan des xy a pour expression

$$yy_1 = p(x + x_1). \tag{1}$$

Si l'on veut mener deux tangentes à la parabole principale $y^2 = 2px$ par le point extérieur (x_1, y_1), projection sur le plan de cette parabole du point (x_1, y_1, z_1) de l'espace, l'équation (1) représente précisément la corde de contact correspondante. Mais les droites de la surface qui passent par le point (x_1, y_1, z_1) ont nécessairement pour projections sur le plan des xy les droites qui joignent le point (x_1, y_1) à leurs traces sur le même plan, traces qui sont les points où la corde représentée par l'équation (1) coupe la surface.

Donc *les projections des droites de la surface sur le plan des xy sont tangentes à la parabole principale dans ce plan. La même propriété a lieu relativement au plan des xz.*

429. Prenons trois droites du système (1). Étant sur le paraboloïde hyperbolique, elles seront parallèles au plan directeur correspondant au système (1), et elles seront deux à deux situées dans des plans différents. Toute droite s'appuyant sur ces trois droites, sera tout entière sur la surface, parce qu'elle y aura trois points, et elle appartiendra au système (2), c'est-à-dire qu'elle sera parallèle au second plan directeur (424). *On peut donc regarder le paraboloïde hyperbolique comme en-*

gendré par une droite glissant sur trois droites fixes parallèles à un même plan et situées deux à deux dans des plans différents.

Si la droite mobile glisse sur deux des trois droites fixes choisies, en restant parallèle au second plan directeur, elle engendrera le même paraboloïde. En effet, par un point de l'une des directrices, il ne passe qu'une droite du second système, dont on obtiendra le point de rencontre avec la seconde directrice en menant par le premier point un plan parallèle au second plan directeur. *On peut donc regarder encore le paraboloïde hyperbolique comme engendré par une droite glissant parallèlement à un plan donné, en s'appuyant constamment sur deux droites fixes non situées dans un même plan.*

Les réciproques des propositions qu'on vient d'énoncer sont vraies.

430. 1° *Une droite glissant sur trois droites fixes* D, D′, D″, *parallèles à un même plan et situées deux à deux dans des plans différents, engendre un paraboloïde hyperbolique* (*fig.* 159).

Nous prendrons D pour axe des x, une parallèle menée à D′ par le point O pour axe des y, et pour axe des z la position particulière de la génératrice quand elle passe au point O. Le plan des xy pourra être regardé alors comme le plan directeur parallèle aux droites du premier système. D″ sera donc parallèle à ce plan.

On aura pour équations des directrices

$$\text{D}\begin{cases} y=0,\\ z=0, \end{cases} \qquad \text{D}'\begin{cases} x=0,\\ z=p, \end{cases} \qquad \text{D}''\begin{cases} y=ax,\\ z=q. \end{cases}$$

La génératrice devant s'appuyer sur D, ses équations seront de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x=mz+p',\\ y=nz. \end{cases}$$

Pour qu'elle rencontre D′, il faut qu'on ait

$$(2) \qquad mp+p'=0;$$

et pour qu'elle rencontre D″,

$$\begin{cases} x=mq+p',\\ ax=nq, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad nq=a(mq+p').$$

Pour avoir l'équation de la surface engendrée, il suffit d'éliminer m, n, p', entre les deux dernières équations de condition et les équations de la génératrice.

On tire de l'équation (2)

$$p' = -mp.$$

L'équation (3) devient

$$nq = am(q - p),$$

d'où

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{a(q-p)}.$$

On déduit d'ailleurs des équations (1), en remplaçant p' par $-mp$,

$$\frac{m}{n} = \frac{xz}{y(z-p)}.$$

Par suite, on aura pour équation de la surface cherchée, en égalant les deux valeurs de $\frac{m}{n}$,

$$qyz - a(q-p)xz - pqy = 0.$$

Cette surface est bien un paraboloïde hyperbolique. Elle est dénuée de centre, elle ne peut être un paraboloïde elliptique puisqu'elle est engendrée par une droite, elle ne peut être un cylindre parabolique puisqu'elle contient des droites non parallèles.

2° *Une droite glissant parallèlement à un plan donné* **P**, *en s'appuyant sur deux droites fixes* **D** *et* **D'** *non situées dans un même plan, engendre un paraboloïde hyperbolique* (*fig.* 160).

Nous prendrons le plan directeur pour plan des xy, la directrice **D** pour axe des z, le plan des xz parallèle à la directrice **D'**, et la position particulière de la génératrice lorsqu'elle se trouve dans le plan directeur pour axe des y.

On aura pour équations des directrices

$$\mathbf{D}\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \mathbf{D'}\begin{cases} x = az, \\ y = p. \end{cases}$$

Celles de la génératrice, qui doit s'appuyer sur **D** et être parallèle au plan des xy, seront de la forme

$$\begin{cases} y = mx, \\ z = p'. \end{cases}$$

Pour que cette génératrice rencontre **D'**, on devra avoir

$$p = map'.$$

On obtiendra l'équation de la surface en éliminant m et p' entre la dernière équation de condition obtenue et celles de la génératrice. Il viendra

$$ayz = px.$$

C'est évidemment l'équation d'un paraboloïde hyperbolique.

431. L'examen du second mode de génération du paraboloïde hyperbolique conduit à une remarque importante.

Si l'on considère la génératrice dans trois positions successives, les plans menés parallèlement au plan directeur par ces positions seront parallèles entre eux. Donc *les segments interceptés sur* D *et sur* D' *par les positions successives de la génératrice sont toujours proportionnels.*

Réciproquement, *si une droite se meut sur deux droites fixes en y décrivant des segments proportionnels, elle engendrera un paraboloïde hyperbolique.* En effet, considérons le plan parallèle à deux positions de la génératrice. Si l'on mène à ce plan trois plans parallèles, les deux premiers par les deux positions données, le troisième par l'intersection d'une troisième position de la génératrice avec l'une des directrices, ce troisième plan devant déterminer avec les deux autres des segments proportionnels sur les deux directrices, contiendra la troisième position de la génératrice dès lors parallèle au plan directeur (*Compl. de Géom.*, 97 et suiv.).

432. *Remarques.* — I. Les modes de génération indiqués pour le paraboloïde hyperbolique, ainsi que pour l'hyperboloïde à une nappe, sont d'ailleurs *doubles,* puisque les directrices peuvent être prises dans l'un des systèmes rectilignes de la surface ou dans l'autre.

II. L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont, parmi les surfaces du second ordre, les deux surfaces à la fois réglées et gauches.

La surface considérée au n° 343 et engendrée par une droite tournant autour d'un axe avec lequel elle n'est pas dans un même plan, est un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe : c'est l'hyperboloïde ou la surface gauche de révolution. De même, le conoïde rectiligne droit ou oblique, considéré au n° 339, n'est autre chose que le paraboloïde hyperbolique.

CHAPITRE VII.

DISCUSSION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES A TROIS VARIABLES.

433. Deux cas peuvent se présenter. Partant de l'équation donnée (358)

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz \\ \qquad +2Gx+2Hy+2Kz+L=0, \end{cases}$$

on peut vouloir arriver à l'équation (370)

$$(II)\qquad P.x^2+P'y^2+P''z^2=R$$

ou à l'équation

$$(III)\qquad P'y^2+P''z^2+2Q.x=0,$$

suivant que la surface proposée admet ou non un centre. La discussion s'achève alors facilement, d'après les détails qui précèdent.

Ou bien, on veut, de l'examen direct et abrégé de l'équation (1), déduire seulement le genre de surface qu'elle représente. On n'a pas besoin alors de déterminer les coefficients P, P', P'': il suffit de connaître leurs signes.

Nous considérerons successivement les surfaces *à centre unique*, les surfaces *qui en ont une infinité*, et celles *qui sont dénuées de centre*.

Surfaces à centre unique.

434. La surface a un centre, lorsque le dénominateur commun des formules de résolution des équations (3) (359) est différent de zéro. La valeur M de ce dénominateur est d'ailleurs (360)

$$M=ABC-AF^2-BE^2-CD^2+2DEF.$$

Il est facile de se rappeler son expression, en ne considérant que les six premiers termes de l'équation (1) (433). *Cette expression se compose de la somme du produit des coefficients des trois carrés et du quart du produit des coefficients des trois rectangles des variables, moins la somme des produits respectifs de chaque coefficient d'un carré par le quart du carré du coefficient d'un rectangle, les deux coefficients multipliés étant pris à égale distance des extrêmes.*

Ceci posé, on formera l'équation caractéristique (364)

$$s^3-(A+B+C)s^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)s-M=0.$$

Le premier terme de cette équation a pour coefficient l'unité; le second, la somme des coefficients des carrés des variables dans l'équation (1), *cette somme étant prise en signe contraire; le troisième, la somme des produits deux à deux de ces mêmes coefficients, diminuée du quart de la somme des carrés des coefficients des rectangles; enfin, le terme indépendant est le dénominateur commun* M *pris en signe contraire.*

Nous avons vu (369) que les racines de l'équation caractéristique étaient précisément les valeurs des coefficients P, P', P''; et la règle de *Descartes* [puisque l'équation en s a toutes ses racines réelles (366)] permettra d'indiquer immédiatement les signes de ces racines (*Compl. d'Alg.*, 201). On a d'ailleurs (370)

$$R = -L_1 = -(Gx + Hy + Kz + L),$$

x, y, z, étant les coordonnées du centre de la surface par rapport aux axes primitifs.

Si l'on désigne par α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', les angles des nouveaux axes avec les anciens, on a en outre, s, s', s'', représentant les trois racines de l'équation caractéristique (364)

$$m = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{DF - E(B - s)}{(A - s)(B - s) - D^2}, \qquad n = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{DE - F(A - s)}{(A - s)(B - s) - D^2},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

s correspondant à P, et P à x, α, β, γ, seront les angles du nouvel axe des x avec les anciens axes. On aura deux autres groupes d'équations analogues, pour déterminer les six autres angles.

Tout calcul fait, si P, P', P'' ont le même signe, la surface sera un ELLIPSOÏDE : *réel*, dans le cas où R a aussi ce signe; *imaginaire*, dans le cas où R a un signe contraire (373).

Si deux des coefficients P, P', P'' ont le même signe que R, le troisième ayant un signe contraire, la surface sera un HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE (374). Si l'inverse a lieu, la surface sera un HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES (375).

Enfin, R étant nul, la surface sera un CÔNE, si les trois autres coefficients n'ont pas tous le même signe : elle se réduira à un POINT dans le cas contraire (377).

435. *Exemples :*

1° Soit l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 1 = 0.$$

On a

$$M = 4 - 2 = 2.$$

L'équation caractéristique en s est

$$s^3 - 5s^2 + 7s - 2 = 0.$$

Cette équation présentant trois variations, a ses trois racines positives. Donc la surface est un *ellipsoïde*.

D'ailleurs, l'équation en s admettant la racine 2, ses autres racines seront

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Il faut maintenant calculer R.

Les équations qui donnent les coordonnées du centre, sont

$$2x + 2y - 2 = 0,$$
$$4y + 2x - 4 = 0,$$
$$4z - 4 = 0.$$

On en déduit

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

Il vient, par suite,

$$R = -(-1 \times 0 - 2 \times 1 - 2 \times 1 + 1) = 3.$$

L'équation de l'ellipsoïde *réel* considéré, rapporté à son centre et à ses axes, sera donc

$$2x^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} y^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z^2 = 3$$

ou

$$\frac{x^2}{1,5} + \frac{y^2}{1,5(3-\sqrt{5})} + \frac{z^2}{1,5(3+\sqrt{5})} = 1.$$

2° Soit l'équation

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 3yz - 6x + 7y + 6z + 7 = 0.$$

On a

$$M = -\frac{9}{4}.$$

L'équation caractéristique en s est

$$s^3 - 3s^2 - \frac{5}{4} s + \frac{9}{4} = 0.$$

Cette équation présentant seulement deux variations, la surface doit rentrer dans la classe des hyperboloïdes. Cherchons R.

Les équations qui donnent les coordonnées du centre, sont

$$2x - 2y - 6 = 0,$$
$$4y - 2x + 3z + 7 = 0,$$
$$3y + 6 = 0.$$

On en déduit

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 1.$$

Par suite

$$R = -\left(-3 \times 1 + \frac{7}{2} \times -2 + 3 \times 1 + 7\right) = 0.$$

R étant nul, et l'équation en s admettant deux racines positives et une négative, la surface est un *cône*.

3° Soit l'équation

$$5xy - 3xz + 2yz - 1 = 0.$$

On a

$$M = \frac{5 \times -3 \times 2}{4} = -\frac{30}{4} = -7,5.$$

L'équation caractéristique en s est

$$s^3 - 9,5s + 7,5 = 0.$$

Cette équation admet deux variations. La surface rentre donc dans la classe des hyperboloïdes. Cherchons R. Le centre étant évidemment à l'origine, on a

$$R = 1.$$

Deux des coefficients P, P′, P″, ayant le même signe que R, la surface est un *hyperboloïde à une nappe*.

Si le terme indépendant changeait de signe, l'hyperboloïde serait *à deux nappes*.

En résolvant l'équation en s, on trouve approximativement pour ses trois racines les valeurs

$$5,36, \quad 0,2498, \quad -5,60.$$

On pourra donc mettre (aussi approximativement) l'équation de l'hyperboloïde à une nappe sous la forme

$$5,36x^2+0,2498y^2-5,60z^2=1,$$

ou

$$\frac{x^2}{0,186}+\frac{y^2}{4,003}-\frac{z^2}{0,178}=1.$$

Détermination des génératrices rectilignes. — On peut demander de trouver directement les équations des génératrices rectilignes de la surface (403), c'est-à-dire sans qu'on soit obligé de chercher l'équation réduite.

Il suffit pour cela de remarquer que si l'on parvient à mettre l'équation de l'hyperboloïde sous la forme

$$T^2+U^2-V^2=S^2,$$

T, U, V, étant des polynômes du premier degré en x, y, z, et S une constante, les équations des génératrices seront, pour l'un des systèmes,

$$\begin{cases} U+V=m(S+T), \\ U-V=\frac{1}{m}(S-T), \end{cases}$$

et pour l'autre système

$$\begin{cases} U+V=n(S-T), \\ U-V=\frac{1}{n}(S+T). \end{cases}$$

L'équation proposée ne contenant pas les carrés des variables, correspond au type

$$axy+bxz+cyz=d.$$

Si les termes du premier degré existaient, on les ferait disparaître en transportant l'origine au centre de la surface.

On a successivement

$$a^2xy+abxz+acyz=ad,$$

$$(ax+cz)(ay+bz)-bcz^2=ad,$$

$$4(ax+cz)(ay+bz)=[ax+ay+(b+c)z]^2-[ax-ay+(c-b)z]^2.$$

Par suite, on peut mettre l'équation donnée sous la forme

$$[ax+ay+(b+c)z]^2-[ax-ay+(c-b)z]^2-4bcz^2=4ad.$$

Il viendra donc, en se reportant à l'exemple proposé et en faisant, $a=5$, $b=-3$, $c=2$, $d=1$,

$$(5x+5y-z)^2-(5x-5y+5z)^2+24z^2=20.$$

En posant alors

$$\begin{aligned} U &= 5x + 5y - z, \\ V &= 5x - 5y + 5z, \\ T &= 2z\sqrt{6}, \\ S &= 2\sqrt{5}, \end{aligned}$$

les équations des génératrices du premier système seront (en divisant par 2)

$$\begin{cases} 5x + 2z = m\left(\sqrt{4} + z\sqrt{6}\right), \\ 5y - 3z = \frac{1}{m}\left(\sqrt{5} - z\sqrt{6}\right), \end{cases}$$

et celles des génératrices du second système seront

$$\begin{aligned} 5x + 2z &= n\left(\sqrt{5} - z\sqrt{6}\right), \\ 5y - 3z &= \frac{1}{n}\left(\sqrt{5} + z\sqrt{6}\right). \end{aligned}$$

Si l'équation donnée renferme l'un des carrés des variables, on suivra la marche que nous indiquerons en traitant un exemple relatif au paraboloïde hyperbolique (439, 2°).

4° Soit l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 1 = 0.$$

On a

$$M = 8 + 2 - 2 - 2 - 2 = 4.$$

L'équation caractéristique en s est

$$s^3 - 6s^2 + 9s - 4 = 0.$$

Comme elle présente trois variations, elle aura trois racines positives. La surface sera donc un *ellipsoïde* réel ou imaginaire. Cherchons R. Les termes du premier degré manquant, l'origine est le centre de la surface et l'on a

$$R = -1.$$

La surface est donc un ellipsoïde *imaginaire*.

Surfaces ayant une infinité de centres.

436. On a alors M = 0. D'ailleurs le lieu des centres est une droite ou un plan (360) : *une droite dans le cas des cylindres elliptique et hyperbolique, un plan dans le cas de deux plans parallèles* (376).

Dans le premier cas, deux des coordonnées du centre restant finies, la troisième doit devenir arbitraire, *c'est-à-dire que les trois équations qui déterminent les coordonnées du centre doivent se réduire à deux.*

Dans le second cas, une des coordonnées du centre restant finie, les deux autres doivent devenir arbitraires, *c'est-à-dire que les trois équations qui déterminent les coordonnées du centre doivent se réduire à une seule.*

Les sections par les plans coordonnés achèveront d'éclairer, s'il est nécessaire, sur la nature de la surface.

M étant égal à zéro, l'équation caractéristique admettra une racine nulle, et il sera facile de ramener l'équation de la surface à sa forme la plus simple.

Il faut enfin se rappeler qu'on peut trouver, comme cas particuliers : *une droite, rien, deux plans sécants, un plan unique.*

437. *Exemples :*

1° Soit l'équation

$$2x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+2x-2y-2z+1=0.$$

On a

$$M=2+2-2-1-1=0.$$

Les équations qui déterminent les coordonnées du centre sont

$$\begin{aligned} 2x+y+z+1&=0,\\ y+x+z-1&=0,\\ z+x+y-1&=0. \end{aligned}$$

Les deux dernières sont identiques et les deux premières donnent

$$x=-2, \qquad y=3-z.$$

La surface admet donc une infinité de centres situés sur la droite

$$\begin{cases} x=-2,\\ y=3-z. \end{cases}$$

Si l'on coupe la surface par le plan des xy, on obtient pour équation de la section

$$2x^2+y^2+2xy+2x-2y+1=0.$$

On déduit de cette équation

$$y=-x+1\pm\sqrt{-x^2-4x}.$$

Si l'on égale à zéro la quantité placée sous le radical, les racines trouvées sont réelles et inégales. Donc la section est une ellipse, et la surface considérée est un *cylindre elliptique*.

L'équation en s (débarrassée de sa racine nulle) est ici

$$s^2-4s+2=0,$$

d'où

$$s=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\pm 1\right).$$

Cette équation présentant deux variations, les coefficients P et P′ seront bien de même signe. Quant à R, on aura, en rapportant la surface au centre situé dans le plan des xy,

$$R=-(1\times-2-1\times 3-1\times 0+1)=4.$$

L'équation la plus simple du cylindre elliptique donné sera donc

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)y^2=4$$

ou

$$\frac{x^2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}+\frac{y^2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}=1.$$

2° Soit l'équation

$$x^2+9y^2+z^2-6xy-2xz+6yz-x+3y+z-2=0.$$

On a

$$M=9+18-9-9-9=0.$$

Les équations qui déterminent les coordonnées du centre sont

$$\begin{aligned} 2x-6y-2z-1&=0,\\ 6y-2x+2z+1&=0,\\ 2z-2x+6y+1&=0. \end{aligned}$$

Elles sont identiques. La surface admet donc une infinité de centres situés dans le plan

$$2x-6y-2z-1=0.$$

La section de la surface par le plan des xy a pour équation

$$x^2+9y^2-6xy-x+3y-2=0.$$

On déduit de cette équation

$$y=\frac{2x-1}{6}\pm\frac{1}{2}.$$

La section est donc composée des deux droites parallèles

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3},\quad y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}.$$

La surface considérée est donc, comme on aurait pu le dire déjà, l'ensemble de *deux plans parallèles*.

En effet, si on résout son équation par rapport à z, on trouve qu'elle se partage en ces deux autres

$$z=x-3y+1,\quad z=x-3y-2.$$

L'équation en s (débarrassée de sa racine nulle) est ici

$$s^2-11s=0\quad\text{ou}\quad s(s-11)=0.$$

L'un des deux coefficients P et P′ est donc nul comme le coefficient P″, et l'autre est égal à 11. Quant à R, on aura, en rapportant la surface au centre situé sur l'axe des x,

$$R=-\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times 0+\frac{1}{2}\times 0-2\right)=\frac{9}{4}.$$

L'équation la plus simple des deux plans parallèles sera donc

$$11x^2=\frac{9}{4}\quad\text{ou}\quad x=\pm\frac{3\sqrt{11}}{22}.$$

Surfaces dénuées de centre.

438. On a encore $M=0$, mais l'une au moins des coordonnées du centre est infinie, *c'est-à-dire que les équations qui déterminent les coordonnées du centre doivent être incompatibles* (360).

Il s'agit de distinguer entre les deux paraboloïdes et le cylindre parabolique (378). Les sections par les plans coordonnés suffisent pour y arriver. En effet, les trois plans coordonnés ne pouvant être parallèles à la fois à l'axe de l'un des paraboloïdes, si la surface considérée rentre dans cette classe, l'une au moins des trois sections obtenues sera : *une ellipse dans le cas du paraboloïde elliptique* (416), *une hyperbole dans le cas du paraboloïde hyperbolique* (420). Quant au *cylindre parabolique*, les sections ne peuvent être dans ce cas que des *paraboles* (384). Il est bien entendu qu'au lieu d'une des trois coniques on peut, dans chaque cas, trouver l'une de ses variétés.

Puisque $M = 0$, l'équation en s admet encore une racine nulle, et l'on peut facilement ramener l'équation donnée à sa forme la plus simple.

439. *Exemples :*

1° Soit l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 2yz - 3x - 2y + 2z + 1 = 0.$$

On a

$$M = 4 - 2 - 2 = 0.$$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$4x - 2z - 3 = 0,$$
$$4y - 2z - 2 = 0,$$
$$z - x - y + 1 = 0.$$

En ajoutant les deux premières, on obtient

$$4x + 4y - 4z - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad z - x - y + \frac{5}{4} = 0,$$

équation incompatible avec la troisième. Donc le centre est à l'infini. Le plan des xy coupe la surface suivant la courbe

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 2y + 1 = 0.$$

On déduit de cette équation

$$y = 1 \pm \sqrt{-4x^2 + 6x - 1}.$$

Les racines du trinôme placé sous le radical étant réelles et inégales, la section obtenue est une ellipse, et la surface un *paraboloïde elliptique*.

L'équation en s (débarrassée de sa racine nulle) est

$$s^2 - 5s + 6 = 0, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Cette équation présentant deux variations, les coefficients P′ et P″ ont bien le même signe. Pour calculer $2Q$, il faut se rappeler qu'on a (369, 434), le coefficient P correspondant à la racine $s = 0$ ou au carré x^2,

$$Q = G\cos\alpha + H\cos\beta + K\cos\gamma,$$
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{DF - BE}{AB - D^2}, \quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{DE - AF}{AB - D^2},$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Il viendra donc ici

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\frac{1}{2},\quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{1}{2},\quad \text{d'où}\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{1}{\cos^2\gamma}.$$

Par suite,

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\quad \cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

et

$$Q=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\times 2\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

L'équation la plus simple de la surface sera donc

$$3y^2+2z^2-\frac{\sqrt{6}}{6}x=0\quad \text{ou}\quad \frac{y^2}{\frac{\sqrt{6}}{36}}+\frac{z^2}{\frac{\sqrt{6}}{24}}=2x.$$

2° Soit l'équation

$$z^2+4xy-2xz-2yz-3x-2y+2z+2=0.$$

On a

$$M=4-4=0.$$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$\begin{aligned}4y-2z-3&=0,\\ 2x-z-1&=0,\\ z-x-y+1&=0.\end{aligned}$$

Si l'on élimine x entre les deux dernières, il vient

$$z-2y+1=0.$$

On peut d'ailleurs mettre la première sous la forme

$$z-2y+\frac{3}{2}=0,$$

équation incompatible avec la précédente. Donc le centre est à l'infini.

Le plan des xy coupe la surface suivant la courbe

$$4xy-3x-2y+2=0.$$

On déduit de cette équation

$$y=\frac{3x-2}{4x-2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4(2x-1)}.$$

La section obtenue est donc une hyperbole. Par suite, la surface est un *paraboloïde hyperbolique*.

L'équation en s est (en supprimant la racine nulle)

$$s^2-s-6=0,\quad \text{d'où}\quad s=\frac{1\pm 5}{2},$$

Cette équation présentant une seule variation, les coefficients P′ et P″ sont bien de signes contraires. Pour calculer $2Q$, on suivra la même marche que dans l'exemple précédent. On aura ici

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\frac{1}{2},\quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{1}{2},\quad \text{d'où}\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{1}{\cos^2\gamma},$$

c'est-à-dire

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\quad \cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

et

$$Q=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\times 2\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

L'équation la plus simple de la surface sera donc

$$3y^2-2z^2-\frac{\sqrt{6}}{6}x=0\quad\text{ou}\quad \frac{y^2}{\frac{\sqrt{6}}{36}}-\frac{z^2}{\frac{\sqrt{6}}{24}}=2x.$$

Détermination des génératrices rectilignes. — On peut demander de trouver directement les génératrices rectilignes de la surface.

Il suffit pour cela de remarquer que, si l'on parvient à mettre l'équation de la surface sous la forme

$$U^2-V^2=T,$$

U, V, T étant des polynômes du premier degré en x, y, z, les équations des génératrices rectilignes seront, pour l'un des systèmes,

$$\begin{cases} U+V=mT,\\ U-V=\dfrac{1}{m}; \end{cases}$$

et pour l'autre système,

$$\begin{cases} U+V=\dfrac{1}{n},\\ U-V=nT. \end{cases}$$

Prenons l'équation proposée, et résolvons-la par rapport à z. Il vient

$$z=x+y-1\pm\sqrt{x^2-2xy+y^2+x-1}.$$

On peut donc mettre l'équation donnée sous la forme

$$(z-x-y+1)^2=x^2-2xy+y^2+x-1.$$

D'ailleurs le second membre égalé à zéro donne à son tour

$$y=x\pm\sqrt{1-x},$$

de sorte que ce second membre peut s'écrire

$$(y-x)^2-(1-x).$$

L'équation considérée reviendra donc finalement à celle-ci :

$$(z-x-y+1)^2-(y-x)^2=x-1.$$

En posant alors

$$U=z-x-y+1,$$
$$V=y-x,$$
$$T=x-1,$$

les équations des génératrices rectilignes seront pour l'un des systèmes,

$$\begin{cases} z-2x+1=m(x-1), \\ z-2y+1=\dfrac{1}{m}, \end{cases}$$

et pour l'autre système.

$$\begin{cases} z-2x+1=\dfrac{1}{n}, \\ z-2y+1=n(x-1). \end{cases}$$

Nota. — On peut baser, sur ce mode de décomposition de l'équation, une autre méthode de discussion des surfaces du second ordre.

3° Soit l'équation

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-3x-2y+2z+2=0.$$

On a

$$M=1+2-1-1-1=0.$$

Les équations qui déterminent les coordonnées du centre sont

$$2x+2y-2z-3=0,$$
$$2y+2x-2z-2=0,$$
$$2z-2x-2y+2=0.$$

Les deux dernières n'en font qu'une, mais les deux premières sont incompatibles; par conséquent, il n'y a pas de centre, ou encore, il y en a une infinité, transportés à l'infini. Les intersections avec les plans coordonnés sont les courbes

$$x^2+y^2+2xy-3x-2y+2=0,$$
$$x^2+z^2-2xz-3x+2z+2=0,$$
$$y^2+z^2-2yz-2y+2z+2=0.$$

On déduit de ces équations

$$y=-x+1\pm\sqrt{x-1}.$$
$$z=x-1\pm\sqrt{x-1}.$$
$$z=y-1\pm\sqrt{-1}.$$

Les courbes correspondantes sont trois paraboles; la dernière est imaginaire, parce que la surface ne rencontre pas le plan des yz. Cette surface est donc un *cylindre parabolique*.

Cherchons la direction des génératrices de la surface, en remplaçant dans l'équation donnée x et y par $az+p$ et $bz+q$ (332). Il viendra

$$(a^2+b^2+1+2ab-2a-2b)z^2+2(a+b-1)pz+2(b+a-1)qz$$
$$+(2-3a-2b)z+p^2+q^2+2pq-3p-2q+2=0.$$

Pour que z disparaisse, il faut qu'on ait

$$a^2+b^2+1+2ab-2a-2b=0, \quad a+b-1=0, \quad 2-3a-2b=0.$$

On en déduit

$$a=0 \quad \text{et} \quad b=1.$$

On trouve ainsi que les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite

$$\begin{cases} x=0, \\ y=z. \end{cases}$$

bissectrice de l'angle zOy.

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Dans l'ellipsoïde, la somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur une droite ou sur un plan quelconque est constante.

II. On peut regarder le paraboloïde elliptique comme un ellipsoïde ou comme un hyperboloïde à deux nappes dont l'un des sommets réels reste fixe et dont le centre se transporte à l'infini dans un sens ou dans l'autre. On peut de même regarder le paraboloïde hyperbolique comme un hyperboloïde à une nappe dont le centre se transporte à l'infini.

III. Quand l'équation générale du second degré représente un cylindre parabolique, les six termes du second degré forment un carré.

IV. Une surface conique circonscrite à une surface du second ordre la touche suivant une courbe plane (*Voir* Note III).

V. Lorsqu'on circonscrit à une surface du second ordre une série de surfaces coniques dont les sommets sont dans un même plan, les plans de toutes les courbes de contact se coupent en un même point, *pôle* du plan donné, et situé sur le diamètre de la surface qui est conjugué au plan tangent parallèle au plan donné.

Réciproquement, si l'on mène par un même point à une surface du second ordre une série de plans sécants, les surfaces coniques circonscrites à la surface suivant les courbes déterminées, ont leurs sommets dans un même plan, *plan polaire* du point donné et parallèle au plan tangent qui est conjugué au diamètre de la surface passant par ce point.

VI. Trouver le lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances à autant de points fixes qu'on voudra soit constante.

VII. Trouver le lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances à trois plans donnés soit constante.

VIII. Trouver le lieu des points également distants d'une droite et d'un plan qui se coupent.

IX. Trouver le lieu décrit par l'arête d'un angle dièdre droit dont les faces passent constamment par deux droites données non situées dans un même plan.

X. Trouver le lieu des points également distants de deux droites données non situées dans un même plan.

XI. Trouver le lieu des foyers des ellipses déterminées sur un ellipsoïde par ses plans diamétraux.

XII. Le sommet d'un angle trièdre tri-rectangle dont les faces restent constamment tangentes à une surface du second ordre à centre unique, décrit une sphère concentrique à la surface (théorème de Monge). Dans le cas où la surface est dénuée de centre, la sphère se transforme en un plan perpendiculaire à l'axe de la surface.

XIII. Dans une surface du second ordre (sauf le paraboloïde hyperbolique), deux cercles quelconques appartenant respectivement aux deux séries de sections circulaires qu'admet la surface, sont toujours situés sur une même sphère.

XIV. Étant donnés une sphère et un plan, trouver le lieu des points tels, que la tangente menée de chacun d'eux à la sphère soit égale à la distance du point considéré au plan donné.

XV. Trouver l'équation de la surface engendrée par une parabole tournant autour de son axe, et déterminer la position que doit occuper cet axe pour que l'intersection de la surface par un plan quelconque ait une projection circulaire sur un plan donné.

XVI. On donne les trois axes d'un ellipsoïde, et l'on demande de calculer l'aire de la section faite dans ce corps par un plan mené par le centre perpendiculairement à la droite qui forme avec les trois axes les angles α, β, γ. On demande en outre de trouver l'équation de la surface conique déterminée par les perpendiculaires élevées par le centre à tous les plans qui, passant par ce point, donnent des sections ayant une même aire donnée.

XVII. On donne une droite RS et deux points A et B hors de cette droite, tels que RS et AB soient dans des plans différents. C étant un point quelconque de RS, on mène aux droites CA et CB, par les points A et B, deux plans perpendiculaires : trouver le lieu de leurs intersections.

XVIII. On prend les cercles d'une sphère donnée pour bases de différents cônes, et l'extrémité d'un rayon pour sommet commun de ces cônes : tout plan perpendiculaire à ce rayon coupera ces cônes suivant des cercles.

XIX. x, y, z désignant des coordonnées rectangulaires et m un paramètre variable, on demande de déterminer les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)=2m^2-3m+1,$$

lorsque m varie de $-\infty$ à $+\infty$ (*Concours de l'École Polytechnique*, 1858).

XX. Par un point donné sur l'axe d'un paraboloïde de révolution on mène une sécante, et par les points où cette sécante coupe la surface, on mène des normales à la section méridienne qui les contient : ces normales se rencontrent en un point dont on demande le lieu. On examinera si tous les points de la surface obtenue font réellement partie du lieu (*Concours général*, 1859).

XXI. On donne deux ellipsoïdes A et B. On demande le lieu des sommets des angles trièdres dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde A et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde B (*Concours général*, 1860).

XXII. Un ellipsoïde étant donné, trouver le lieu des centres des sections planes dont l'aire est égale à une constante donnée (*Concours général*, 1861).

XXIII. Reconnaître les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2xz)+c(z^2+2xy)=1,$$

et démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une surface de révolution est (en supposant les axes rectangulaires)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

(*Concours de l'École Polytechnique*, 1861).

XXIV. On coupe les trois arêtes d'un angle trièdre fixe par un plan qui se meut de manière que le volume du tétraèdre déterminé reste constant : trouver le lieu décrit par le centre de gravité de ce tétraèdre (*Concours général*).

XXV. Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$x^2+y^2-z^2+2pxz+2qyz-2ax-2by-2cz=0,$$

où a, b, c, sont des nombres positifs connus : 1° lorsque p et q varient d'une manière quelconque; 2° lorsque p et q varient de manière que l'équation proposée représente un cône. Indiquer la partie du lieu qui répond à des hyperboloïdes à une nappe et celle qui répond à des hyperboloïdes à deux nappes (*Concours de l'École Polytechnique*, 1862).

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.

NOTIONS FONDAMENTALES.

CHAPITRE PREMIER.

REPRÉSENTATION DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

Préliminaires.

1. Le dessin ordinaire suffit pour représenter exactement les figures planes. Il devient insuffisant lorsqu'il s'agit de représenter les figures de l'espace, c'est-à-dire les polyèdres, les bâtiments, les machines, etc., dont on veut pouvoir conserver, ou retrouver d'une manière précise et sûre, non-seulement la disposition générale, mais surtout les dimensions. Ces dimensions, en effet, sont altérées par la perspective (*).

On emploie alors la *Géométrie descriptive*.

« Cet art a deux objets principaux.

» Le premier est de représenter avec exactitude, sur des » dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en » ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoureuse.

» Sous ce point de vue, c'est une langue nécessaire à » l'homme de génie qui conçoit un projet, à ceux qui doi- » vent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent » eux-mêmes en exécuter les différentes parties.

« Le second objet de la Géométrie descriptive est de dé- » duire de la description exacte des corps tout ce qui suit » nécessairement de leurs formes et de leurs positions respec- » tives. Dans ce sens, c'est un moyen de rechercher la vé- » rité; elle offre des exemples perpétuels du passage du » connu à l'inconnu ;.....» (MONGE, *Géométrie descriptive, Programme*, p. viij.)

Ainsi, la *géométrie descriptive est surtout un art*, indispen-

(*) La *perspective* d'un objet est l'ensemble des intersections d'un plan appelé *tableau* et des rayons visuels menés du *point de vue* ou du point où l'on se suppose placé, à tous les points de l'objet qu'on dessine.

sable dans une foule d'applications telles que : la Perspective, la détermination des Ombres, la Stéréotomie ou coupe des pierres, la Charpente, etc.; *mais c'est encore une science*, qui peut rendre dans certains cas, comme procédé logique, sous le rapport de la clarté et même de la simplicité, de très-grands services.

Représentation du point.

2. Comme toutes les surfaces sont composées de points, il faut d'abord savoir fixer la position d'un point dans l'espace, suivant les principes de la géométrie descriptive.

Pour cela, nous prendrons (*fig.* 1) deux plans perpendiculaires entre eux : l'un, HH, est supposé *horizontal*, l'autre, VV, est alors *vertical*. Nous désignerons par LT leur intersection, et nous les supposerons indéfiniment prolongés de part et d'autre de cette intersection ou *ligne de terre*.

Le plan VV, appelé *plan vertical*, partage le plan HH, appelé *plan horizontal*, en deux régions : l'une *antérieure*, l'autre *postérieure* par rapport au plan vertical. Le plan horizontal partage à son tour le plan vertical en deux régions : l'une *supérieure*, l'autre *inférieure* par rapport au plan horizontal.

Les deux plans partagent l'espace en quatre régions ou angles dièdres. L'angle dièdre formé par la partie antérieure du plan horizontal et la partie supérieure du plan vertical, peut être désigné sous le nom d'angle *antérieur-supérieur;* le suivant sera alors appelé angle *supérieur-postérieur*, etc. Mais il sera plus simple de les indiquer en disant *premier* angle, *second* angle, etc., et en convenant de les numéroter dans le sens d'une rotation régulière autour de l'intersection LT.

Ceci posé, considérons un point M situé dans le premier angle. Abaissons de ce point la perpendiculaire Mm sur le plan horizontal, la perpendiculaire Mm' sur le plan vertical; m sera la *projection* du point M sur le plan horizontal ou la *projection horizontale* de ce point, m' sera sa *projection verticale*.

Le plan mMm' étant perpendiculaire à la fois aux deux plans HH et VV, qui forment le système des *plans de projection*, est perpendiculaire à leur intersection LT qu'il coupe au point μ, de sorte que la figure mM$m'\mu$ est un rectangle, et qu'on a $m'\mu = $ Mm, $m\mu = $ Mm'. Ainsi *la distance du point* M *au plan horizontal est égale à la distance de sa projection verticale* m' *à la ligne de terre* LT, *et la distance du point* M *au plan vertical est égal à la distance de sa projection horizontale à la ligne de terre.*

La remarque faite prouve en outre que les projections m et m' suffisent pour déterminer le point M; car les perpendiculaires mM, m'M, élevées respectivement par ces points aux

deux plans de projection, étant situées dans un même plan, se coupent au point M de l'espace, comme leurs parallèles $m'\mu$, $m\mu$, au point μ de la ligne de terre.

3. Pour ramener les constructions de l'espace à être effectuées sur un seul plan, on suppose que le plan vertical tourne autour de la ligne de terre de manière à se *rabattre* sur le plan horizontal. Dans ce mouvement (dont la *fig.* 1 indique la direction), la partie supérieure du plan vertical vient recouvrir la partie postérieure du plan horizontal, tandis que sa partie inférieure vient se placer sous la partie antérieure du plan horizontal. Le point m', entraîné avec le plan vertical, reste toujours sur la perpendiculaire $m'\mu$ à LT, de sorte qu'après le rabattement cette perpendiculaire se confondant avec le prolongement de $m\mu$, *les projections m et m' du point* M *de l'espace se trouvent situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

On appelle *épure* le dessin obtenu en réunissant ainsi sur une même feuille ce qui a rapport aux projections verticales et aux projections horizontales.

Lire une épure, c'est, en la pliant par la pensée autour de la ligne de terre, de manière à reproduire les deux plans de projection, concevoir ou reconstituer la figure de l'espace d'après le tracé graphique exécuté.

4. Il est facile de voir que les positions occupées par les projections d'un point de l'espace, relativement à la ligne de terre, varient suivant l'angle auquel il appartient.

Dans le premier angle, *la projection horizontale* tombe sur la partie antérieure du plan horizontal ou *au-dessous* de la ligne de terre, *la projection verticale* se trouve sur la partie supérieure du plan vertical ou *au-dessus* de la ligne de terre.

Dans le second angle, *les deux projections sont situées au-dessus de la ligne de terre.*

Dans le troisième angle, *la projection horizontale* est *au-dessus* de la ligne de terre, tandis que la projection verticale est *au-dessous.*

Enfin, dans le quatrième angle, *les deux projections sont situées au-dessous de la ligne de terre.*

La *fig.* 2 présente le tableau de ces différents cas.

Lorsqu'un point est sur l'un des plans de projection, il est à lui-même sa propre projection sur ce plan, et son autre projection est sur la ligne de terre.

Les deux projections d'un point se confondent avec lui lorsqu'il appartient à la ligne de terre.

Lorsqu'un point est situé sur l'un des plans bissecteurs des angles dièdres formés par les plans de projection, ses projec-

tions sont également éloignées de la ligne de terre, parce qu'il est lui-même à égale distance des deux plans de projection (2); *lorsque ce point appartient au second ou au quatrième angle, ses projections se superposent donc dans l'épure.*

5. En résumé, *pour que deux points de l'épure représentent les projections d'un même point de l'espace, il faut et il suffit que ces deux points soient sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. La distance de la projection horizontale à la ligne de terre représente la distance du point de l'espace au plan vertical; la distance de la projection verticale à la ligne de terre représente la distance du point de l'espace au plan horizontal.*

On voit que l'ensemble des plans de projection revient identiquement au système des plans coordonnés employés en géométrie analytique.

En géométrie descriptive, on obtient le point de l'espace en faisant passer par sa projection horizontale une perpendiculaire au plan horizontal, et en prenant sur cette perpendiculaire une longueur égale à la distance de la projection verticale à la ligne de terre. En géométrie analytique, l'x et l'y du point déterminent la position de sa projection sur le plan des xy, et le z du point fait connaître sa distance au plan des xy. Les signes des coordonnées remplissent en géométrie analytique le même rôle que les différentes positions occupées par les projections d'un point relativement à la ligne de terre, en géométrie descriptive.

6. Nous représenterons toujours un point de l'espace par une grande lettre, sa projection horizontale par la petite lettre correspondante, et sa projection verticale par la même petite lettre affectée d'un accent. Ainsi, le point M aura m pour projection horizontale et m' pour projection verticale.

Représentation de la ligne droite.

7. Nous savons (*Géom.*, 183) que *la projection d'une droite sur un plan est une droite.*

Le plan conduit suivant la droite donnée, perpendiculairement au plan horizontal, est le plan *qui projette horizontalement* cette droite; de même, le plan conduit suivant la droite donnée, perpendiculairement au plan vertical, est le plan *qui la projette verticalement.*

Une droite est, *en général,* déterminée par ses deux projections; car ces projections permettent de reconstruire les deux plans projetants dont la droite de l'espace représente l'intersection.

Lorsqu'on connaît deux points d'une droite, on obtient ses projections en joignant les projections de même nom des points donnés. La droite de l'espace étant la droite AB, sa projection horizontale sera donc désignée par *ab* et sa projection verticale par *a' b'*.

Le point où la droite considérée perce le plan horizontal de projection, est *sa trace horizontale;* le point où elle perce le plan vertical, est sa *trace verticale.* Lorsqu'on connaît *les traces* d'une droite, on peut juger immédiatement de sa position par rapport aux plans de projection.

8. *Détermination des traces d'une droite.*

Soit (*fig.* 3) une droite, donnée par ses deux projections obliques à la ligne de terre. La trace horizontale de cette droite est un point du plan horizontal; donc, la projection verticale de cette trace appartenant à la fois à la ligne de terre et à la projection verticale de la droite, se trouve en *a'* à leur rencontre. Dès lors on aura la trace horizontale cherchée, en élevant au point *a'* une perpendiculaire à LT, jusqu'à la rencontre de la projection horizontale de la droite au point *a* (5). On obtiendra de même la trace verticale *b'*, en prolongeant la projection horizontale de la droite jusqu'au point *b* où elle coupe la ligne de terre, et en élevant au point *b* une perpendiculaire à LT jusqu'à la rencontre de la projection verticale de la droite.

La règle sera donc, *pour avoir la trace horizontale d'une droite, de prolonger sa projection verticale jusqu'à la ligne de terre, et d'élever par le point obtenu une perpendiculaire à* LT *jusqu'à la rencontre de la projection horizontale; pour avoir la trace verticale, de prolonger la projection horizontale de la droite jusqu'à la ligne de terre, et d'élever par le point obtenu une perpendiculaire à* LT *jusqu'à la rencontre de la projection verticale.* Réciproquement, *étant données les traces d'une droite, on pourra obtenir immédiatement ses projections,* puisqu'on connaîtra deux points de chacune d'elles.

La *fig.* (3), par la disposition des traces, montre que la partie interceptée sur la droite proposée par les plans de projection est située *dans le premier angle.* La *fig.* 3 *bis* montre au contraire (la droite considérée allant dans l'espace du point *a* au point *b'*) que cette partie interceptée est comprise *dans le second angle.*

On verra facilement quelle doit être la disposition des traces, pour que la partie interceptée sur la droite donnée par les plans de projection soit comprise *dans le troisième ou dans le quatrième angle* (4).

9. *Tracé des épures.* — A ce sujet, nous indiquerons dès à

présent les conventions suivantes, relatives au tracé des épures.

Celui qui lit une épure est toujours supposé placé *dans le premier angle*, c'est-à-dire *au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical*. Il *voit* donc toutes les lignes comprises *dans le premier angle*, *il ne voit pas* les lignes comprises *dans les trois autres angles*.

Lorsqu'il s'agit *des lignes principales* d'une figure, c'est-à-dire de celles qui correspondent aux données et aux inconnues de la question, on marque *en lignes pleines* les projections *des parties visibles* de ces lignes, *en lignes ponctuées ou formées de points ronds* les projections *de leurs parties invisibles*.

Les projections *des lignes auxiliaires* sont toujours figurées *en traits discontinus*, c'est-à-dire qu'elles sont formées d'éléments de ligne droite, séparés par un petit intervalle. Lorsque les lignes auxiliaires considérées sont très-importantes, on emploie des *lignes mixtes* ou composées d'éléments de ligne droite, séparés par un ou plusieurs points ronds.

Les lignes de projection, c'est-à-dire les lignes perpendiculaires à la ligne de terre qui unissent les projections d'un même point, sont tracées comme les projections des lignes auxiliaires, seulement à l'aide d'éléments moins longs et plus rapprochés.

On peut se reporter maintenant aux *fig.* 3 et 3 *bis*.

10. *Lorsque la droite proposée n'est pas située dans un plan perpendiculaire à* LT, elle peut être :

1° *Oblique aux deux plans de projection ;* ses deux projections sont alors obliques à la ligne de terre, en vertu des positions occupées par ses traces (*fig.* 3 et 3 *bis*).

2° *Parallèle à l'un des plans de projection ;* dans ce cas, sa projection sur le plan auquel elle n'est pas parallèle, est parallèle à la ligne de terre ; sa projection sur le plan auquel elle est parallèle, lui est parallèle et quelconque.

Soit (*fig.* 4) la droite AB *parallèle au plan horizontal*. Tous ses points seront à égale distance du plan horizontal, donc *sa projection verticale a' b' sera parallèle à la ligne de terre ;* sa projection horizontale *ab* lui sera parallèle (*Géom.*, **168**), et pourra occuper une position quelconque oblique à LT.

3° *Parallèle aux deux plans de projection ;* dans ce cas, la droite donnée est *parallèle à la ligne de terre* (*Géom.*, **168**), et il en est de même *de ses deux projections* (*fig.* 5).

11. *Lorsque la droite proposée est située dans un plan perpendiculaire à* LT, *elle peut être :*

1° *Oblique aux deux plans de projection ;* dans ce cas, les

deux plans *projetant* la droite se confondent avec le plan dans lequel elle est située; *ses deux projections* sont alors dirigées *suivant une seule et même droite perpendiculaire à* LT, qui représente en même temps les projections de toutes les droites situées dans le plan considéré. Il faut donc, *dans ce cas*, si l'on veut complétement déterminer la droite proposée, *qu'on indique les projections de deux de ses points* (*fig.* 6).

2° *Perpendiculaire à l'un des plans de projection;* sa projection sur le plan auquel elle est perpendiculaire se réduit à un point; sa projection sur l'autre plan est perpendiculaire à la ligne de terre.

Soit (*fig.* 6) la droite AB *perpendiculaire au plan horizontal;* tous ses points se projetteront horizontalement au point où elle perce le plan horizontal; le plan qui projette *verticalement* la droite sera d'ailleurs perpendiculaire à la fois aux deux plans de projection, par suite à LT; la projection *verticale* de la droite sera donc *perpendiculaire à la ligne de terre.*

12. *Si la droite donnée rencontre la ligne de terre,* ses deux projections partent d'un même point de LT, qui est la trace commune de la droite sur les deux plans de projection. Il peut arriver alors, *la droite étant située dans le plan bissecteur du second et du quatrième angle,* que ses deux projections soient dirigées suivant une seule et même droite (4).

13. Il résulte de ce qui précède, que deux droites tracées d'une manière quelconque sur les plans de projection peuvent toujours être regardées comme les projections d'une même droite de l'espace, pourvu qu'elles ne soient pas perpendiculaires à la ligne de terre.

Si l'une des projections est perpendiculaire à LT, il faut que l'autre le soit aussi et passe par le même point de la ligne de terre, à moins que la seconde projection ne se réduise à un point, situé alors sur le prolongement de la première.

14. Deux droites de l'espace sont ou non situées dans un même plan.

Si elles sont situées dans un même plan, elles se coupent ou elles sont parallèles.

Lorsque deux droites se coupent, le point de rencontre de leurs projections horizontales et le point de rencontre de leurs projections verticales doivent se trouver sur une même perpendiculaire à LT, parce que ces points de rencontre représentent les projections du point d'intersection des deux droites de l'espace. Les droites AB et CD (*fig.* 7) se coupent, parce que les points de rencontre m et m' de leurs projections

horizontales ab, cd, et de leurs projections verticales $a'b'$, $c'd'$, sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections de même nom sont parallèles, parce que les plans projetants correspondants des deux droites sont parallèles (*Géom.*, **175**). Donc (*fig.* 8), si l'on veut mener par le point (m, m') une parallèle à la droite (ab, $a'b'$), il suffit de mener par le point m la parallèle cd à ab et, par le point m', la parallèle $c'd'$ à $a'b'$.

On reconnaît que *deux droites ne sont pas situées dans un même plan*, à ce que les points de rencontre de leurs projections de même nom ne sont pas situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Les droites (ef, $e'f'$) et (gi, $g'i'$) ne sont pas situées dans un même plan (*fig.* 9).

Remarque. — *Le milieu* d'une droite finie a évidemment pour projections les *milieux* des projections de cette droite.

Représentation du plan.

15. Un plan est déterminé par trois points non en ligne droite, par une droite et un point hors de cette droite, par deux droites qui se coupent, par deux droites parallèles, etc. (*Géom.*, **136**). Par conséquent, on peut représenter un plan en géométrie descriptive par les projections de trois de ses points non situés en ligne droite, par les projections de deux droites concourantes de ce plan, etc.

Le plus souvent, on choisit pour représenter un plan les droites suivant lesquelles il coupe les plans de projection. Ces droites, appelées *traces du plan*, concourent en général au point où la ligne de terre perce le plan proposé.

Étant donné un plan P, nous désignerons sa trace horizontale par H^P et sa trace verticale par V^P (*fig.* 10).

Lorsqu'on connaît les projections de deux droites qui se coupent, il est facile de trouver les traces du plan qu'elles déterminent. En effet, lorsqu'une droite est dans un plan, ses traces sont nécessairement sur les traces de ce plan. Il suffit donc (*fig.* 10) de construire les traces des deux droites; en unissant leurs traces horizontales, on aura la trace horizontale du plan cherché; en unissant leurs traces verticales, on aura sa trace verticale. Comme vérification, les traces obtenues H^P et V^P doivent venir se couper en un même point α de la ligne de terre.

La construction serait la même *si les droites considérées étaient parallèles.*

Si l'on donne une droite et un point hors de cette droite,

on peut, en menant par le point donné une parallèle à la droite donnée, rentrer dans le cas précédent.

Si l'on veut construire les traces d'un plan déterminé par trois points non en ligne droite, on remarque que ces points déterminent trois droites se coupant deux à deux. On a, dans ce cas, deux moyens de vérification : ayant déterminé les traces du plan qui passe par deux des trois droites, il faut que ces traces viennent concourir en un même point de la ligne de terre, et qu'elles renferment les traces de la troisième droite.

16. Un plan peut occuper différentes positions par rapport aux plans de projection :

1° *Il peut être oblique aux deux plans de projection sans être parallèle à* LT; dans ce cas, ses traces sont obliques à la ligne de terre qu'elles coupent en un même point; il peut arriver alors qu'elles soient dirigées suivant une seule et même droite, par exemple si H^P fait avec *la droite* de LT le même angle que V^P avec *la gauche* de LT.

2° *Il peut être perpendiculaire à l'un des plans de projection;* sa trace sur le plan auquel il n'est pas perpendiculaire, est alors perpendiculaire à la ligne de terre.

Soit le plan P *perpendiculaire au plan vertical* (*fig.* 11). Le plan P et le plan horizontal étant tous deux perpendiculaires au plan vertical, il en sera de même de leur intersection H^P (*Géom.*, 184), qui sera dès lors *perpendiculaire à* LT.

De même (*fig.* 11), le plan Q étant *perpendiculaire au plan horizontal, sa trace verticale* V^Q *sera perpendiculaire à la ligne de terre.*

Lorsqu'un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, tout ce qui est dans ce plan se projette sur sa trace, par rapport à ce plan de projection.

3° *Il peut être perpendiculaire aux deux plans de projection;* dans ce cas, il est perpendiculaire à LT, et ses deux traces H^R et V^R (*fig.* 11) se confondent suivant une seule et même droite perpendiculaire à la ligne de terre.

4° *Il peut être parallèle à l'un des plans de projection;* il n'a alors qu'*une seule trace,* sur le plan auquel il n'est pas parallèle, et cette trace est nécessairement parallèle à LT. V^P (*fig.* 12) représente un plan parallèle au plan horizontal, H^Q (*fig.* 12) représente un plan parallèle au plan vertical.

5° *Il peut être parallèle à la ligne de terre;* dans ce cas, les deux traces du plan sont nécessairement parallèles à la ligne de terre. H^P et V^P (*fig.* 13) représentent un plan parallèle à LT.

Lorsque la partie interceptée par les deux plans de projection sur le plan parallèle à la ligne de terre, est comprise *dans le second ou le quatrième angle,* les deux traces du plan proposé se confondent, lorsqu'il est en outre *également incliné* sur les deux plans de projection (4).

Lorsque le plan considéré passe par la ligne de terre, ses deux traces se confondant avec LT, il faut, si l'on veut le déterminer complétement, donner les projections d'un de ses points hors de LT.

17. Parmi les droites d'un plan, il faut distinguer *celles qui sont parallèles au plan horizontal, et celles qui sont parallèles au plan vertical.*

On appelle *horizontales* d'un plan, les droites de ce plan parallèles au plan horizontal; comme elles sont nécessairement parallèles à la trace horizontale du plan, leur projection horizontale est parallèle à cette trace; leur projection verticale est d'ailleurs parallèle à la ligne de terre.

Les droites du plan, parallèles au plan vertical, ont de même leur projection verticale parallèle à la trace verticale du plan qui les contient, tandis que leur projection horizontale est parallèle à LT.

18. *Connaissant la projection horizontale m d'un point situé dans un plan* P, il est facile de *trouver sa projection verticale* par la considération d'une droite du plan, parallèle au plan horizontal ou au plan vertical.

Menons par le point m (*fig.* 14) une parallèle gh à H^P, cette parallèle sera la projection horizontale de l'horizontale du plan qui passe par le point M. On obtiendra immédiatement sa trace verticale en g' sur V^P, et l'on aura sa projection verticale en menant $g'h'$ parallèle à LT. En abaissant du point m une perpendiculaire sur LT, jusqu'à la rencontre de $g'h'$, on aura m'.

On peut aussi (*fig.* 14) mener par le point m une parallèle il à LT; cette parallèle sera la projection horizontale de la droite menée par le point M, dans le plan P, parallèlement au plan vertical. On obtiendra immédiatement la trace horizontale de cette droite en i sur H^P; projetant i en i', et menant $i'l'$ parallèle à V^P, on aura sa projection verticale qui achèvera de déterminer m'.

On aurait pu aussi se servir, pour résoudre la question posée, d'une droite quelconque du plan. Menons, par exemple, par le point m (*fig.* 10) la droite cd qui coupe LT au point d et H^P au point c. On pourra la regarder comme la projection horizontale d'une droite du plan ayant le point c pour trace

horizontale. Cette droite étant contenue dans le plan P, aura d' pour trace verticale et, par conséquent, $c'd'$ pour projection verticale. m' sera donc déterminée.

19. *En géométrie descriptive, la représentation d'une ligne, d'une surface, d'un corps, est regardée comme complète, lorsqu'on peut, à l'aide de cette représentation, trouver la projection verticale d'un point de la figure considérée, quand on donne la projection horizontale, et réciproquement.*

Ce qui précède montre qu'un plan est bien représenté par ses deux traces. Il est facile de voir que les autres modes de représentation indiqués (15) conviennent aussi bien.

Soit un plan donné par les trois points (a, a'), (b, b'), (c, c'), non situés en ligne droite (*fig.* 14 *bis*). m représentant la projection horizontale d'un point M de ce plan, on demande m'. Faisons passer par le point m une droite quelconque ef qui coupe ab au point e et ac au point f. Les droites AB et AC appartenant au plan proposé, on pourra regarder ef comme la projection horizontale d'une droite EF de ce plan, qui s'appuie sur les droites AB et AC et passe par le point M. Si l'on unit les projections verticales des points E et F, on aura donc en $e'f'$ un lieu du point m' qui, devant se trouver en outre sur la perpendiculaire abaissée du point m sur LT, sera complétement déterminé.

20. On doit encore considérer *les lignes de plus grande pente d'un plan*, par rapport à l'un ou à l'autre des plans de projection.

Soit un plan P coupant le plan horizontal H suivant la droite CD (*fig.* 15). Prenons un point A quelconque dans le plan P, projetons-le horizontalement en a, et abaissons en même temps dans le plan P la perpendiculaire AB sur l'horizontale CD. Si nous joignons aB, cette droite sera perpendiculaire sur CD (*Géom.*, 164), et elle sera en même temps la projection horizontale de AB (*Géom.*, 182). Menons maintenant la droite quelconque AB′ dans le plan P, et joignons aB′ qui sera également sa projection horizontale.

Ceci posé, le triangle rectangle AaB donne

$$\text{tang AB}a = \frac{\text{A}a}{a\text{B}};$$

le triangle rectangle AaB′ donne à son tour

$$\text{tang AB}'a = \frac{\text{A}a}{a\text{B}'}.$$

L'oblique aB′ étant plus grande que la perpendiculaire aB à

CD, il en résulte

$$\text{tang } AB'a < \text{tang } ABa.$$

Ces tangentes, qui correspondent aux angles formés par les droites AB et AB′ avec le plan horizontal H (*Géom.*, 186), sont ce qu'on appelle *les pentes* de AB et de AB′ sur le plan H. AB est donc *la ligne de plus grande pente* du plan P par rapport au plan H.

Ainsi, d'une manière générale, les lignes de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre plan sont les perpendiculaires abaissées dans le premier plan sur l'intersection des deux plans.

Les lignes de plus grande pente d'un plan par rapport au plan horizontal sont les droites de ce plan qui sont perpendiculaires à sa trace horizontale; ses lignes de plus grande pente par rapport au plan vertical sont celles qui sont perpendiculaires à sa trace verticale.

On voit que l'angle d'un plan avec l'un des plans de projection est mesuré par l'angle que forme l'une de ses lignes de plus grande pente par rapport à ce plan, avec sa projection sur ce plan.

21. *Proposons-nous de mener par le point* (*m*, *m′*) *du plan* P *les deux lignes de plus grande pente qui y passent* (*fig.* 16). D'après ce que nous venons de dire (20), la ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal aura sa projection horizontale perpendiculaire à H^P : cette projection *ab* sera donc immédiatement déterminée, et l'on en conclura *a′ b′* qui, comme vérification, devra passer par *m′*. La ligne de plus grande pente par rapport au plan vertical aura sa projection verticale perpendiculaire à V^P : cette projection *c′ d′* sera donc immédiatement déterminée, et l'on en conclura *cd* qui, comme vérification, devra passer par *m*.

22. *Deux plans parallèles ont leurs traces de même nom parallèles,* comme intersections de deux plans parallèles par un troisième (*Géom.*, 171).

Proposons-nous de mener, par un point donné, un plan parallèle à un plan donné.

Soient le point (*m*, *m′*) et le plan P (*fig.* 17); soit Q le plan cherché. Menons par le point *m* une parallèle *gh* à H^P et, par le point *m′*, une parallèle *g′ h′* à LT. Nous obtiendrons ainsi les projections d'une *horizontale* du plan Q. La trace verticale *g′* de cette horizontale appartenant à V^Q, et V^Q devant être parallèle à V^P, V^Q sera déterminée. Il ne restera plus qu'à mener, par le point β où V^Q rencontre LT, H^Q parallèle à H^P.

Si le plan P était donné par deux droites concourantes, il

suffirait de mener des parallèles à ces droites par le point donné, pour déterminer le plan Q (*Géom.*, 170).

Si le plan P était parallèle à la ligne de terre, il en serait de même du plan Q. Il faudrait alors mener une droite quelconque dans le plan P. En conduisant par le point donné une parallèle à cette droite, et en en déterminant les traces, on obtiendrait un point de chacune des traces du plan Q.

23. *Lorsqu'une droite et un plan sont perpendiculaires, la trace du plan et la projection de la droite sur un même plan sont perpendiculaires.*

En effet, la droite AB et le plan P étant supposés perpendiculaires (*fig.* 18), projetons la droite AB en *ab* sur le plan H qui coupe le plan P suivant la droite CD. Le plan AB*ab* étant à la fois perpendiculaire aux plans H et P, sera perpendiculaire à leur intersection CD : la trace CD du plan P sur le plan H sera donc perpendiculaire à la projection *ab* de la droite AB sur le même plan.

La réciproque de cette proposition est vraie, pourvu que la condition de perpendicularité soit remplie à la fois par les deux traces du plan P et les deux projections de la droite AB sur les plans de projection; car les deux plans qui projettent la droite AB sont alors perpendiculaires au plan P.

Pour mener par un point donné une perpendiculaire à un plan donné, il suffit donc d'abaisser des projections du point, des perpendiculaires sur les traces du plan.

24. *Pour mener*, au contraire, *par un point donné, un plan perpendiculaire à une droite donnée*, on opérera comme il suit :

Soient (*fig.* 19) la droite (*ab*, *a'b'*) et le point (*m*, *m'*). Les traces du plan devant être perpendiculaires aux projections de la droite, si l'on mène par le point *m* la perpendiculaire *gh* à *ab*, on pourra regarder *gh* comme la projection horizontale de l'*horizontale* du plan cherché, qui passe par le point (*m*, *m'*). La projection verticale de cette horizontale sera parallèle à LT et passera par *m'*. En déterminant sa trace verticale *g'*, on aura un point de la trace verticale du plan demandé. Il suffira donc de tracer par *g'* la perpendiculaire V^P à *a'b'*, puis par le point où V^P coupe LT la perpendiculaire H^P à *ab*. Comme vérification, on peut construire la droite du plan P qui, passant par le point (*m*, *m'*), est parallèle au plan vertical. La trace horizontale *i* de cette droite (*il*, *i'l'*) doit se trouver sur H^P.

CHAPITRE II.

DES MÉTHODES.

Changement des plans de projection.

25. On conçoit que la position d'une figure, par rapport aux plans de projection, puisse influer beaucoup sur la simplicité de la résolution du problème proposé. Par exemple, si l'inconnue est la longueur d'une certaine droite et si cette droite se trouve parallèle au plan horizontal, elle s'y projettera immédiatement en véritable grandeur. Il est donc important d'indiquer la marche à suivre pour changer de plans de projection, afin qu'on soit toujours maître de rendre la disposition des lignes principales de la figure considérée aussi favorable que possible. La discussion nécessaire pour choisir les nouveaux plans de projection, est tout à fait comparable à celle qui conduit en analyse au système d'axes à adopter.

Le plus souvent, et en nous plaçant au point de vue pratique, nous laisserons le plan horizontal invariable, et nous changerons seulement de plan vertical. Toutes les projections horizontales seront alors conservées; quant aux nouvelles projections verticales, elles seront faciles à déterminer, puisque les *hauteurs* des différents points au-dessus du plan horizontal, ou les distances de leurs projections verticales à la ligne de terre, ne devront pas être modifiées. D'ailleurs, ce que nous allons dire s'appliquera indifféremment au changement des deux plans de projection.

26. *Changement des plans de projection par rapport à un point* (*fig.* 20).

La ligne de terre étant LT, on suppose que celui qui lit l'épure a la lettre L à sa *gauche* et la lettre T à sa droite.

Soit le point (m, m') rapporté aux plans de projection indiqués par la ligne de terre LT. Conservons le plan horizontal, et prenons un nouveau plan vertical indiqué par la nouvelle ligne de terre L_1T_1. La projection horizontale m ne changera pas, et la hauteur du point M au-dessus du plan horizontal sera toujours égale à la distance $m'\mu$ de sa projection sur le premier plan vertical à la ligne de terre correspondante. Nous abaisserons donc du point m la perpendiculaire $m\mu_1$ sur L_1T_1, et nous la prolongerons d'une longueur $\mu_1 m'_1 = m'\mu$. Le point m'_1 sera la nouvelle projection verticale du point M.

La figure montre comment on peut lier graphiquement les

constructions qui permettent de passer de la projection m' à la projection m'_1.

On changera aussi facilement de plan horizontal par rapport à un point.

Il faut remarquer, au sujet de ce qui précède, que la position du point M, par rapport au nouveau plan de projection, peut n'être plus la même. Ainsi, dans le cas considéré (*fig.* 20), le point M reste toujours situé au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical ; mais le nouveau plan vertical pourrait être choisi de manière que le point M se trouvât derrière lui. On en serait averti par la place qu'occuperait alors la projection horizontale m relativement à la nouvelle ligne de terre L_1T_1 ; au lieu d'être au-dessous de L_1T_1, cette projection se trouverait au-dessus, et l'on en conclurait que le point M, toujours supérieur au plan horizontal conservé, est nécessairement situé dans le *second* des nouveaux angles formés par les plans de projection adoptés.

27. *Changement des plans de projection par rapport à une droite* (*fig.* 21).

Soit la droite $(ab, a'b')$ rapportée aux plans de projection indiqués par la ligne de terre LT. Conservons le plan horizontal, et prenons un autre plan vertical indiqué par la nouvelle ligne de terre L_1T_1. En changeant de plan de projection, par rapport à deux points de la droite proposée, nous changerons de plan de projection par rapport à cette droite.

Considérons, par exemple, les deux points $(m\,m')$, (n, n'). Nous abaisserons des points n et m les perpendiculaires $n\nu_1, m\mu_1$, sur L_1T_1. Nous prolongerons $n\nu_1$ d'une longueur $\nu_1 n'_1 = \nu n'$, parce que le point N reste situé dans le *premier* angle ; nous prendrons sur $\mu_1 m$, à partir de μ_1, une longueur $\mu_1 m'_1 = \mu m'$, parce que le point M, qui était situé dans le *premier* angle, se trouve maintenant situé dans le *second* par suite de la position du nouveau plan vertical. La nouvelle projection verticale de la droite AB sera donc représentée par la droite $m'_1\,n'_1$.

La trace horizontale a de la droite donnée ne changeant pas, le point où $m'_1\,n'_1$ coupe L_1T_1 doit se confondre avec le pied de la perpendiculaire aa'_1 abaissée du point a sur L_1T_1.

Si l'on cherchait seulement la nouvelle trace verticale de la droite, on remarquerait que le point p où la projection horizontale ab coupe L_1T_1 est la projection horizontale de la nouvelle trace verticale p'_1, qu'on obtiendra alors immédiatement en prenant sur la perpendiculaire élevée au point p à L_1T_1 une longueur $pp'_1 = \pi p'$.

On changera aussi facilement de plan horizontal par rapport à une droite.

28. *Changement des plans de projection par rapport à un plan* (*fig.* 22 et 23).

Soit le plan P rapporté aux plans de projection indiqués par la ligne de terre LT. Conservons le plan horizontal, et prenons un autre plan vertical indiqué par la nouvelle ligne de terre L_1T_1. En changeant de plan de projection par rapport à deux droites du plan proposé, nous changerons de plan de projection par rapport à ce plan.

Considérons, par exemple, la droite $(ab, a'b')$ et l'horizontale $(gh, g'h')$. Tous les points de cette horizontale conservent la même distance au plan horizontal. Par suite, au point m où gh rencontre L_1T_1, élevons à L_1T_1 la perpendiculaire $mm'_1 = \nu m' = gg'$. Le point m'_1 sera la nouvelle trace verticale de l'horizontale considérée, et appartiendra à la nouvelle trace verticale du plan P. Déterminons de même la nouvelle trace verticale de la droite $(ab, a'b')$, en élevant au point n où ab rencontre L_1T_1, la perpendiculaire $nn'_1 = \nu n'$ (27); le point n'_1 appartiendra aussi à la nouvelle trace verticale du plan P. On obtiendra donc cette nouvelle trace V_1^P en traçant la droite $m'_1 n'_1$, et, comme vérification, elle devra venir passer par le point β où la trace horizontale H^P qui ne change pas vient couper L_1T_1.

L'emploi d'une seule horizontale suffit, lorsqu'on ne tient pas à une vérification et que H^P rencontre L_1T_1 dans les limites de l'épure. Si l'on choisit l'horizontale dont la projection horizontale passe par le point d'intersection i des deux lignes de terre LT et L_1T_1 (*fig.* 23), on n'a pas besoin de tracer cette projection horizontale. On élève au point i une perpendiculaire à chacune des deux lignes de terre; la première fait connaître la trace verticale i' de l'horizontale sur le premier plan vertical, et en prenant sur la seconde $ii'_1 = ii'$, on obtient la trace verticale de l'horizontale considérée sur le nouveau plan vertical. En joignant le point i'_1 au point β, où H^P coupe L_1T_1, on a V_1^P.

On changera aussi facilement de plan horizontal par rapport à un plan.

29. *On peut rendre immédiatement une droite* AB *parallèle au plan vertical,* ou mieux le plan vertical parallèle à une droite AB, *en prenant* L_1T_1 *parallèle à ab* (10).

Comme les deux plans de projection doivent toujours demeurer perpendiculaires entre eux, *on ne peut rendre une droite perpendiculaire au plan horizontal que par deux changements de plans successifs.* Car pour que le nouveau plan horizontal perpendiculaire à la droite reste perpendiculaire au plan vertical, il faut que ce plan vertical ait été préalablement rendu parallèle à la droite donnée.

De même, *on peut rendre immédiatement un plan* P *perpendiculaire au plan vertical, en prenant* L_1T_1 *perpendiculaire à* H^p (16); mais *il faut deux changements de plans successifs pour rendre un plan parallèle à l'un des plans de projection.* Car tout plan parallèle au plan vertical, par exemple, est nécessairement perpendiculaire au plan horizontal.

Mouvements de rotation.

30. Au lieu de changer les plans de projection, en laissant fixe la figure considérée, on peut conserver les mêmes plans de projection en transportant dans l'espace la figure proposée, de manière à l'amener dans une position plus favorable. On la fait alors tourner autour d'un axe qu'on choisit ordinairement perpendiculaire à l'un des deux plans de projection.

Dans ce mouvement de rotation, chaque point du système restant toujours à la même distance de l'axe, décrit une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre se trouve sur l'axe. Cette circonférence se projette donc en véritable grandeur sur le plan auquel l'axe est perpendiculaire, et suivant une parallèle à la ligne de terre sur l'autre plan de projection.

31. *Faire tourner un point d'un angle donné autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal* (*fig.* 24).

Soient le point (m, m') et l'axe $(ab, a'b')$ perpendiculaire au plan horizontal. Le rayon de la circonférence décrite par le point M dans son mouvement autour de l'axe aura pour projection horizontale initiale la droite am qui joint le pied de l'axe au point m. Si le point M doit tourner d'un angle égal à l'angle mam_1, la droite am_1 sera la projection horizontale finale de ce rayon, de sorte que le point m_1 représentera la nouvelle projection horizontale du point M. D'ailleurs, si l'on mène par m' une parallèle à la ligne de terre, cette parallèle représentera la trace verticale et unique du plan de la circonférence décrite par M. On n'aura donc qu'à abaisser du point m_1 sur LT une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de la parallèle indiquée, pour obtenir en m'_1 la nouvelle projection verticale du point M.

C'est la question à résoudre qui détermine la valeur de l'angle mam_1.

On opérera d'une manière analogue pour faire tourner un point d'un angle donné autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

32. *Faire tourner une droite d'un angle donné autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal* (*fig.* 25).

Si la droite donnée est dans un même plan avec l'axe, le problème se ramène immédiatement au précédent. En effet, si cette droite coupe l'axe, le point où elle le rencontre ne change pas pendant le mouvement de rotation, de sorte qu'il suffit de faire tourner de l'angle voulu un seul point de la droite, sa trace horizontale par exemple. De même, si la droite proposée est parallèle à l'axe ou perpendiculaire au plan horizontal, comme la rotation ne modifie pas ce parallélisme, il suffit aussi de chercher la nouvelle position occupée par le point où la droite perce le plan horizontal.

Considérons donc seulement le cas où la droite et l'axe donnés ne sont pas situés dans un même plan. Le plan qui projette horizontalement la droite CD étant parallèle à l'axe AB, la perpendiculaire *an* abaissée du pied de l'axe sur *cd* sera précisément la projection horizontale de la plus courte distance de l'axe et de la droite (*Géom.*, 185). Cette plus courte distance, pendant le mouvement de rotation, reste d'ailleurs constamment égale à elle-même et à la plus courte distance du pied de l'axe à la projection horizontale *cd*. Par suite, si l'on décrit une circonférence du point *a* comme centre avec *an* pour rayon, et si l'angle donné est égal à nan_1, on obtiendra la nouvelle projection horizontale de CD, en menant à cette circonférence une tangente $c_1 d_1$ au point n_1; puis, en traçant la parallèle $n'n'_1$ à la ligne de terre, on aura en n'_1 un point de la nouvelle projection verticale de CD. Pour en trouver un second point, on remarquera que la distance de la trace horizontale de CD à l'axe ne doit pas varier. Du point *a* comme centre, avec *ac* pour rayon, on décrira donc une nouvelle circonférence qui viendra couper $c_1 d_1$ au point c_1, nouvelle trace horizontale de CD. On projettera c_1 en c'_1, et en unissant les points c'_1 et n'_1, on aura la nouvelle projection verticale $c'_1 d'_1$. On peut remarquer qu'on a nécessairement $nc = n_1 c_1$. On peut remarquer aussi que, pour faire tourner une droite d'un angle donné autour d'un axe, il faut faire tourner deux de ses points du même angle autour de cet axe. C'est la question à résoudre qui détermine la valeur de l'angle nan_1.

On suivra une marche analogue pour faire tourner une droite d'un angle donné autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

33. *Faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal* (*fig.* 26).

Pour faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe, il suffit évidemment de faire tourner deux de ses droites du même angle autour de cet axe.

Nous choisirons de préférence la trace horizontale du plan

et celle de ses horizontales qui passent par le point où il est percé par l'axe. Pendant le mouvement de rotation, H^P restera à la même distance de l'axe; c'est-à-dire que si l'on abaisse du pied de l'axe la perpendiculaire *an* sur H^P, H^P restera toujours tangente à la circonférence décrite du point *a* comme centre, avec *an* pour rayon. Donc, si nan_1 représente l'angle donné, il suffira de mener par le point n_1 la tangente H_1^P à cette circonférence, pour avoir la trace horizontale du plan P dans sa nouvelle position. D'ailleurs, l'horizontale (gh, $g'h'$) aura pour nouvelle projection horizontale γa parallèle à H_1^P, et sa nouvelle trace verticale sera γ'. En unissant le point γ' au point où H_1^P rencontre la ligne de terre, on aura en V_1^P la nouvelle trace verticale du plan P.

C'est la question à résoudre qui détermine la valeur de l'angle nan_1.

On suivra une marche analogue pour faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

34. *On peut rendre immédiatement une droite* AB *parallèle au plan vertical,* en la faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal, *de l'angle nécessaire pour que sa projection horizontale devienne parallèle à* LT.

On ne peut rendre une droite perpendiculaire au plan horizontal que par deux rotations successives. Car, pour que la droite devienne perpendiculaire au plan horizontal en tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, il faut, son angle avec le plan vertical n'étant pas modifié par cette rotation, qu'elle ait été préalablement rendue parallèle au plan vertical par une première rotation.

De même, *on peut rendre immédiatement un plan* P *perpendiculaire au plan vertical,* en le faisant tourner autour de l'axe perpendiculaire au plan horizontal, *de l'angle nécessaire pour que sa trace horizontale devienne perpendiculaire à* LT. *Mais il faut deux rotations successives pour rendre un plan parallèle à l'un des plans de projection;* car tout plan parallèle au plan horizontal, par exemple, est nécessairement perpendiculaire au plan vertical.

35. En relisant attentivement ce qui précède, il est facile de voir que les deux méthodes *des changements de plans et des mouvements de rotation* sont au fond complétement identiques. Seulement, dans les applications, au point de vue des constructions graphiques, la question proposée peut se résoudre plus ou moins simplement suivant le choix qu'on fait entre les deux méthodes.

Nous ajouterons que leur emploi n'est commode, en général, que lorsqu'on peut se borner à un seul changement de plan ou à un seul mouvement de rotation. En général aussi, il faut faire suivre un changement de plan d'un mouvement de rotation plutôt que d'un second changement de plan.

Rabattements.

36. Il peut arriver que toutes les lignes qui se rapportent au problème considéré soient situées dans un même plan. On comprend alors que si l'on prenait ce plan pour l'un des plans de projection, toutes les constructions devant s'effectuer, non plus dans l'espace, mais sur un seul et même plan, toute difficulté disparaîtrait en ce sens qu'on serait ramené aux procédés de la géométrie élémentaire.

Au lieu d'opérer *un changement de plan*, on peut *rabattre* le plan qui renferme les lignes du problème, avec tout ce qu'il contient, sur l'un des plans de projection, *en le faisant tourner autour de sa trace dans ce plan, prise comme axe de rotation.* Une fois ce *rabattement* opéré, on résoudra directement la question proposée, et il ne restera plus qu'à relever le plan qu'on a rabattu, pour placer les inconnues déterminées dans leur véritable position par rapport aux plans de projection.

Lorsque le plan qu'on doit rabattre est perpendiculaire à l'un des plans de projection, le rabattement à faire n'est autre qu'un *mouvement de rotation* autour d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection (33).

Lorsque le plan considéré est oblique par rapport aux deux plans de projection, on peut commencer par le rendre perpendiculaire à l'un d'eux en effectuant un changement de plan ou un mouvement de rotation; mais il est préférable de suivre la marche que nous allons indiquer.

37. Soient le plan P et le point (m, m') situé dans ce plan (*fig.* 27). On veut rabattre le plan P sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale, et marquer dans le plan rabattu la position du point M.

Menons par le point M une horizontale $(gh, g'h')$. Abaissons $g\gamma$ perpendiculaire sur H^P. D'après le théorème des trois perpendiculaires, la droite $g'\gamma$ de l'espace est perpendiculaire sur H^P, et elle ne cessera pas de l'être pendant le mouvement de rotation. Sa longueur est d'ailleurs égale au côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant $\alpha\gamma$ pour autre côté de l'angle droit et $g'\alpha$ pour hypoténuse. Ainsi, pour avoir le rabattement g_0 du point g' de la trace verticale V^P, il suffit de décrire,

jusqu'à la rencontre de $g\gamma$ prolongée, un arc de cercle ayant α pour centre et $\alpha g'$ pour rayon. En joignant ensuite le point g_0 au point α, on aura en $H^P \alpha V_0^P$ le rabattement de la partie du plan P comprise entre ses deux traces.

L'horizontale dont la trace verticale est g', demeure parallèle à H^P pendant la rotation. On obtiendra donc son rabattement en menant par g_0 une parallèle à H^P. Le point M appartenant à cette horizontale, son rabattement m_0 appartiendra à la parallèle indiquée; de plus, si l'on mène la perpendiculaire $m\mu$ à H^P, la droite $M\mu$ de l'espace sera perpendiculaire à H^P, de sorte que le rabattement du point M se trouvera aussi sur la perpendiculaire $m\mu$ prolongée. Il sera donc en m_0 à la rencontre des deux lieux.

Il est facile de déduire de ce qui précède une règle pratique. Il faudrait modifier un peu la construction, si l'on ne connaissait pas V^P. Nous en donnerons plus loin un exemple (58).

38. Supposons maintenant, au contraire, qu'on connaisse le rabattement m_0 du point M, et qu'on demande de déterminer ses deux projections m et m' (*fig.* 27).

Par le point m_0, on mènera $m_0 g_0$ parallèle à H^P. Par un arc de cercle décrit du point α comme centre avec αg_0 pour rayon, on ramènera g_0 en g' sur V^P. $g'h'$ et gh représenteront alors les projections de l'horizontale du plan P qui passe par le point M. Il suffira donc d'abaisser la perpendiculaire $m_0 \mu m$ sur gh, puis la perpendiculaire mm' sur $g'h'$, pour avoir en m et en m' les projections du point M.

39. Pour montrer immédiatement, par un exemple, à quel genre de problèmes il convient d'appliquer la méthode des rabattements, nous résoudrons la question suivante.

On donne la projection horizontale mn du côté d'un triangle équilatéral situé dans un plan P *déterminé par ses traces, et l'on demande les deux projections du triangle* (*fig.* 28).

Nous construirons d'abord la projection verticale du côté MN. Pour cela, nous mènerons les horizontales du plan P qui passent par les points M et N; m' et n' appartiendront aux projections verticales de ces horizontales et aux perpendiculaires abaissées des points m et n sur LT. Ayant ainsi trouvé $m'n'$, nous rabattrons le plan P sur le plan horizontal (37). Dans ce rabattement, le côté MN viendra occuper la position $m_0 n_0$. Si l'on trace alors sur $m_0 n_0$ comme base le triangle *équilatéral* $m_0 n_0 p_0$, ce triangle représentera le rabattement du triangle MMP de l'espace; et pour résoudre la question pro-

posée, il suffira de déduire du rabattement p_0 du sommet P ses projections p et p' (38). On aura donc en mnp et en $m'n'p'$ les deux projections du triangle équilatéral construit, dans le plan P, sur le côté MN.

CHAPITRE III.

DES INTERSECTIONS.

Intersection des plans.

40. L'intersection de deux plans est une droite. On trouve immédiatement les projections de cette intersection, lorsque, les deux plans étant donnés par leurs traces, ces traces se coupent dans les limites de l'épure.

Soient (*fig.* 29) les deux plans P et Q. Les traces H^P et H^Q se rencontrant en a, ce point appartient à l'intersection cherchée, et comme il est dans le plan horizontal, il représente la trace horizontale de cette intersection. De même, le point b' où se coupent les traces V^P et V^Q, est la trace verticale de l'intersection. Les droites ab, $a'b'$, sont donc les projections de l'intersection des deux plans donnés (8).

41. Le plus souvent, par suite de la disposition des traces des plans donnés, on ne peut employer ce procédé. Il faut alors recourir à une méthode complétement générale.

Pour trouver l'intersection de deux surfaces quelconques, on les coupe par des surfaces auxiliaires *convenablement choisies*. Chaque surface auxiliaire détermine sur les surfaces considérées deux lignes : ces lignes se rencontrent, sur la surface auxiliaire employée, en un ou plusieurs points qui appartiennent évidemment à l'intersection cherchée. *On peut ainsi la construire par points aussi rapprochés qu'on veut.* En général, les surfaces auxiliaires sont des plans.

42. Nous n'examinerons pas tous les cas particuliers qui peuvent se présenter lorsqu'on cherche l'intersection de deux plans. Nous choisirons les plus importants, de manière à indiquer surtout les différents procédés dont on peut faire usage.

Trouver l'intersection de deux plans dont les traces horizontales sont parallèles et dont les traces verticales se coupent dans les limites de l'épure (*fig.* 30).

Les deux plans pouvant être regardés comme conduits par les parallèles H^P et H^Q, se coupent suivant une parallèle à ces droites (*Géom.*, 168), c'est-à-dire suivant une horizontale.

Cette horizontale est déterminée, puisque sa trace verticale est nécessairement en g', point de rencontre des traces verticales V^P et V^Q.

43. *Trouver l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre* (*fig.* 31 et 31 *bis*).

L'intersection des deux plans est alors parallèle à la ligne de terre (*Géom.*, 168), et il suffit d'en trouver un point. Nous indiquerons les deux procédés suivants.

Soient (*fig.* 31) les deux plans P et Q parallèles à LT. Coupons ces deux plans par un plan auxiliaire quelconque R. Il faut que les traces de ce plan rencontrent les traces des plans donnés dans les limites de l'épure ; il faut de plus que les intersections du plan R avec les plans P et Q se coupent aussi dans les limites du dessin.

Le plan R coupe le plan P suivant la droite (ab, $a'b'$) et le plan Q suivant la droite (cd, $c'd'$) (40). Les deux droites AB et CD se coupent en un point (m, m') qui appartient à la fois aux trois plans P, Q, R, c'est-à-dire à l'intersection des plans P et Q. En menant par les points m et m' les parallèles gh et $g'h'$ à LT, on aura donc les projections de l'intersection cherchée.

Si les deux plans P et Q étaient parallèles, on en serait averti par le parallélisme des droites AB et CD. Ce parallélisme n'est d'ailleurs possible que si V^P étant plus éloignée de LT que V^P, H^P est aussi plus éloignée de LT que H^Q, et il est alors facile à reconnaître à priori.

On peut aussi résoudre la question à l'aide d'un changement de plan.

Soient (*fig.* 31 *bis*) les deux plans P et Q parallèles à LT. Prenons un nouveau plan vertical de projection, déterminé par la ligne de terre L_1T_1, perpendiculaire à LT. Le nouveau plan vertical étant lui-même perpendiculaire à LT, est aussi perpendiculaire aux plans P et Q. L'intersection de ces deux plans devient ainsi une perpendiculaire au plan vertical, et elle sera déterminée si l'on trouve le point où elle perce le nouveau plan de projection.

En considérant l'horizontale du plan P dont la projection horizontale passe par le point de rencontre de LT et de L_1T_1 (28), on aura immédiatement en i'_1, par l'arc de cercle décrit du point i comme centre avec ii' pour rayon, un point de la nouvelle trace verticale V^P_1 du plan P. En joignant i'_1 avec le point où H^P coupe L_1T_1, on aura donc V^P_1. On déterminera V^Q_1 de la même manière. Le point de rencontre des deux nouvelles traces verticales étant g'_1, c'est en ce point que l'intersection

cherchée perce le nouveau plan vertical, et sa projection horizontale sera la perpendiculaire gh menée par g'_1 à L_1T_1. Si l'on revient aux premiers plans de projection, gh ne change pas, la projection verticale du point G devient g', puisque sa distance au plan horizontal conservé ne doit pas varier. En menant par g' la parallèle $g'h'$ à LT, on obtient donc la projection verticale de l'intersection GH des deux plans P et Q.

Remarquons que cette dernière solution revient à couper les deux plans donnés par un *plan de profil*, c'est-à-dire perpendiculaire à LT, et à *rabattre* ce plan de profil sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale. On rabat en même temps les intersections du plan de profil avec les plans P et Q. Le point g'_1 où se coupent ces intersections, appartient à l'intersection des plans P et Q, et il ne reste plus qu'à *relever* ce point.

44. *Trouver l'intersection de deux plans dont les quatre traces se croisent en un même point de la ligne de terre* (*fig.* 32).

Soient les deux plans P et Q dont les quatre traces se coupent en un même point α de LT. Leur intersection passera par le point α, ainsi que ses deux projections. Il suffit donc d'en déterminer un second point ou de connaître sa direction.

Si l'on menait un plan auxiliaire parallèle au plan P, il couperait le plan Q suivant une droite parallèle à l'intersection des plans P et Q (*Géom.*, 171) : on n'aurait donc plus qu'à conduire par le point α des parallèles aux projections de cette droite.

Si l'on préfère déterminer un second point de l'intersection cherchée, on peut employer un plan de profil (43), c'est-à-dire opérer un changement de plan vertical, en prenant le nouveau plan de projection perpendiculaire à LT. Les nouvelles traces verticales V_1^P et V_1^Q se coupant en m'_1 (*fig.* 32), ce point appartient à l'intersection des plans P et Q ; il se projette horizontalement en m, et sa projection verticale par rapport aux premiers plans de projection est m'. $\alpha m'$ et αm seront donc les projections de l'intersection demandée.

On pourrait aussi (43) couper les deux plans P et Q par un plan auxiliaire *quelconque*. Les intersections de ce plan auxiliaire avec les plans P et Q se croiseraient en un point qui appartiendrait à l'intersection des plans P et Q.

45. *Trouver l'intersection de deux plans dont les traces sont respectivement en ligne droite* (*fig.* 33).

Soient le plan P, dont les deux traces sont en ligne droite, et le plan Q, pour lequel la même condition est remplie.

V^P et V^Q se coupent au point b', trace verticale de l'intersection des deux plans, et b' se projette horizontalement en b. H^P et H^Q se coupent en a, trace horizontale de l'intersection des deux plans, et a se projette verticalement en a'. Le point b' se confondant avec le point a, le point b se confond avec le point a', et les projections de l'intersection des plans P et Q sont sur une même droite perpendiculaire à LT. D'après la position des traces de cette intersection, on voit que la partie interceptée sur elle par les deux plans de projection est comprise dans le *second* angle. Elle est d'ailleurs inclinée à 45° sur ces deux plans, dans le plan perpendiculaire à LT qui la contient, puisque sa trace horizontale et sa trace verticale sont à égale distance de LT. En menant un plan de profil par le point a, ou en prenant un nouveau plan vertical de projection, caractérisé par la ligne de terre L_1T_1 perpendiculaire à LT, on obtiendra en ab'_1 la partie de l'intersection des plans P et Q qui est comprise dans le second angle.

Si l'on avait à considérer (*fig.* 33) les plans P et R dont les traces, deux à deux en ligne droite, se coupent en un même point μ de la ligne de terre, on mènerait le plan Q parallèle au plan P. On en conclurait immédiatement, d'après ce qu'on vient de voir, que les projections de l'intersection des plans P et R sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre passant par le point μ. De plus cette intersection, qui coupe LT au point μ, est également inclinée sur les deux plans de projection, c'est-à-dire qu'elle est contenue dans le plan bissecteur du *premier* et du *troisième* angle. Par conséquent, si les points m et m' sont les projections d'un même point M de cette intersection, on devra avoir $m\mu = \mu m'$ (4).

46. *Trouver l'intersection de deux plans dont les traces ne se rencontrent pas dans les limites de l'épure, tout en ne présentant aucune autre disposition particulière* (*fig.* 34 et 35).

Nous indiquerons les deux procédés suivants :

Soient (*fig.* 34) les deux plans P et Q dont les traces ne se rencontrent pas dans les limites du dessin. Changeons de plan horizontal, en le transportant *parallèlement* à lui-même en L_1T_1, c'est-à-dire aussi haut que possible eu égard aux dimensions de l'épure. Les traces verticales ne changeant pas, et les intersections de deux plans parallèles par un troisième étant parallèles, les nouvelles traces horizontales seront H_1 parallèle à H^P et H_1^Q parallèle à H^Q. Dans le cas considéré, ces nouvelles traces se coupent en un point m_1 qui appartient à l'intersection des plans P et Q. Ce point se projette verticalement en m' sur L_1T_1. Si l'on revient au premier plan horizontal de

projection, le point m_1 devant toujours rester à la même distance du plan vertical, on obtiendra sa nouvelle projection horizontale en prenant sur la perpendiculaire abaissée de m' sur LT, $\mu m = m'm_1$.

Pour trouver un second point de l'intersection cherchée, nous changerons de plan vertical, et nous le transporterons *parallèlement* à lui-même en L_2T_2, c'est-à-dire aussi en avant que possible eu égard aux dimensions de l'épure. Les traces horizontales ne changeant pas, les nouvelles traces verticales seront V_2^P parallèle à V^P et V_2^Q parallèle à V^Q. Dans le cas considéré, ces nouvelles traces se coupent en un point n'_2 qui appartient à l'intersection des plans P et Q. Ce point se projette horizontalement en n sur L_2T_2. Si l'on revient au premier plan vertical de projection, le point n'_2 devant toujours rester à la même distance du plan horizontal, on obtiendra sa nouvelle projection verticale en prenant sur la perpendiculaire abaissée de n sur LT, $\nu n' = nn'_2$.

Les deux points (m, m'), (n, n'), appartenant à l'intersection des plans P et Q, cette intersection aura pour projections nm et $n'm'$.

Il faut remarquer avec soin ce transport parallèle de la ligne de terre, qui double réellement dans un sens et dans l'autre les dimensions de l'épure.

Pour résoudre la question proposée, on peut aussi avoir recours à *la méthode des figures semblables* déjà indiquée en géométrie (*Compl. de Géom.*, 6 et 68).

Soient (*fig.* 35) les deux plans P et Q dont les traces sont supposées ne pas se rencontrer dans les limites de l'épure. Considérons un plan auxiliaire R parallèle au plan Q. Il coupera le plan P suivant une droite parallèle à l'intersection des plans P et Q. Remarquons de plus que, le point α étant considéré comme *centre de similitude* (*Compl. de Géom.*, 63), la figure formée par les traces des plans P et R et par les projections de leur intersection CD est complétement semblable à la figure formée par les traces des plans P et Q et par les projections de leur intersection AB. Le *rapport de similitude* des deux figures sera ici celui de $\alpha c'$ à $\alpha b'$ ou de $\alpha\gamma$ à $\alpha\beta$. Il suffira donc, si l'on a pris par exemple $\alpha\gamma = \frac{\alpha\beta}{4}$, de construire l'intersection $(cd, c'd')$ des plans P et R, puis de prendre $\alpha a' = 4\alpha d'$ et $\alpha b = 4\alpha c$, pour avoir en a' et en b les points de rencontre des projections de l'intersection cherchée avec LT. Il ne restera donc plus qu'à mener par le point a' une parallèle $a'b'$ à $c'd'$ et par le point b une parallèle ba à cd.

On peut souvent employer avec profit, en géométrie descriptive, la méthode des figures semblables.

47. *Trouver l'intersection de deux plans dont l'un est donné par ses traces et l'autre par la ligne de terre et un point* (*fig.* 36).

Soient le plan P donné par ses traces et le plan Q déterminé par la ligne de terre LT et le point (m, m'). Comme LT coupe le plan P au point α, le point α appartient à l'intersection cherchée et à ses deux projections. Pour en trouver un second point, le plus simple est d'opérer comme il suit.

Menons par le point M un plan R parallèle au plan horizontal. La trace verticale V^R de ce plan passera par m'. Il coupera le plan P suivant une horizontale $(gh, g'h')$, et le plan Q suivant la droite $(mn, m'n')$ parallèle à la ligne de terre. L'horizontale GH et la droite MN se coupent en un point (i, i') qui, appartenant aux trois plans P, Q, R, est situé sur l'intersection des plans P et Q. En joignant le point α aux points i et i', on aura donc les deux projections de l'intersection cherchée.

Intersection des droites et des plans.

48. Pour trouver l'intersection d'une droite et d'une surface, on fait passer par la droite une surface auxiliaire. On détermine l'intersection des deux surfaces; et les points où cette intersection coupe la droite donnée, sont les points où cette droite rencontre la surface proposée. On choisit ordinairement un plan comme surface auxiliaire.

49. *Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan quelconque* (*fig.* 37).

Soient le plan P et la droite $(ab, a'b')$. On peut faire passer par la droite un plan quelconque R : H^R devra passer par a et V^R par b' et par le point de rencontre de H^R avec LT. Les plans P et R se couperont suivant la droite $(cd, c'd')$. Les deux droites AB et CD étant situées dans un même plan R, se rencontreront en un point M, et ce point sera celui où la droite AB perce le plan P. Si l'on a bien opéré, le point m commun aux projections horizontales ab et cd, et le point m' commun aux projections verticales $a'b'$ et $c'd'$, doivent se trouver sur une même perpendiculaire à LT.

Au lieu d'employer un plan quelconque tel que R, il est souvent préférable de prendre pour plan auxiliaire l'un des plans projetant la droite proposée. Considérons, par exemple (*fig.* 37), le plan Q qui projette horizontalement la droite AB. Ce plan coupera le plan P suivant une droite dont la projection horizontale se confondra avec H^Q et avec ab, et dont la projection verticale coupera $a'b'$ en un point m', qui représen-

tera la projection verticale du point M commun à la droite AB et au plan P. Connaissant m', on en déduira immédiatement m.

50. *Trouver l'intersection d'un plan quelconque et d'une droite perpendiculaire à l'un des plans de projection* (*fig.* 38).

Soient le plan P et la droite (ab, $a'b'$) perpendiculaire au plan horizontal. Tout plan passant par la droite (ab, $a'b'$) sera perpendiculaire au plan horizontal; soit Q l'un de ces plans. On construira l'intersection (cd, $c'd'$) des plans P et Q. $c'd'$ coupant $a'b'$ au point b', la droite AB percera le plan P au point (b, b').

51. *Trouver l'intersection d'un plan quelconque et d'une droite parallèle à la ligne de terre* (*fig.* 38).

Soient le plan P et la droite (mn, $m'n'$) parallèle à LT. Menons par cette droite un plan R parallèle au plan vertical : H^R se confondra avec mn. L'intersection du plan R et du plan P sera une droite (ef, $e'f'$) parallèle au plan vertical : ef se confondra avec H^R ou mn, $e'f'$ sera parallèle à V^P. $e'f'$ coupant $m'n'$ au point f', ce point représentera la projection verticale du point où la droite MN rencontre le plan P : le point cherché est donc (f, f').

52. *Trouver l'intersection d'un plan quelconque et d'une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre* (*fig.* 39).

Soient le plan P et la droite (ab, $a'b'$) située dans un plan perpendiculaire à LT. Nous savons que, dans ce cas, pour achever de définir la droite, il faut donner les projections (a, a'), (b, b'), de deux de ses points.

Nous prendrons pour plan de profil ou nous considérerons comme nouveau plan vertical de projection, celui même qui contient la droite. Le nouveau plan vertical sera donc déterminé par la ligne de terre L_1T_1. Un arc de cercle $i'i'_1$ décrit du point i comme centre jusqu'à la rencontre de LT, fera immédiatement connaître la nouvelle trace verticale V_1^P du plan P. Les nouvelles projections verticales des points qui déterminent la droite donnée, étant a'_1 et b'_1, cette droite contenue dans le nouveau plan vertical n'est autre que $a'_1b'_1$. V_1^P et $a'_1b'_1$ se coupant en m'_1, ce point est le point d'intersection cherché. Sa projection horizontale se trouvera donc en m sur L_1T_1, et sa projection par rapport au premier plan vertical s'obtiendra en prenant, sur L_1T_1, la longueur $im' = mm'_1$.

On suivrait une marche analogue pour *trouver les traces d'une droite contenue dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre*. Si l'on se reporte à la *fig.* 39, on voit que la droite

$a'_1b'_1$ a pour trace horizontale son point de rencontre h avec L_1T_1, et pour trace verticale son point de rencontre v'_1 avec LT. En effet, le point h appartient au plan horizontal, et le point v'_1 appartient au premier plan vertical de projection, puisque sa projection horizontale est en i, point commun aux deux lignes de terre perpendiculaires LT et L_1T_1.

53. Comme application de ce qui précède, nous traiterons la question suivante :

Étant donnés un point et deux droites non situées dans un même plan, mener par le point une droite qui s'appuie sur les deux droites données (*fig.* 40).

Soient le point (m, m') et les droites $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$. Par la droite $(ab, a'b')$ et le point (m, m'), nous supposerons un plan, et nous chercherons son intersection avec le plan Q qui projette horizontalement la seconde droite $(cd, c'd')$. Le plus simple, pour construire cette intersection, est de choisir deux points (e, e'), (g, g'), sur la droite $(ab, a'b')$, de les unir au point (m, m'), et de marquer les points de rencontre des droites correspondantes $(em, e'm')$, $(gm, g'm')$, avec le plan Q. Ces points de rencontre étant sur l'épure (f, f') et (l, l'), l'intersection du plan MAB avec le plan Q sera la droite $(fl, f'l')$, qui coupe au point (x, x') la droite $(cd, c'd')$. En joignant ce point (x, x') avec le point (m, m'), on obtiendra une droite qui, s'appuyant sur la droite $(cd, c'd')$ et se trouvant renfermée dans le plan MAB, viendra couper la droite $(ab, a'b')$ au point (y, y'), de manière à satisfaire à toutes les conditions de l'énoncé.

On voit que la solution indiquée consiste à chercher le point d'intersection X du plan MAB et de la droite CD, et à joindre ce point X au point M.

CHAPITRE IV.

MESURE DES DISTANCES.

54. *Trouver la longueur de la droite qui unit dans l'espace deux points donnés par leurs projections* (*fig.* 41).

Soient les deux points (a, a'), (b, b'); il s'agit de déterminer leur plus courte distance AB. Pour cela, nous remarquerons que si la droite finie AB était parallèle à l'un des plans de projection, elle se projetterait sur ce plan en véritable grandeur. Nous sommes ainsi conduit à prendre, par exemple, un nouveau plan vertical de projection parallèle à la droite

considérée, c'est-à-dire défini par une ligne de terre parallèle à la projection horizontale de cette droite (29). Le plus simple est alors de choisir pour nouvelle ligne de terre L_1T_1 la projection horizontale ab elle-même convenablement prolongée. La droite qu'on veut mesurer se trouve alors située dans le nouveau plan vertical, au lieu de lui être simplement parallèle. On élèvera donc sur L_1T_1 les perpendiculaires $aa'_1 = \alpha a'$, $bb'_1 = \beta b'$, et la distance cherchée sera représentée par la droite $a'_1 b'_1$.

Si l'on mène à L_1T_1 la parallèle $a'_1 c'_1$, on forme le triangle rectangle $a'_1 c'_1 b'_1$, dans lequel on a

$$a'_1 c'_1 = ab \quad \text{et} \quad c'_1 b'_1 = \beta b' - \alpha a'.$$

Par suite, *la longueur d'une portion de droite finie est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont la projection horizontale de la droite et la différence de hauteur de ses extrémités par rapport au plan horizontal.*

Si l'on avait rendu la droite parallèle au plan horizontal, *sa longueur aurait été représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la projection verticale de la droite et la différence des distances de ses extrémités au plan vertical.*

Il est bien entendu qu'on doit affecter de signes différents les distances des points qui sont placés de côtés différents par rapport aux plans de projection.

Pour rendre la droite parallèle au plan vertical, on peut aussi la faire tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal (34). Choisissons, par exemple, l'axe vertical qui se projette en b, et faisons tourner la droite autour de cet axe jusqu'à ce que sa projection horizontale ab devienne parallèle à LT. Le point b ne changera pas et le point a se portera en a_1. D'ailleurs, la hauteur du point A au-dessus du plan horizontal restant la même, la nouvelle projection verticale a'_1 se trouvera sur la parallèle menée par le point a' à LT. Quant à la projection b', comme elle appartient à un point de l'axe, elle ne variera pas. Le mouvement de rotation effectué ayant rendu la droite parallèle au plan vertical, sa nouvelle projection verticale $b'a'_1$ la représente en véritable grandeur; et la considération du triangle $b'a'_1c'$, obtenu en menant a'_1c' parallèle à LT, ramène à la règle énoncée plus haut.

Ce qui précède montre qu'en général *la longueur d'une droite finie surpasse respectivement les longueurs de ses projections.*

35. *Si l'on veut marquer sur la droite $(ab, a'b')$ un point*

dont la distance au point (a, a') *soit donnée,* il suffit de prendre (*fig.* 41) sur $a'_1 b'_1$ (qu'on peut aussi regarder comme le rabattement de la droite de l'espace sur le plan horizontal), la longueur $a'_1 m'_1$ égale à la distance donnée. On obtient ensuite immédiatement les projections m et m' du point M de l'espace. Si la droite AB peut être supposée prolongée au delà du point A, on aura un second point répondant à la question, en portant à gauche de a'_1 une distance égale à $a'_1 m'_1$.

Lorsqu'on connaît les projections horizontales de deux points ainsi que leur distance dans l'espace, et la projection verticale de l'un d'eux, il est facile d'obtenir la projection verticale du second point. Soient en effet (*fig.* 41) (a, a') l'un des points donnés, m la projection horizontale du point dont il faut déterminer la projection verticale, et $a'_1 m'_1$ la distance des deux points considérés. Il faut trouver mm'_1 ou, ce qui revient au même, la différence $m'_1 e$ des hauteurs des deux points au-dessus du plan horizontal. La question est donc ramenée à construire le triangle rectangle $a'_1 m'_1 e$ dans lequel on connaît l'hypoténuse $a'_1 m'_1$ et l'un des côtés de l'angle droit $a'_1 e = am$. Il y aura en général deux points répondant aux données du problème (*Géom.*, 74).

56. Pour *trouver la longueur d'une droite entre ses traces,* on suivra la marche indiquée plus haut (54), c'est-à-dire qu'on effectuera un changement de plan, un mouvement de rotation ou un rabattement.

Si l'on fait tourner la droite donnée (*fig.* 42) autour de l'axe bb' qui correspond à sa trace verticale, sa trace horizontale a vient en a_1, et la longueur de la droite, alors rabattue sur le plan vertical, est $b' a_1$. Si l'on fait tourner la droite proposée autour de l'axe aa' qui correspond à sa trace horizontale, sa trace verticale b' vient en b'_1, et la longueur de la droite, alors rabattue sur le plan horizontal, est ab'_1. Si l'on a bien opéré, on doit avoir $b' a_1 = ab'_1$.

57. *Trouver la distance d'un point donné par ses projections à un plan donné par ses traces* (*fig.* 43).

Soient le point (m, m') et le plan P. Abaissons du point (m, m') une perpendiculaire sur le plan P. Les projections de cette perpendiculaire seront perpendiculaires aux traces du plan. La distance cherchée est la longueur comprise sur cette perpendiculaire entre son point de départ (m, m') et le point où elle perce le plan P. Nous déterminerons ce point (n, n') en cherchant l'intersection du plan P et du plan Q qui projette horizontalement la perpendiculaire considérée (49). Il ne restera plus alors qu'à chercher la longueur de la droite finie

(mn, $m'n'$) (54). Nous y arriverons immédiatement à l'aide d'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical projeté en m, et la distance demandée sera représentée sur l'épure par la droite $m'n'_1$.

58. *Un point et une droite étant donnés par leurs projections, trouver la distance du point à la droite* (*fig.* 44).

Soient le point (m, m') et la droite (ab, $a'b'$).

On pourrait mener par le point donné un plan perpendiculaire à la droite donnée, et chercher le point où la droite perce le plan; en joignant ce point au point donné, on aurait évidemment la distance demandée. Mais nous préférons faire usage de la méthode des rabattements, dont l'emploi est d'ailleurs justifié par la nature de la question, afin de compléter ce que nous avons déjà dit à ce sujet (37).

Faisons passer un plan P par le point et la droite donnés, et rabattons-le sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale. Si nous joignons le point (m, m') au point (b, b'), nous aurons une droite du plan P, dont la trace horizontale sera d. En joignant le point d au point a trace horizontale de la droite (ab, $a'b'$), nous déterminerons donc H^P. Pour opérer le rabattement, il est inutile de construire V^P. Remarquons en effet que si l'on abaisse sur H^P la perpendiculaire $b\beta$, la droite $b'\beta$ de l'espace sera perpendiculaire à H^P; de sorte que, dans le mouvement de rotation autour de H^P, le point b' restant sur cette perpendiculaire, viendra se placer sur le prolongement de $b\beta$. Il suffit par suite, pour obtenir son rabattement, de construire la distance $b'\beta$. Pour cela, nous reporterons par un arc de cercle la distance bb' en bb'_1 sur une perpendiculaire élevée à $b\beta$ par le point b; la longueur $\beta b'_1$ sera évidemment la distance cherchée. Un nouvel arc de cercle décrit du point β comme centre avec $\beta b'_1$ pour rayon jusqu'à la rencontre du prolongement de $b\beta$, nous donnera le rabattement b_0 du point b' de la droite (ab, $a'b'$). D'ailleurs sa trace horizontale a demeurant fixe, on aura en ab_0 le rabattement de la droite elle-même. En unissant le point d au point b_0, on obtiendra celui de la droite (bd, $b'd'$). Le rabattement du point (m, m') fait partie de la droite db_0, et il appartient aussi, d'après les explications qui précèdent, au prolongement de la perpendiculaire $m\mu$ abaissée du point m sur H^P : ce rabattement sera donc en m_0, à la rencontre des deux droites. Il ne restera plus, pour résoudre la question proposée (le rabattement opéré n'ayant en rien modifié la disposition relative des points considérés), qu'à abaisser du point m_0 la perpendiculaire m_0n_0 sur ab_0. Lorsqu'on relèvera

le plan P, le point N, dont le rabattement est n_0, restera sur la perpendiculaire $n_0\nu$ abaissée dans le plan horizontal du point n_0 sur H^P; sa projection horizontale devra donc se trouver sur cette même perpendiculaire; comme cette projection appartient nécessairement à ab, elle sera en n à la rencontre des deux droites; connaissant n, on aura immédiatement n'. La plus courte distance MN du point M à la droite AB aura donc pour projections les droites mn et $m'n'$.

Si l'on veut en outre marquer sur la droite $(ab, a'b')$ deux points qui soient à une distance donnée l du point (m, m'), il suffira de décrire du point m_0 comme centre, avec la longueur l pour rayon, un arc de cercle qui coupera généralement la droite ab_0 en deux points e_0 et f_0. On trouvera ensuite facilement les projections (e, e') et (f, f') de ces points dans leur véritable position. Il est clair que cette seconde partie du problème pourra n'admettre aucune solution ou en admettre une seule.

59. *Trouver la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan* (*fig.* 45 et 45 *bis*).

Nous avons vu (*Géom.*, 183) que lorsque deux droites n'étaient pas situées dans un même plan, on pouvait toujours leur mener une perpendiculaire commune qui représentait leur plus courte distance.

Rappelons succinctement que pour trouver la plus courte distance des deux droites AB et CD non situées dans un même plan (*fig.* 45 *bis*), il faut mener par la droite CD un plan R parallèle à la droite AB (on déterminera ce plan, en menant par un point quelconque de CD la droite MN parallèle à AB). On conduit ensuite par les droites AB et CD deux plans P et Q respectivement perpendiculaires au plan R; l'intersection des plans P et Q est la plus courte distance cherchée.

Ces constructions que la géométrie élémentaire ne fait qu'indiquer, doivent donc être exécutées à l'aide des procédés de la géométrie descriptive.

Soient (*fig.* 45) $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$ les deux droites données. Pour mener par la seconde un plan R parallèle à la première, par le point (g, g') appartenant à $(cd, c'd')$, nous ferons passer la parallèle $(mn, m'n')$ à $(ab, a'b')$. Les traces horizontales c et n détermineront H^R, les traces verticales d' et m' détermineront V^R. Si l'on a bien opéré, H^R et V^R viendront se croiser en un même point ρ de LT.

Prenons sur la droite $(ab, a'b')$ un point (e, e'), et abaissons de ce point la perpendiculaire $(pf, p'f')$ sur le plan R; pf devra être perpendiculaire sur H^R, et $p'f'$ sur V^R. Le plan P

déterminé par les droites (*ab*, *a'b'*) et (*pf*, *p'f'*) sera nécessairement perpendiculaire sur le plan R (*Géom.*, 182). H^P passera par les deux traces horizontales *a* et *p*, V^P par les deux traces verticales *b'* et *f'*.

De même, prenons sur la droite (*cd*, *c'd'*) un point (*h*, *h'*), et abaissons de ce point la perpendiculaire (*il*, *i'l'*) sur le plan R. Le plan Q déterminé par les droites (*cd*, *c'd'*) et (*il*, *i'l'*) sera perpendiculaire sur le plan R. H^Q passera par les deux traces horizontales *c* et *l*, V^Q par les deux traces verticales *d'* et *i'*. Si l'on a bien opéré, H^Q et V^Q, comme H^P et V^P, doivent se croiser en un même point de LT.

Construisons l'intersection (*ou*, *o'u'*) des deux plans P et Q. La partie (*rs*, *r's'*) interceptée sur cette intersection par les deux droites (*ab*, *a'b'*), (*cd*, *c'd'*), représente la plus courte distance cherchée. Il est inutile de dire que, si l'on a bien opéré, les droites *rr'* et *ss'* sont perpendiculaires à LT.

Ayant les projections de la plus courte distance, il est facile d'obtenir sa longueur. Il suffit (54) de mener par *s'* une parallèle *s't'* à LT, puis de prendre sur cette parallèle, à partir de son point de rencontre *t'* avec *rr'*, une longueur $t's'_1$ égale à la projection horizontale *rs*; la droite $r's'_1$ est la distance demandée.

CHAPITRE V.

ANGLES DES DROITES ET DES PLANS.

Angles des droites entre elles.

60. *Trouver l'angle de deux droites quelconques données par leurs projections* (*fig.* 47).

Lorsque deux droites ne sont pas dans un même plan, leur angle est celui de deux parallèles menées à ces droites par un point quelconque de l'espace. Nous pourrons donc toujours supposer que les droites proposées se coupent. Si elles sont parallèles, leur angle est nul.

Si les droites considérées étaient parallèles à l'un des plans de projection, leur angle serait égal à celui de leurs projections sur ce plan (*). Cette remarque conduirait à rendre le

(*) Nous remarquerons à ce sujet que, *dans le cas particulier où deux droites sont perpendiculaires entre elles, si l'une est parallèle au plan de projection considéré, l'angle des projections des deux droites sur ce plan sera toujours droit, c'est-à-dire égal à l'angle qu'elles forment dans l'espace.*

Soient (*fig.* 46) la droite CD parallèle au plan horizontal H, et la droite AB

plan des deux droites parallèle à l'un des plans de projection, et l'on y parviendrait par deux changements de plans ou deux rotations successives (29, 34). Mais il est beaucoup plus simple de recourir à un rabattement.

Soient les deux droites $(ab,\ a'b')$ et $(bc,\ b'c')$ qui se coupent au point $(b,\ b')$; elles déterminent un plan P, dont on obtient la trace horizontale en joignant les traces horizontales a et c des deux droites. Ces droites forment dans l'espace un triangle dont la base est ac et dont l'angle au sommet est l'angle cherché. Pour avoir cet angle, il suffit donc de rabattre le triangle autour de H^P, jusqu'à ce qu'il vienne se confondre avec le plan horizontal. Comme la base ac reste fixe, on n'a qu'à obtenir le rabattement du point $(b,\ b')$. On abaissera bd perpendiculaire sur ac; à partir du point β où bb' rencontre LT, on portera sur LT une longueur $\beta\delta = bd$, et l'on mènera la droite $b'\delta$. Si l'on prolonge alors db jusqu'en b_0, de manière à avoir $db_0 = b'\delta$, le point b_0 sera le rabattement du point B de l'espace (58). L'angle demandé sera donc l'angle ab_0c.

L'angle ab_0c est évidemment plus petit que l'angle abc : *l'angle de deux droites est donc, en général, plus petit que l'angle de leurs projections.*

Si l'on demandait de *trouver les projections de la bissectrice de l'angle des deux droites proposées*, il suffirait de remarquer qu'en menant la bissectrice de l'angle rabattu ab_0c, elle viendra couper la base ac ou H^P en un point m qui, lorsqu'on relèvera le triangle ab_0c, sera toujours la trace horizontale de cette bissectrice. D'ailleurs ses projections passent nécessairement par celles du sommet de l'angle. On aura donc en bm sa projection horizontale, et en $b'm'$ sa projection verticale.

61. Nous chercherons encore l'angle de deux droites dans le cas particulier suivant.

Trouver l'angle de deux droites, l'une étant parallèle au plan horizontal, l'autre parallèle au plan vertical (*fig.* 48).

Soient la droite $(ab,\ a'b')$ parallèle au plan vertical et la droite $(bc,\ b'c')$ parallèle au plan horizontal. La trace horizontale du plan P des deux droites passera par la trace horizontale a de la première et sera parallèle à la projection horizontale de la seconde (17). On aura donc H^P en menant par a une

---

qui lui est perpendiculaire tout en occupant une position quelconque par rapport au plan H. Soient Q le plan qui projette horizontalement CD et R le plan qui projette horizontalement AB. Le plan R, qui contient AB et qui est perpendiculaire au plan horizontal, sera perpendiculaire à l'horizontale CD, et, par suite, à cd. Donc la projection ab sera elle-même perpendiculaire à la projection cd.

parallèle à bc. Rabattons le plan des deux droites sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de H^P. Le point B de l'espace viendra se placer en b_0, sur le prolongement de la perpendiculaire bd abaissée du point b sur H^P, la distance db_0 étant égale à la longueur $b'\delta$ obtenue en prenant $\beta\delta = bd$. La droite $(ab, a'b')$ se trouvera ainsi rabattue en ab_0. Quant à la droite $(bc, b'c')$, comme elle demeure constamment parallèle à H^P, on obtiendra son rabattement en menant b_0c_0 parallèle à bc ou à H^P; de sorte que l'angle demandé sera l'angle ab_0c_0.

62. *Trouver les angles d'une droite avec les plans de projection* (*fig.* 42).

Nous savons (*Géom.*, 186) que l'angle d'une droite avec un plan est l'angle que cette droite forme avec sa projection sur ce plan.

Soit la droite $(ab, a'b')$ dont les traces sont a et b'. La droite de l'espace forme avec les côtés $b'b$ et ab un triangle rectangle dans lequel l'angle adjacent à ab est l'angle de la droite avec le plan horizontal. Si l'on rabat ce triangle sur le plan vertical en $b'ba_1$, en le faisant tourner autour de l'axe $b'b$, l'angle cherché sera l'angle $b'a_1b = \alpha$.

De même, la droite de l'espace forme avec les côtés aa' et $a'b'_1$ un triangle rectangle, dans lequel l'angle adjacent à $b'a'$ est l'angle de la droite avec le plan vertical. Si l'on rabat ce triangle sur le plan horizontal en $aa'b'_1$, en le faisant tourner autour de l'axe aa', l'angle cherché sera l'angle $ab'_1a' = \beta$.

Il est utile de remarquer que l'angle d'une droite avec sa projection sur un plan étant plus petit que tous ceux qu'elle forme avec les autres droites du plan, l'angle $a_1b'b$, par exemple, de la droite avec $b'b$, est plus grand que l'angle β de la droite avec sa projection verticale. Mais l'angle $a_1b'b$ est le complément de l'angle α. Donc, en général, α *et* β *étant les angles d'une droite avec les deux plans de projection, on a*

$$\alpha + \beta < 90^\circ.$$

Pour qu'on ait $\alpha + \beta = 90^\circ$, il faut que bb' devienne la projection verticale de la droite qui est alors nécessairement située dans un plan perpendiculaire à LT (13).

63. *Trouver l'angle d'une droite donnée par ses projections et d'un plan donné par ses traces.*

L'angle d'une droite avec un plan étant l'angle de la droite avec sa projection sur ce plan, on pourrait ramener la question au cas précédent en prenant le plan proposé pour l'un des plans de projection. Mais il est plus simple de remarquer que, si l'on abaisse d'un point quelconque de la droite donnée une

perpendiculaire sur le plan donné, l'angle de cette perpendiculaire avec la droite sera le complément de l'angle cherché. On n'a plus alors, pour résoudre le problème proposé, qu'à déterminer l'angle de deux droites dont les projections sont connues (60), et à en prendre le complément.

64. *Mener par un point donné une droite qui fasse des angles donnés avec les deux plans de projection* (*fig.* 49).

Soient (m, m') le point donné, α l'angle que doit faire la droite cherchée avec le plan horizontal, β l'angle qu'elle doit former avec le plan vertical.

Prenons dans le plan vertical un point quelconque (b', b), et formons le triangle rectangle $bb'a_1$ dans lequel l'angle $b'a_1b$ est égal à α. La droite dont l'hypoténuse $b'a_1$ représente le rabattement sur le plan vertical, fera nécessairement l'angle α avec le plan horizontal (62). Si l'on ramène cette droite dans sa véritable position *quelle qu'elle soit,* elle continuera de passer par le point b' et sa trace horizontale a se trouvera sur la circonférence décrite du point b comme centre avec ba_1 pour rayon; de sorte qu'elle n'est pas encore déterminée de position. Mais si on astreint de plus cette même droite, dont la longueur est $b'a_1$, à faire l'angle β avec le plan vertical, elle sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel l'un des angles aigus sera β (62). Décrivons donc sur $b'a_1$ comme diamètre une demi-circonférence, et menons la droite $b'd$ telle que l'angle $a_1b'd$ soit égal à β : $b'd$ représentera la longueur de la projection verticale de la droite de l'espace (62). On obtiendra donc le point de rencontre de cette projection verticale avec LT, en décrivant du point b' comme centre avec $b'd$ pour rayon, un arc de cercle qui coupera généralement LT en deux points a' et c'. En menant alors par a' et c' des perpendiculaires à LT, ces perpendiculaires viendront rencontrer la circonférence ba_1 en des points qui seront les traces horizontales des droites passant au point (b', b), et formant avec les deux plans de projection les angles marqués α et β.

Comme il y aura, en général, quatre points d'intersection deux à deux symétriques par rapport à LT, savoir a et p, c et r, il y aura aussi en général *quatre droites répondant à la question.* Les projections horizontales ba, bp, bc, br, de ces quatre droites seront différentes; mais leurs projections verticales $b'a'$ et $b'p'$, $b'c'$ et $b'r'$, se confondront deux à deux.

Il ne restera plus qu'à mener par le point donné (m, m') des parallèles aux droites ainsi construites.

Pour que le problème admette quatre solutions, il faut qu'on ait (62)

$$\alpha + \beta < 90^\circ.$$

Si l'on a $\alpha+\beta=90^\circ$, *les quatre solutions se réduisent à deux*, parce que $b'b$ devenant la projection verticale de la droite (62), on a $b'd=b'b$; l'arc de cercle de rayon $b'd$ est alors tangent à LT au point b, et les quatre droites n'en font plus que deux, situées dans un plan perpendiculaire à LT et symétriquement disposées de part et d'autre du plan vertical.

Enfin, *si l'on a* $\alpha+\beta>90^\circ$, l'angle $\beta=a_1b'd$ surpassera l'angle $a_1b'b$ qui est le complément de α. Il en résulte immédiatement $b'd<b'b$. Donc l'arc de cercle de rayon $b'd$ ne rencontrera plus LT, *et le problème sera impossible.*

Angles des plans entre eux.

65. *Trouver l'angle de deux plans quelconques donnés par leurs traces* (*fig.* 50).

Nous savons (*Géom.*, 190) que si d'un point pris dans l'intérieur d'un angle dièdre on abaisse des perpendiculaires sur ses faces, l'angle de ces droites est le supplément de l'angle dièdre considéré. Plus généralement, deux plans qui se coupent, comme deux droites qui se coupent, déterminent deux angles supplémentaires; il en résulte que si l'on mène d'un même point de l'espace deux droites respectivement perpendiculaires aux plans proposés, les angles formés par ces droites mesureront les angles formés par les plans. La question sera ainsi ramenée à trouver l'angle de deux droites (60). On peut aussi opérer directement comme il suit.

Soient les deux plans donnés P et Q, et ab la projection horizontale de leur intersection. Si l'on mène par un point quelconque de cette intersection un plan R qui lui soit perpendiculaire, il coupera les deux plans P et Q suivant deux droites qui comprendront entre elles l'angle cherché (*Géom.*, 177). La trace horizontale du plan R sera perpendiculaire à la projection horizontale ab de l'intersection (23). Donc, si par le point d pris sur ab on lui mène la perpendiculaire ef, on pourra regarder ef comme représentant H^R.

Les droites qui forment l'angle demandé, ont alors pour traces horizontales les points e et f, et elles constituent dans l'espace un triangle qui a ef pour base. Si l'on pouvait rabattre ce triangle sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de ef, son angle au sommet serait l'angle cherché. Remarquons que le sommet du triangle appartenant à l'intersection des plans P et Q, se projette horizontalement sur ab. ab et ef étant perpendiculaires, si l'on joint dans l'espace leur point de rencontre d au sommet du triangle, on aura une droite perpendiculaire sur ef ou la hauteur même du triangle; pour en

opérer le rabattement, il suffit de déterminer cette hauteur qui, contenue dans un plan R perpendiculaire à l'intersection des plans donnés, lui est aussi perpendiculaire.

Par suite, nous rabattrons l'intersection des plans P et Q en $b'a_0$, en prenant pour axe la verticale $b'b$. Nous rabattrons de même le point d en d_0. La hauteur du triangle sera donc, en rabattement sur le plan vertical, la perpendiculaire d_0m_0 abaissée du point d_0 sur $b'a_0$. On prendra alors sur ba une longueur $dm = d_0m_0$, et l'angle des deux plans sera mesuré par l'angle emf.

On peut remarquer que le point m doit toujours tomber entre les points b et a, parce qu'on a nécessairement

$$dm \quad \text{ou} \quad d_0m_0 < da \quad \text{ou} \quad d_0a_0.$$

L'angle emf est donc toujours plus grand que l'angle eaf des traces H^P et H^Q. En général, *l'angle de deux plans est plus grand que les angles formés par leurs traces respectives.*

Si l'on demande les traces du plan qui divise en deux parties égales l'angle des plans proposés, c'est-à-dire les traces de leur plan *bissecteur*, il suffit de se rappeler que ce plan S doit renfermer la bissectrice de l'angle rectiligne du dièdre considéré (*Compl. de Géom.*, 101). On mènera donc la bissectrice mn de l'angle emf rabattu sur le plan horizontal; le point n où cette bissectrice qui est dans le plan R coupe H^R, est sa trace horizontale. Cette trace horizontale appartient à H^S. D'ailleurs, le plan S contenant l'intersection des plans P et Q, H^S doit concourir avec H^P et H^Q, V^S avec V^P et V^Q. En joignant le point a au point n, on aura par conséquent H^S; et en joignant le point de rencontre de H^S et de LT au point b', on aura V^S.

66. Proposons-nous encore de *trouver l'angle de deux plans, lorsque les traces horizontales de ces plans sont parallèles* (*fig.* 50 *bis*).

On pourrait suivre la marche indiquée dans le cas général (65), marche qui se simplifie dans le cas particulier qu'on vient d'énoncer. Mais on peut aussi avoir recours à un changement de plan ou à un mouvement de rotation.

Les deux plans P et Q ayant leurs traces horizontales parallèles, si l'on prend, par exemple, un nouveau plan vertical de projection déterminé par la ligne de terre L_1T_1, perpendiculaire à H^P et à H^Q, les deux plans proposés deviendront ensemble perpendiculaires au plan vertical. Leur intersection sera dès lors perpendiculaire au plan vertical et aux traces verticales des deux plans, de sorte que l'angle cherché sera

précisément l'angle formé par ces nouvelles traces verticales. On élèvera donc au point i de rencontre de LT et de L_1T_1 deux perpendiculaires à ces droites; la première rencontrant V^P et V^Q aux points l' et i', on reportera les longueurs il' et ii' sur le seconde perpendiculaire en il'_1 et en ii'_1. En joignant le point où H^P coupe L_1T_1 avec le point l'_1, on aura V^P_1; on trouvera de même V^Q_1; et l'angle de V^P_1 avec V^Q_1 mesurera l'angle des plans P et Q.

67. *Trouver les angles d'un plan donné par ses traces avec les plans de projection* (*fig.* 51).

Par un mouvement de rotation ou un changement de plan, on pourrait rendre le plan proposé perpendiculaire au plan vertical, par exemple. Son intersection avec le plan horizontal, c'est-à-dire sa trace horizontale, serait alors perpendiculaire à la fois à sa trace verticale et à la ligne de terre. L'angle du plan considéré avec le plan horizontal serait donc mesuré par l'angle de sa trace verticale avec la ligne de terre. On trouverait de la même manière l'angle qu'il forme avec le plan vertical.

On peut aussi faire usage des lignes de plus grande pente du plan (20) par rapport au plan horizontal et au plan vertical.

Soit le plan P. Prenons un point A quelconque sur LT. Si nous abaissons de ce point la perpendiculaire Aa sur H^P, nous pourrons regarder Aa comme la projection horizontale d'une ligne de plus grande pente du plan P par rapport au plan horizontal. Cette ligne a le point B pour trace verticale; et l'angle qu'elle forme avec le plan horizontal ou avec sa projection sur ce plan, mesure précisément l'angle du plan P avec le plan horizontal (20). La question étant ramenée à trouver l'angle d'une droite avec le plan horizontal (62), nous décrirons du point A comme centre avec Aa pour rayon un arc de cercle qui coupera LT au point a_0, et en joignant le point B au point a_0, nous aurons en Ba_0A l'angle α formé par le plan P avec le plan horizontal.

De même, si nous abaissons du point A la perpendiculaire Ab' sur V^P, nous pourrons regarder Ab' comme la projection verticale d'une ligne de plus grande pente du plan P par rapport au plan vertical. Cette ligne a le point C pour trace horizontale; et l'angle qu'elle forme avec le plan vertical ou avec sa projection sur ce plan, mesure précisément l'angle du plan P avec le plan vertical. Nous décrirons donc du point A comme centre avec Ab' pour rayon un arc de cercle qui coupera LT au point b'_0, et en joignant le point C

au point b'_0, nous aurons en Cb'_0 A l'angle β formé par le plan P avec le plan vertical.

Il est essentiel de remarquer que le plan BAa qui projette horizontalement la ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal, et le plan CAb' qui projette verticalement la ligne de plus grande pente par rapport au plan vertical, sont tous deux perpendiculaires au plan P (*Géom.*, 183, 182) : il en résulte que leur intersection, qui part du point A, l'est aussi. Cette intersection AL est donc, dans l'espace, perpendiculaire aux deux lignes de plus grande pente considérées. Lorsqu'on rabattra le plan BAa sur le plan vertical, le rabattement de AL sera la perpendiculaire Al_1 à Ba_0. Lorsqu'on rabattra, au contraire, le plan CAb' sur le plan horizontal, le rabattement de AL sera la perpendiculaire Al_2 à Cb'_0. Par conséquent, *on aura toujours*

$$A\,l_1 = A\,l_2.$$

68. *Mener par un point donné un plan qui fasse des angles donnés avec les deux plans de projection* (*fig.* 52).

Soient le point donné (m, m'), α l'angle que le plan cherché doit former avec le plan horizontal, β l'angle qu'il doit faire avec le plan vertical.

Prenons un point A quelconque sur LT. Si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur un plan formant les angles demandés avec les plans de projection, les angles de cette perpendiculaire avec les plans de projection seront les compléments de α et de β. Nous serons ainsi ramené à un problème déjà résolu (64). Il suffira ensuite de conduire par le point (m, m') des plans perpendiculaires aux droites qu'on aura construites d'après la condition imposée.

On peut aussi raisonner comme il suit. Formons en A le triangle rectangle BAa_0 dans lequel l'angle Ba_0A est égal à α. Décrivons du point A comme centre avec Aa_0 pour rayon une circonférence. Tout plan dont la trace verticale passera au point B et dont la trace horizontale sera tangente à la circonférence Aa_0, fera l'angle α avec le plan horizontal (67). Abaissons Al_1 perpendiculaire sur Ba_0. Al_1 représentera la distance AL du point A *à l'un des plans considérés* (67) ; de sorte que si l'on décrit du point A comme centre avec Al_1 pour rayon une seconde circonférence, la ligne de plus grande pente de ce plan par rapport au plan vertical, qui est menée par le pied L de la perpendiculaire AL de l'espace, se rabattra sur le plan horizontal suivant une tangente à cette circonférence. Cette tangente fera l'angle β avec LT, *si le plan considéré est l'un de ceux qui font à la fois l'angle* α *et l'angle* β *avec les*

deux plans de projection. Nous mènerons donc le rayon Al_2 qui forme l'angle β avec la verticale BA prolongée. La tangente correspondante b'_0C, qui coupe BA au point C, fera avec LT l'angle Ab'_0C $= \beta$. En menant par le point C (trace horizontale de la ligne de plus grande pente du plan obtenu par rapport au plan vertical) une tangente à la première circonférence Aa_0, nous aurons la trace horizontale de ce plan P ; et en joignant le point où H^P coupe LT au point B, nous aurons V^P.

Comme il part, en général, deux tangentes du point C, et qu'on peut considérer, au lieu de ce point, son symétrique par rapport à LT, il y aura aussi en général *quatre solutions* (64). Nous n'en avons indiqué que deux sur la figure. En menant par le point (m, m') des plans parallèles aux plans trouvés, le problème sera complétement résolu.

Les droites perpendiculaires aux plans qui répondent à la question, feront avec les plans de projection les angles $90° - \alpha$ et $90° - \beta$. En ne tenant compte que des directions, il existera *quatre* de ces droites si l'on a (64)

$$(90° - \alpha) + (90° - \beta) < 90°,$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \beta > 90°.$$

Il y en aura *deux* seulement, situées dans un plan perpendiculaire à LT et symétriquement disposées par rapport au plan vertical, si l'on a

$$(90° - \alpha) + (90° - \beta = 90°,$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Il n'y en aura *aucune*, si l'on a

$$(90° - \alpha) + (90° - \beta) > 90°,$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \beta < 90°.$$

Il y aura donc *quatre* plans répondant à la question, deux à deux placés symétriquement par rapport au plan vertical, si l'on a

$$\alpha + \beta > 90°.$$

Ils se réduiront à *deux* parallèles à la ligne de terre, si l'on a

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Le problème proposé sera impossible, si l'on a

$$\alpha + \beta < 90°.$$

On aurait pu indiquer à priori ces caractères, en remarquant qu'un plan quelconque forme avec les plans de projection un angle trièdre qui contient un angle dièdre droit. La somme des angles dièdres d'un angle trièdre étant toujours comprise (*Géom.*, 196) entre deux et six angles dièdres droits, la somme des angles dièdres formés par le plan considéré avec les deux plans de projection doit surpasser un angle dièdre droit.

Le choix du point B n'influe évidemment en rien sur les résultats obtenus ; en le faisant varier, on obtient des figures semblables entre elles. On peut faire une remarque analogue relativement au problème du n° 64.

CHAPITRE VI.

QUESTIONS DIVERSES.

69. Nous devrions maintenant parler de la *résolution des angles trièdres*, c'est-à-dire de la détermination complète d'un angle trièdre dans lequel on connaît seulement trois éléments. Mais nous avons déjà traité cette question (*Compl. de Géom.*, 105, 106, 107), qui n'est qu'une application particulière de la méthode des rabattements et qui se rattache à la trigonométrie sphérique.

Nous résoudrons donc seulement ici un problème qui rentre dans *le premier cas* des angles trièdres.

70. *Réduction d'un angle à l'horizon* (*fig.* 53).

Dans le levé des plans, lorsque le terrain qu'on représente est accidenté, il faut en exécuter la projection sur un plan horizontal. Trouver dans ce cas la projection horizontale de l'angle de deux droites, c'est réduire cet angle à l'horizon.

Pour opérer cette réduction, on peut mesurer directement l'angle γ des deux droites SB et SC, et les angles α et β qu'elles forment respectivement avec la verticale. Prenons le plan de l'angle α pour plan vertical : soient alors la ligne de terre LT et la verticale SA qui passe par le sommet S de l'angle donné. L'un des côtés de l'angle γ, SB par exemple, sera dans le plan vertical, et l'on aura

$$\text{ASB} = \alpha.$$

Menons dans ce même plan la droite Sc dont l'angle avec SA est égal à β : elle représentera le rabattement sur le plan vertical du second côté SC de l'angle donné. Si l'on fait tour-

ner Sc autour de SA pour le ramener dans sa véritable position, sa trace horizontale se trouvera sur l'arc de cercle décrit du point A comme centre avec Ac pour rayon. Il faut trouver un second lieu de cette trace horizontale. Pour cela, menons la droite Sc_1 qui forme l'angle γ avec la droite SB, et prenons $Sc_1 = Sc$. Quand on fera tourner la droite Sc_1 autour de SB, pour qu'elle vienne rejoindre le côté SC dans sa véritable position, la distance Bc_1 restera invariable, puisque le triangle BSc_1 est déterminé par un angle et les deux côtés qui le comprennent. Par suite, si du point B comme centre avec Bc_1 pour rayon on décrit un second arc de cercle, il viendra rencontrer le premier en un point C qui sera la trace horizontale du côté SC. L'angle BSC, réduit à l'horizon, sera donc l'angle CAB.

71. *Représentation d'un tétraèdre régulier* (*fig.* 54 *et* 54 *bis*). Nous savons déjà construire géométriquement un tétraèdre régulier (*Compl. de Géom.*, 125); il s'agit de le représenter à l'aide des procédés de la Géométrie descriptive.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que sa base *abc* (*fig.* 54) repose sur le plan horizontal. Le tétraèdre étant régulier, la projection horizontale de son sommet S se confondra avec le centre s du cercle circonscrit au triangle *abc* (*Géom.*, 162). Les projections horizontales de ses arêtes latérales seront donc *sa*, *sb*, *sc*. Pour trouver s', il faut déterminer la hauteur du sommet S au-dessus du plan horizontal ou la hauteur même du tétraèdre. Cette hauteur est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, dans lequel l'autre côté est le rayon du cercle circonscrit à la base *abc* et qui a pour hypoténuse l'arête même du tétraèdre. Nous élèverons donc par le point s une perpendiculaire au rayon *sc*, et nous déterminerons le point s_0 sur cette perpendiculaire par un arc de cercle décrit du point c comme centre avec *cb* pour rayon; ss_0 représentera le rabattement de la hauteur. Sur le prolongement de la perpendiculaire $s\sigma$ abaissée du point s sur LT, on prendra donc $\sigma s' = ss_0$, et l'on aura en s' la projection verticale du sommet S. La base du tétraèdre se projette verticalement sur LT, et les projections verticales de ses arêtes latérales sont $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$.

Si l'on suppose le tétraèdre régulier *fendu* suivant ses arêtes latérales, de manière qu'on puisse rabattre ses faces latérales sur le plan de la base *abc*, c'est-à-dire de manière qu'on puisse opérer le *développement* de toute sa surface sur le plan de cette base, on obtiendra la *fig.* 54 *bis*. Le triangle déterminé par les trois rabattements du sommet S est un triangle équilatéral qu'on peut construire en menant par chaque som-

met de la base *abc* une parallèle au côté opposé : ce triangle a donc un côté double de celui de la base et, comme cela doit être, une surface quadruple.

Si l'on abaisse *sd* perpendiculaire sur *ac* (*fig.* 54) et si l'on joint le sommet S au point *d*, l'angle S*ds* mesure *l'inclinaison de deux faces adjacentes* du tétraèdre. Pour avoir cet angle, nous prendrons sur LT la longueur $\sigma\delta = sd$, et nous joindrons $s'\delta$. Le triangle $s'\delta\sigma$ représentera le triangle S*ds* de l'espace. L'angle $s'\delta\sigma$ sera donc l'angle cherché.

72. *Représentation d'un octaèdre régulier* (*fig.* 55 et 55 *bis*). Nous savons déjà construire géométriquement un octaèdre régulier (*Compl. de Géom.*, 125); il nous sera donc facile d'en déterminer les projections.

Nous avons vu que trois droites égales, perpendiculaires entre elles et se coupant en leur milieu, avaient pour extrémités les six sommets d'un octaèdre régulier. L'arête de l'octaèdre étant *a*, ces droites sont égales à $a\sqrt{2}$.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que deux de ces droites *ac* et *bd* sont dans le plan horizontal; elles y détermineront le carré *abcd* qui partage l'octaèdre en deux pyramides égales. Les deux derniers sommets S et S_1 de l'octaèdre se projetteront au centre de ce carré. Leur distance au plan horizontal étant $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, nous abaisserons la perpendiculaire $s\sigma$ ou $s_1\sigma$ sur LT, et nous porterons sur cette perpendiculaire à partir du point σ, au-dessus et au-dessous de LT, des longueurs $\sigma s'$ et $\sigma s'_1$ égales à $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire à *as*. Les points s' et s'_1 seront les projections verticales des sommets S et S_1. Les projections horizontales des arêtes latérales supérieures de l'octaèdre seront *sa*, *sb*, *sc*, *sd*; elles recouvrent les projections horizontales des arêtes latérales inférieures qui, dans l'hypothèse indiquée, ne sont pas visibles. Le carré *abcd* se projetant sur LT, on obtiendra les projections verticales des arêtes latérales de l'octaèdre en joignant les points s' et s'_1 aux points a', b', c', d'. On doit tracer en lignes ponctuées les projections des arêtes invisibles.

Quant au *développement* de l'octaèdre, supposons qu'on le fende suivant les quatre arêtes latérales qui partent du sommet S et suivant l'arête S_1a, pour en rabattre la surface entière sur le plan de la face bcS_1. On obtiendra la figure 55 *bis*. Les trois triangles qui tiennent alors à la face bcS_1, se rabattront en *bcs*, en bs_1a et en cs_1d. Le triangle lié à la face bS_1a se rabattra en *bsa*. Les deux triangles liés à la face cS_1d se

rabattront en csd et en ds_1a. Enfin, le triangle lié à la face dS_1a se rabattra en ds_1a.

Si l'on abaisse sg perpendiculaire sur ad, et si l'on joint le point g aux sommets S et S_1, l'angle SgS_1 mesurera *l'inclinaison de deux faces adjacentes* de l'octaèdre. Pour avoir cet angle, nous prendrons sur LT la longueur $\sigma\gamma = sg$, et nous joindrons $s'\gamma$ et $s'_1\gamma$. Le triangle $s'\gamma s'_1$ représentera le triangle SgS_1 de l'espace ; l'angle $s'\gamma s'_1$ sera donc l'angle cherché.

73. *Représentation d'un icosaèdre régulier* (*fig.* 56 et 56 *bis*). Si l'on a bien compris ce que nous avons dit sur la construction de l'icosaèdre régulier (*Compl. de Géom.*, 125), on voit qu'on peut aussi le regarder comme formé de deux pyramides pentagonales régulières et identiques, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux ; ces pyramides dont les bases sont parallèles, sont *opposées* l'une à l'autre; et la base de la seconde pyramide doit être considérée comme ayant tourné par rapport à la base de la première pyramide, d'une demi-circonférence autour de l'axe perpendiculaire aux plans des deux bases, qui joint les sommets des deux pyramides. L'intervalle entre les deux pyramides est comblé par dix triangles équilatéraux obtenus en joignant chaque sommet de la base de la pyramide supérieure aux deux sommets correspondants de la base de la pyramide inférieure. De cette façon on a bien, en chacun des douze sommets de l'icosaèdre, cinq triangles équilatéraux égaux et également inclinés.

Ceci posé, prenons (*fig.* 56) le plan horizontal parallèle aux plans des bases des deux pyramides pentagonales. La base de la pyramide supérieure dont le sommet est S, se projettera horizontalement en véritable grandeur suivant le pentagone *abcde* tracé en lignes pleines. *ab* (qui représente l'arête de l'icosaèdre) est dans l'épure placé parallèlement à LT. La base de la pyramide inférieure dont le sommet est S_1, se projettera horizontalement en véritable grandeur suivant le pentagone *fghlm* tracé en lignes ponctuées. Les sommets S et S_1 se projetteront horizontalement au centre commun de ces deux pentagones, dont les sommets partageront (d'après la disposition relative des deux bases) la circonférence *sa* en dix parties égales. En joignant le point *s* aux points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, et chacun des sommets du pentagone *abcde* aux sommets voisins du pentagone *fghlm*, on complétera les projections horizontales des vingt arêtes vues de l'icosaèdre; les dix autres sont invisibles, et leurs projections doivent être tracées en lignes ponctuées.

Supposons que le plan de la base de la pyramide supérieure ait pour trace verticale la parallèle $c'e'$ à LT. Il faut trouver la hauteur du sommet S au-dessus de ce plan. Pour cela, nous

remarquerons que cette hauteur fait partie dans l'espace d'un triangle rectangle dont l'autre côté est le rayon du cercle circonscrit à la base ABCDE, et dont l'hypoténuse est l'arête même de l'icosaèdre. Par le point s, nous élèverons donc à sd, par exemple, une perpendiculaire sur laquelle nous déterminerons la longueur ss_0, en décrivant un arc de cercle du point d comme centre avec dc pour rayon. Nous prendrons alors sur la perpendiculaire abaissée du point s sur LT et sur $c'e'$, une longueur $d's' = ss_0$, et nous aurons en s' la projection verticale du sommet S. Les projections verticales des arêtes qui partent de ce sommet seront donc $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$, $s'd'$, $s'e'$.

Il faut maintenant trouver la distance des plans des bases des deux pyramides SABCDE et S_1FGHLM.

Remarquons que nous connaissons la projection horizontale ah de l'arête AH, par exemple, et la véritable longueur de cette arête entre les deux plans, laquelle est représentée par le côté hl. Nous aurons donc immédiatement la distance demandée (54) en formant sur ha un triangle rectangle haa_0, dont l'hypoténuse $ha_0 = hl$. Par suite, on mènera à $c'e'$ la parallèle $h'm'$ telle, que la perpendiculaire $e'h'$ à LT soit égale à aa_0; $h'm'$ représentera la trace verticale du plan de la base de la pyramide inférieure S_1FGHLM. Si l'on prend sur la perpendiculaire ss' à LT, à partir de son point de rencontre avec $h'm'$ et au-dessous de cette droite, $l's'_1 = d's'$, s'_1 sera la projection verticale du sommet S_1. Les projections verticales des arêtes qui partent du sommet S_1 seront donc s'_1f', s'_1g', s'_1h', s'_1l', s'_1m'.

En joignant le point a' aux points h' et l', le point b' aux points l' et m', etc., on aura les projections verticales des dix dernières arêtes de l'icosaèdre.

Quant au *développement* de ce polyèdre, nous supposerons qu'on le fende suivant les arêtes SD, AB, BC, CD, EA, et suivant les arêtes S_1H, GF, FM, ML, LH et GE, pour déployer sa surface entière sur un plan horizontal mené par le sommet S. Nous obtiendrons ainsi la *fig.* 56 *bis*. Les deux pyramides terminales sont développées en SDCBAEDS et en S_1HGFMLHS$_1$. Les dix triangles qui les unissent, constituent la bande comprise entre les deux parallèles égales EE, GG. L'échelle de la *fig.* 56 *bis* est la moitié de l'échelle de la *fig.* 56.

Si l'on abaisse des sommets B et E des perpendiculaires BP et EP sur l'arête SA, l'angle de ces perpendiculaires mesurera *l'inclinaison de deux faces adjacentes* de l'icosaèdre. Cet angle BPE est l'angle au sommet d'un triangle isocèle dont la base est BE ou be. Pour avoir la hauteur de ce triangle, remarquons que le pied de cette hauteur dans le plan ABCDE

est le point (i, i') milieu de la droite $(be, b'e')$, tandis que le sommet du triangle est le point (p, p') milieu de l'arête $(sa, s'a')$. Cette hauteur aura donc pour projections ip et $i'p'$. En prenant $\pi i'_0 = pi$, sa véritable grandeur sera $p'i'_0$ (54), et l'on n'aura qu'à prendre sur sa une longueur $ip_0 = p'i'_0$, pour obtenir en $ep_0 b$ le rabattement du triangle EPB. L'angle cherché sera donc mesuré par l'angle $ep_0 b$.

Remarque. — Il est essentiel de remarquer que, dans le triangle rectangle dss_0 (*fig.* 56), ds représentant le rayon du cercle sa et ds_0 le côté du pentagone régulier inscrit dans ce cercle, $ss_0 = s'd' = s'_1 l'$ représente à son tour le côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle (*Géom.*, 129).

De même, le triangle rectangle haa_0 montre que, ah étant le côté du décagone régulier inscrit et ha_0 le côté du pentagone régulier inscrit, la hauteur $aa_0 = h'e'$ est égale au rayon du cercle sa.

Pour trouver la hauteur commune des pyramides opposées qui terminent l'isocaèdre ainsi que la distance des traces verticales de leurs bases, *il n'est donc besoin d'aucune construction particulière.*

74. *Représentation d'un hexaèdre régulier* (*fig.* 57 et 57 *bis*).

Nous ne traitons cette question si simple que pour donner complétement ce qui a rapport aux polyèdres réguliers.

Supposons la base inférieure du cube placée sur le plan horizontal. Elle représentera en même temps la projection horizontale de la base supérieure. Abaissons la perpendiculaire aa' sur LT, et prolongeons cette perpendiculaire d'une longueur $a'e'$ égale à l'arête ab du cube. En menant par le point e' une parallèle à LT, on aura la trace verticale du plan de la base supérieure du cube. Les arêtes latérales qui se projettent horizontalement en a, b, c, d, auront donc pour projections verticales les perpendiculaires $a'e'$, $b'f'$, $c'g'$, $d'h'$, à LT.

Pour avoir le *développement* du cube, nous le fendrons suivant ses quatre arêtes latérales, et suivant trois des arêtes de la base supérieure. Nous pourrons alors en déployer la surface entière sur le plan de la base inférieure, comme l'indique la *fig.* 57 *bis*.

Tous les angles dièdres du cube sont *droits*.

75. *Représentation d'un dodécaèdre régulier* (*fig.* 58 et 58 *bis*).

En se reportant à ce que nous avons dit sur la construction du dodécaèdre régulier (*Compl. de Géom.*, 125), on voit qu'on

peut le regarder comme ayant pour *bases* deux pentagones réguliers identiques dont les plans sont parallèles, et sur chaque côté desquels on a construit un pentagone régulier. Les deux moitiés du polyèdre, ainsi composées de six pentagones, étant *opposées* l'une à l'autre, on fait tourner la base inférieure d'une demi-circonférence autour de l'axe qui est perpendiculaire aux deux bases et qui joint leurs centres. On rapproche ensuite les deux *calottes*, de manière que les sommets des pentagones supérieurs venant s'engager entre les pentagones inférieurs, et réciproquement, on obtient en chacun des vingt sommets du dodécaèdre trois pentagones réguliers égaux et également inclinés.

Ceci posé, prenons le plan horizontal parallèle aux deux bases du dodécaèdre. La base supérieure se projettera suivant le pentagone régulier *abcde* tracé en lignes pleines. L'épure suppose *ab* parallèle à LT. La base inférieure se projettera suivant le pentagone *fghil* tracé en lignes ponctuées. D'après la disposition relative des deux bases, les sommets de ces deux pentagones qui ont le point *o* pour centre commun, partageront en dix parties égales la circonférence de rayon *oa*. Supposons qu'on rabatte en $iln_0x_0m_0$ et en $ihr_0s_0m_0$, sur le plan horizontal de la base inférieure, les deux pentagones ILNXM et IHRSM construits sur les côtés IL et IH de cette base. On obtiendra, rabattues sur le même plan, les trois faces de l'angle trièdre formé autour du sommet I. Lorsqu'on relèvera ces deux pentagones, le sommet m_0 du pentagone $ihr_0s_0m_0$ restera dans un plan vertical dont la trace sur le plan horizontal considéré est la perpendiculaire abaissée de ce point m_0 sur *ih* prolongé; et le sommet m_0 du pentagone $iln_0x_0m_0$ restera dans un plan vertical dont la trace sur le plan horizontal considéré est la perpendiculaire abaissée de ce point m_0 sur *il* prolongé. Les deux rabattements m_0 venant, dans leurs mouvements de rotation, se confondre avec le point M de l'espace, on voit que ce point appartient à l'intersection des deux plans verticaux indiqués, c'est-à-dire que sa projection horizontale est le point de rencontre *m* des deux perpendiculaires abaissées des points m_0 sur les charnières *ih* et *il*.

D'ailleurs la symétrie de la figure montre que *les trois points o, i, m, sont en ligne droite*. Par conséquent, si l'on décrit du point *o* comme centre et avec *om* pour rayon une circonférence, il suffira de prolonger les autres rayons du pentagone *ilfgh* jusqu'à la rencontre de cette circonférence, pour obtenir en *n*, *p*, *q*, *r*, les projections horizontales des autres sommets où viennent se rejoindre dans l'espace les pentagones qui s'appuient sur la base inférieure.

En vertu de la parfaite identité des deux parties du dodé-

caèdre, c'est aussi sur la circonférence *om* et sur les rayons du pentagone *abcde* que se trouveront les projections horizontales des sommets où viennent se rejoindre dans l'espace les pentagones qui s'appuient sur la base supérieure du polyèdre. On obtiendra donc ces projections en s, x, v, u, t, de sorte que les droites as, bx, cv, du, et, représenteront les projections horizontales des arêtes latérales qui correspondent aux cinq sommets de la base supérieure.

Si l'on remarque maintenant que les sommets où viennent se rejoindre dans l'espace les pentagones décrits sur les côtés de la base inférieure, sont en même temps les sommets les plus éloignés de la base supérieure sur les pentagones décrits sur les côtés de cette base (et *vice versâ*), on voit que la projection horizontale du dodécaèdre est complétée par le décagone régulier qu'on a inscrit dans le cercle de rayon *om* en prolongeant les rayons des deux pentagones *abcde*, *fghil*; ce décagone doit évidemment être tracé en lignes pleines.

Passons à la projection verticale du polyèdre. Supposons que $h'l'$ parallèle à LT représente la trace de sa base inférieure sur le plan vertical. Il faut déterminer la hauteur du sommet M au-dessus de cette base. Remarquons, pour cela, qu'on connaît la projection horizontale *im* de l'arête IM dont l'extrémité I est dans le plan horizontal considéré, et la véritable longueur de cette arête qui est égale à *ab*. Il suffira donc d'élever en m une perpendiculaire à *im*, et de marquer sur cette perpendiculaire le point m'_0 à l'aide de l'arc de cercle décrit du point i comme centre avec *il* pour rayon. La hauteur cherchée étant mm'_0, on aura m' en prenant sur la perpendiculaire abaissée du point i sur LT et à partir de i' une longueur $i'm' = mm'_0$. Les projections verticales n', p', q', r', seront évidemment à la même distance de LT que m'.

Il faut maintenant trouver la projection verticale du sommet S, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus de la base inférieure du dodécaèdre. Nous avons en rabattement la distance $s_0\sigma$ du point S au côté IH, et nous connaissons la projection horizontale $s\sigma$ de cette distance. Nous élèverons donc en s une perpendiculaire à $s\sigma$, puis nous marquerons sur cette perpendiculaire le point s'_0 à l'aide d'un arc de cercle décrit du point σ avec σs_0 pour rayon. La distance de la projection verticale s' à $h'l'$ sera alors ss'_0. Les projections verticales x', v', u', t', seront évidemment à la même distance de LT que s'.

Enfin, d'après les remarques précédentes, la hauteur du point s' au-dessus de $h'l'$ fait nécessairement connaître la hauteur de la trace verticale du plan de la base supérieure du dodécaèdre au-dessus du point m'. On aura donc tous les

éléments nécessaires pour achever la projection verticale du polyèdre telle que l'indique la *fig.* 58.

Quant à son *développement,* nous supposerons qu'on le fende suivant *toutes* les arêtes qui n'appartiennent pas à ses bases, *sauf une seule,* de manière à étendre sa surface entière sur le plan de la base inférieure. On obtiendra ainsi la *fig.* 58 *bis,* dont l'échelle est moitié de celle de la *fig.* 58.

Pour mesurer *l'inclinaison de deux faces adjacentes* du dodécaèdre, il faudra (*Compl. de Géom.,* 105) mesurer l'un des angles dièdres égaux de l'angle trièdre I, dont on a rabattu les faces sur le plan de la base inférieure du polyèdre (*fig.* 58). Le point m étant le point de rencontre des perpendiculaires abaissées des deux rabattements m_0 sur les arêtes ih et il, on élèvera en m une perpendiculaire sur $m_0\lambda$, puis du point λ avec λm_0 pour rayon, on décrira un arc de cercle qui viendra couper cette perpendiculaire en y. Comme le point m se trouve à *droite* de il, l'angle $m\lambda y$, au lieu d'être l'angle cherché, en est *le supplément.*

Comme vérification, on doit évidemment avoir

$$my = mm'_0.$$

Remarque. — L'unité d'angle étant l'angle droit, l'angle d'un pentagone régulier est égal à $\frac{6}{5}$. Il en résulte que l'angle mim_0, moitié de l'angle m_0im_0, est égal à $\frac{1}{5}$. Il est facile de voir que le triangle imm_0 est isocèle. On aura donc

$$im = \frac{im_0}{2\cos 18^\circ}.$$

Mais (*Trig.,* 29)

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

im_0 étant le côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon $oa = r$, on a (*Géom.,* 129)

$$im_0 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Par suite,

$$im = r\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}} = r\,\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

Ainsi im n'est autre chose (*Géom.,* 129) que le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de rayon oa.

Nous savons d'ailleurs (*Compl. de Géom.*, 82, note) que le côté du *décagone étoilé* est égal au rayon du cercle circonscrit augmenté du côté du décagone ordinaire. Le rayon *om* est donc le côté du décagone étoilé inscrit dans le cercle *oa*, et on l'obtiendra immédiatement en prenant la corde qui sous-tend les $\frac{3}{10}$ de la circonférence *oa* (*Compl. de Géom.*, 82).

Le triangle rectangle imm'_0 montre alors que la hauteur $mm'_0 = i'm'$ est le rayon du cercle *oa* (73, *Rem.*).

Enfin il est facile de s'assurer que le côté ss'_0 du triangle $\sigma ss'_0$ est égal au rayon *om*. Pour déterminer les hauteurs des sommets des pentagones qui s'appuient sur la base inférieure du dodécaèdre, aucune construction particulière ne sera donc nécessaire.

76. *Étant donnée une pyramide triangulaire, lui circonscrire une sphère* (*fig.* 59).

Nous avons vu (*Compl. d'Alg.*, 111) que toute pyramide triangulaire était inscriptible à une sphère, et que, pour obtenir le centre de cette sphère, il fallait chercher le point de rencontre des plans élevés perpendiculairement au milieu de chaque arête de la pyramide proposée.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que la base *abc* de la pyramide donnée repose sur le plan horizontal, et que l'une de ses arêtes latérales (*sa*, *s'a'*) est parallèle au plan vertical.

Les trois plans perpendiculaires aux arêtes de la base en leurs milieux seront des plans verticaux dont l'intersection, perpendiculaire au plan horizontal, sera le lieu de tous les points à égale distance des sommets *a*, *b*, *c*. Cette intersection contiendra donc le centre de la sphère circonscrite, qui se projettera dès lors horizontalement au point de rencontre *m* des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés *ac* et *bc*, c'est-à-dire au centre du cercle circonscrit au triangle *abc*. Pour avoir *m'*, nous remarquerons que le centre de la sphère circonscrite est aussi dans le plan mené perpendiculairement au milieu de l'arête (*sa*, *s'a'*) parallèle au plan vertical; ce plan, perpendiculaire au plan vertical, a nécessairement pour trace verticale la perpendiculaire menée au milieu *i'* de la projection verticale *s'a'*. Cette perpendiculaire viendra couper le prolongement de la perpendiculaire $m\mu$ à LT en *m'*, puisque tous les points d'un plan perpendiculaire au plan vertical se projettent verticalement sur sa trace verticale. Le rayon de la sphère demandée étant (*ma*, *m'a'*), on aura sa véritable grandeur $m'a'_1$, en prenant sur LT

$$\mu a'_1 = ma.$$

77. *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire donnée* (*fig.* 60).

Nous avons vu (*Compl. de Géom.*, **111**) que toute pyramide triangulaire était circonscriptible à une sphère, et qu'en menant les plans bissecteurs des angles dièdres déterminés par la base de la pyramide proposée et ses faces latérales, on formait une nouvelle pyramide dont le sommet était précisément le centre de la sphère inscrite dans la pyramide donnée.

Ceci posé, nous admettrons pour plus de simplicité que la base *abc* de cette pyramide est dans le plan horizontal. Soit (*s*, *s'*) son sommet. Menons sur le côté *ab* de la base la perpendiculaire *sd*. L'angle *sd*S du triangle S*sd* de l'espace mesure l'angle dièdre formé par la base avec la face latérale S*ab*. Le plan bissecteur de cet angle dièdre contient la bissectrice de l'angle *sd*S (*Compl. de Géom.*, **101**). Prenons sur LT, à partir de son point d'intersection σ avec *ss'*, une longueur $\sigma d'_1 = sd$. L'angle $\sigma d'_1 s'$ représentera l'angle *sd*S, et la bissectrice de l'angle $\sigma d'_1 s'$ sera la projection verticale de la bissectrice de l'angle *sd*S, lorsqu'on rend le plan de cet angle parallèle au plan vertical par une rotation autour de l'axe S*s*.

En raisonnant d'une manière identique par rapport aux perpendiculaires *se* et *sf* abaissées du point *s* sur les côtés *bc* et *ac* de la base *abc*, on construira les angles $\sigma e'_1 s'$ et $\sigma f'_1 s'$ qui mesurent les angles dièdres de la base avec les deux autres faces latérales. Les bissectrices des angles $\sigma e'_1 s'$ et $\sigma f'_1 s'$ seront les projections verticales des bissectrices des angles *se*S et *sf*S, rendus parallèles au plan vertical.

Supposons maintenant qu'on prenne un nouveau plan horizontal caractérisé par la ligne de terre L_1T_1 parallèle à LT. Rien ne sera changé aux projections verticales ni à la projection horizontale du triangle *abc*. Le nouveau plan horizontal coupera la pyramide M*abc* dont le sommet M est le centre de la sphère inscrite dans la pyramide S*abc*, suivant un triangle $\alpha\beta\gamma$ qui aura ses côtés parallèles à ceux de la base commune *abc*. Il faut construire le triangle $\alpha\beta\gamma$.

Si l'on prolonge les bissectrices des angles $\sigma d'_1 s'$, $\sigma e'_1 s'$, $\sigma f'_1 s'$, jusqu'à leurs points de rencontre g'_1, h'_1, l'_1, avec L_1T_1, et si l'on abaisse des points d'_1, e'_1, f'_1, les perpendiculaires $d'_1\delta$, $e'_1\varepsilon$, $f'_1\varphi$, sur L_1T_1, on obtiendra trois triangles rectangles qui feront connaître les longueurs des projections des bissectrices des angles *sd*S, *se*S, *sf*S, entre les côtés des deux triangles *abc* et $\alpha\beta\gamma$.

En effet, dans le triangle $d'_1\delta g'_1$, par exemple, $d'_1 g'_1$ est la véritable longueur de la bissectrice de l'angle *sd*S entre les deux plans horizontaux considérés, tandis que le côté $d'_1\delta$ est la distance de ces deux plans ou la différence de hauteur des

extrémités de la bissectrice par rapport au dernier plan. Le côté $\delta g'_1$ représente donc, à son tour (54), la projection horizontale de la partie de la bissectrice comprise entre les deux plans. En portant sur *sd* prolongée une longueur $dg = \delta g'_1$, on obtiendra donc en *g* un point appartenant au côté $\alpha\beta$ parallèle à *ab*. En prenant de même sur *se* et sur *sf* prolongées les longueurs $eh = \varepsilon h'_1$ et $fl = \varphi l'_1$, nous obtiendrons les points *h* et *l* appartenant aux côtés $\beta\gamma$ et $\alpha\gamma$ qui sont parallèles aux côtés *bc* et *ac*. La section $\alpha\beta\gamma$ sera par suite déterminée.

Mais, connaissant les projections horizontales de deux sections parallèles faites dans la pyramide dont le sommet est le centre de la sphère demandée, on aura immédiatement les projections horizontales de ses arêtes latérales en traçant les droites αa, βb, γc. Si l'on a bien opéré, ces projections viendront se couper en un même point *m*, qui sera la projection horizontale du sommet de la pyramide M*abc* ou du centre de la sphère inscrite dans la pyramide S*abc*. Comme les traces horizontales α, β, γ, de ces arêtes, ont pour projections verticales sur L_1T_1 les points α', β', γ', les projections verticales des arêtes latérales de la pyramide M*abc* seront $\alpha' a'$, $\beta' b'$, $\gamma' c'$; et ces projections viendront se croiser en un même point m', projection verticale du centre de la sphère cherchée.

Comme cette sphère est tangente à la base *abc* de la pyramide proposée, son rayon est la distance de son centre au premier plan horizontal (*Géom.*, 261), c'est-à-dire que ce rayon est égal à $m'\mu$.

Le point de contact de la sphère et du plan *abc* est évidemment le point (m, μ). Si l'on veut déterminer les points de contact de la sphère avec les autres faces latérales de la pyramide, il suffit de construire les points où elles sont coupées par les perpendiculaires abaissées du centre de la sphère sur leurs plans.

78. *Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une sphère* (*fig.* 61).

Nous emploierons la méthode générale indiquée au n° 48.

Soient (o, o') le centre de la sphère et $(ab, a'b')$ la droite donnée. Si l'on décrit des points *o* et *o'* comme centres des circonférences ayant pour rayon celui de la sphère, elles représenteront : l'une la projection verticale du grand cercle de la sphère qui est parallèle au plan vertical, l'autre la projection horizontale du grand cercle de la sphère qui est parallèle au plan horizontal. Les projections de tous les points de la surface sphérique doivent évidemment tomber à l'intérieur de ces deux circonférences.

Menons un plan P par la droite $(ab, a'b')$ et le centre (o, o').

Ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle, et les points où la droite $(ab, a'b')$ rencontrera ce grand cercle, seront ceux où elle perce la surface sphérique.

Si l'on trace par le point (o, o') une parallèle $(oc, o'c')$ à la droite $(ab, a'b')$, et si l'on joint les traces horizontales a et c des deux droites, on aura H^P. Rabattons le plan P sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de H^P. Abaissons od perpendiculaire sur H^P. Prenons sur LT, à partir de son point de rencontre λ avec oo', une longueur $\lambda\delta = od$; joignons $o'\delta$ et prenons à partir du point d, sur od prolongée, une longueur $do_0 = o'\delta$. Le point o_0 sera le rabattement du centre de la sphère, co_0 sera le rabattement de la droite $(oc, o'c')$. En menant ab_0 parallèle à co_0, on aura celui de la droite $(ab, a'b')$.

Décrivons sur le plan horizontal, du point o_0 comme centre, une circonférence égale à celle d'un grand cercle de la sphère; elle représentera l'intersection rabattue du plan P et de la surface sphérique. ab_0 coupant cette circonférence en deux points m_0 et n_0, il suffira de relever ces points pour avoir en (m, m') et en (n, n') les points d'intersection de la droite et de la sphère données.

Si ab_0 touche la circonférence o_0, la droite $(ab, a'b')$ est tangente à la sphère proposée; elle n'a aucun point commun avec cette sphère, si ab_0 n'en a aucun avec la circonférence o_0.

CHAPITRE VII.

DES PLANS COTÉS.

79. Nous avons vu (5) qu'un point était déterminé par sa projection sur le plan horizontal et par sa hauteur au-dessus de ce plan. Cette hauteur est donnée en général *graphiquement* par la distance de la projection verticale du point à la ligne de terre. Mais on conçoit qu'on peut l'indiquer aussi *numériquement*. Il est très-avantageux d'opérer ainsi, c'est-à-dire de remplacer la projection verticale par une *cote de hauteur*, dans un grand nombre d'applications de la Géométrie descriptive, notamment dans celles qui se rapportent à la topographie et à la fortification.

Dans ce système, un point est représenté par sa projection horizontale et par une cote qui donne sa distance au plan horizontal choisi.

Nous regarderons comme *positives* les cotes des points situés *au-dessus* du plan horizontal, comme *négatives* celles des

points situés *au-dessous*. Le point a (*fig.* 62) correspondant à la cote 1,40, est la projection horizontale d'un point A de l'espace situé à $1^{M},40$ au-dessus du plan horizontal. Le point c correspondant à la cote — 2 est la projection horizontale d'un point C de l'espace situé à 2^{M} au-dessous du plan horizontal.

Une droite est alors représentée par les projections horizontales ou (puisqu'il n'y a plus qu'un plan de projection) par les projections et les cotes de deux de ses points.

On reconnaît qu'une droite est *horizontale* à l'égalité des cotes des deux points donnés. Lorsqu'elle est *verticale*, elle se projette suivant un seul point.

Tous les dessins relatifs *aux plans cotés* doivent être exécutés à une *échelle* déterminée (*Géom.*, **122**), pour qu'on puisse convertir immédiatement les nombres en longueurs ou réciproquement.

80. *Construire l'échelle de pente d'une droite donnée* (*fig.* 62).

Construire l'*échelle de pente* d'une droite donnée, c'est marquer sur la projection de cette droite *les points dont les cotes sont entières*.

Soit la droite définie en projection par les points a et b dont les cotes sont 1,40 et 6,3. Élevons sur ab les perpendiculaires $a\mathrm{A}$ et $b\mathrm{B}$ qui représentent à l'échelle les hauteurs des points A et B de l'espace au-dessus du plan horizontal de comparaison. AB sera le rabattement de la droite de l'espace. Menons $\mathrm{A}\beta$ parallèle à ab. Si nous supposons que les cotes des points P et R diffèrent de 1^{M}, les deux triangles semblables $\mathrm{AB}\beta$, $\mathrm{PR}\rho$, nous permettront de poser

$$\frac{\mathrm{P}\rho}{1^{M}} = \frac{\mathrm{A}\beta}{\mathrm{B}\beta},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{P}\rho = \frac{ab}{\mathrm{B}b - \mathrm{A}a}.$$

Le triangle $\mathrm{PR}\rho$ étant évidemment constant par rapport à la droite proposée, il en est de même de $\mathrm{P}\rho$. D'une manière générale, *on trouve donc la distance qui sépare sur une droite donnée les projections de deux points dont les cotes diffèrent de* 1^{M}, *en divisant la distance des projections de deux points connus de la droite par la différence de leurs cotes.*

Il est commode de donner un nom à la distance $\mathrm{P}\rho$: on l'appelle ordinairement l'*intervalle* ou l'*unité de l'échelle de pente*, et nous la représenterons par d.

Dans le cas de la *fig.* 62, on a

$$ab = 4^{M},9 \quad \text{et} \quad \mathrm{B}b - \mathrm{A}a = 4^{M},9;$$

par suite,

$$d = 1^{M}.$$

A l'échelle adoptée, les projections des points de la droite AB dont les cotes diffèrent de 1^{M}, seront donc distantes de $0^{M},005$.

Pour passer en projection du point a dont la cote est 1,40 au point dont la cote est 2, il faut évidemment prendre à droite de a les 0,6 de l'*intervalle*, ou, à l'échelle adoptée, $0^{M},003$. En portant ensuite successivement à partir du point 2, à droite et à gauche, l'*unité de l'échelle de pente* ou $0^{M},005$, on obtiendra les points 3, 4, 5, 6, etc., et les points 1, 0, -1, -2, etc. Quand on a marqué ainsi les projections des points de la droite dont les cotes diffèrent de 1^{M}, elle est *graduée* ou *son échelle de pente* est construite.

Il est facile alors de *trouver sur cette droite la cote d'un point dont on a la projection, ou la projection d'un point dont on a la cote.* Soit le point m qui tombe entre les points 3 et 4. On divisera l'intervalle entre ces points en dix parties égales; le point m tombant entre deux des divisions obtenues, on aura sa cote à moins de 0,1. Si l'on divise encore en dix parties égales l'intervalle entre ces divisions, on connaîtra nécessairement la cote du point m à moins de 0,01 et même de 0,005. Pour trouver au contraire la projection d'un point dont la cote est donnée égale à $3^{M},6$ par exemple, il suffit de compter à partir du point 3 les 0,6 de l'unité de l'échelle de pente.

Si l'on demande la distance des deux points a et b, on peut opérer *graphiquement* comme nous l'avons fait (*fig.* 62), c'est-à-dire rabattre le trapèze rectangle abAB, et mesurer à l'échelle la longueur AB, ou bien poser

$$AB = \sqrt{ab^2 + (B\,b - A\,a)^2}.$$

Dans le cas considéré, on trouve *graphiquement*

$$AB = 6^{M},90,$$

et, *numériquement,*

$$AB = 6^{M},93.$$

81. *Pente d'une droite* (*fig.* 62).

L'angle i du triangle ABβ mesure l'inclinaison de la droite donnée sur l'horizon. La tangente de cet angle est ce qu'on nomme la *pente* de la droite (*voir* t. II, à la fin de la Note IV).

Le triangle ABβ donne

$$\operatorname{tang} i = \frac{B\,\beta}{A\,\beta} = \frac{B\,b - A\,a}{ab}.$$

On voit que *la pente d'une droite est l'inverse de l'unité de son échelle de pente* (80).

Si l'on désigne cette pente par p, on aura la relation générale

$$pd = 1.$$

82. *Remarque.* — Au lieu du triangle ABβ, on peut, dans tout ce qui précède, considérer le triangle $ab6$. C'est comme si l'on relevait le plan horizontal de $1^{M},40$ de manière à le faire passer par le point A. Au point de vue de la simplicité et de la rapidité des constructions, cette remarque est importante, car on n'a alors besoin de recourir à l'échelle graphique qu'une seule fois, pour marquer la hauteur $b6$, différence des cotes des deux points a et b.

83. *Mener par un point donné une parallèle à une droite donnée* (*fig.* 63).

Deux droites parallèles ont des projections parallèles et la même pente, par suite la même unité pour leurs échelles de pente (81).

Soit le point c dont la cote est 2,25 et par lequel on veut mener une parallèle à la droite ab. On tracera par le point c une parallèle ef à ab. On prendra sur ab les 0,25 ou le quart de l'intervalle, et on le portera sur ef à partir du point c dans le sens convenable. On obtiendra ainsi le point 2. Pour avoir l'échelle de pente de ef, il suffira de porter sur cette droite, à partir du point 2, l'unité de l'échelle de pente de ab.

84. Un plan *limité* est représenté par les projections de ses côtés et les cotes de leurs extrémités (*fig.* 64). En marquant et en joignant les points de même cote sur le contour de la projection obtenue, on obtient des *horizontales* du plan donné. Si l'on trace une perpendiculaire à la direction de ces horizontales, on a la projection d'une ligne de plus grande pente du plan donné par rapport au plan horizontal (20), et l'échelle de pente de cette ligne de plus grande pente se trouve alors toute construite (80).

On représente un plan *illimité* par la projection et l'échelle de pente d'une de ses lignes de plus grande pente par rapport au plan horizontal. Pour marquer qu'on considère le plan et non la ligne elle-même, on *double* le trait qui représente la projection de la ligne, et l'on a ce qu'on appelle l'*échelle de pente* du plan (*fig.* 64 et 64 *bis*).

La *pente* de l'échelle de pente du plan mesure son inclinaison sur le plan horizontal, et en menant des perpendiculaires à cette échelle de pente, on obtient les projections d'autant d'*horizontales* du plan qu'on le veut. Les cotes de ces

horizontales correspondent aux cotes de l'échelle de pente, de sorte que *l'horizontale menée à la cote* o *est la trace horizontale du plan.* Ce mode de représentation revient donc à regarder le plan comme engendré par une de ses horizontales, glissant parallèlement à elle-même le long d'une de ses lignes de plus grande pente.

Comme deux parallèles déterminent un plan, *on peut représenter un plan par deux quelconques de ses horizontales;* on en déduit, s'il est nécessaire, l'échelle de pente du plan en menant une perpendiculaire à leur direction.

Lorsqu'un plan est *horizontal,* tous ses points ont la même cote, et on peut le représenter par deux droites quelconques, parallèles ou non, satisfaisant à cette condition.

Lorsqu'un plan est *vertical,* son échelle de pente est verticale, et on le représente alors simplement par sa trace horizontale.

85. Deux droites qui se coupent déterminent ou représentent un plan.

Pour reconnaître si deux droites dont les projections se coupent se rencontrent effectivement; il suffit de joindre sur ces droites les points de même cote. Si les droites proposées se coupent, on doit obtenir ainsi les projections des horizontales correspondantes du plan qu'elles définissent, c'est-à-dire *des parallèles.* Dans le cas contraire, les sécantes obtenues ne peuvent être parallèles.

Ayant vérifié que les droites données *ab* et *cd* (*fig.* 64 *bis*) se rencontrent, *on peut demander la cote de leur point d'intersection.* On l'obtiendra immédiatement (80), si les projections des deux droites se coupent dans les limites du dessin. Sinon, il faudra opérer comme il suit.

Menons, par exemple, par le point *e* pris sur la droite *cd* et dont la cote est 12, une parallèle *ef* à la droite *ab* jusqu'à la rencontre de l'horizontale 14 du plan des deux droites. Si l'on désigne par *m* la projection du point d'intersection cherché, les deux triangles semblables *efc*, *mac*, donneront

$$\frac{ma}{ef} = \frac{ac}{fc}, \quad \text{d'où} \quad ma = ef \cdot \frac{ac}{fc}.$$

Si l'on exprime *ef* par le nombre d'intervalles correspondants de la droite *ab*, la distance *ma* sera aussi exprimée en intervalles. Pour avoir le rapport $\frac{ac}{fc}$, on mesurera à l'échelle les longueurs *ac* et *fc*. Dans le cas de la *fig.* 64 *bis*, on trouve *directement* 9,40 environ pour la cote du point *m*; et le *calcul*

basé sur les mesures graphiques effectuées conduisant à $ma = 4,5$ donne, pour cote de ce point,

$$14 - 4,5 = 9,5.$$

86. *Construire l'échelle de pente d'un plan donné : 1° par trois points; 2° par une horizontale et un point* (*fig.* 65).

Soient *a*, *b*, *c* les trois points donnés dont les cotes sont respectivement 6, 10,7 et 8,5. Déterminons sur la droite *ab* le point *d* qui a la même cote que le point *c* (80); la droite *cd* sera une horizontale du plan considéré. En menant à cette horizontale par le point *c* la perpendiculaire P, on aura l'échelle de pente du plan. Pour graduer cette échelle, il suffit de mener *ae* parallèle à *cd*; le point *e* aura la même cote 6 que le point *a*, et l'on rentrera dans un cas déjà examiné (80).

Si le plan P est donné par le point *c* et l'horizontale *ae*, il suffit pour avoir son échelle de pente de mener par le point *c* une perpendiculaire à *ae*.

Connaissant la projection d'un point d'un plan, on voit qu'en menant par cette projection une horizontale du plan, on peut lire immédiatement sur son échelle de pente la cote du point donné.

87. *Intersection de deux plans donnés par leurs échelles de pente* (*fig.* 66 et 66 *bis*).

Soient les plans P et Q donnés par leurs échelles de pente. Pour avoir leur intersection, nous emploierons la méthode générale, c'est-à-dire que nous les couperons par des plans auxiliaires (41).

Considérons le plan horizontal *à la cote* 10 : il coupera (*fig.* 66) les plans P et Q suivant deux horizontales de même cote. On aura les projections de ces horizontales en menant par le point 10 une perpendiculaire à l'échelle P, et par le point 10 une perpendiculaire à l'échelle Q. Ces projections se couperont en un point *i* qui appartiendra à l'intersection des plans P et Q.

Considérons le plan horizontal *à la cote* 7 : il coupera les plans P et Q suivant deux horizontales de même cote dont on construira les projections de la même manière. Ces projections se couperont en un point *l* de l'intersection cherchée, de sorte que cette intersection aura pour projection *il* et sera complétement déterminée.

Il peut arriver que les échelles de pente des plans donnés soient presque parallèles. Il en est de même alors des projections des horizontales de ces plans, qui vont dans ce cas se rencontrer très-loin hors de l'épure. Pour lever cette difficulté, on emploie comme plans auxiliaires des plans quelconques.

Un plan quelconque peut être représenté par deux de ses horizontales (84); ou bien, deux parallèles quelconques, définies chacune par deux points de même cote (ces cotes étant quelconques), représentent un plan.

Traçons donc sur l'épure (*fig.* 66 *bis*) deux parallèles *ab* et *cd*, aux cotes 24 et 27, et cherchons les intersections de leur plan R avec les plans P et Q. Si l'on mène les horizontales du plan P qui correspondent aux cotes 24 et 27, elles couperont les horizontales de même cote du plan auxiliaire R en des points *a* et *d* : *ad* représentera alors l'intersection des plans P et R. Si l'on mène les horizontales du plan Q qui correspondent aux cotes 24 et 27, elles couperont les horizontales de même cote du plan auxiliaire R en des points *b* et *c* : *bc* représentera alors l'intersection des plans Q et R. Les deux droites *ad* et *bc* comprises dans le plan R, se coupant en un point *i*, ce point sera commun aux trois plans P, Q, R, c'est-à-dire qu'il appartiendra à l'intersection des plans P et Q.

En traçant sur l'épure deux autres parallèles *ef* et *gh* que nous prendrons aussi, pour plus de simplicité, aux cotes 24 et 27, et en cherchant de même les intersections du plan S qu'elles déterminent avec les plans P et Q, intersections qui seront représentées par les droites *eh* et *fg*, nous trouverons un second point *l* de l'intersection des plans P et Q. Cette intersection sera donc *il*.

Si les plans P *et* Q *avaient leurs échelles de pente parallèles*, leurs traces horizontales seraient parallèles : leur intersection serait donc une horizontale, et il suffirait d'en déterminer un seul point par le procédé qu'on vient d'appliquer.

88. *Intersection d'une droite et d'un plan* (*fig.* 67).

Nous emploierons la méthode générale (48).

Soient le plan P et la droite *ab*. Menons par les points 2 et 6, par exemple, de la droite *ab*, deux parallèles de direction quelconque : elles représenteront les horizontales de même cote d'un plan auxiliaire R passant par la droite *ab*, et comme elles couperont les horizontales correspondantes du plan P aux points *i* et *l*, la droite *il* sera l'intersection des plans P et R. Cette intersection *il* coupant *ab* au point *m*, c'est en ce point que la droite *ab* perce le plan P.

On peut se servir du même tracé pour *trouver le point d'intersection de deux droites situées dans un plan vertical* (*fig.* 67 *bis*).

Ces droites ont pour projection commune la trace horizontale H du plan qui les renferme; seulement leurs échelles de pente sont différentes. Par les points 31 et 34 de la première droite *ab*, menons deux parallèles *al* et *bi* : elles repré-

senteront deux horizontales d'un plan R passant par la droite *ab*. Par les points 31 et 34 de la seconde droite *cd*, menons deux parallèles *cl* et *di* : elles représenteront deux horizontales d'un plan S passant par la droite *cd*. Les horizontales de même cote des plans R et S se rencontrant aux points *i* et *l*, la droite *il* sera l'intersection des plans R et S. Cette intersection doit d'ailleurs contenir le point commun aux droites *ab* et *cd*. Le point *m* cherché se trouvera donc à la rencontre de *il* et de H.

89. *Mener par un point donné une droite perpendiculaire à un plan donné, trouver son pied dans le plan et sa longueur* (*fig.* 68).

Lorsqu'une droite et un plan sont perpendiculaires, *la projection de la droite est parallèle à l'échelle de pente du plan.* En effet, la projection de la droite doit être perpendiculaire à la trace horizontale du plan (23) ou aux projections de ses horizontales.

De plus, *les pentes de la droite et du plan sont inverses l'une de l'autre.* On le voit (*fig.* 68 *bis*) en menant par la normale N un plan vertical. Ce plan est à la fois perpendiculaire au plan considéré et au plan horizontal, c'est-à-dire à leur intersection. Il coupe donc le plan proposé suivant une ligne de plus grande pente AC, le plan horizontal suivant la projection BC de cette ligne de plus grande pente. L'angle $ABC = i$ mesure donc l'inclinaison du plan donné sur l'horizon. Mais BC représente aussi la projection de la normale NR, dont la pente correspond à l'angle $RnB = i'$. Le triangle rectangle BR*n* donne

$$\operatorname{tang} i = \cot i' \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} i . \operatorname{tang} i' = 1.$$

On a, par suite, en désignant par p et par p' les pentes du plan et de la normale,

$$pp' = 1.$$

L'unité de l'échelle de pente du plan étant $d = \frac{1}{p}$ et l'unité de l'échelle de pente de la droite étant $d' = \frac{1}{p'}$ (81), on aura nécessairement

$$dd' = 1.$$

Ainsi, *lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, sa projection est parallèle à l'échelle de pente du plan, et les unités des deux échelles de pente sont inverses.*

La *fig.* 68 *bis* montre d'ailleurs que, si l'on suit dans le même sens l'échelle de pente du plan et la projection de la droite, *les cotes étant croissantes sur l'échelle du plan, sont décroissantes sur celle de la droite, et* vice versâ.

Ceci compris, revenons à la question posée. On donne le plan P par son échelle de pente et le point m dont la cote est 13,25 (*fig.* 68). En menant par le point m une parallèle à l'échelle du plan, on aura la projection de la perpendiculaire demandée. Pour graduer cette projection, on aura recours à la relation

$$dd' = 1.$$

Dans le cas considéré, on a

$$d = 0^{M},5.$$

Il en résulte

$$d' = \frac{1}{0^{M},5} = 2^{M}.$$

On déterminera alors le point 13 en portant sur la projection de la droite, au-dessus du point m, le quart de l'intervalle trouvé, c'est-à-dire, l'échelle graphique étant ici $\frac{1}{100}$, $0^{M},005$. Il sera facile ensuite de construire l'échelle de pente de la perpendiculaire N (80).

Pour avoir son pied dans le plan P, nous ferons passer par N un plan quelconque R déterminé par deux droites parallèles aux cotes 13 et 15. La droite *il*, intersection des plans P et R, coupe N en un point a qui est le point cherché. Ce point a pour cote 14,71. Il restera à calculer ou à mesurer la véritable longueur comprise sur la normale entre les points m et a. La projection ma étant égale à $2^{M},9$, le calcul donne pour la distance MA

$$MA = \sqrt{2,9^{2} + 1,46^{2}} = 3,24.$$

C'est ce qu'on trouve aussi en rabattant la droite en mA, en comptant les cotes à partir du plan horizontal qui passe par le point M (82).

90. *Trouver la distance d'un point à une droite* (*fig.* 68). Il suffit de mener par le point un plan perpendiculaire à la droite, et de joindre leur point de rencontre au point donné.

En se reportant à la *fig.* 68, on peut supposer que le point c est le point donné et la droite am la droite donnée. On mènera par le point c le plan perpendiculaire à la droite am. Le plan et la droite se coupant au point a, il restera à chercher la véritable grandeur de la droite ac.

91. *Trouver la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan* (*fig.* 69).

Nous emploierons la méthode déjà exposée (59). Soient A et B les deux droites données. Par le point 12 de la droite B, me-

nons à la droite A la parallèle C (83). Traçons l'échelle de pente du plan R (parallèle à A) qui passe par les droites B et C. Il suffira pour cela de joindre des points de même cote sur B et C, ce qui donnera des horizontales du plan R, et d'abaisser d'un point du plan une perpendiculaire sur ces horizontales.

Prenons maintenant un point quelconque sur A, le point 12 par exemple, et abaissons de ce point la perpendiculaire D sur le plan R. La projection de D sera parallèle à l'échelle de pente du plan R, et l'unité de l'échelle du plan étant $0^{M},5$, l'unité de l'échelle de la droite sera

$$\frac{1}{0^{M},5} = 2^{M}.$$

D'ailleurs, les cotes allant en croissant sur l'échelle de pente du plan lorsqu'on marche vers la droite de l'épure, elles iront en décroissant sur l'échelle de la droite. Les droites A et D détermineront un plan P perpendiculaire au plan R, et dont on construira l'échelle de pente comme on a construit celle du plan R.

On prendra de même sur B un point quelconque, le point 14 par exemple, et on abaissera de ce point la perpendiculaire E sur le plan R. Les droites B et E détermineront un plan Q perpendiculaire au plan R.

L'intersection des plans P et Q donnera la plus courte distance demandée. En employant les horizontales de ces plans dont les cotes sont 10 et 11, on trouve que leur intersection est dirigée suivant la droite *il* (87). Cette droite coupe la droite A au point *m* et la droite B au point *n*. La plus courte distance cherchée va donc du point *m* au point *n*. La cote du point *m* est 11,53, celle du point *n* est 10,25 : la différence de ces cotes est donc $1^{M},28$. D'ailleurs la longueur de la projection horizontale *mn* est $3^{M},45$. On aura donc, pour la véritable longueur de la plus courte distance,

$$MN = \sqrt{3,45^{2} + 1,28^{2}} = 3^{M},68 \text{ (par excès)}.$$

Comme vérification, MN étant perpendiculaire au plan R, *mn* doit être parallèle aux droites D et E.

92. *Trouver l'angle de deux droites* (*fig.* 70).

On peut toujours supposer que les droites données se coupent en un point dont la cote est entière, puisque l'angle de deux droites est en général l'angle formé par deux parallèles menées à ces droites d'un point quelconque de l'espace.

Soient donc les droites A et B qui se coupent au point C dont la cote est 9. Les droites A et B déterminent un plan. En joi-

gnant les points de ces droites qui ont la cote 6, on aura l'horizontale de ce plan qui est située dans le plan horizontal *à la cote* 6. L'angle cherché est l'angle au sommet d'un triangle qui a pour base la partie *ab* de cette horizontale, comprise entre les deux droites, et dont le sommet C se projette en *c*. Si l'on abaisse *cd* perpendiculaire sur la base du triangle et si l'on joint le point C de l'espace au point *d*, on aura la hauteur de ce triangle. Lorsqu'on le rabattra sur le plan horizontal à la cote 6, son sommet viendra se placer en C_0 sur le prolongement de *dc*. Pour obtenir la distance dC_0, il suffit de rabattre le triangle rectangle C*cd* en γcd. On a

$$c\gamma = 9^{M} - 6^{M} = 3^{M}.$$

Un arc de cercle décrit du point *d* comme centre, avec $d\gamma$ pour rayon, donnera C_0; et en joignant ce point aux points *a* et *b*, on aura en aC_0b l'angle demandé.

On pourrait aussi avoir recours à la Trigonométrie, en mesurant ou en calculant les trois côtés du triangle *ab*C.

Lorsque les droites considérées sont situées dans un plan vertical, on les rabat comme l'indique la *fig.* 70 *bis*, en partant pour mesurer les cotes de tel plan horizontal qu'on veut (82). La *fig.* 70 *bis* suppose qu'on part du plan horizontal à la cote 1. En trouvant l'angle BMD des deux droites, on trouve leur point d'intersection M (88) qui se projette en *m*, et dont il est facile de déterminer la cote égale à $2^{M},6$.

Pour trouver l'angle d'une droite et d'un plan, on abaisse une perpendiculaire sur le plan d'un point quelconque de la droite. L'angle que forme cette perpendiculaire avec la droite donnée est le complément de l'angle cherché.

93. *Trouver l'angle de deux plans donnés par leurs échelles de pente* (*fig.* 71).

Nous suivrons la méthode déjà exposée (65). Soient les plans P et Q. Déterminons leur intersection *il* (87). Supposons qu'on mène un plan R perpendiculaire à cette intersection. Il coupera le plan horizontal à la cote 12, suivant une droite *ab* perpendiculaire à *il*, et qui s'appuiera en *a* et en *b* sur les horizontales des plans P et Q qui ont la même cote. Si l'on désigne par M le point où le plan R rencontre l'intersection des plans P et Q, l'angle cherché sera l'angle aMb du triangle M*ab*. La hauteur de ce triangle est à la fois perpendiculaire à *ab* et à l'intersection des plans P et Q, et son pied sur *ab* est le point de rencontre *c* de *il* avec *ab*, car le point M se projette sur *il*. On rabattra donc l'intersection des plans P et Q sur le plan horizontal à la cote 12, en élevant $lL = 2^{M}$ (la cote du

point l étant 14) perpendiculaire à il, et en joignant iL. Le rabattement de la hauteur du triangle Mab s'obtient alors en abaissant cm_0 perpendiculaire sur iL prolongé s'il est nécessaire. Prenant cM $= cm_0$, on a en aMb l'angle cherché.

On pourrait aussi suivre la seconde méthode indiquée au commencement du n° 65.

94. Ce qui précède suffit pour montrer comment on doit appliquer les procédés ordinaires de la géométrie descriptive, lorsqu'on veut faire usage des *plans cotés*. Nous laisserons donc de côté les questions qui se rapportent plus spécialement au *nivellement*, et nous nous contenterons de donner ou d'indiquer dans le second Livre quelques applications de la méthode des plans cotés aux surfaces.

QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Vérifier que deux droites se coupent, en supposant l'une oblique aux deux plans de projection, et l'autre située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

II. Trouver l'intersection de deux plans dont l'un est parallèle à la ligne de terre, et dont l'autre est déterminé par la ligne de terre et un point donné.

III. Par un point donné, mener un plan parallèle à un autre plan donné qui est parallèle à la ligne de terre.

IV. Trouver la distance d'un point à un plan donné, dans le cas où le plan donné est parallèle à la ligne de terre.

V. Trouver la distance de deux plans parallèles (méthode des changements de plans).

VI. Trouver la distance d'un point à un plan donné : 1° lorsque le plan donné a ses traces en ligne droite; 2° lorsqu'il est déterminé par la ligne de terre et un point.

VII. Abaisser d'un point donné, sur une droite donnée située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre : 1° un plan perpendiculaire; 2° une droite perpendiculaire.

VIII. Trouver l'angle de deux droites situées dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

IX. Trouver l'angle de deux droites qui ont même trace horizontale.

X. Trouver l'angle de deux droites qui coupent la ligne de terre au même point.

XI. Trouver l'angle de deux plans : 1° dans le cas où leurs traces passent par un même point de la ligne de terre; 2° dans le cas où le pre-

mier étant donné par ses traces, le second est donné par la ligne de terre et un point.

XII. Trouver l'intersection de deux plans donnés chacun : 1° par leur trace horizontale et un point; 2° par leur trace horizontale et leur angle avec le plan horizontal. (On peut, dans ce cas, se proposer de déterminer leurs traces verticales.)

XIII. Mener par une droite donnée un plan faisant un angle donné avec l'un des plans de projection.

XIV. Par une droite donnée dans un plan donné, mener un plan faisant avec le plan donné un angle donné.

XV. Étant données deux droites non situées dans un même plan, mener une droite qui, s'appuyant sur elles, fasse avec chacune d'elles un angle donné.

XVI. Dans un plan donné, construire sur une base donnée un triangle équivalent à un triangle donné, et dont le sommet se trouve sur une droite donnée.

XVII. Inscrire dans une circonférence donnée un hexagone régulier dont l'un des sommets soit un point déterminé de cette circonférence.

XVIII. Trouver les centres et les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle donné.

XIX. Étant donnés le plan d'un cercle, l'une des projections du centre et la longueur du rayon, construire les projections du cercle.

XX. Connaissant le plan de la base d'un cube et l'une des projections d'un côté de cette base, construire les projections du cube.

XXI. Connaissant le plan de la base d'un cylindre circulaire droit, le rayon de cette base, l'une des projections du centre et la hauteur du cylindre, construire les projections de ce corps.

XXII. Mener par un point donné une droite qui fasse un angle donné avec une droite donnée (méthode des plans cotés).

XXIII. Mener par une droite donnée un plan qui ait une pente donnée (plans cotés).

XXIV. Mener dans un plan, par un point donné, une droite qui ait une pente donnée (plans cotés).

XXV. Inscrire une sphère dans un tétraèdre donné (plans cotés).

XXVI. Trouver la plus courte distance d'un point à une sphère donnée (plans cotés).

LIVRE DEUXIÈME.

NOTIONS RELATIVES AUX SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRATION DES SURFACES ET PLAN TANGENT.

95. Comme nous l'avons déjà dit (*Géom. analyt.*, 328), toute surface peut être regardée comme engendrée par une ligne qui se meut (en variant ou non de forme) suivant une loi déterminée : cette ligne est la *génératrice* de la surface.

On exprime en général la loi de son mouvement par sa rencontre constante avec d'autres lignes fixes qui sont les *directrices* de la surface.

La génératrice et les directrices peuvent être planes (*à simple courbure*) ou gauches (*à double courbure*). Si la génératrice, alors plane, doit rester constamment parallèle à un plan, ce plan est un *plan directeur* de la surface.

Une surface peut évidemment admettre plusieurs modes de génération.

96. On peut diviser les surfaces en deux grandes classes : *les surfaces réglées*, c'est-à-dire à génératrice rectiligne ; *les surfaces courbes proprement dites*, qui n'admettent pas de génératrice rectiligne.

Parmi les surfaces réglées, il faut distinguer les *surfaces développables*, qui sont telles, que la génératrice rectiligne reste dans un même plan en passant d'une position à la suivante. *Au point de vue pratique*, on peut alors les considérer comme formées d'une infinité d'éléments plans, et l'on comprend comment on peut les étendre, les *développer* sur un même plan *sans déchirure ni duplicature*. Nous avons montré (*Géom.*, 231) de quelle manière ce développement s'opère pour le cylindre et le cône considérés en Géométrie élémentaire.

Lorsque la génératrice rectiligne ne reste pas au contraire dans un même plan, en passant d'une position à la suivante, la surface réglée est *gauche*.

Parmi les surfaces courbes proprement dites, il faut distinguer les *surfaces de révolution* qui sont engendrées par une

ligne quelconque tournant autour d'un axe fixe. Tous les plans perpendiculaires à l'axe coupent alors la surface suivant des cercles qui ont leurs centres sur l'axe et qui constituent les *parallèles* de la surface. Tous les plans passant par l'axe coupent la surface suivant des courbes identiques, qui constituent ses *méridiens* ou ses *courbes méridiennes*. Les parallèles et les méridiens sont perpendiculaires entre eux. Lorsque la génératrice est dans un même plan avec l'axe, elle se confond avec la courbe méridienne; sinon, celle-ci peut être prise à son tour pour génératrice de la surface (*Géom. analyt.*, 340). Nous citerons comme exemple l'hyperboloïde de révolution à une nappe (*Géom. analyt.*, 343).

97. Parmi les surfaces réglées développables, nous considérerons spécialement les *cylindres* et les *cônes;* parmi les surfaces réglées gauches, nous considérerons spécialement la *surface gauche de révolution*, ou l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

Toute surface cylindrique est engendrée par une droite qui glisse parallèlement à elle-même, en s'appuyant sur une certaine courbe directrice (*Géom. analyt.*, 330).

Toute surface conique est engendrée par une droite qui passe constamment par un point fixe (centre ou sommet de la surface), en s'appuyant sur une certaine courbe directrice (*Géom. analyt.*, 333).

La surface gauche de révolution est engendrée par une droite tournant autour d'un axe fixe avec lequel elle n'est pas dans un même plan (*Géom. analyt.*, 343).

98. Une droite tangente à une courbe tracée sur une surface est tangente à cette surface. Nous avons démontré (*Géom. analyt.*, 346) que le lieu de toutes les tangentes menées à une surface par un point pris sur cette surface, était en général un plan appelé *plan tangent* à la surface en ce point. Nous avons remarqué de plus (*Géom. analyt.*, 349) qu'aux points singuliers qu'une surface peut présenter, il en était quelquefois autrement. Ainsi le lieu des tangentes menées à un cône par son sommet est ce cône lui-même.

On peut aussi établir par la Géométrie le théorème fondamental qu'on vient de rappeler, *en sous-entendant les mêmes restrictions.*

Soit une surface quelconque. Par un point M pris sur cette surface (*fig.* 72), menons un plan sécant qui détermine sur elle la courbe C. Menons à cette courbe par le point M la tangente MT. Concevons alors par le point M, sur la surface, d'autres courbes A, B, ..., qui coupent la courbe C aux

points a, b, ... Les sécantes Ma, Mb, ..., seront dans un même plan avec la tangente MT, puisqu'elles seront dans le plan de la courbe C. Supposons maintenant qu'on fasse tourner ce plan autour de MT dans le sens convenable. On obtiendra d'autres courbes C', C'', ..., dont les points d'intersection a', b', ..., a'', b'', ..., avec les courbes fixes A, B, ..., se rapprocheront du point M; et les sécantes Ma', Mb', ..., Ma'', Mb'', ..., continueront toujours d'être dans un même plan avec la tangente MT. A la limite, lorsque les sécantes successives aux courbes A, B, ..., seront remplacées par les tangentes Mt, Mt', ..., menées par le point M à ces courbes, la même condition se trouvera donc encore remplie.

Ainsi, en général, *toutes les tangentes menées à une surface par l'un de ses points sont dans un seul et même plan.*

Deux droites qui se coupent déterminant un plan, il suffira, pour construire le plan tangent en un point, d'avoir deux des tangentes à la surface qui passent par ce point.

Une droite étant à elle-même sa propre tangente, dans le cas d'une surface réglée, le plan tangent contiendra la génératrice rectiligne qui passe par le point de contact.

99. Relativement au plan tangent, il existe une différence essentielle entre les surfaces réglées développables et les surfaces réglées gauches.

Comme deux génératrices infiniment voisines sont dans un même plan sur une surface développable, toutes les tangentes aux courbes qu'on peut tracer sur la surface par les différents points de l'une des génératrices, sont situées dans le plan tangent mené à la surface par un point de cette génératrice. *Ce plan est alors tangent à la surface tout le long de cette même génératrice.*

Considérons, par exemple, un cylindre quelconque (*fig.* 73). Soit la courbe M$a'a''$ tracée sur sa surface. Le plan tangent au point A contiendra la génératrice AB passant par ce point (98), et la tangente AT menée par ce même point à la base du cylindre (en admettant que la courbe AA'A'' soit cette base).

Prenons maintenant les plans sécants au cylindre menés par l'arête AB et les génératrices voisines A''B'', A'B', ... Ces plans détermineront, relativement à la courbe M$a'a''$, les sécantes Ma'', Ma', ..., et relativement à la base du cylindre, les sécantes AA'', AA', ... A mesure que le plan sécant considéré tournera ainsi autour de l'arête AB, pour se rapprocher du plan tangent BAT, les sécantes à la courbe M$a'a''$ tendront vers la tangente Mt menée à cette courbe par le point M; et les sécantes à la courbe AA'A'' tendront vers la tangente AT. A la limite, le plan sécant se confondra donc avec le plan tan-

gent BAT qui contiendra alors la tangente M*t* menée d'une manière quelconque en un point quelconque de la génératrice AB. Ce plan BAT sera donc tangent au cylindre tout le long de la génératrice AB du point de contact.

Comme deux génératrices infiniment voisines d'une surface réglée gauche ne sont pas, au contraire, dans un même plan, *le plan tangent en un point d'une surface gauche ne l'est qu'en ce point de la génératrice rectiligne qu'il contient.*

De même qu'une droite peut être à la fois tangente et sécante à une courbe, un plan peut être à la fois tangent et sécant à une surface.

100. La perpendiculaire menée au plan tangent par son point de contact est la *normale* à la surface en ce point. On pourra donc, suivant les cas, déduire la construction de la normale de celle du plan tangent ou réciproquement.

101. Il est essentiel de montrer que *la projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe* (*fig.* 74).

Soit la courbe C et le plan de projection H. Pour obtenir la projection *c* de la courbe C sur ce plan, il faut concevoir le cylindre qui projette C perpendiculairement au plan H. Pour projeter alors la tangente MT menée à la courbe C par le point M, il faut déterminer l'intersection du plan conduit suivant MT perpendiculairement au plan H, avec ce même plan. Le plan projetant de MT contenant la génératrice M*m* du cylindre C*c*, sera tangent à ce cylindre tout le long de cette génératrice (99). Il contiendra donc la tangente *mt* menée par le point *m*, projection du point de contact M, à la base *c* du cylindre; et cette tangente sera précisément sa trace horizontale ou la projection horizontale de la tangente MT.

S'il s'agit d'une projection *oblique*, la proposition subsiste encore; mais elle est en défaut, dans le cas d'une tangente perpendiculaire au plan de projection considéré.

La réciproque du théorème énoncé est vraie. En effet, si la droite *mt* est tangente à la projection horizontale *c* de la courbe C, le plan projetant horizontalement MT sera tangent au cylindre C*c* tout le long de la génératrice *m*M qui passe par le point de contact *m*, et contiendra la tangente menée au point M à la courbe C. De même, si la droite *m' t'* est tangente à la projection verticale *c'* de la courbe C, le plan projetant verticalement MT sera tangent au cylindre C*c'* tout le long de la génératrice *m'*M qui passe par le point de contact *m'*, et contiendra la tangente menée au point M à la courbe C. Donc MT, intersection des deux plans projetants, sera cette tangente.

Ainsi, *les deux projections d'une droite étant tangentes aux deux projections d'une courbe, et leurs points de contact étant les projections d'un même point de la courbe, cette droite est tangente à la courbe.*

102. On représente graphiquement une surface, en donnant les projections de certains points et de certaines lignes liés ou appartenant à la surface. Cette représentation graphique n'est complète que lorsque, un point appartenant à la surface, la connaissance de l'une de ses projections suffit pour qu'on puisse déterminer l'autre.

On a une image très-nette de la surface, quand on peut indiquer en outre ses *traces* sur les plans de projection (intersections de la surface par ces deux plans) et ses *contours apparents* sur les mêmes plans.

Nous savons (*Géom. analyt.*, 350) que le contour apparent d'une surface sur un plan, est la projection sur ce plan de tous les points de la surface pour lesquels le plan tangent est perpendiculaire au plan de projection choisi.

Graphiquement, on entend par contour apparent la ligne qui, pour l'observateur, sépare sur la surface d'un corps les parties visibles des parties invisibles. Cette ligne est formée par les points de contact de tous les rayons visuels menés tangentiellement à la surface par l'œil de l'observateur. Pour que le contour apparent ne dépende pas de la position de l'observateur, on convient de regarder dans toutes les épures le point de vue comme placé à l'infini par rapport à chacun des plans de projection; ce qui fait concorder la définition graphique avec celle adoptée en Géométrie analytique. Les contours apparents sur les deux plans de projection sont alors les limites dans l'intérieur desquelles tombent, sur chacun d'eux, les projections de tous les points de la surface.

103. Les surfaces qu'on a le plus souvent à considérer en Géométrie descriptive sont, outre les surfaces cylindriques, coniques et de révolution, déjà définies, les cinq surfaces du second ordre, savoir : l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une nappe, l'hyperboloïde à deux nappes, le paraboloïde elliptique et le paraboloïde hyperbolique. Nous ne reviendrons pas en détail sur la génération de ces surfaces, déjà complétement exposée (*Géom. analyt.*, 373, 374, 375, 379, 380).

Nous rappellerons seulement que, si les trois axes de l'ellipsoïde sont $2a$, $2b$, $2c$ (*fig.* 75), on peut concevoir deux ellipses, l'une parallèle au plan horizontal et construite sur les axes $2a$, $2b$; l'autre parallèle au plan vertical et construite sur les axes $2a$, $2c$. En faisant alors mouvoir l'ellipse hori-

zontale perpendiculairement à l'axe $2c$, de manière que son centre décrive cette droite, que ses axes conservent entre eux le rapport $\frac{a}{b}$, et que l'axe parallèle à OA soit toujours une corde de l'ellipse $(2a, 2c)$, on obtiendra l'ellipsoïde.

Des modes de génération analogues peuvent être indiqués pour les autres surfaces du second ordre.

Nous ajouterons que l'hyperboloïde à une nappe peut toujours être engendré par une droite qui se meut en s'appuyant constamment sur trois droites fixes non parallèles à un même plan et situées deux à deux dans des plans différents; et que la même génération convient au paraboloïde hyperbolique, si les trois droites directrices sont parallèles à un même plan directeur (*Géom. analyt.*, 411, 430).

Le paraboloïde hyperbolique peut encore être engendré par une droite qui s'appuie sur deux droites fixes non situées dans un même plan, en restant parallèle à un certain plan directeur (*Géom. analyt.*, 430).

104. Les définitions qui précèdent vont nous permettre de donner quelques exemples de représentation des surfaces par la Géométrie descriptive.

1° *Une surface cylindrique est complétement déterminée, si l'on donne la direction de ses génératrices et les projections* C *et* C′ *de la courbe directrice.*

En effet (*fig.* 76), le point M appartenant à la surface, si l'on connaît sa projection horizontale m, on pourra trouver sa projection verticale m' (102). La droite $(ab, a'b')$ représentant la direction des génératrices, il passe par le point M une génératrice dont la projection horizontale contient m et est parallèle à ab. Cette génératrice coupe la courbe directrice en un point P qui a pour projection horizontale le point de rencontre p de la courbe C et de la parallèle menée à ab par le point m. Par suite, la projection verticale de P est p'. En menant par le point p' une parallèle à $a'b'$, on aura la projection verticale de la génératrice considérée, et l'on en déduira immédiatement la projection verticale m' du point M.

2° *Une surface conique est complétement déterminée, si l'on donne son sommet* (s, s') *et la courbe directrice* (C, C′) (*fig.* 77).

En effet, soit le point M de la surface, dont on connaît la projection verticale m'. $s'm'$ sera la projection verticale de la génératrice tracée sur la surface par le point M. $s'm'$ coupant C′ au point p', les projections de cette génératrice seront $s'p'$ et sp, et l'on en déduira immédiatement la projection horizontale m du point M.

3° *Une surface de révolution est complétement déterminée, lorsqu'on donne l'axe de la surface et la courbe génératrice (qu'on peut aussi regarder comme courbe directrice que doit suivre le cercle ou parallèle générateur dans son mouvement).*

On peut toujours supposer l'axe (*ab*, *a' b'*) de la surface perpendiculaire au plan horizontal. Les parallèles se projettent alors horizontalement en véritable grandeur, et verticalement suivant des droites parallèles à LT. Soit (*fig.* 78) le point M de la surface dont la projection horizontale est *m*. Le parallèle qui passe par le point M aura pour rayon *am*, sa projection horizontale peut donc être immédiatement tracée. Elle coupe la projection horizontale C de la courbe directrice en un point *n*. Le parallèle du point M coupe donc la courbe directrice (C, C') en un point (*n*, *n'*), et sa projection verticale *m'* s'obtiendra en menant par *n'* une droite parallèle à LT, et en abaissant du point *m* une perpendiculaire sur LT jusqu'à la rencontre de cette parallèle.

Le plus souvent, *la surface de révolution est donnée par son axe* (*ab*, *a' b'*) *et sa courbe méridienne* (C, C') *qu'on peut regarder comme parallèle au plan vertical.* C' représente alors cette courbe en véritable grandeur, et C est une parallèle menée à LT par le pied de l'axe dans le plan horizontal. Pour trouver *m'*, connaissant *m*, on suit la même marche que dans le cas précédent. C'est ce qu'on peut voir sur la *fig.* 78 *bis*. Elle montre qu'à une même projection horizontale *m*, peuvent correspondre plusieurs projections verticales *m'*, m'_1. Suivant la forme de la surface, une verticale peut en effet la percer en plusieurs points.

4° *Un ellipsoïde à trois axes inégaux est déterminé, lorsqu'on connaît deux de ses ellipses principales, l'une parallèle au plan horizontal, l'autre parallèle au plan vertical* (*fig.* 79).

Soit *m'* la projection verticale d'un point M de la surface. En menant par *m'* une parallèle à LT, nous déterminerons en $\alpha'\alpha'_1$ la projection verticale et le grand axe de l'ellipse qui, sur la surface, passe par le point M parallèlement au plan horizontal (103). Nous reporterons $\alpha'\alpha'_1$ en $\alpha\alpha_1$ sur aa_1, nous joindrons ab_1, et nous mènerons $\alpha\beta_1$ parallèle à ab_1. Le demi-petit axe de l'ellipse considérée sera égal à $o\beta_1$: on pourra donc construire la projection horizontale de cette ellipse. Abaissant alors du point *m'* une perpendiculaire sur LT, on obtiendra en *m* et en m_1 les projections horizontales des deux points qui, sur l'ellipsoïde, ont la même projection verticale *m'*.

5° *Pour représenter un hyperboloïde à une nappe, il suffit de donner les projections de ses trois droites directrices* A, B, C (103).

Supposons qu'on veuille trouver la génératrice qui passe

par le point (m, m') de la directrice A. Nous savons (*Géom. analyt.*, 403) que l'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes : deux génératrices d'un même système sont toujours dans des plans différents, deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan; de plus, en un même point de la surface, passent seulement deux génératrices rectilignes de systèmes différents. Par suite, les trois directrices A, B, C, appartiennent à un même système; et par le point (m, m'), outre A, il ne peut passer qu'une seule génératrice. Le problème est donc ramené à conduire par un point donné une droite qui s'appuie sur deux autres droites données non situées dans un même plan, problème déjà résolu (53).

Pour déterminer la projection verticale d'un point M de la surface, connaissant sa projection horizontale m, on mènera par M un plan perpendiculaire au plan horizontal, et l'on cherchera son intersection avec l'hyperboloïde. On aura ainsi un second lieu du point m'.

CHAPITRE II.

PLANS TANGENTS AUX SURFACES CYLINDRIQUES ET CONIQUES.

105. *Mener un plan tangent à une surface cylindrique par un point pris sur sa surface* (*fig.* 80).

Nous prendrons pour directrice la trace horizontale *abcd* du cylindre, et nous supposerons cette trace circulaire. Les génératrices de la surface sont données parallèles à la droite $(gh, g'h')$.

Proposons-nous de déterminer d'abord les contours apparents du cylindre (102). Le contour apparent sur le plan horizontal sera formé des projections des points de contact des plans tangents à la surface, qui sont perpendiculaires à ce plan. D'ailleurs, ces plans étant tangents tout le long de la génératrice qu'ils contiennent (99) et verticaux, leur trace horizontale (projection horizontale de cette génératrice) sera à la fois parallèle à gh et tangente au cercle *abcd*. On mènera donc au cercle *abcd*, parallèlement à gh, les tangentes *ae*, *bi*, et le contour apparent de la surface sur le plan horizontal sera formé de la demi-circonférence *acb* et des tangentes *ae*, *bi*. Toutes les génératrices ayant leurs traces sur la demi-circonférence *acb* seront donc *vues* en projection horizontale, tandis que celles qui ont leurs traces sur la demi-circonférence *adb* demeureront *invisibles*.

De même, pour avoir le contour apparent de la surface sur

le plan vertical, on remarquera que les plans tangents perpendiculaires au plan vertical ont leurs traces horizontales perpendiculaires à la ligne de terre et leurs traces verticales nécessairement parallèles à $g'h'$. D'ailleurs ces traces horizontales doivent être tangentes à la trace horizontale du cylindre, d'après la propriété déjà rappelée des plans tangents aux surfaces développables (99). On mènera donc à la circonférence *abcd* les tangentes cc', dd', perpendiculaires à LT; par les points c' et d', on mènera à $g'h'$ les parallèles $c'k'$ et $d'n'$; et le contour apparent de la surface cylindrique sur le plan vertical correspondra à ces deux parallèles. En d'autres termes, toute génératrice dont la trace horizontale se trouvera sur la demi-circonférence *cad* sera *vue* en projection verticale, tandis que celles dont la trace horizontale appartiendra à la demi-circonférence *cbd* resteront *invisibles*.

Ceci posé, soit M le point situé sur la surface et donné par sa projection horizontale m. Par le point m passent les projections horizontales fp et lr des deux génératrices FP et LR. On obtiendra immédiatement les projections verticales $f'p'$ et $l'r'$ de ces génératrices. Le point M donné aura donc pour projection verticale soit m', soit m'_1. Considérons en particulier le point (m, m'). Le plan tangent mené en ce point à la surface aura sa trace horizontale tangente à celle de la surface, et cette trace passera par le point f. En effet, le plan tangent P qui passe au point (m, m') étant tangent tout le long de la génératrice FP, renferme la tangente menée par le point f à la trace horizontale *abcd*. On obtiendra donc H^P en menant par f une tangente au cercle *abcd*. La trace verticale V^P du plan tangent passera d'ailleurs par la trace verticale p' de la génératrice FP, et on la déterminera en unissant p' au point de rencontre de H^P avec LT.

On opèrera de la même manière pour mener le plan tangent R au point (m_1, m'_1).

Si H^P ne coupait pas LT, on mènerait par le point (m, m') une horizontale du plan P, pour trouver un second point de sa trace verticale. Cette construction peut au besoin servir de vérification.

On aura une nouvelle vérification s'il est nécessaire, en construisant l'intersection des deux plans P et R. Comme ils contiennent chacun une génératrice du cylindre, leur intersection doit être parallèle à la direction de ces génératrices (*Géom.*, 168).

On peut déterminer facilement la trace verticale de la surface, en cherchant les traces verticales de ses génératrices et en les unissant par un trait continu. Cette trace est ici une

ellipse, puisque le cylindre est circulaire (*Géom. analyt.*, 332). On peut facilement construire un système de diamètres conjugués de cette ellipse. V^P doit lui être tangente au point p' et V^R, au point r'; ce qui fournit une dernière vérification.

Si l'on donnait les projections de la courbe directrice du cylindre au lieu de la trace horizontale de la surface, on mènerait par le point donné une génératrice qui couperait la courbe directrice en un certain point. Le plan tangent cherché contiendrait cette génératrice ainsi que la tangente menée en ce point à la courbe directrice; il serait donc déterminé. Mais le plus souvent, la trace horizontale de la surface est connue et, dans tous les cas, on la construira comme nous venons de l'indiquer pour la trace verticale.

106. *Mener un plan tangent à une surface cylindrique par un point extérieur* (*fig.* 81).

Par le point donné (m, m'), on mènera une parallèle (gh, $g'h'$) aux génératrices de la surface; elle sera tout entière dans le plan cherché qui doit contenir une de ces génératrices. La trace horizontale de ce plan passera donc par le point g, et sa trace verticale par le point h'. D'ailleurs la trace horizontale du plan tangent doit être tangente à la trace horizontale *abcd* de la surface. Il suffira donc de mener par le point g une tangente à cette circonférence, pour avoir H^P. On aura ensuite V^P, en joignant avec h' le point de rencontre de H^P et de LT. Comme on peut mener par le point g deux tangentes à la circonférence *abcd*, les deux plans P et R répondront à la question. Il sera, dans tous les cas, facile de construire V^P et V^R, puisque la génératrice de contact est connue pour chacun de ces plans.

107. *Mener un plan tangent à une surface cylindrique, parallèlement à une droite donnée* (*fig.* 82).

Le plan tangent cherché P devant être parallèle à la droite (ef, $e'f'$), si l'on mène par un point de cette droite une parallèle (gh, $g'h'$) aux génératrices de la surface, ces deux droites détermineront un plan Q parallèle au plan P, puisque tout plan tangent contient une génératrice de la surface.

H^P devant être à la fois parallèle à H^Q et tangente à la trace horizontale *abcd* du cylindre, le problème reviendra à mener à cette circonférence une tangente parallèle à une direction donnée. On aura ainsi deux solutions H^P et H^R.

Les traces verticales V^P et V^R seront toutes deux parallèles à V^Q. On les construira facilement dans tous les cas, puisque

les génératrices de contact des deux plans P et R sont déterminées. L'épure donne tous les détails nécessaires.

108. *Remarque.* — Il faut se rappeler qu'un plan dépend de trois conditions. Comme le plan tangent à une surface développable contient toujours une génératrice de la surface, *on ne peut plus l'assujettir qu'à une seule condition.*

109. On peut proposer relativement à la surface conique les mêmes problèmes que nous venons de résoudre pour la surface cylindrique. Nous allons les exposer, en entrant seulement dans moins de détails.

Mener un plan tangent à une surface conique par un point pris sur sa surface (*fig.* 83).

Nous supposerons la surface conique donnée par sa trace horizontale *abcd* (circulaire dans l'épure) et par son sommet (*s*, *s'*).

On commencera par déterminer les contours apparents de la surface, en opérant comme nous l'avons fait au n° 105. On verra ainsi que le contour apparent sur le plan horizontal est formé de la portion de trace horizontale *acb* et des tangentes *sa*, *sb*, menées à cette trace par le point *s*. Quant au contour apparent sur le plan vertical, il sera formé des droites *s' c'*, *s' d'*. Il faut remarquer que le sommet (*s*, *s'*) séparant les deux nappes de la surface, les génératrices *vues* sur l'une des nappes ont leurs prolongements *invisibles* sur l'autre nappe, et réciproquement. C'est ce qu'indique l'épure.

Ceci posé, on veut construire le plan tangent en un point M de la surface, donné par sa projection horizontale *m*. Le plan tangent cherché contient la génératrice qui passe par le point M et dont la projection horizontale est nécessairement *sm*. Cette projection horizontale coupant la trace horizontale de la surface en deux points *f* et *l*, les deux génératrices FP et LR répondront également à la question, et la projection horizontale *m* correspondra à la projection verticale *m'* ou m'_1, suivant qu'on regardera le point M comme appartenant à l'une ou à l'autre de ces génératrices. Considérons en particulier le point (*m*, *m'*). Le plan tangent qui passe par ce point contient la génératrice FP. Sa trace horizontale H^P passe donc par la trace horizontale *f* de cette génératrice et est tangente à la trace horizontale *abcd* de la surface. Quant à sa trace verticale V^P, on l'obtiendra ici en construisant la trace verticale *p'* de la génératrice FP et en se servant en outre de l'horizontale du plan (*mg*, *m'g'*) qui passe par le point (*m*, *m'*).

On construira de même le second plan tangent R qui passe par le point (m_1, m'_1). Comme H^R rencontre LT, il suffira pour

déterminer V^R de construire la trace verticale r' de la génératrice LR.

Comme vérification, l'intersection des plans tangents P et R, qui renferment chacun une génératrice, doit contenir le sommet (s, s') de la surface.

110. *Mener un plan tangent à une surface conique par un point extérieur* (*fig.* 84).

Soit (m, m') le point donné. Le plan tangent mené par ce point renferme une génératrice de la surface et, par conséquent, son sommet. Donc le plan cherché contient la droite $(sm, s'm')$ dont la trace horizontale est f. La trace horizontale de ce plan passera donc par le point f et sera tangente à la trace horizontale *abcd* de la surface. Il y aura, par suite, deux solutions H^P et H^R. Pour trouver les traces verticales des plans P et R, on n'aura qu'à joindre les points de rencontre de H^P et de H^R avec LT, à la trace verticale de la droite $(sm, s'm')$. Si on ne peut le faire, on construira les génératrices de contact des plans P et R ou des horizontales de ces plans comme l'indique l'épure.

111. *Mener à une surface conique un plan tangent parallèle à une droite donnée* (*fig.* 85).

Soit $(gh, g'h')$ la droite donnée. Le plan tangent cherché devant passer par le sommet (s, s') et être parallèle à la droite $(gh, g'h')$, contiendra la parallèle $(sf, s'f')$ menée à cette droite par le point (s, s'). En menant par la trace horizontale f de cette parallèle des tangentes à la trace horizontale *abcd* de la surface, on obtiendra donc les traces horizontales H^P et H^R des plans P et R qui répondent à la question. On déterminera les traces verticales V^P et V^R comme dans le cas précédent. Dans l'épure, on s'est servi de deux horizontales menées dans chacun des plans tangents par le sommet (s, s').

112. Ce qui précède permet de résoudre simplement certains problèmes relatifs à la ligne droite et au plan.

Proposons-nous, par exemple, de *faire passer par une droite donnée un plan dont l'angle avec le plan horizontal soit donné* (*fig.* 86).

Soit $(ab, a'b')$ la droite donnée. Prenons le point (b, b') pour sommet d'un cône de révolution à axe vertical, dont les génératrices fassent avec le plan horizontal l'angle donné α. On obtiendra le rayon *bc* de la base de ce cône, en construisant l'angle $bb'c$ complémentaire de l'angle α. Tous les plans tangents au cône ainsi déterminé, font évidemment l'angle α avec le plan horizontal; car la génératrice de contact et le rayon

correspondant de la base du cône (qui font entre eux l'angle α), sont tous deux perpendiculaires à la trace horizontale du plan considéré. Il suffira donc de mener par la trace horizontale a de la droite $(ab, a'b')$ une tangente au cercle bc, pour avoir la trace horizontale H^P du plan demandé. On aura immédiatement sa trace verticale V^P en joignant au point b', trace verticale de $(ab, a'b')$, le point de rencontre de H^P avec LT.

Il y a en général une seconde solution qu'on n'a pas indiquée sur l'épure. Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait $ba > bc$, c'est-à-dire il faut que la droite donnée fasse avec le plan horizontal un angle inférieur à α.

La méthode à suivre serait la même si l'on voulait *mener par une droite donnée un plan faisant un angle donné avec un plan donné.*

On ramènerait cette question à la précédente, en opérant les transformations nécessaires pour pouvoir considérer le plan donné comme plan horizontal de projection.

113. On se baserait encore sur le même procédé, si l'on voulait *mener à un cylindre ou à un cône un plan tangent faisant un angle donné α avec le plan horizontal.*

Dans le premier cas, on construira un cône de révolution à axe vertical ayant sa base sur le plan horizontal, et dont les génératrices feront avec ce plan l'angle voulu. Puis, remarquant que le plan cherché doit contenir une des génératrices du cylindre, on mènera par le sommet du cône une parallèle à la direction de ces génératrices. Par cette droite (qui contient le sommet du cône), on lui mènera un plan tangent (110), et il restera à mener au cylindre un plan tangent parallèle au plan ainsi obtenu, c'est-à-dire parallèle à sa génératrice de contact avec le cône (107).

Si la parallèle menée par le sommet du cône aux génératrices du cylindre tombe dans l'intérieur de la base du cône, le problème proposé n'admet aucune solution.

Dans le second cas, on construira le cône de révolution auxiliaire en lui donnant même sommet que le cône proposé. La question sera alors ramenée à construire un plan tangent *commun* aux deux surfaces coniques. La trace horizontale du plan cherché sera donc la tangente commune aux traces horizontales de ces deux surfaces.

On pourrait opérer de la même manière dans le premier cas, en plaçant le sommet du cône de révolution sur l'une des génératrices de la surface cylindrique.

114. Pour terminer ce chapitre, il est utile de montrer que

la méthode *des plans cotés* peut très-simplement s'appliquer à la recherche des plans tangents aux surfaces.

Supposons, par exemple, qu'on veuille mener, en suivant cette méthode, un plan tangent à une surface cylindrique par un point extérieur (*fig.* 87).

La surface sera donnée dans l'épure par sa trace horizontale sur le plan de niveau dont la cote est 11,50 et par l'une de ses génératrices. Cette génératrice, qui sera, si l'on veut, l'une de celles qui correspondent au contour apparent du cylindre sur le plan de sa base, aura *ab* pour projection horizontale et sera inclinée à 45° sur l'horizon, comme l'indique l'intervalle de son échelle de pente comparé à l'échelle graphique (81). La projection horizontale du point donné est *m* et sa cote est égale à 9,20.

On mènera par ce point une parallèle aux génératrices du cylindre (83); elle sera tout entière dans le plan tangent cherché. On déterminera son point de rencontre *l* avec le plan de la base du cylindre. La trace du plan tangent sur ce même plan sera la tangente *lp* ou la tangente *lr* à la base. On construira facilement les échelles de pente des deux génératrices de contact, et l'on en déduira à l'aide d'horizontales (les unes parallèles à *lp* pour le plan P, les autres parallèles à *lr* pour le plan R) la graduation des échelles de pente P et R des deux plans qui répondent à la question. Ces échelles de pente sont d'ailleurs, comme nous le savons (84), perpendiculaires à *lp* et à *lr*.

CHAPITRE III.

PLANS TANGENTS AUX SURFACES DE RÉVOLUTION.

115. Le plan tangent en un point donné d'une surface de révolution jouit d'une importante propriété : *Il est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact.*

En effet, par le point de contact passent un méridien et un parallèle de la surface, et ces deux plans, perpendiculaires entre eux (96), se coupent suivant le rayon du parallèle qui correspond au point de contact. La tangente menée au parallèle par le point de contact est perpendiculaire à ce rayon : elle est donc perpendiculaire au plan méridien (*Géom.*, 183), et comme elle est tout entière dans le plan tangent, le plan tangent lui-même est perpendiculaire à ce plan méridien, qu'il coupe suivant la tangente menée à la courbe méridienne par le point de contact.

La normale à la surface, ou la perpendiculaire menée au plan

tangent par le point de contact, sera par suite comprise dans le plan méridien du point de contact, et ira rencontrer l'axe. Ainsi *la normale en un point quelconque d'une surface de révolution est dans un même plan avec l'axe.*

Remarquons que, d'après la symétrie de la surface autour de l'axe, *les normales ou les tangentes à la courbe méridienne, menées par les différents points d'un même parallèle, doivent venir couper l'axe au même point.* En d'autres termes, si l'on considère la courbe méridienne dans une certaine position, et un point pris sur cette courbe, la tangente à la courbe méridienne et la normale à la surface en ce point engendreront, pendant le mouvement de la courbe méridienne autour de l'axe, deux surfaces coniques ayant même axe que la surface de révolution et circonscrites à cette surface suivant le parallèle du point donné.

116. Nous pouvons maintenant nous proposer de *mener un plan tangent à une surface de révolution par un point pris sur la surface* (*fig.* 88).

Soit un ellipsoïde de révolution, que nous supposerons donné par son axe perpendiculaire au plan horizontal et par sa courbe méridienne parallèle au plan vertical. Cette courbe se projettera en véritable grandeur sur le plan vertical suivant l'ellipse $a'b'c'd'$, et elle y formera le contour apparent de la surface. Le contour apparent sur le plan horizontal sera le cercle ab, projection de *l'équateur* de la surface. En effet, aux différents points de l'équateur, les plans tangents sont perpendiculaires au plan horizontal comme contenant les tangentes verticales aux différentes courbes méridiennes passant par ces points. De même, aux différents points de l'ellipse méridienne parallèle au plan vertical, les plans tangents sont perpendiculaires au plan vertical, puisqu'ils sont tous perpendiculaires au plan de l'ellipse méridienne (**115**).

La projection verticale de l'équateur se confond d'ailleurs avec $a'b'$, tandis que la projection horizontale de l'ellipse méridienne se confond avec ab. L'axe a pour projection horizontale le centre o du cercle ab, et pour projection verticale la perpendiculaire $o'z'$ à LT.

Soit un point M de la surface donné par sa projection horizontale m. On aura immédiatement la projection horizontale om du parallèle passant par ce point. Cette projection horizontale coupe en n la projection horizontale ab de l'ellipse méridienne. A ce point n correspondent sur la projection verticale de cette ellipse deux points n' et n'_1. En menant par chacun de ces points une parallèle à LT, on aura les projections verticales des parallèles qui, placés symétriquement

par rapport à l'équateur, se confondent en projection horizontale avec le cercle *om*. Le point de la surface dont la projection horizontale est *m*, peut donc avoir pour projection verticale *m'* ou m'_1. Construisons d'abord le plan tangent qui passe par le point (*m*, *m'*).

Par le point *n'*, menons une tangente à l'ellipse *a'b'c'd'*. Cette tangente coupera *o'z'* en *z'*. Le point *z'* représentera, d'après une remarque précédente (115), la projection verticale du point commun à toutes les tangentes menées aux méridiens de la surface par les différents points du parallèle auquel appartient le point (*m*, *m'*). En joignant le point *z'* au point *m'*, on aura donc la projection verticale de la tangente menée en ce point au méridien correspondant. Comme ce méridien (perpendiculaire au plan horizontal) a sa projection horizontale dirigée suivant *om*, il en sera de même de la projection horizontale de la tangente considérée. On aura donc immédiatement sa trace horizontale en *t*. D'ailleurs la tangente menée par le point (*m*, *m'*) au parallèle qui passe par ce point, a pour projection horizontale la tangente *ml* au cercle *om*, et pour projection verticale la parallèle *m'l'* à LT (101). Cette tangente étant une horizontale du plan P cherché, on aura immédiatement H^P en menant une perpendiculaire à *om* par le point *t*, et V^P en joignant le point de rencontre de H^P et de LT au point *l'*.

Si H^P ne rencontre pas LT dans les limites de l'épure, on peut remarquer qu'en menant par le point *n'* à l'ellipse *a'b'c'd'* la normale *n'α'*, on obtient en *α'* sur *o'z'* la projection verticale du point commun à toutes les normales menées à la surface par les différents points du parallèle considéré. Par conséquent, *α'm'* sera la projection verticale de la normale à la surface au point (*m*, *m'*); et pour avoir V^P, il suffira d'abaisser du point *l'* une perpendiculaire sur la direction *α'm'*. Dans tous les cas, la remarque qu'on vient de faire fournit une vérification commode.

On peut en avoir une seconde, en observant que le cône de révolution décrit par la tangente à la surface dont la projection verticale est *n'z'* (cette tangente est parallèle au plan vertical), a nécessairement pour trace horizontale la circonférence décrite du point *o* comme centre avec *o*9 pour rayon. Le point *t* doit donc se trouver sur cette circonférence.

Pour construire le plan tangent R mené à la surface par le point (m_1, m'_1), on opérera d'une manière identique, comme l'indique l'épure.

Tout ayant lieu, pour les deux plans P et R, symétriquement à l'équateur de la surface, les projections verticales des tan-

gentes aux courbes méridiennes, savoir $z'n'$ et $z'_1 n'_1$, $z'm'$ et $z' m'_1$, doivent se couper respectivement en des points p' et r' situés sur le prolongement de $a'b'$. Les deux plans P et R dont les traces horizontales sont parallèles, se couperont alors suivant une horizontale située dans le plan de l'équateur. La projection verticale de cette horizontale se confondra donc avec $a'b'$. En d'autres termes, le prolongement de $a'b'$ passera, si les tracés sont exacts, par le point d'intersection i' des traces V et V^R.

Remarque. — Dans les surfaces de révolution à axe vertical, le plan tangent a toujours sa trace horizontale perpendiculaire à celle du plan méridien qui passe par le point de contact. On s'en rend compte à priori en se rappelant (115) que le plan tangent est perpendiculaire à ce plan méridien. Ce dernier étant perpendiculaire au plan horizontal, une droite qui y sera tracée perpendiculairement au plan tangent y sera contenue tout entière, et aura pour projection horizontale la trace horizontale du plan méridien.

117. Nous savons mener le plan tangent à une surface de révolution par un point de la surface ; mais s'il faut faire passer ce plan tangent par un point extérieur, ou le mener parallèlement à une droite donnée, ou le faire passer par une droite donnée, etc., la question devient un peu plus difficile que pour les cônes et les cylindres. Nous nous bornerons donc, pour compléter ce qui précède, à quelques généralités utiles à connaître.

118. *Pour mener à une surface un plan tangent par un point extérieur*, on fera passer par ce point des plans coupant la surface. Ces plans détermineront sur la surface des courbes auxquelles on mènera des tangentes par le point donné. Ces tangentes formeront un cône dont le point donné sera le sommet, et qui sera circonscrit à la surface le long de la courbe des points de contact obtenus. Les deux surfaces auront évidemment en tous ces points même plan tangent. Par suite, la question sera ramenée à construire le plan tangent à un cône en son sommet, et elle sera susceptible d'une infinité de solutions (sauf les cas particuliers) à moins qu'il ne s'agisse d'une surface développable (108).

La méthode générale indiquée se simplifie, lorsque la surface proposée est de révolution (Note IV).

On voit que l'esprit de cette méthode consiste à substituer à la surface donnée un cône circonscrit ayant pour sommet le point donné et pour courbe directrice la courbe suivant laquelle il touche la surface.

119. *Pour mener à une surface un plan tangent parallèle à une droite donnée*, on fera passer par cette droite des plans coupant la surface. Aux courbes déterminées par ces plans, on mènera des tangentes parallèles à la droite donnée. Elles formeront un cylindre circonscrit à la surface le long de la courbe des points de contact obtenus. Les deux surfaces auront évidemment en tous ces points même plan tangent. Par suite, la question sera ramenée à construire le plan tangent en un point de la surface d'un cylindre, et elle sera susceptible d'une infinité de solutions (sauf les cas particuliers) à moins qu'il ne s'agisse d'une surface développable (108).

La méthode générale indiquée se simplifie, lorsque la surface proposée est de révolution (Note IV).

On voit que l'esprit de cette méthode consiste à substituer à la surface donnée un cylindre circonscrit ayant ses génératrices parallèles à la droite donnée et pour courbe directrice la courbe suivant laquelle il touche la surface.

120. *Pour mener à une surface un plan tangent passant par une droite donnée*, il faut circonscrire successivement à la surface deux cônes dont les sommets soient sur la droite donnée (118). Les courbes de contact de ces deux cônes se couperont en certains points. Tout plan tangent mené en ces points à la surface proposée sera aussi tangent aux deux cônes circonscrits et contiendra leurs sommets, c'est-à-dire la droite donnée.

Le problème énoncé est impossible, lorsqu'il s'agit d'une surface développable (108). Il se simplifie selon la nature de la surface donnée. Nous traiterons, comme exercice, le cas particulier suivant :

Faire passer par une droite donnée un plan tangent à une sphère donnée (*fig.* 89).

Nous supposerons le centre o de la sphère placé sur la ligne de terre : cette sphère sera alors coupée par les plans de projection suivant deux grands cercles qui se confondront dans l'épure. Soient ab, $a'b'$, les projections de la droite donnée. Menons par sa trace horizontale a deux tangentes ac, ad, au grand cercle situé dans le plan horizontal. Si l'on fait tourner ces tangentes autour de l'axe ao, elles engendreront un cône qui touchera la sphère suivant un petit cercle perpendiculaire à ao, c'est-à-dire au plan horizontal, et dont la projection horizontale sera le diamètre cd.

Par la trace verticale b' de la droite donnée, menons deux tangentes $b'e'$, $b'f'$, au grand cercle situé dans le plan vertical. Si l'on fait tourner ces tangentes autour de l'axe $b'o$, elles engendreront un cône qui touchera la sphère suivant un petit

cercle perpendiculaire à $b'o$, c'est-à-dire au plan vertical, et dont la projection verticale sera le diamètre $e'f'$.

Les points d'intersection des circonférences cd, $e'f'$, sont, d'après ce qui précède, les points de contact des plans tangents demandés. Les projections horizontales de ces points tombant sur cd, tandis que leurs projections verticales appartiennent à $e'f'$, ces droites représenteront la projection horizontale et la projection verticale de la corde qui joint les points de contact cherchés. Pour les déterminer, il suffira donc de construire les points de rencontre de cette corde avec l'une des deux circonférences cd, $e'f'$.

Rabattons, par exemple, la circonférence cd sur le plan horizontal en la faisant tourner autour de son diamètre. Ce rabattement sera la circonférence décrite sur cd comme diamètre dans le plan horizontal. Pour obtenir le rabattement de la corde qui joint les points de contact, il faudra d'abord construire les points g' et h où elle perce les deux plans de projection. On élèvera ensuite $gg_0 = gg'$ perpendiculaire à cd, et on joindra les points h et g_0. La corde hg_0 ainsi rabattue, coupant la circonférence cd rabattue en deux points l_0 et m_0, ces points seront les points de contact rabattus. On obtiendra donc immédiatement leurs projections en (l, l') et en (m, m').

Le plan tangent à la sphère étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact, on aura les traces des deux plans tangents P et R, en abaissant des points a et b' des perpendiculaires sur les droites ol et ol', om et om'.

Comme vérification, on doit avoir

$$\lambda l' = ll_0 \quad \text{et} \quad \mu m' = mm_0.$$

Au lieu de la méthode générale appropriée au cas de la sphère, on aurait pu suivre la marche indiquée en Géométrie (*Compl. de Géom.*, 117).

121. *Pour trouver le plan tangent commun à deux surfaces*, il suffira de circonscrire à ces surfaces deux cylindres dont les génératrices soient parallèles à une même direction. On déterminera les traces horizontales de ces cylindres. Tout plan tangent commun à ces cylindres le sera évidemment aux surfaces proposées.

On aura la trace horizontale du plan tangent commun aux cylindres circonscrits, en menant une tangente commune à leurs traces horizontales. Il sera facile ensuite de déterminer la trace verticale de ce plan. Il y aura autant de solutions qu'on pourra mener de tangentes communes aux deux traces horizontales.

On voit que le nombre des solutions du problème général

est illimité, puisque la direction commune des génératrices des cylindres circonscrits reste indéterminée.

Lorsque l'une des surfaces données devient développable, le cylindre qui lui est circonscrit se change en un ou plusieurs plans, et le problème devient déterminé ou impossible. Lorsque les deux surfaces données sont développables, le problème est impossible (sauf les cas particuliers). Dans le cas général, toutes les solutions se trouveront rassemblées lorsqu'on pourra construire une surface développable circonscrite à la fois aux deux surfaces proposées, en ce sens que tout plan tangent à la surface développable le sera aux deux surfaces considérées.

Nous indiquerons comme exercice la question suivante :

Par un point donné, mener un plan tangent commun à deux sphères données (*Compl. de Géom.*, 118).

On peut prendre pour plan horizontal de projection le plan déterminé par la ligne des centres des deux sphères et par le point donné. Ce plan coupera les sphères suivant deux grands cercles. Si l'on mène les tangentes communes extérieures à ces deux grands cercles, et si on les fait tourner autour de la ligne des centres, on engendrera un cône circulaire droit dont la même nappe sera circonscrite aux deux sphères. Tout plan tangent à ce cône le sera évidemment aux deux sphères. La question sera donc ramenée à conduire par le point donné un plan tangent au cône circonscrit, ou, ce qui revient au même, à conduire un plan tangent à l'une des sphères données par la droite qui joint le point donné au sommet du cône circonscrit (120).

En menant les tangentes communes intérieures aux deux grands cercles situés dans le plan horizontal de projection, et en les faisant tourner autour de la ligne des centres, on engendrera un autre cône circulaire droit dont chaque nappe sera respectivement circonscrite à l'une des sphères proposées. En considérant ce cône, on obtiendra deux nouvelles solutions. On peut donc, en général, mener par un point donné quatre plans tangents communs à deux sphères données.

L'exécution de cette épure fournira au lecteur un exercice utile.

Le problème dont on vient d'exposer la solution permettra de traiter le suivant : *Construire les plans tangents communs à trois sphères données.*

Hyperboloïde de révolution.

122. Nous avons vu (*Géom. analyt.*, 432) que l'hyperboloïde de révolution à une nappe pouvait être engendré, soit par

une hyperbole tournant autour de son axe imaginaire, soit par une droite non située dans un même plan avec l'axe autour duquel elle tourne. Nous voulons rappeler, en nous appuyant sur les seuls principes de la géométrie descriptive, les propriétés les plus importantes de l'hyperboloïde de révolution, et lui mener un plan tangent en un point donné.

123. L'axe (oz, $o'z'$) de la surface étant vertical (*fig.* 90), nous supposerons que la génératrice, lorsqu'elle est parallèle au plan vertical, a pour projections les droites gd, $g'd'$. Si du point o comme centre, avec og pour rayon, nous décrivons une circonférence, elle représentera la trace de la surface sur le plan horizontal. La plus courte distance de la génératrice à l'axe ne peut changer. La génératrice étant donnée dans un plan parallèle au plan vertical et dont la trace horizontale est gd, cette plus courte distance s'obtiendra en abaissant du point o sur gd la perpendiculaire od (*Géom.*, 185). Le cercle décrit du point o comme centre avec od pour rayon, sera alors la projection horizontale du plus petit parallèle de la surface ou de son *cercle de gorge*. Les projections horizontales de toutes les génératrices de la surface seront tangentes à ce cercle. Pour avoir la projection verticale du cercle de gorge, il suffira de mener par le point d' une parallèle à LT. Les projections horizontales des différents points de la surface tomberont en dehors du cercle od. Le plan du cercle de gorge est un plan de symétrie de l'hyperboloïde.

Il est facile de voir que la surface considérée peut être engendrée par une droite de deux manières différentes. En effet, prolongeons gd jusqu'à son autre rencontre en l avec la trace horizontale de l'hyperboloïde. La droite (ld, $l'd'$) fera avec l'axe le même angle que la droite (gd, $g'd'$), et ces deux droites seront placées symétriquement par rapport au plan conduit suivant l'axe perpendiculairement à LT. D'ailleurs, la droite (ld, $l'd'$) tournant autour de l'axe (oz, $o'z'$) engendrera aussi un hyperboloïde de révolution. Il faut prouver que les deux hyperboloïdes se confondent. Considérons deux points (e, e'), (f, f'), situés à la même hauteur sur les deux droites proposées. La symétrie de la figure montre qu'on aura

$$de = df$$

et, par suite,

$$oe = of,$$

c'est-à-dire que les deux points décriront le même parallèle. Ainsi *l'hyperboloïde de révolution à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes.* Tout ce qu'on a dit rela-

tivement aux génératrices du premier système, doit se répéter pour celles du second.

Si l'on fait tourner la génératrice $(gd,\ g'd')$ de deux droits, sa projection horizontale devient $l_1 d_1$ et sa projection verticale $l'd'$, de sorte qu'elle est parallèle à la génératrice $(ld,\ l'd')$. Donc, *à une génératrice du premier système, correspond toujours dans le second système une génératrice parallèle.*

124. Pour construire (*fig.* 90) la section méridienne de la surface qui est parallèle au plan vertical, nous n'aurons qu'à déterminer les points d'intersection de ses différents parallèles avec le plan vertical dont la trace horizontale est représentée par la parallèle *aob* à LT.

Par exemple, le parallèle dont la projection horizontale est le cercle *oe* ou *of* et dont la projection verticale est la droite $e'f'$, coupe le plan méridien *aob* en deux points $(\varepsilon, \varepsilon')$, (φ, φ'), qui appartiennent à la section méridienne.

En désignant par θ l'angle constant de l'une des génératrices avec le plan horizontal et par r le rayon du cercle de gorge, le triangle $d'\rho' f'$, par exemple, donnera

$$f'\rho'^2 = d'\rho'^2 \cot^2\theta.$$

Mais

$$f'\rho'^2 = fd^2 = of^2 - od^2 = \rho'\varphi'^2 - r^2;$$

par suite,

$$\rho'\varphi'^2 - d'\rho'^2 \cot^2\theta = r^2.$$

$\rho'\varphi'$ et $d'\rho'$ représentent les coordonnées d'un point φ' de la projection verticale de la section méridienne, par rapport aux axes $\alpha'\beta'$ et $o'z'$. Cette section sera donc une hyperbole $(x^2 - y^2\cot^2\theta = r^2)$ ayant pour axe transverse le diamètre du cercle de gorge. Les asymptotes de cette hyperbole seront les droites

$$y = \pm x \tang\theta.$$

Ces asymptotes se projetteront donc verticalement suivant $g'd'$ et $l'd'$, et horizontalement suivant γo et λo, c'est-à-dire qu'elles seront parallèles aux génératrices principales $(gd,\ g'd')$ et $(ld,\ l'd')$.

125. L'hyperbole qu'on vient d'obtenir (*fig.* 90) représente le contour apparent de la surface sur le plan vertical, car le plan tangent en un point quelconque de cette hyperbole est perpendiculaire au plan méridien correspondant (**115**), et, par suite, au plan vertical auquel ce plan méridien est parallèle.

De même, en tous les points du cercle de gorge, la tangente au méridien est verticale, puisque le cercle de gorge est décrit par l'un des sommets de l'hyperbole méridienne.

Donc, les plans tangents aux différents points du cercle de gorge sont verticaux, et la projection horizontale de ce cercle représente le contour apparent de la surface sur le plan horizontal.

126. *Par un point pris sur la surface, passent toujours deux génératrices de systèmes différents* (*fig.* 90).

Soit la projection horizontale m de ce point. On déterminera sa projection verticale m' en construisant la projection verticale du parallèle auquel il appartient, à l'aide des points de rencontre de ce parallèle avec les génératrices $(gd, g'd')$, $(ld, l'd')$. Des deux points de la surface situés sur la verticale qui passe au point m, nous considérons celui qui est inférieur au cercle de gorge.

Ceci posé, si l'on fait tourner la génératrice $(gd, g'd')$ jusqu'à ce qu'elle vienne passer par le point (m, m'), on obtiendra pour cette génératrice la projection horizontale pms tangente au cercle od, et la projection verticale $p'm's'$.

Si l'on fait tourner la génératrice $(ld, l'd')$ jusqu'à ce qu'elle vienne passer aussi par le point (m, m'), on obtiendra pour cette génératrice la projection horizontale qmt tangente au cercle od, et la projection verticale $q'm't'$.

On sait d'ailleurs (*Géom. anal.*, 404) que *deux génératrices d'un même système sont toujours dans deux plans différents.*

127. *Pour avoir le plan tangent au point* (m, m'), il suffit de conduire un plan par les deux génératrices de systèmes différents $(ps, p's')$ et $(qt, q't')$ qui passent par ce point sur la surface (98). La trace horizontale H^P de ce plan sera donc immédiatement connue, puisque c'est la corde st de la trace horizontale de la surface. Quant à la trace verticale du plan tangent, on l'obtiendra en construisant l'horizontale du plan qui passe par le point (m, m'). On peut aussi déterminer la trace verticale de l'une des génératrices qui passent par ce point.

Le plan tangent P *coupe* l'hyperboloïde suivant les deux génératrices considérées, c'est-à-dire qu'il n'est tangent qu'au point (m, m') de chacune d'elles. Qu'on fasse en effet glisser le point m sur ps, le point (m, m') variera sur la génératrice $(ps, p's')$ et le point t changera lui-même de position sur la trace horizontale de la surface. En chaque point de la génératrice $(ps, p's')$, il y a donc un nouveau plan tangent. Le plan P *coupe* le cercle de gorge suivant la droite $(pq, p'q')$.

128. Le plan tangent déterminé par les deux génératrices parallèles $(l, d_1, l'd')$, $(ld, l'd')$, a son point de contact à l'infini.

Il est perpendiculaire au plan vertical et contient l'asymptote (λo, $l'd'$) de la section principale, puisque cette asymptote est parallèle aux génératrices considérées. On peut donc dire que ce plan tangent est asymptote à l'hyperboloïde.

Si l'on fait tourner l'asymptote (λo, $l'd'$) autour de l'axe de la surface, on obtient un cône de révolution ayant le cercle $o\lambda$ pour trace horizontale (*fig.* 90). Le plan tangent asymptote à l'hyperboloïde sera tangent à ce cône tout le long de sa génératrice (λo, $l'd'$). A cause de cette propriété, le cône de révolution (formé par les asymptotes des sections méridiennes) est dit *cône asymptote* de l'hyperboloïde.

On voit que le plan tangent au cône asymptote coupe l'hyperboloïde suivant deux génératrices parallèles de systèmes différents, et que les génératrices du cône asymptote sont parallèles à celles de la surface.

Nous avons vu (*Géom. anal.*, 402) que les sections faites par un même plan dans les deux surfaces, étaient des courbes semblables et semblablement placées.

CHAPITRE IV.

SECTIONS PLANES.

Notions préliminaires.

129. Dans les applications de la Géométrie descriptive, on a souvent besoin de déterminer l'intersection de deux surfaces.

La méthode générale consiste à couper les deux surfaces proposées S et S' par une série de surfaces auxiliaires P convenablement choisies. L'une de ces surfaces auxiliaires coupera la surface S suivant une courbe σ et la surface S' suivant une courbe σ'. Si les courbes σ et σ' présentent des points communs, ces points appartiendront à la fois aux deux surfaces S et S'. On reconnaîtra d'ailleurs que les courbes σ et σ' se coupent, en vérifiant que les points d'intersection des projections horizontales et verticales de ces courbes, sont deux à deux situés sur une même perpendiculaire à LT.

En faisant varier la position de la surface auxiliaire P, on obtiendra les projections d'autant de points de l'intersection des deux surfaces qu'on voudra ; il restera à unir par un trait continu les points obtenus sur chaque plan de projection. C'est ainsi qu'on construira les projections de l'intersection des deux surfaces données.

Les surfaces auxiliaires doivent être choisies aussi simples que possible : ce seront donc, en général, des plans. On construira, pour chaque plan auxiliaire, les projections horizontales des courbes σ et σ'; et l'on déterminera les projections verticales de leurs points d'intersection par la seule condition que ces points se trouvent dans le plan auxiliaire considéré.

Lorsque la nature de la question laissera arbitraire la direction à donner aux plans auxiliaires, il sera préférable de les prendre parallèles au plan horizontal. Comme les courbes σ et σ' auront alors pour projection verticale commune la parallèle à LT qui représente la trace verticale du plan employé, on trouvera tout de suite les projections verticales de leurs points d'intersection.

Dans tous les cas, les surfaces auxiliaires doivent être choisies ou dirigées de manière à couper les surfaces proposées suivant des lignes qu'on puisse, s'il est possible, construire immédiatement, comme des droites ou des circonférences.

S'il s'agit, par exemple, de deux surfaces cylindriques, on devra prendre les plans sécants parallèles aux génératrices des deux surfaces. Chaque plan sécant coupera alors les deux surfaces suivant quelques-unes de leurs génératrices, c'est-à-dire suivant des lignes droites.

130. On sera aidé dans la construction des projections de la courbe d'intersection des deux surfaces par la détermination de *la tangente* aux différents points de cette courbe. Il faut, en effet, se rappeler (101) que les projections de la tangente à une courbe sont tangentes aux projections de cette courbe.

Or la tangente en un point de la courbe d'intersection appartient à la fois aux deux plans tangents menés en ce point aux deux surfaces : *elle est donc l'intersection de ces plans tangents.*

On peut aussi remarquer que *les deux normales* menées aux deux surfaces par le point considéré déterminent un plan perpendiculaire aux deux plans tangents, c'est-à-dire à leur intersection. Ce plan n'est autre que *le plan normal* mené à la tangente par son point de contact (*Géom. anal.*, 345). Dans certains cas, la construction du plan normal (dont on déduira immédiatement les projections de la tangente cherchée) sera plus simple que celle des deux plans tangents, et devra être préférée ; par exemple, lorsqu'il s'agira de surfaces de révolution.

Quand les deux surfaces considérées sont circonscrites l'une à l'autre, les deux plans tangents menés à ces surfaces en l'un des points de leur intersection se confondent ; il en est

de même des normales correspondantes. En général, il faut alors tracer mécaniquement, c'est-à-dire à vue, les projections de la tangente à la courbe d'intersection; et la construction de cette tangente n'est plus d'aucun secours pour le tracé des projections de la courbe d'intersection.

131. Des détails précédents, il résulte qu'avant d'étudier les intersections des surfaces entre elles, il faut montrer comment on doit procéder pour obtenir leur section par un plan déterminé.

Quand on saura résoudre ce problème, on pourra trouver les points de rencontre d'une surface et d'une droite. En effet, on mènera par cette droite un plan sécant, et les points où la droite coupera la courbe déterminée sur la surface par le plan sécant, seront aussi ceux où elle perce la surface.

Cette marche est générale et peut s'appliquer à une ligne quelconque, en remplaçant le plan auxiliaire par une surface auxiliaire sur laquelle soit tracée la ligne donnée : le cylindre qui la projette sur le plan horizontal, par exemple.

Sections planes du cylindre.

132. *Construire la section d'un cylindre droit par un plan perpendiculaire au plan vertical* (*fig.* 91).

Considérons un cylindre droit perpendiculaire au plan horizontal, ayant pour base dans ce plan la circonférence *abef*, et, pour hauteur, $\alpha'\gamma'$. Le plan sécant P est supposé perpendiculaire au plan vertical. Le contour apparent du cylindre sur le plan horizontal sera sa base, son contour apparent sur le plan vertical sera le rectangle $\alpha'\gamma'\beta'\delta'$.

La courbe d'intersection aura alors pour projection horizontale la circonférence *abef*, et pour projection verticale la longueur $a'b'$, interceptée sur V^P par les projections verticales des génératrices limites.

Cherchons cette courbe *en véritable grandeur*. Pour cela, rendons le plan sécant parallèle au plan horizontal, en le faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, et ayant pour pied dans ce plan le point e'. La nouvelle projection horizontale de la courbe d'intersection sera cette courbe en véritable grandeur.

L'axe choisi passant par le point de rencontre du plan sécant et de l'axe $(oz, o'z')$ du cylindre, les tracés seront symétriques, et un quart de la courbe suffira pour l'obtenir tout entière.

Prenons sur cette courbe le point (m, m'). Dans le mouvement de rotation indiqué, il décrira un cercle de rayon $e'm'$

qui se projettera en véritable grandeur sur le plan vertical comme parallèle à ce plan. La nouvelle projection verticale m'_1 de ce point se trouvera donc reportée, à l'aide d'un arc de cercle décrit du point e' comme centre avec $e'm'$ pour rayon, sur la nouvelle trace verticale V_1^P du plan sécant. La nouvelle projection horizontale m_1 se trouvera d'ailleurs sur une parallèle menée à LT par le point m, puisque la distance du point (m, m') au plan vertical ne varie pas. On opérera de même pour les autres points (n, n') (a, a') . . . ; et il ne restera plus qu'à unir leurs nouvelles projections horizontales par un trait continu pour avoir la courbe d'intersection en véritable grandeur.

Cette courbe, comme on le sait, est une ellipse. Le grand axe de cette ellipse est évidemment $a_1 b_1$, son petit axe est ef (*Géom. anal.*, 223).

La tangente au point (m, m') de la section plane a pour projection horizontale la tangente mt à la circonférence *abef*, et sa projection verticale est $m't'$. On en conclura facilement la tangente $m_1 t_1$ au point correspondant de la section projetée en véritable grandeur. En effet, la trace horizontale t de la tangente $(mt, m't')$ se transporte dans le mouvement de rotation en t_1, comme l'indique l'épure. Il n'y a donc, pour résoudre la question, qu'à joindre le point m_1 au point t_1.

On peut dire aussi que le point de rencontre i de mt avec la projection horizontale de l'axe autour duquel s'effectue la rotation ne pouvant varier, il suffit de joindre le point i au point m_1 de la section projetée en véritable grandeur pour obtenir la tangente demandée. Cette remarque fournit d'ailleurs une vérification.

Si l'on fend le cylindre suivant la génératrice projetée verticalement en $\alpha'\gamma'$, son *développement* est un rectangle dont la base ABA (*fig.* 92) est égale à la circonférence *abef* rectifiée, et dont la hauteur est celle du cylindre (*Géom.*, 231). Pour obtenir la circonférence *abef* rectifiée, on peut se rappeler qu'elle est très-approximativement égale aux $\frac{22}{7}$ de son diamètre. Sur l'épure, cette circonférence a été divisée en douze parties égales aux points a, n, m, e, ... On marquera donc facilement ces points en A, N, M, E, . . . , dans le développement.

Cherchons ce que devient dans ce développement la courbe d'intersection, c'est-à-dire traçons sa *transformée*. Il suffira évidemment de porter, à partir des points A, N, M, E, . . . , sur les perpendiculaires élevées en ces points à la base AA, des distances égales aux longueurs que présentent les génératrices correspondantes du cylindre entre le plan sécant et la circonfé-

rence *abef*. Ainsi on prendra

$$A\alpha = \alpha' a', \quad M\mu = \mu' m', \quad E\varepsilon = o'e', \quad B\beta = \beta' b', \ldots.$$

En unissant les points construits par un trait continu, on aura la transformée $\alpha\mu\varepsilon\beta\varphi\varkappa\alpha$.

Les ordonnées de cette courbe se reproduisent en ordre inverse, à partir et à égale distance de l'ordonnée du milieu $B\beta$ qui est maximum. Si l'on suppose que la transformée se continue par répétition du développement, on voit que les ordonnées extrêmes $A\alpha$ seront des ordonnées minimums. Par suite, aux points α, β, α, de la transformée, les tangentes seront horizontales ou perpendiculaires aux ordonnées.

Les angles et les longueurs ne changeant pas en développement, le triangle rectangle formé par une tangente à la courbe d'intersection, la projection de cette tangente sur le plan horizontal et la portion de génératrice correspondante, reste identique à lui-même en venant s'appliquer sur le plan de développement. Pour avoir la tangente au point μ de la transformée, on prendra donc dans le sens convenable $MT = mt$, et l'on joindra le point T au point μ.

Remarque. — Soit r le rayon du cylindre. Si l'on rapporte la transformée à l'axe vertical $\varepsilon E'$ et à l'axe horizontal $\varepsilon\varphi$, on voit qu'on a (*fig.* 91 et 92), pour le point δ, par exemple :

$$x = \text{arc } ed,$$

d'où

$$\frac{x}{r} = \text{arc}\frac{ed}{r} = \text{angle sin}\frac{e'\Delta'}{r},$$

c'est-à-dire

$$e'\Delta' = r\sin\frac{x}{r}. \tag{1}$$

D'ailleurs

$$y = d'\Delta'. \tag{2}$$

Si l'on désigne maintenant par θ l'angle de V^p avec LT, ou l'angle du plan sécant avec le plan horizontal, on a

$$d'\Delta' = e'\Delta' \operatorname{tang}\theta. \tag{3}$$

L'équation de la transformée rapportée aux axes indiqués deviendra donc, en vertu des relations (1), (2), (3),

$$y = r\operatorname{tang}\theta\sin\frac{x}{r}.$$

Cette transformée est donc une variété de la sinusoïde (*Géom. anal.*, 103). Elle présentera par suite des points d'inflexion aux poins ε et φ où elle coupe l'axe des x choisi.

133. *Construire la section d'un cylindre droit par un plan quelconque* (*fig.* 93).

Considérons un cylindre droit perpendiculaire au plan horizontal, ayant pour base, dans ce plan, la circonférence *cdef*. Le plan sécant P est quelconque.

La projection horizontale de la courbe d'intersection est la base du cylindre ; il faut trouver la projection verticale de cette courbe.

Pour cela, nous couperons les deux surfaces considérées par des plans verticaux parallèles à la trace horizontale H^P du plan P, c'est-à-dire ayant leurs traces horizontales parallèles à H^P. Chacun de ces plans auxiliaires coupera le plan P suivant une horizontale, et le cylindre suivant deux de ses génératrices. Les points de rencontre de l'horizontale et des génératrices obtenues appartiendront à l'intersection cherchée.

Prenons, par exemple, le plan auxiliaire dont la trace horizontale est H^R. H^R coupant la circonférence *cdef* aux points m et n, le plan R coupe le cylindre suivant les deux génératrices verticales qui se projettent horizontalement en m et en n. Ce même plan coupe le plan P suivant l'horizontale (m, m'). Cette horizontale rencontrant les deux génératrices aux points (m, m'), (n, n'), ces points sont à la courbe d'intersection. On en construira ainsi autant qu'il sera nécessaire, et, en joignant par un trait continu leurs projections verticales, on obtiendra la projection verticale de la courbe d'intersection.

Pour déterminer sur cette projection le point maximum et le point minimum par rapport à LT, il suffit de considérer parmi les plans auxiliaires ceux qui sont tangents au cylindre. En effet, la tangente aux points correspondants (c, c'), (d, d'), étant l'intersection du plan tangent au cylindre et du plan sécant, sera une horizontale de ce plan, c'est-à-dire aura une projection verticale parallèle à LT.

Les points de séparation de la partie visible et de la partie invisible sur la projection verticale de la courbe d'intersection, répondent évidemment aux génératrices limites qui ont leurs pieds en a et en b, c'est-à-dire que ces points sont a' et b'. En ces points, les tangentes à la projection verticale sont verticales. En effet, les plans tangents en (a, a') et (b, b') sont perpendiculaires à LT.

Quant à la tangente à la courbe d'intersection au point (m, m') par exemple, il suffira de construire l'intersection du plan sé-

cant et du plan tangent au cylindre en (m, m'). Or la trace horizontale du plan tangent étant la tangente H^T menée en m à la base du cylindre, on obtiendra immédiatement en t (intersection de H^P et de H^T) la trace horizontale de la tangente demandée. On en connaîtra ainsi deux points (t, t') et (m, m'), et l'on pourra tracer ses projections.

Le plus simple, pour avoir la courbe d'intersection en véritable grandeur, sera de rabattre le plan sécant sur le plan vertical en le faisant tourner autour de sa trace V^P; ce qu'on fera facilement en se servant d'une ligne de plus grande pente du plan P par rapport au plan vertical. H^P viendra ainsi prendre la position H_0^P. Toutes les horizontales du plan P se rabattront alors suivant des parallèles à H_0^P. Leurs longueurs entre la trace V^P et les différents points de l'intersection, sont d'ailleurs égales à celles de leurs projections horizontales entre la ligne de terre et les projections horizontales de ces points. Par conséquent, pour avoir, par exemple, les points (m, m') et (n, n') en rabattement, on mènera par le point μ' une parallèle à H_0^P, et l'on prendra sur cette parallèle

$$\mu' m_0 = \mu m, \quad \mu' n_0 = \mu n.$$

Ayant obtenu de cette manière les rabattements des points de la courbe d'intersection construits primitivement, on n'aura plus qu'à les unir par un trait continu pour avoir cette intersection en véritable grandeur.

Le point t, trace horizontale de la tangente au point (m, m'), se rabattant en t_0 sur H_0^P, on aura la tangente au point m_0 de la courbe rabattue en joignant le point t_0 au point m_0.

Le développement de la surface du cylindre et la construction de la transformée de la courbe d'intersection s'effectueront absolument comme dans le cas précédent.

134. *Construire la section droite d'un cylindre oblique* (*fig.* 94 *et* 95).

Soit le plan sécant P perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Supposons que ce cylindre ait pour base dans le plan horizontal la circonférence *abcd*, et que les projections horizontales de ses génératrices soient parallèles à *cp*. Il est inutile d'indiquer les projections verticales de ces mêmes génératrices, puisque ces projections doivent être perpendiculaires à V^V.

Le plus simple, pour répondre à la question posée, est d'opérer un changement de plan de projection qui rende le plan sécant P perpendiculaire au plan vertical ou les génératrices du cylindre parallèles à ce plan.

Nous prendrons donc une nouvelle ligne de terre L_1T_1 perperdiculaire à H^P, et nous déterminerons la nouvelle trace verticale V_1^P du plan sécant (28). Nous construirons alors le contour apparent du cylindre sur le nouveau plan vertical : ce contour sera formé des projections verticales $d'_1\alpha'_1$, $b'_1\beta'_1$, des génératrices du cylindre qui ont pour traces horizontales les extrémités *a* et *b* du diamètre *ab* parallèle à L_1T_1. La projection verticale de la base supérieure du cylindre sera $\alpha'_1\beta'_1$. Pour simplifier, nous n'indiquerons pas la circonférence, projection horizontale de cette base supérieure. Quant au contour apparent du cylindre sur le plan horizontal, il sera formé de la demi-circonférence *cad* et des tangentes menées par les extrémités du diamètre *cd* parallèlement à la direction des projections horizontales des génératrices.

La projection verticale de l'intersection sera immédiatement la partie $m'_1n'_1$ interceptée sur V_1^P par les droites $d'_1\alpha'_1$ et $b'_1\beta'_1$.

Pour obtenir la projection horizontale de cette intersection, nous couperons la surface par des plans parallèles au plan vertical. Ces plans couperont le cylindre suivant des génératrices et le plan sécant suivant des droites parallèles au plan vertical. Les points de rencontre des droites comprises dans un même plan auxiliaire appartiendront à la section.

Soit, par exemple, le plan auxiliaire dont la trace horizontale est H^R. Ce plan coupe le cylindre suivant deux génératrices ayant pour traces horizontales les points où H^R rencontre la circonférence *abcd*. On construira donc facilement les projections verticales de ces génératrices. Le plan R coupe d'ailleurs le plan sécant suivant une droite dont les projections sont H^R et V_1^P. Par suite, les projections verticales des points de la section qui se trouvent dans le plan R seront en r'_1 et en i'_1 ; et des perpendiculaires à L_1T_1 donneront leurs projections horizontales sur H^R en *r* et en *i*.

On déterminera de cette manière autant de points de la projection horizontale de l'intersection qu'on voudra, et il ne restera plus qu'à les unir par un trait continu.

La section elliptique obtenue (*Géom. anal.*, 227) est évidemment symétrique, soit par rapport au plan auxiliaire, dont la trace horizontale se confond avec le diamètre *ab*, soit par rapport au plan perpendiculaire au plan vertical mené par les deux génératrices dont les pieds sont aux extrémités du diamètre *cd*. Il s'ensuit que la projection horizontale de cette intersection, qui est aussi une ellipse, a pour axes les droites *mn* et *pq*. On a donc la direction de la courbe aux quatre sommets. Les points *p* et *q* séparent, en projection horizontale, la partie vue de la partie cachée.

Pour mener la tangente en un point de la section, par exemple au point (r, r'), il suffit de construire la trace horizontale du plan tangent au cylindre qui passe en ce point. Cette trace horizontale sera la tangente H^T menée à la base *abcd* du cylindre par le point *e*, pied de la génératrice qui correspond au point (r, r'). Les deux plans T et P se coupant suivant la tangente demandée, H^T et H^P se couperont en un point *t* qui sera la trace horizontale de cette tangente. Elle aura donc pour projections les droites tr et $t'_1 r'_1$.

Pour avoir l'intersection en véritable grandeur, on rabattra le plan sécant sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale H^P. Le point (r, r'), par exemple, restera sur la perpendiculaire $r\rho$ abaissée du point r sur H^P et viendra se placer à une distance ρr_0 du point ρ égale à $t'_1 r'_1$. En effet, la droite qui joint dans l'espace le point (r, r') au point ρ, est parallèle au plan vertical et s'y projette en véritable grandeur. La tangente au point (r, r') se rabattra en tr_0.

On aura alors tous les éléments nécessaires pour construire le développement du cylindre et la transformée de sa base.

Le développement du cylindre oblique peut ici être effectué, parce que nous venons de déterminer *sa section droite*. Cette section, dont tous les éléments sont perpendiculaires aux génératrices du cylindre, aura seule pour transformée dans le développement une ligne droite MM (*fig.* 95). Si l'on fend le cylindre suivant l'arête $(am, a'_1 m'_1)$, on portera sur cette droite MM des longueurs MS, SR, RP, ..., égales aux arcs $m_0 s_0$, $s_0 r_0$, $r_0 p_0$, ... On rectifiera ces arcs, en cherchant combien chacun d'eux renferme une ouverture de compas assez petite pour que l'arc partiel correspondant se confonde sensiblement avec sa corde. On élèvera, par les points ainsi déterminés, des perpendiculaires à la droite MM, et l'on portera sur ces perpendiculaires des longueurs égales aux portions de génératrices comprises entre la section droite et la base inférieure du cylindre. Comme les génératrices du cylindre sont parallèles au plan vertical, elles se projettent sur ce plan en véritable grandeur. On n'aura donc qu'à prendre

$$MA = m'_1 a'_1,\ SF = s'_1 f'_1,\ RE = r'_1 e'_1,\ PC = p'_1 c'_1, \ldots,$$

pour obtenir, à l'aide d'un trait continu unissant les différents points A, F, E, C, ..., la transformée de la base inférieure du cylindre.

Pour avoir la transformée de la base supérieure, supposée dans l'épure parallèle à la base inférieure, on n'aura qu'à prendre $A\alpha$ égale à la longueur totale $a'_1 \alpha'_1$ de la génératrice, puis à prolonger de même toutes les perpendiculaires déjà

menées à la droite MM, de manière à leur donner à toutes la longueur $a'_1 \alpha'_1$.

Si l'on a eu soin de diviser la circonférence *abcd* régulièrement par les traces des plans auxiliaires, il suffira de mesurer les arcs qui composent un seul quart de l'ellipse qui représente le rabattement de la section droite : les mêmes longueurs se reproduiront ensuite successivement dans un ordre inverse. Les longueurs des portions de génératrices qui correspondent à la première moitié du développement, se reproduisent également dans la seconde moitié en ordre inverse.

Pour avoir la tangente à la transformée au point E, par exemple, il suffit de remarquer que le triangle rectangle projeté horizontalement suivant *ret* reste identique à lui-même lors du développement. Les deux côtés de l'angle droit de ce triangle sont, l'un RE, l'autre tr_0. On prendra donc sur MM, à partir du point R et dans le sens convenable, $R\theta = r_0 t$; et en joignant le point E au point θ, on aura l'hypoténuse du triangle rectangle considéré, ou la tangente à la transformée de la base au point E.

Comme les tangentes aux points *a* et *b* de la base du cylindre sont évidemment perpendiculaires à la direction des génératrices, et que les angles ne sont pas modifiés en développement, la transformée de la base du cylindre présentera par rapport à la droite MM les points maximums A et le point minimum B. De même, pour la transformée de la base supérieure, les points α seront minimums et le point β maximum.

Il y a inflexion aux points C et D ; mais nous n'insisterons pas sur ce sujet (*).

Nous avons considéré dans tout ce qui précède un cylindre circulaire ; mais nos raisonnements s'appliqueront sans aucun changement à un cylindre à base quelconque.

Sections planes du cône.

135. *Construire la section d'un cône droit par un plan perpendiculaire au plan vertical.*

1° Section elliptique (*fig.* 96 *et* 97).

Soit un cône droit ayant pour base dans le plan horizontal la circonférence *abcd* et pour sommet le point (s, s'). Son contour apparent sur le plan horizontal sera la circonférence *abcd*. Les projections verticales $s'a'$ et $s'b'$ des génératrices parallèles

(*) Th. Olivier a démontré que les points d'inflexion de la transformée étaient situés sur les génératrices de contact des plans tangents perpendiculaires au plan sécant.

Le théorème est vrai pour toutes les surfaces développables.

au plan vertical, formeront son contour apparent sur le plan vertical. Coupons ce cône par un plan P perpendiculaire au plan vertical. Le plan sécant rencontrant toutes les génératrices sur une même nappe, l'intersection sera une ellipse. La projection verticale de cette intersection sera la partie $e'l'$ interceptée sur V^P par les projections des génératrices limites : il faut trouver la projection horizontale de cette intersection.

Nous nous servirons de plans auxiliaires menés par le sommet du cône parallèlement à H^P. Ces plans couperont le cône suivant des génératrices, et le plan sécant suivant des horizontales. Dans l'épure, les traces horizontales des plans auxiliaires, nécessairement parallèles à H^P, divisent la circonférence *abcd* en douze parties égales.

Considérons le plan auxiliaire R. Il coupe le cône suivant deux génératrices dont les projections verticales se confondent suivant V^R ou $s'\varphi'$, et dont les projections horizontales sont $s\varphi$ et $s\rho$. Le plan R coupe d'ailleurs le plan P suivant une horizontale dont la projection verticale se réduit au point f', et dont la projection horizontale rencontre les droites $s\varphi$ et $s\rho$ aux points f et r. Ces points seront donc les projections horizontales des deux points de l'intersection qui se projettent verticalement en f'.

En opérant de cette manière, on trouvera autant de points qu'on voudra de la projection horizontale de l'intersection; et il ne restera plus qu'à les unir par un trait continu.

Il faut remarquer que la construction est en défaut pour les points situés sur les génératrices qui se trouvent dans le plan auxiliaire dont la trace horizontale est dirigée suivant le diamètre *cd* perpendiculaire à LT. En effet, pour ce plan auxiliaire, les génératrices du cône et l'horizontale du plan sécant se confondent en projection horizontale. Comme les points dont il s'agit appartiennent au parallèle de la surface dont l'un des points est projeté verticalement en h', il suffira de construire la projection horizontale de ce parallèle, pour obtenir les projections horizontales des points demandés en h et en p.

Les plans auxiliaires dont les traces verticales se confondent avec $s'a'$ et $s'b'$, sont tangents au cône suivant les génératrices (sa, $s'a'$) (sb, $s'b'$), parallèles au plan vertical. Chacun de ces plans ne donne donc qu'un point de la projection horizontale de l'intersection. Ces points e et l sont des sommets de l'ellipse obtenue en projection, car l'un des axes de cette ellipse est dirigé suivant ab. Le point o, milieu de el, sera le centre de la courbe; et l'on obtiendra facilement son second axe, si on le juge nécessaire, en construisant le parallèle de la surface dont l'un des points est projeté verticalement en o'. Les

extrémités de ce second axe appartiennent, en effet, à la projection horizontale de ce parallèle et à la projection horizontale de l'horizontale du plan sécant qui se projette verticalement en o',

Pour mener la tangente en un point (g, g') de l'intersection, on construira la trace horizontale H^T du plan tangent au cône qui contient la génératrice passant par ce point. La tangente demandée étant l'intersection des plans T et P, sa trace horizontale sera le point de rencontre t de H^T et de H^P, et elle aura pour projections les droites tg et $t'g'$.

Pour obtenir l'intersection en véritable grandeur, on rabattra le plan sécant sur le plan vertical en le faisant tourner autour de V^P. H restera perpendiculaire à V^P et viendra se placer en H^P_0. Les points G et Q de l'intersection, par exemple, resteront sur la perpendiculaire menée à V par le point g', et viendront se placer sur cette perpendiculaire à des distances de V^P marquées par les distances de leurs projections horizontales à LT. Ainsi on prendra $g'g_0 = g\alpha$ et $g'q_0 = q\alpha$, et l'on aura en g_0 et en q_0 les rabattements des points G et Q.

Le point t venant en t_0 dans le rabattement effectué, on n'aura qu'à joindre le point t_0 au point g_0 pour avoir la tangente en g_0 à la courbe rabattue.

Quant au développement de la surface et à la construction de la transformée de la courbe d'intersection, nous fendrons le cône suivant la génératrice SA. En le déroulant, nous obtiendrons un secteur ayant pour rayon SA et pour base un arc ABA (*fig.* 97) égal en longueur à la circonférence *abcd*. On sait (*Géom.*, 231) que le nombre de degrés de cet arc est

$$n = 360^\circ \cdot \frac{sa}{SA}.$$

Il sera donc facile de déterminer ce secteur et de le diviser en douze parties égales comme la circonférence *abcd*.

Pour avoir la transformée, on portera alors, à partir du centre S, sur les rayons des différents points de division, des longueurs égales à celles qui sont comprises sur les génératrices correspondantes entre le sommet du cône et le plan sécant.

On obtiendra ces longueurs comme il suit. Supposons qu'on fasse tourner les génératrices du cône autour de l'axe, de manière à les faire coïncider successivement avec l'une ou l'autre des deux génératrices parallèles au plan vertical. Dans ce mouvement, les projections verticales des points de l'intersection restent à la même distance du plan horizontal et viennent se placer sur $s'a'$ ou sur $s'b'$ en $f'_1, g'_1, \ldots$, ou en $i'_1, k'_1, \ldots$,

$s'_1 f'_1$, $s'_1 g'_1$, ..., représentent donc les véritables longueurs interceptées par le plan sécant sur les différentes génératrices rendues ainsi parallèles au plan vertical.

La transformée EFILNRE (*fig.* 97) coupe les rayons SA, SB, SA, à angle droit. Nous savons, en effet, que les angles et les longueurs ne varient pas dans le développement. La tangente étant l'intersection du plan sécant et du plan tangent mené à la surface par le point considéré, les tangentes aux points E, L, E, sont perpendiculaires au plan vertical, et, par suite, aux génératrices de contact correspondantes qui sont parallèles à ce plan.

Pour construire la tangente au point G de la transformée, nous nous rappellerons que le triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit la portion de génératrice Gγ et la tangente γt à la base du cône, et pour hypoténuse la tangente Gt à la courbe d'intersection, reste identique à lui-même dans le développement. Nous en avons déjà le côté Gγ; il ne restera donc plus qu'à porter dans le sens convenable, sur la perpendiculaire menée au rayon Sγ par le point γ, une longueur $\gamma T = \gamma t$. En joignant le point T au point G, nous aurons la tangente demandée.

136. 2° Section hyperbolique (*fig.* 98 et 99).

Coupons toujours le cône droit considéré, supposé placé relativement aux plans de projection comme dans le cas précédent, par un plan P perpendiculaire au plan vertical. Le plan sécant étant parallèle à deux génératrices du cône, l'intersection sera une hyperbole. La projection verticale de cette intersection sera V^P, il faut en trouver la projection horizontale.

Nous prendrons ici pour plans auxiliaires des plans horizontaux. L'un d'eux, R par exemple, coupera le cône suivant un parallèle dont la projection verticale sera la droite $e'f'$, et dont la projection horizontale sera la circonférence *se*. Le même plan R coupera le plan P suivant une horizontale qui se projettera verticalement au point m', et dont la projection horizontale sera une droite menée par ce point perpendiculairement à LT. Les points m et n où cette droite rencontrera la circonférence *se* appartiendront à la projection horizontale demandée. En opérant de la même manière, on en construira autant de points qu'on voudra.

L'intersection étant symétrique par rapport au plan vertical conduit suivant le diamètre *ab*, ce diamètre sera un axe de la projection horizontale cherchée. Les points g et l, projections horizontales des points (g, g') et (l, l') où le plan sécant rencontre les génératrices limites $(sa, s'a')$, $(sb, s'b')$, seront les sommets de cette projection situés sur l'axe *ab*. Le point o,

milieu de gl, sera le centre de l'hyperbole obtenue (*Géom. anal.*, 393).

Il est commode de mener les plans auxiliaires deux à deux de part et d'autre et à égale distance du sommet du cône. Les parallèles correspondants se confondent alors en projection horizontale.

Lorsqu'une section plane à branches infinies admet une asymptote, cette asymptote doit être à la fois dans le plan sécant et dans un certain plan tangent à la surface. Son point de contact avec la courbe devant se transporter à l'infini, appartient à une génératrice qui ne doit rencontrer le plan sécant qu'à l'infini, c'est-à-dire qui doit lui être parallèle.

Pour déterminer les asymptotes de la section obtenue, il faut donc considérer les plans tangents qui renferment des génératrices parallèles au plan P. Nous mènerons donc par le sommet du cône un plan Q parallèle au plan P : ce plan coupera le cône suivant deux génératrices $(sp, s'p')$ $(sr, s'r')$, répondant à la question. Les traces horizontales des plans tangents qui contiennent ces génératrices parallèles au plan P, seront les tangentes $p\theta$ et $r\sigma$ à la circonférence ab. Par suite, les points θ et σ seront les traces horizontales des asymptotes ; et comme elles sont parallèles aux génératrices $(sp, s'p')$, $(sr, s'r')$, on obtiendra leurs projections horizontales en menant par les points θ et σ des parallèles à sp et à sr. Comme vérification, ces parallèles devront se croiser au point o, projection horizontale du centre de la section.

Quant au rabattement de la courbe sur le plan vertical, on l'obtiendra, comme dans le cas précédent, à l'aide de perpendiculaires menées à V^P par les différentes projections verticales des points exactement déterminés sur l'épure. Par exemple, pour les points dont la projection verticale est m', on élèvera à V^P par le point m' une perpendiculaire sur laquelle on prendra $m'm_0 = \varphi m$ et $m'n_0 = \varphi n$. Les points m_0 et n_0 seront les rabattements des points (m, m') et (n, n').

Pour avoir les asymptotes en rabattement, on remarquera que leurs pieds θ et σ se trouvent reportés en θ_0 et en σ_0 sur H^P_0, rabattement de la trace horizontale H^P du plan sécant. D'ailleurs, l'axe transverse de l'hyperbole devenant $g_0 l_0$, le centre o se trouve rabattu lui-même en ω, milieu de $g_0 l_0$. On n'aura donc qu'à mener les droites $\sigma_0\omega$ et $\theta_0\omega$.

Le développement (*fig.* 99) s'opérera comme dans le cas de la section elliptique. Seulement il faudra indiquer aussi la nappe supérieure de la surface. En supposant que le cône soit fendu suivant la génératrice SA, on obtiendra donc deux secteurs. L'un, SABA, représentera le développement de la nappe

inférieure, l'autre, $S\beta\alpha\beta$, représentera le développement de la nappe supérieure. Les doubles rayons SA et $S\beta$ qui limitent ces deux secteurs sont nécessairement en prolongement les uns des autres.

Pour déterminer la transformée de l'intersection, on commence par prendre sur SB, qui représente l'une des génératrices parallèles au plan vertical, une longueur $S\gamma = S'g'$. On a en γ le sommet (g, g'). Pour un point quelconque (m, m') appartenant à la nappe inférieure, on mène sm projection horizontale de la génératrice correspondante SM. On mesure l'arc $bM = bN$ sur la circonférence ab, et on le porte à droite et à gauche du point B sur l'arc ABA. La longueur comprise sur la génératrice SM ou sur la génératrice SN, entre le sommet (s, s') et le point (m, m') ou le point (n, n'), étant égale à $s'f'$, d'après ce qui précède (135), on n'a qu'à porter cette longueur, à partir du centre S, sur les rayons SM et SN, pour obtenir en μ et en ν les points correspondants de la transformée.

Sur la nappe supérieure, la transformée se trouve divisée en deux branches. En effet, le sommet (l, l') appartenant à la génératrice suivant laquelle on a ouvert le cône, génératrice qui se dédouble pour donner les deux rayons $S\beta$, est représenté à la fois sur ces deux rayons par les deux points λ, tels qu'on ait

$$S\lambda = s'l'.$$

Pour un point quelconque (k, k') appartenant à la nappe supérieure, on mène sk, projection horizontale de la génératrice correspondante SK. On mesure l'arc $bK = bI$ sur la circonférence ab, et on l'étend à droite et à gauche du point α sur l'arc $\beta\alpha\beta$. La longueur comprise sur la génératrice SK ou sur la génératrice symétrique SI, entre le sommet (s, s') et le point (k, k') ou le point (i, i'), est déterminée par la parallèle $k'h'$ à LT. On n'a donc qu'à porter cette longueur $s'h'$, à partir du centre S, sur les rayons SK et SI, pour obtenir en $\varkappa$ et en ι les points correspondants de la transformée.

Quant aux asymptotes, on les détermine comme il suit. On marque dans le développement les génératrices SP et SR auxquelles les asymptotes sont et restent parallèles. Sur la nappe inférieure (*fig.* 99), on les obtient en SP et en SR. On construit alors en P et en R les tangentes $P\theta_1 = p\theta$ et $R\sigma_1 = r\sigma$; et en menant par les points θ_1 et σ_1 des parallèles aux génératrices SP et SR, on obtient les asymptotes de l'intersection en développement, c'est-à-dire les asymptotes de la transformée, puisque la disposition relative des éléments considérés dans le même plan tangent sur la courbe et sur l'asymptote doit

rester identique. Par suite de la symétrie, les asymptotes doivent se couper en développement sur le diamètre $B\alpha$.

Aux points γ et λ, les branches de la transformée coupent à angle droit les génératrices ou les rayons correspondants. En effet, aux points (g, g') et (l, l') de l'intersection, la tangente est perpendiculaire au plan vertical ou aux génératrices qui lui sont parallèles.

137. 3° Section parabolique.

Ce cas se présente lorsque le plan sécant est parallèle à l'une des génératrices principales SA, SB. Les mêmes constructions sont applicables. Nous croyons inutile de présenter l'épure, que nous recommandons au lecteur comme un bon exercice.

138. Lorsque le cône proposé est *quelconque*, les questions qu'on vient de traiter, relativement au cône circulaire droit, se résolvent en suivant une marche analogue. On emploie, par exemple, des plans auxiliaires menés par le sommet du cône parallèlement à la trace horizontale du plan sécant comme on l'a fait au n° 135.

Pour reconnaître d'avance si la courbe d'intersection présente des branches infinies, il suffit de chercher si la surface contient des génératrices parallèles au plan sécant : ce qu'on vérifie en menant par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant (136).

Si ce plan ne coupe pas le cône, la courbe d'intersection est fermée.

Si ce plan coupe le cône suivant plusieurs génératrices, la courbe d'intersection a autant de branches infinies dont on construit les asymptotes comme nous l'avons indiqué (136), en déterminant les intersections du plan sécant avec les différents plans tangents qui correspondent aux génératrices obtenues.

Enfin, si le plan parallèle au plan sécant est tangent au cône, la courbe d'intersection présente une branche infinie qui n'admet pas d'asymptote : c'est ce qui a lieu pour la section parabolique du cône circulaire droit (137). Il peut se faire d'ailleurs que le plan mené parallèlement au plan sécant par le sommet du cône proposé, soit à la fois sécant et tangent par rapport à ce cône.

Le développement, dans le cas d'un cône quelconque, ne peut plus se faire à l'aide d'un secteur circulaire. On est alors obligé de partager la base du cône en arcs assez petits pour pouvoir être remplacés par leurs cordes. C'est substituer au cône une pyramide inscrite dont les faces peuvent être facilement construites et assemblées sur le plan du développement. En déterminant les distances du sommet du cône aux différents

points de la courbe d'intersection qui sont situés sur les arêtes considérées, on obtient la transformée de cette courbe. Le triangle qui permet de tracer la tangente à la transformée n'est plus rectangle, mais on peut facilement déterminer ses trois côtés.

Sections planes des surfaces de révolution.

139. Nous distinguerons le cas où la surface de révolution considérée est donnée par son axe et sa courbe méridienne, et celui où cette surface est donnée par son axe et une courbe génératrice quelconque (**104**, 3°).

140. Premier cas : *Sections planes du tore* (*fig.* 102).

Nous savons que le tore est la surface engendrée par une circonférence tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan. La courbe méridienne est donc ici une circonférence.

L'axe (oz, $o'z'$) étant supposé vertical et la courbe méridienne étant dans un plan parallèle au plan vertical, les projections de cette courbe seront la circonférence $a'b'c'd'$ et la droite ab. L'équateur de la surface, son cercle de gorge et son parallèle moyen auront respectivement pour projections horizontales les circonférences ob, oa et oc.

La surface est formée d'une nappe extérieure convexe engendrée par la demi-circonférence qui se projette verticalement suivant $c'b'd'$, et d'une nappe intérieure non convexe engendrée par la demi-circonférence qui se projette suivant $c'a'd'$. Les deux circonférences oa et ob forment son contour apparent sur le plan horizontal ; son contour apparent sur le plan vertical se compose des demi-circonférences $c'b'd'$, $\gamma'\beta'\delta'$, et des droites $c'\gamma'$ et $d'\delta'$.

Coupons la surface par un plan quelconque P. Pour obtenir les projections de l'intersection, nous emploierons des plans auxiliaires horizontaux qui couperont la surface suivant des parallèles et le plan sécant suivant des horizontales.

Soit, par exemple, le plan auxiliaire R. Ce plan coupera le tore suivant deux parallèles dont les projections horizontales auront des rayons oe et of égaux aux distances $\omega e'$ et $\omega f'$; il coupera le plan P suivant l'horizontale (gh, $g'h'$). Les quatre points de rencontre de cette horizontale avec les deux parallèles appartiendront à l'intersection cherchée. On aura immédiatement les projections horizontales de ces points en m,n,p,r ; et l'on obtiendra leurs projections verticales à l'aide de perpendiculaires abaissées sur LT, jusqu'à la rencontre de $g'h'$.

En opérant de cette manière, on construira autant de points qu'on voudra des projections de l'intersection cherchée.

Il est commode de mener les plans auxiliaires deux à deux de part et d'autre et à égale distance de l'équateur de la surface : les parallèles déterminés sur le tore par deux plans auxiliaires symétriques se confondent alors en projection horizontale.

Les points-limites correspondent aux plans des deux parallèles moyens qui se projettent horizontalement suivant la circonférence *oc*. En ces points, le plan tangent au tore est évidemment horizontal et coupe le plan P suivant une horizontale dont les projections doivent être tangentes aux projections de l'intersection.

On peut trouver facilement les tangentes en d'autres points remarquables. Si l'on considère le plan auxiliaire confondu avec le plan commun de l'équateur et du cercle de gorge du tore, aux points correspondants de la courbe d'intersection, le plan tangent à la surface est évidemment perpendiculaire au plan horizontal : sa trace horizontale n'est donc autre chose que la tangente menée à la projection horizontale de l'équateur ou du cercle de gorge par les projections horizontales des points de l'intersection qui sont situés sur ces circonférences. Pour comprendre cette remarque, il suffit de se rappeler que le plan tangent en un point d'une surface est déterminé par les tangentes menées en ce point au méridien et au parallèle qui y passent. On voit donc que les plans tangents aux points indiqués coupent le plan sécant suivant des droites faciles à construire, puisque leurs projections horizontales sont respectivement tangentes à celles de l'équateur et du cercle de gorge. Il résulte de là qu'aux points dont il s'agit la projection horizontale de la courbe d'intersection est tangente aux projections horizontales de l'équateur et du cercle de gorge.

Pour trouver la tangente ($mt, m't'$) en un point quelconque (m, m') de l'intersection, il faut déterminer le plan tangent T en ce point de la surface, et chercher son intersection avec le plan sécant. Il est inutile de revenir sur cette construction connue (116) : l'épure renferme tous les détails nécessaires.

On a tracé en *trait plein* les parties de l'intersection qui se trouvent, par rapport au plan vertical, *en avant* du contour apparent correspondant de la surface, et, par rapport au plan horizontal, *au-dessus* du contour apparent par rapport à ce même plan. Les autres parties, invisibles pour l'observateur d'après les conventions adoptées (9), ont été *ponctuées*.

L'intersection, d'après les données choisies, est formée de deux courbes séparées (*). Suivant la position du plan sécant,

(*) Lorsqu'on coupe le tore par un plan *bi-tangent*, lequel passe alors par le centre de la surface, l'intersection se compose de deux cercles égaux qui ont pour corde commune celle qui joint les deux points de contact.

la nature de la section varie. Le tore, comme le cône, peut fournir trois genres de sections. Nous les avons examinées en Géométrie analytique (100).

Le rabattement de l'intersection s'effectuera sans peine. On suivra la même marche qu'au n° 133.

141. Second cas : *Sections planes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe* (*fig.* 103 et 104).

Nous supposons l'hyperboloïde engendré par une droite tournant autour d'un axe vertical avec lequel elle n'est pas située dans un même plan. D'après ce qui précède (123), la surface est suffisamment représentée, si l'on donne son axe (oz, $o'z'$) et l'une ou l'autre de ses génératrices principales (gd, $g'd'$), (ld, $l'd'$), parallèles au plan vertical.

La plus courte distance de l'axe et de la génératrice est la perpendiculaire od abaissée du point o sur gl, et le cercle de gorge de la surface a pour projection horizontale le cercle od. La trace horizontale de l'hyperboloïde est le cercle og.

Si l'on transporte l'une des génératrices principales parallèlement à elle-même, de manière que ses projections deviennent (ao, $g'd'$) ou (bo, $l'd'$), c'est-à-dire jusqu'à ce qu'elle vienne couper l'axe de la surface, elle engendre en tournant autour de cet axe un cône ayant pour sommet le point (α, α'), centre du cercle de gorge, et pour base le cercle oa. Ce cône est *le cône asymptote* de la surface gauche de révolution (128).

Les sections faites par un même plan dans la surface gauche et dans son cône asymptote étant des courbes semblables et semblablement placées, il sera facile de déterminer d'avance la nature de la section obtenue. Il suffira, en effet, de mener par le sommet du cône asymptote un plan parallèle au plan sécant; et, suivant que ce plan aura en commun avec le cône un point unique, deux génératrices ou une seule, la section sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole (138). De plus, dans le cas d'une section hyperbolique, les deux génératrices construites pour s'assurer du genre de la courbe seront parallèles aux asymptotes de la section (144).

Pour plus de simplicité, nous prendrons le plan sécant P perpendiculaire au plan vertical. La solution restera la même dans le cas d'un plan quelconque. Seulement la projection verticale de l'intersection devra alors être aussi construite (140), tandis que dans l'hypothèse adoptée elle se confond avec V^P.

142. 1° *Section elliptique* (*fig.* 103).

Nous emploierons toujours des plans auxiliaires horizontaux : ces plans couperont la surface suivant des parallèles, le plan sécant suivant des horizontales. Les points communs au

parallèle et à la droite déterminés par le même plan auxiliaire appartiendront à l'intersection cherchée.

Par suite de la symétrie, la droite dont les projections sont $(oe, \omega\varepsilon)$ est un axe de l'ellipse cherchée. *La première chose à faire est de trouver les sommets situés sur cet axe.*

Pour cela, nous supposerons que la droite $(oe, \omega\varepsilon)$ engendre un cône de révolution en tournant autour de l'axe de la surface. Les sommets, situés en même temps sur cette droite et sur l'hyperboloïde, engendreront deux parallèles de cet hyperboloïde ; si l'on connaissait ces parallèles, la question serait résolue.

Cherchons les points où ces parallèles rencontrent la génératrice principale $(gd, g'd')$.

Lorsque les sommets, dans le mouvement de rotation de la droite $(oe, \omega\varepsilon)$, viennent se placer sur cette génératrice, la droite $(oe, \omega\varepsilon)$ est nécessairement dans le plan déterminé par cette même génératrice et le point (o, ω). En menant par ce point la parallèle $(or, \omega\rho)$ à la génératrice, on obtiendra en gr la trace horizontale du plan qu'on vient de définir. Cette trace vient couper en f et en h la base oe du cône décrit par l'axe $(oe, \omega\varepsilon)$ de l'ellipse d'intersection. Lorsque l'un des sommets cherchés se trouve sur la génératrice principale $(gd, g'd')$, cet axe a donc pour projection horizontale of ou oh, c'est-à-dire qu'il coupe la génératrice principale soit au point (m_1, m'_1), soit au point (n_1, n'_1). Telles sont donc les positions que viennent occuper successivement les sommets considérés sur la génératrice $(gd, g'd')$, lorsqu'on leur fait décrire les parallèles correspondants de la surface. Pour les avoir dans leur véritable place, il suffit donc d'effectuer une rotation contraire qui les ramène en (m, m') et en (n, n') sur l'axe $(oe, \omega\varepsilon)$.

Les plans horizontaux auxiliaires devront alors être compris entre les deux sommets trouvés, et on pourra les espacer régulièrement.

Le plan auxiliaire R, par exemple, coupera l'hyperboloïde suivant le parallèle dont la projection horizontale est la circonférence oi (*), et le plan P suivant une horizontale dont la projection horizontale est la droite kp. Les deux points d'intersection k et p de cette droite et de la circonférence oi appartiennent à la projection horizontale de l'intersection ; et l'on en déterminera ainsi autant qu'on voudra. Il restera à les unir par un trait continu.

En prenant le milieu μ de la distance mn, on aura la projec-

(*) Le point (i, i') est le point de ce parallèle situé sur la génératrice principale $(ld, l'd')$.

tion horizontale du centre de la section. Si l'on veut déterminer le second axe de l'ellipse projection horizontale de la courbe d'intersection, il suffira de considérer le plan auxiliaire dont la trace verticale passe par μ'.

On peut obtenir immédiatement les points (ψ, ψ'), (φ, φ'), de l'intersection qui appartiennent aux génératrices principales de la surface, ainsi que leurs symétriques par rapport à l'axe $(oe, \omega\varepsilon)$.

Pour avoir la tangente en un point quelconque (k, k') de l'intersection, il faut construire le plan tangent en ce point à l'hyperboloïde. En opérant comme au n° **127**, on obtiendra la trace horizontale H^T de ce plan tangent, qui vient couper H^P en t. La tangente demandée aura donc pour projections les droites tk et $t'k'$.

Le rabattement de la courbe d'intersection sur le plan vertical s'effectuera absolument comme au n° **135**. L'épure renferme tous les détails nécessaires.

143. *Remarque.* Il faut noter avec soin la marche adoptée pour déterminer les sommets de la courbe d'intersection. On voit que cette marche est celle qu'il faut suivre pour trouver les points de rencontre de la surface gauche de révolution et d'une droite quelconque *coupant* l'axe (**148**).

144. 2° *Section hyperbolique* (*fig.* 104).

Supposons la surface définie comme dans le cas précédent. Le plan Q, mené parallèlement au plan sécant P par le sommet du cône asymptote, coupant le cône suivant les deux génératrices $(\alpha p, \alpha' p')$, $(\alpha r, \alpha' r')$, la section sera une hyperbole. Il faut commencer par en déterminer *les asymptotes.*

Pour cela, nous remarquerons que les génératrices de l'hyperboloïde sont, dans chaque système, parallèles aux génératrices du cône asymptote (**128**). Par conséquent, en menant au cercle de gorge, parallèlement à αp, les deux tangentes $\beta\gamma$ et $\delta\pi$, nous aurons les projections horizontales des génératrices qui, dans chaque système, sont parallèles à la droite $(\alpha p, \alpha' p')$. Ces génératrices déterminent un plan, tangent à l'hyperboloïde à l'infini et tangent au cône asymptote le long de la génératrice $(\alpha p, \alpha' p')$.

C'est ce que nous savons déjà (**128**); c'est ce qu'on peut voir d'ailleurs en remarquant que les deux génératrices considérées sur l'hyperboloïde et la génératrice du cône asymptote s'appuient sur un même diamètre du cercle de gorge, de sorte qu'elles sont dans le même plan. Le point p se trouve donc sur la trace horizontale $\gamma\pi$ qui est parallèle au diamètre $\beta\delta$, c'est-à-dire perpendiculaire à l'extrémité du rayon op de la base du cône.

Ceci posé, le plan tangent à l'hyperboloïde dont la trace horizontale est $\gamma\pi$, contenant les génératrices de la surface parallèles au plan sécant, le rencontre suivant une parallèle à ces génératrices. Cette parallèle coupant les génératrices considérées à l'infini, est elle-même tangente à la courbe d'intersection à l'infini : c'est une asymptote de cette courbe. Le point θ de rencontre de $\gamma\pi$ et de H^p sera donc la trace horizontale de cette asymptote, et l'on aura sa projection horizontale en menant la droite $\theta\mu$ parallèle à αp.

D'après ce qu'on vient de dire, le plan tangent à l'hyperboloïde dont l'intersection avec le plan sécant est la seconde asymptote, aura pour trace horizontale la droite $\lambda\rho$ menée perpendiculairement à l'extrémité du rayon *or*. Et en menant par le point σ de rencontre de $\lambda\rho$ et de H^p, une parallèle $\sigma\mu$ à αr, on aura la projection horizontale de la seconde asymptote. Comme vérification, le point de rencontre μ des projections horizontales des deux asymptotes doit se trouver sur la droite *oe*, qui représente toujours la projection horizontale d'un axe de la courbe.

Les points *f* et *h* où H^p coupe la circonférence *og*, base de l'hyperboloïde, appartiennent à l'intersection cherchée. Si l'on suppose la surface limitée par un parallèle situé au-dessus du cercle de gorge et se confondant avec cette base *og* en projection horizontale, les points *k* et *i* appartiendront également à la projection horizontale de l'intersection. On saura donc *immédiatement* dans quels angles, relativement à ses asymptotes, la projection horizontale de l'interjection est placée; c'est-à-dire, on saura si l'axe dont les projections sont (*oe*, $\omega\varepsilon$) est un axe *transverse* ou *imaginaire*.

Si c'est un axe transverse, on déterminera les sommets réels de l'hyperbole à tracer, en suivant identiquement la même marche que dans le cas de la section elliptique (142).

Si c'est un axe imaginaire, comme dans le cas de l'épure, on aura l'axe réel en menant par le point μ une perpendiculaire à *oe*. Pour avoir les points de la courbe situés sur cet axe ou les sommets correspondants, on mènera le parallèle de la surface dont le plan renferme le point (μ, μ'). Sa projection horizontale rencontrant la perpendiculaire $\mu\mu'$ à LT en deux points *m* et *n*, ces points seront les sommets réels de l'hyperbole.

En employant des plans auxiliaires horizontaux, comme dans le cas de la section elliptique, et en les prenant deux à deux à égale distance au-dessus et au-dessous du cercle de gorge, de manière qu'ils se confondent deux à deux en projection horizontale, on obtiendra autant de points de l'intersection qu'on

voudra. Et il sera facile alors, les asymptotes étant construites, de tracer sa projection horizontale.

Dans le cas examiné, tous les plans auxiliaires horizontaux fourniront des points de l'intersection. Il n'en serait pas de même si l'axe réel se projetait horizontalement suivant *oe*. Les projections verticales des sommets, situés alors sur cet axe, indiqueraient en dedans de quelles limites les plans auxiliaires doivent être employés.

Les points situés sur la projection horizontale du cercle de gorge s'obtiendront facilement en u et en v. En ces points, les deux branches de l'hyperbole sont tangentes au cercle *od*. En effet, aux points projetés en u et en v, le plan tangent à l'hyperboloïde est vertical (125). La trace horizontale de ce plan tangent, nécessairement tangente au cercle de gorge, représente donc en même temps la projection horizontale de la tangente à la courbe d'intersection au point considéré.

On peut obtenir immédiatement, comme dans le cas précédent, les points de l'intersection qui appartiennent aux génératrices principales de la surface : ces points ont leurs projections horizontales en q, s, x, y, et correspondent aux perpendiculaires $\psi\psi'$ et $\varphi\varphi'$ à LT (*).

145. *Remarque.* — Le cône asymptote est coupé par le plan P suivant une hyperbole dont l'axe réel est projeté suivant *oe*, et dont les sommets correspondants sont les points (ψ,ψ') et (φ,φ'). Les sections faites par le plan P dans le cône et dans l'hyperboloïde devant être concentriques, le point (μ, μ') doit être au milieu de la droite $(\psi\varphi, \psi'\varphi')$. Les deux hyperboles obtenus remplissent analytiquement la condition de similitude; mais, dans l'acception ordinaire du mot, l'une est semblable à la conjuguée de l'autre (*Géom. anal.*, 257, *Note*).

146. 3° *Section parabolique.*

Si le plan Q, mené parallèlement au plan P par le sommet du cône asymptote, est tangent à ce cône, la section est une parabole. Nous savons que, dans ce cas, il n'y a plus d'asymptote. Et, en effet, le plan tangent mené au cône par la génératrice unique parallèle au plan P, n'est autre que le plan Q. L'intersection de ces deux plans ou l'asymptote se transporte donc à l'infini.

Cette épure s'exécutera comme les précédentes : c'est un bon exercice que nous recommandons au lecteur.

(*) Nous laissons de côté le cas très-simple où la section hyperbolique se réduit à ses asymptotes ou à deux droites qui se coupent : le plan P devient alors *tangent* à l'hyperboloïde au point de rencontre de ces deux droites.

Intersection d'une droite avec les surfaces considérées dans ce chapitre.

147. *Intersection d'une droite avec un cylindre ou un cône.* S'il s'agit d'un cylindre, on fait passer par la droite donnée un plan parallèle aux génératrices du cylindre, et l'on construit les génératrices suivant lesquelles ce plan coupe le cylindre. Les points de rencontre de ces génératrices et de la droite donnée sont les points demandés.

S'il s'agit d'un cône (*fig.* 100) donné par sa base *abcd* et son sommet (s, s'), on fait passer un plan par la droite proposée $(ef, e'f')$ et le sommet du cône. La trace horizontale H^R de ce plan coupant la base du cône aux points *m* et *n*, le plan R coupera le cône suivant les deux génératrices $(sm, s'm')$, $(sn, s'n')$. Ces mêmes génératrices coupent la droite $(ef, e'f')$ aux points (p, p'), (r, r'), qui sont les points cherchés.

148. *Intersection d'une droite avec un hyperboloïde de révolution à une nappe* (*fig.* 101).

L'hyperboloïde donné H est défini par son cercle de gorge *od* et sa génératrice principale $(dg, d'g')$.

Nous avons déjà résolu le problème proposé dans le cas d'une droite coupant l'axe de la surface (143). Nous supposons maintenant la droite donnée dans une position quelconque.

Par un mouvement de rotation autour de l'axe $(oz, o'z')$ de l'hyperboloïde H, on peut toujours rendre préalablement cette droite $(ab, a'b')$ parallèle au plan vertical (34). Nous admettrons donc dans l'épure qu'il en est ainsi.

Ceci posé, si l'on fait tourner la droite $(ab, a'b')$ autour de l'axe $(oz, o'z')$, elle engendrera un hyperboloïde H_1, ayant pour cercle de gorge le cercle $o\delta$, et qui coupera l'hyperboloïde H suivant deux parallèles qui contiendront les points d'intersection cherchés de la droite $(ab, a'b')$ avec l'hyperboloïde H. Tout le problème consiste à trouver les hauteurs de ces parallèles au-dessus du plan horizontal.

Remarquons que le plan qui projette horizontalement la génératrice principale $(dg, d'g')$ de l'hyperboloïde H, coupe l'hyperboloïde H_1 suivant une hyperbole (*Géom. anal.*, 374), dont le demi-axe réel est égal à γd. Les points où $(dg, d'g')$ rencontre cette hyperbole, sont les points des deux hyperboloïdes H et H_1 qui engendrent les parallèles indiqués.

Or cette hyperbole, en tournant autour de l'axe vertical dont le pied est en *d*, engendre un hyperboloïde H_2 dont le cercle de gorge est le cercle $d\gamma$ et dont la génératrice principale est la droite $(\alpha\beta, a'b')$. En effet, les sections hyperboliques sem-

blables ont des asymptotes parallèles (*Géom. anal.*, 257), et chaque génératrice principale d'un hyperboloïde est parallèle à une asymptote de la section méridienne parallèle au plan vertical et se confond avec cette asymptote en projection verticale (124).

La question est alors ramenée à chercher les points de rencontre de ce dernier hyperboloïde H_2 avec la droite $(dg, d'g')$ qui coupe son axe (143).

Nous décrirons donc, autour de l'axe vertical projeté en d, le cône dont la génératrice parallèle au plan vertical se projette suivant $d'g'$. Nous mènerons par le point (d, d') une parallèle à la génératrice principale $(\alpha\beta, a'b')$ de l'hyperboloïde H_2. En joignant les traces horizontales α et λ de ces deux droites, nous obtiendrons la trace horizontale ef du plan qui renferme la droite $(dg, d'g')$ lorsqu'elle coupe l'hyperboloïde H_2 en un point situé sur la génératrice principale $(\alpha\beta, a'b')$. La projection horizontale de cette droite sera donc, à cet instant, de ou df; et son point de rencontre avec la génératrice principale sera (m_1, m') ou (n_1, n'). Les parallèles passant par les points de rencontre de la droite $(ab, a'b')$ et de l'hyperboloïde H sont ainsi déterminés; et ces points sont, par suite, immédiatement connus en (m, m') et en (n, n').

Remarques. — I. Si ab coupait la projection horizontale od du cercle de gorge de l'hyperboloïde H, la solution serait simplifiée; car on appliquerait immédiatement à la droite donnée les raisonnements qu'on vient de faire relativement à la génératrice $(dg, d'g')$.

II. Si ab était tangente au cercle od, le plan projetant horizontalement la droite donnée couperait l'hyperboloïde H suivant deux génératrices symétriques et parallèles aux génératrices principales : les points de rencontre de ces génératrices et de la droite $(ab, a'b')$ seraient les points demandés.

CHAPITRE V.

INTERSECTION DE DEUX SURFACES COURBES.

149. Nous avons déjà indiqué (129) la méthode générale à suivre pour déterminer l'intersection de deux surfaces. Cette méthode consiste à les couper par une série de surfaces auxiliaires, qui doivent être choisies et dirigées autant que possible de manière à rencontrer les surfaces proposées suivant des lignes qu'on puisse construire immédiatement, c'est-à-dire suivant des droites ou des circonférences. Les points de ren-

contre des lignes appartenant à une même surface auxiliaire sont à l'intersection cherchée.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier les cas qui offrent les simplifications les plus remarquables.

Intersection de deux surfaces cylindriques.

150. Nous supposerons (*fig.* 105) les deux cylindres donnés par leurs bases *ab* et *cd* sur le plan horizontal et par la direction de leurs génératrices. On obtiendra comme précédemment (103) leurs contours apparents sur chacun des plans de projection. Les bases *ab* et *cd* sont circulaires, mais cela ne modifie en rien la suite des raisonnements.

On emploiera comme surfaces auxiliaires des plans sécants, *parallèles aux génératrices des deux surfaces cylindriques :* ils couperont ainsi chacune d'elles suivant des génératrices. Les points de rencontre des génératrices situées dans le même plan auxiliaire appartiendront à l'intersection cherchée.

Pour avoir la direction des plans sécants, on mènera par un point quelconque (α, α') des parallèles ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$), ($\alpha\delta$, $\alpha'\delta'$) aux génératrices des deux cylindres. Le plan passant par ces parallèles aura $\beta\delta$ pour trace horizontale : *Les traces horizontales des plans auxiliaires devront donc être parallèles à la droite* $\beta\delta$.

Ceci posé, la première chose à faire est de décider de quelle manière a lieu la rencontre des deux cylindres.

Menons à la base de chaque surface les tangentes, parallèles à la direction $\beta\delta$, qui comprennent cette même base.

Dans le cas de la *fig.* 105, la tangente *efg* à la base *ab* coupe la seconde base *cd*, tandis que la tangente parallèle ne la rencontre pas. De même, la tangente *ikh* à la base *cd* coupe seule la première base *ab*. C'est donc entre les deux parallèles *efg*, *ikh*, que doivent être menées les traces horizontales des plans sécants auxiliaires. Au delà, les plans sécants employés rencontreraient un seul des cylindres proposés. On dit alors qu'il y a *arrachement*. Les parties des deux cylindres qui correspondent aux arcs $k\gamma h$, $f\varepsilon g$, restent intactes, tandis que les génératrices qui s'appuient sur les arcs *keh*, *fig*, sont respectivement interrompues par les deux surfaces. *Quand il y a arrachement, la courbe d'intersection se compose d'une branche unique et continue.*

Dans le cas de la *fig.* 106, les deux tangentes *efg*, EFG, menées à la base *ab* parallèlement à $\beta\delta$ coupent toutes les deux la base *cd*. On dit alors qu'il y a *pénétration* du second cylindre par le premier. Les parties du second cylindre qui correspondent aux arcs *fg* et FG restent intactes, tandis que

toutes les génératrices du premier cylindre viennent percer le second dans la partie qui s'appuie sur l'arc fcF, pour en sortir dans la partie qui s'appuie sur l'arc gdG. L'intersection est alors formée de deux courbes dites *d'entrée et de sortie*, qui sont tout à fait distinctes et séparées.

Les tangentes qui servent à décider s'il y a arrachement ou pénétration, sont en même temps les traces horizontales H^L et H^λ des plans auxiliaires *limites* L et λ. On commencera par déterminer les points de la courbe d'intersection qui sont dans ces plans limites. Pour cela, on construira la génératrice (epq, $e'p'q'$) du cylindre *ab* et les deux génératrices (fp, $f'p'$), (gq, $g'q'$), du cylindre *cd*. Ces génératrices étant dans un même plan, se couperont en deux points (p, p'), (q, q'), qui appartiendront à l'intersection cherchée. Comme vérification, les droites pp', qq', doivent être perpendiculaires à LT.

Remarquons que la génératrice (fp, $f'p'$) est dans le plan tangent mené au cylindre *cd* par le point (p, p'); elle est en même temps dans le plan λ évidemment tangent au cylindre *ab* au même point (p, p'). Donc elle est l'intersection des plans tangents menés aux deux surfaces par le point (p, p'). *Elle représente par conséquent la tangente à la courbe d'intersection au point considéré*, et ses projections doivent être tangentes aux projections de cette courbe.

De même, la génératrice (gq, $g'q'$) est la tangente à la courbe d'intersection au point (q, q').

En opérant d'une manière identique par rapport à l'autre plan limite L, on trouvera deux nouveaux points (r, r') et (s, s') de la courbe d'intersection; et les tangentes en ces points seront aussi les génératrices (hr, $h'r'$), (ks, $k's'$).

Si l'on conduit maintenant un plan sécant quelconque R, il coupera chaque surface suivant deux génératrices; et ces génératrices, par leurs rencontres mutuelles, fourniront quatre nouveaux points de l'intersection. On en déterminera ainsi autant qu'on voudra.

Considérons en particulier le plan sécant dont la trace horizontale passe par le point μ, pied de l'une des génératrices qui correspondent au contour apparent du cylindre *ab* sur le plan horizontal. Sur cette génératrice, se trouvent deux points (u, u'), (v, v'), de l'intersection. *La projection horizontale de cette génératrice est tangente à la projection horizontale de la courbe d'intersection*, aux points u et v. En effet, le plan tangent mené au cylindre *ab* suivant cette génératrice contient les tangentes à la courbe d'intersection aux points (u, u'), (v, v'); et comme ce plan est *vertical* (102), sa trace horizontale, qui est la projection horizontale de la génératrice dont le

pied est en μ, se confond avec les projections horizontales des tangentes qui y sont contenues.

Même remarque pour les projections horizontales des autres génératrices limites, lorsque leurs traces horizontales tombent entre les parallèles H^L et H^λ.

On démontre, en s'appuyant sur des principes identiques, que *les projections verticales des génératrices qui correspondent aux contours apparents des deux cylindres sur le plan vertical, sont tangentes à la projection verticale de l'intersection.*

Pour avoir la tangente en un point quelconque (m, m') *de l'intersection*, comme cette tangente est l'intersection des plans tangents menés en ce point aux deux surfaces, il suffit de construire les traces horizontales de ces plans tangents. Par le point (m, m'), passent respectivement sur chaque surface les deux génératrices $(xm, x'm')$, $(ym, y'm')$. On aura donc les traces horizontales H^T et H^θ des plans tangents correspondants, en menant par les pieds x et y des deux génératrices des tangentes aux bases ab et cd. Ces traces H^T et H^θ se couperont en un point t, trace horizontale de la tangente demandée. Cette tangente aura donc pour projections les droites tm et $t'm'$.

Il peut arriver que le point t soit hors de l'épure. Les intersections de deux plans parallèles par un troisième étant parallèles, on mène alors une droite H^N parallèle à $\beta\gamma$, qui coupe convenablement H^T et H^θ. Elle représente la trace horizontale d'un plan parallèle au plan auxiliaire auquel appartiennent les génératrices $(xm, x'm')$, $(ym, y'm')$. En construisant les intersections du plan N avec les plans T et θ, on obtient un second point de la tangente cherchée (*Compl. de Géom.*, 9).

Si l'on veut marquer sur l'épure, par la différence du tracé, les parties visibles et invisibles de la courbe d'intersection, c'est-à-dire si l'on suppose que les deux cylindres continuent d'exister après qu'on a déterminé cette courbe, il suffit de se reporter aux considérations développées au sujet des contours apparents des surfaces sur les deux plans de projection (102, 105). Ces considérations permettent de séparer sur les deux surfaces proposées, par rapport à chacun des plans de projection, les génératrices visibles de celles qui sont invisibles. On voit alors que *tous les points de la courbe d'intersection qui appartiennent à deux génératrices visibles sur chaque cylindre, sont nécessairement visibles, tandis que tous les points de la courbe d'intersection qui appartiennent à une génératrice invisible sur l'un des cylindres, sont nécessairement invisibles.*

151. *Remarques.* — I. La courbe d'intersection ne peut présenter de *branches infinies*, que lorsque l'une des deux surfaces cylindriques a pour base une courbe à branches infinies. Dans ce cas, en effet, un ou plusieurs des plans sécants auxiliaires peuvent aller rencontrer l'une des bases à l'infini, de manière à déterminer des points de la courbe d'intersection situés aussi à l'infini.

Les deux bases étant au contraire des courbes fermées, il faudrait, pour que l'intersection présentât une branche infinie, que deux génératrices des deux cylindres pussent se rencontrer elles-mêmes à l'infini ou être parallèles. Mais alors, toutes les génératrices des deux surfaces étant parallèles, il n'y aurait pas d'intersection ou elle se composerait simplement de génératrices séparées, communes aux deux cylindres.

II. Les deux cas d'*arrachement* et de *pénétration* se réunissent, quand les bases des deux cylindres présentent des tangentes communes parallèles à la direction $\beta\gamma$. On trouve alors des courbes à *nœud*, parce que le plan limite correspondant à la tangente commune est tangent aux deux surfaces au point unique d'intersection des génératrices qu'il détermine sur chacune d'elles. Les courbes d'entrée et de sortie de la pénétration simple se rejoignent par ce nœud.

Intersection de deux surfaces coniques.

152. Nous supposerons les deux cônes donnés par leurs bases *ab* et *cd* sur le plan horizontal et par leurs sommets (S, S') et (*s*, *s'*). Nous obtiendrons, comme précédemment (109), leurs contours apparents sur les deux plans de projection. Les bases *ab* et *cd* sont ici circulaires; mais cette circonstance ne modifiera en rien nos raisonnements.

Les plans sécants auxiliaires doivent passer par les sommets des deux cônes, de manière à les couper tous les deux suivant des génératrices. On construira donc la trace horizontale α de la droite (S*s*, S'*s'*) qui joint les deux sommets, et *les traces horizontales des plans sécants devront passer par le point* α. Les points de rencontre des génératrices situées dans un même plan auxiliaire appartiendront à l'intersection cherchée.

Il peut y avoir, comme dans le cas de deux cylindres (150), *arrachement* ou *pénétration*.

Il faut distinguer le cas où la courbe d'intersection des deux surfaces coniques présente des branches *infinies*, et celui où elle n'en offre pas. Plaçons-nous d'abord (*fig.* 107) dans ce dernier cas; et, pour plus de simplicité et de clarté dans l'épure, proposons-nous de construire seulement la partie de

l'intersection qui appartient *aux nappes inférieures* des deux cônes proposés.

Si le point α ne tombe point dans l'intérieur des deux bases, on pourra mener par ce point deux droites chacune tangente à l'une des bases et sécante à l'autre. Ces droites αefg, αikh, seront les traces horizontales H^L et H^λ des plans *limites* L et λ. Les traces horizontales des plans sécants, non comprises dans l'angle formé par les traces H^L et H^λ, ne rencontreront en effet qu'une des bases des cônes donnés.

Dans l'exemple choisi, il y a *pénétration* du second cône par le premier. Il y aurait *arrachement* si les traces horizontales des deux plans limites n'étaient pas tangentes à la même base.

Ceci posé, on construira la génératrice (*se*, *s'e'*) du cône *ab*, et la génératrice (S*g*, S'*g'*) du cône *cd*. On n'a pas besoin de construire les génératrices du second cône qui s'appuient sur l'arc *fk*, parce que ces génératrices correspondent à la partie de l'intersection située sur les nappes supérieures des deux cônes, partie que nous devons laisser de côté. Les génératrices (*se*, *s'e'*), (S*g*, S'*g'*) étant dans un même plan, se couperont en un point (*p*, *p'*) qui appartiendra à l'intersection cherchée. Comme vérification, la droite *pp'* doit être perpendiculaire à LT.

Remarquons que la génératrice (S*g*, S'*g'*) est dans le plan tangent mené au cône *cd* par le point (*p*, *p'*); elle est en même temps dans le plan L évidemment tangent au cône *ab* au même point (*p*, *p'*). Donc, elle est l'intersection des deux plans tangents menés aux deux surfaces par le point (*p*, *p'*). *Elle représente par suite la tangeute à la courbe d'intersection au point considéré,* et ses projections doivent être tangentes aux projections de cette courbe.

En opérant de même par rapport à l'autre plan limite λ, on trouvera un nouveau point (*q*, *q'*) de l'intersection; et la tangente en ce point sera aussi la génératrice (S*h*, S'*h'*).

Si l'on conduit maintenant un plan sécant quelconque R, il coupera le cône *ab* suivant les deux génératrices (*sl*, *s'l'*) et (*sn*, *s'n'*), le cône *cd* suivant deux génératrices, mais on ne devra tenir compte que de la première (S*r*, S'*r'*). Ces génératrices, par leurs rencontres mutuelles, fourniront deux nouveaux points de l'intersection; et l'on en déterminera ainsi autant qu'on voudra.

Considérons, en particulier, le plan sécant dont la trace horizontale passe par le point *a*, pied de l'une des génératrices qui correspondent au contour apparent du cône *ab* sur le plan vertical. Sur cette génératrice, se trouvera un point de l'inter-

section. *En ce point, la projection verticale de la génératrice sera tangente à la projection verticale de la courbe d'intersection.* En effet, le plan tangent mené au cône *ab* suivant cette génératrice est *perpendiculaire au plan vertical.* Il contient la tangente à la courbe d'intersection au point indiqué ; et comme il est perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale qui est $s'a'$ se confond avec la trace verticale de la tangente qu'il renferme.

Même remarque pour les projections verticales des autres génératrices limites des deux cônes, qui ont pour traces horizontales les points (b, b') et (d, d'). Il n'y a aucun point de l'intersection sur la génératrice limite $(Sc, S'c')$.

On ne peut pas faire une remarque analogue relativement à la projection horizontale de l'intersection, parce que, dans l'exemple choisi, les contours apparents des deux cônes sur le plan horizontal se réduisent à leurs bases *ab* et *cd*.

Pour avoir la tangente en un point quelconque (m, m') *de l'intersection*, il faut construire l'intersection des plans tangents menés en ce point aux deux surfaces. Les traces horizontales de ces plans sont les tangentes H^T et H^θ menées aux bases des deux cônes par les pieds des génératrices $(rm, r'm')$, $(lm, l'm')$, qui, sur chacun d'eux, passent par le point considéré. Ces traces H^T et H^θ se coupent en un point *t*, trace horizontale de la tangente demandée : cette tangente aura donc pour projections les droites *tm* et $t'm'$.

Si l'on veut marquer sur l'épure, par la différence du tracé, les parties visibles et invisibles de l'intersection, c'est-à-dire si l'on suppose que les deux cônes continuent d'exister après la détermination de cette intersection, il suffit de séparer sur les deux surfaces, à l'aide de leurs contours apparents, les génératrices visibles des génératrices invisibles. *Tous les points de la courbe d'intersection qui appartiennent à deux génératrices visibles sur chaque cône, sont nécessairement visibles; tous ceux qui appartiennent à une génératrice invisible sur l'un des cônes, sont nécessairement invisibles.*

153. *Remarque.* — Nous savons (*Compl. de Géom.*, 69) que les droites qui passent par l'un des centres de similitude de deux circonférences, coupent ces circonférences en des points tels, que les rayons correspondants sont parallèles. On pourra donc, si on le juge nécessaire (*), déterminer facilement les points maximum et minimum de la projection verticale de l'intersection par rapport à LT.

(*) Sur l'épure, on a laissé de côté cette détermination.

Soit O un centre de similitude des circonférences *ab* et *cd*. Considérons le plan sécant auxiliaire qui passe par ce point, c'est-à-dire dont la trace horizontale est αo. Les tangentes menées à la courbe d'intersection par les points qui y sont contenus, sont nécessairement parallèles au plan horizontal, de sorte que les projections verticales de ces tangentes, parallèles à LT, correspondent bien à des points maximum et minimum en projection verticale. En effet, les traces horizontales des plans tangents menés aux deux surfaces par les points considérés seront *parallèles*, comme perpendiculaires à des rayons parallèles dans les deux circonférences *ab* et *cd* : ces plans auront donc pour intersections *des horizontales*.

Dans le cas de bases circulaires ou, plus généralement, *homothétiques*, le point le plus haut et le point le plus bas de la projection verticale de l'intersection se détermineront donc toujours facilement.

154. Il faut considérer maintenant le cas où l'intersection des deux surfaces coniques présente des branches *infinies*.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que, sur les deux cônes, on puisse trouver *des génératrices parallèles entre elles*. Si cette condition n'est pas remplie, aucun point de l'intersection ne pourra, en effet, être situé à l'infini.

Pour décider, on transporte le cône *ab*, par exemple, parallèlement à lui-même, en faisant glisser son sommet (s, s') le long de la droite $(s\mathrm{S}, s'\mathrm{S}')$, jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec le sommet $(\mathrm{S}, \mathrm{S}')$ du cône *cd*. On construit la nouvelle base du cône *ab* ainsi transporté, en menant par le sommet $(\mathrm{S}, \mathrm{S}')$ des parallèles aux positions primitives de ses génératrices, et en cherchant les traces horizontales de ces parallèles.

Il faut d'ailleurs remarquer que la nouvelle base doit être *semblable* à l'ancienne (*Géom. anal.*, 252); dès qu'on en aura construit un point, on aura donc le rapport de similitude de ces deux bases; car le point α, trace horizontale de la droite $(s\mathrm{S}, s'\mathrm{S}')$, est évidemment leur centre de similitude : on obtiendra alors *par un simple tracé plan* autant de points de la nouvelle base du cône *ab* qu'on voudra.

On voit qu'on remplace en réalité le cône *ab* dans ses deux positions par deux pyramides à arêtes parallèles et proportionnelles, et les deux bases considérées par deux polygones homothétiques (*Compl. de Géom.*, 65).

Lorsque la base du cône transporté est une circonférence (*fig.* 108), il suffit évidemment de tracer par le sommet $(\mathrm{S}, \mathrm{S}')$ du cône *cd* des parallèles aux génératrices limites $(sa, s'a')$, $(sb, s'b')$ du cône *ab*. Les traces horizontales de ces parallèles $(\mathrm{S}\alpha, \mathrm{S}'\alpha')$, $(\mathrm{S}\beta, \mathrm{S}'\beta')$, étant α et β, la nouvelle base du

cône *ab* sera la circonférence décrite sur $\alpha\beta$ comme diamètre. Si la circonférence $\alpha\beta$ coupe la circonférence *cd*, les deux cônes $\alpha\beta$ et *cd* auront des génératrices communes, et ces génératrices communes deviendront des génératrices parallèles quand on ramènera le cône *ab* dans sa véritable position : l'intersection des deux cônes sera alors une courbe à branches infinies.

Dans le cas de la *fig.* 108, la position des traces horizontales H^L et H^λ des plans sécants limites montre qu'il y a *arrachement* des deux surfaces.

155. *Pour avoir les asymptotes des branches infinies*, il suffit de chercher l'intersection des plans tangents menés aux deux cônes suivant les génératrices parallèles obtenues. L'intersection de deux de ces plans tangents est, en effet, une tangente à la courbe d'intersection qui a son point de contact à l'infini, sur les deux génératrices parallèles considérées, c'est-à-dire que cette tangente est une asymptote. On construira donc les traces horizontales des deux plans tangents et, par le point où ces traces se couperont, on tracera une parallèle aux génératrices contenues dans ces plans tangents. On aura ainsi les projections d'une asymptote.

Si les bases *cd* et $\alpha\beta$ (*fig.* 108), au lieu de se couper, étaient tangentes, la courbe d'intersection des deux surfaces présenterait toujours une branche infinie; mais cette branche n'aurait pas d'asymptote, car les génératrices communes des cônes *cd* et $\alpha\beta$ correspondant alors à des rayons ou à des normales en ligne droite, les génératrices parallèles des cônes *cd* et *ab* correspondraient à des rayons ou à des normales parallèles. Les plans tangents aux deux cônes *ab* et *cd* le long de ces mêmes génératrices, auraient alors des traces horizontales parallèles et seraient par suite eux-mêmes parallèles, de sorte que leur intersection ou l'asymptote se transporterait à l'infini.

D'ailleurs l'intersection, qu'elle ait ou non des branches infinies, se construira toujours d'après les principes exposés au n° 152.

156. *Intersection d'une surface conique et d'une surface cylindrique.*

Si le sommet du second cône considéré jusqu'ici se transporte à l'infini, ce cône dégénère en cylindre. La droite passant par les sommets des deux cônes devient alors une parallèle menée par le sommet du premier cône aux génératrices du cylindre. Donc, dans le cas où l'on cherche l'intersection de deux surfaces, l'une conique, l'autre cylindrique, il faut que les traces horizontales de tous les plans sécants auxiliaires passent par la trace horizontale de la droite menée par le sommet de la surface conique, parallèlement aux géné-

ratrices de la surface cylindrique. Les plans auxiliaires couperont alors les deux surfaces suivant des génératrices, et les points de rencontre des génératrices situées dans un même plan sécant appartiendront à l'intersection cherchée. Le mode d'opérer sera d'ailleurs identique à celui suivi dans les deux cas précédents (150, 152).

Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan.

157. Les axes des deux surfaces de révolution étant supposés dans un même plan, *se couperont ou seront parallèles.*

Pour trouver l'intersection de deux surfaces de révolution *dont les axes sont parallèles,* on suppose ces axes verticaux et l'on coupe les deux surfaces par une série de plans auxiliaires horizontaux. Chaque plan auxiliaire détermine sur les surfaces proposées des circonférences de cercle dont les points d'intersection, faciles à construire, appartiennent à la courbe cherchée.

Lorsque les axes des deux surfaces se rencontrent, on peut supposer l'un d'eux vertical et l'autre parallèle au plan vertical. Ceci posé, si l'on employait encore des plans auxiliaires horizontaux, on obtiendrait bien comme sections des circonférences de cercle sur la première surface ; mais sur l'autre surface dont l'axe est oblique au plan horizontal, on déterminerait des courbes quelconques qu'il faudrait en général tracer par points. On doit donc recourir à d'autres surfaces auxiliaires; et la sphère se présente ici d'elle-même, en vertu de son importante propriété d'être de révolution autour de tous ses diamètres (*Géom.*, 256). *On coupera par suite les surfaces proposées par des sphères variables ayant pour centre fixe le point de concours des axes,* et chacune de ces sphères déterminera sur les surfaces de révolution données des circonférences dont les points communs seront à l'intersection cherchée (*).

Nous allons maintenant développer les méthodes indiquées sur deux exemples particuliers.

158. Premier cas : *Intersection de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes se coupent* (*fig.* 109).

Le premier ellipsoïde est donné par son axe vertical (oz, $o'z'$) et par la projection verticale $a'b'$ du méridien situé dans le plan des deux axes [qui est supposé (157) parallèle au plan vertical]. Le cercle ab est l'équateur du premier ellipsoïde.

(*) Deux surfaces de révolution qui ont même axe, se coupent évidemment suivant les parallèles décrits par les points communs à leurs courbes méridiennes.

Le second ellipsoïde est donné par son axe oblique au plan horizontal (cd, $c'd'$) et par la projection verticale $g'h'p'q'$ du méridien situé dans le plan des deux axes.

On a ainsi le contour apparent des deux surfaces sur le plan vertical et le contour apparent de la première sur le plan horizontal.

Du point de rencontre d' des projections verticales des deux axes comme centre, décrivons une circonférence de cercle coupant les deux ellipses $a'b'$ et $g'h'p'q'$ aux points e' et f', g' et h'. Cette circonférence de cercle pourra être regardée comme la projection verticale d'une sphère auxiliaire ayant son centre au point de rencontre des deux axes.

Cette sphère ayant même axe (oz, $o'z'$) que le premier ellipsoïde, le coupera suivant un parallèle dont la projection verticale sera la corde $e'f'$ et dont la projection horizontale sera la circonférence oe.

Comme on peut prendre pour axe d'une sphère l'un quelconque de ses diamètres, la sphère considérée aura aussi même axe (cd, $c'd'$) que le second ellipsoïde, et le coupera de même suivant un parallèle dont la projection verticale sera la corde $g'h'$. Il est inutile de considérer la projection horizontale de ce parallèle.

Les deux projections verticales $e'f'$ et $g'h'$ se coupant en un point m', *situé dans l'intérieur de la circonférence d'e'*, les deux parallèles considérés se coupent suivant une corde perpendiculaire en m' au plan vertical; et les extrémités de cette corde commune sont deux points de l'intersection des ellipsoïdes proposés.

Comme les projections horizontales de ces points appartiennent au cercle oe, projection horizontale du premier parallèle, on les obtiendra en m et en n, en abaissant du point m' jusqu'à la rencontre de la circonférence oe une perpendiculaire à LT.

En considérant d'autres sphères auxiliaires et en opérant d'une manière identique par rapport à chacune d'elles, on trouvera autant de points de l'intersection qu'on voudra.

Il est commode de considérer des parallèles du premier ellipsoïde situés deux à deux à la même distance de part et d'autre de son équateur, parce que ces parallèles se confondent en projection horizontale.

Les points p' et q' d'intersection des projections verticales des méridiens des deux ellipsoïdes, appartiennent évidemment à la projection verticale de l'intersection et lui servent de limites. Les projections horizontales correspondantes p et q sont sur cd, trace horizontale du méridien commun aux deux surfaces.

En décrivant la circonférence qui coupe l'ellipse $a'b'$ sui-

vant l'axe $a'b'$, on obtient les points (k, k') et (l, l') de l'intersection qui se trouvent sur l'équateur du premier ellipsoïde. *Les points k et l séparent, en projection horizontale, la partie visible de la partie invisible.* Quant à la projection verticale de l'intersection, comme cette intersection est formée de deux parties symétriques par rapport au méridien commun des deux surfaces, la partie visible en projection verticale recouvre exactement la partie invisible.

Aux points k et l, la projection horizontale de l'intersection est *tangente* à la projection horizontale ab de l'équateur du premier ellipsoïde. En effet, aux points (k, k') et (l, l'), les plans tangents au premier ellipsoïde sont *verticaux*, puisque ces points appartiennent à son contour apparent relativement au plan horizontal (102). Donc les tangentes correspondantes à la courbe d'intersection se confondent en projection horizontale avec les traces horizontales de ces plans tangents, qui sont nécessairement tangentes à la circonférence ab aux points k et l (115).

Pour mener la tangente en un point (m, m') de la courbe d'intersection, on devra de préférence employer la méthode du plan normal déjà indiquée (130). Cette méthode consiste à remarquer que les normales menées aux deux surfaces par le point (m, m') étant toutes deux perpendiculaires à la tangente cherchée, déterminent un plan perpendiculaire à cette tangente, lequel est le *plan normal* à la courbe d'intersection au point (m, m'). Connaissant les traces de ce plan *ou leurs directions*, on aura immédiatement les projections de la tangente.

Cette méthode est préférable dans le cas des surfaces de révolution, parce que la normale étant alors contenue dans le plan méridien qui passe par le point de contact et qui est perpendiculaire au plan tangent en ce point (115), toutes celles qui correspondent au même parallèle coupent l'axe de la surface en un même point, et sont par suite faciles à construire.

Nous mènerons donc la normale $e'r'$ à l'ellipse $a'b'$. En joignant le point r' où cette normale coupe $o'z'$ au point m', nous aurons la projection verticale de la normale menée au premier ellipsoïde par le point (m, m'); sa projection horizontale sera la droite mo.

Nous mènerons de même la normale $h's'$ à l'ellipse $p'q'g'h'$. En joignant le point s' où cette normale coupe $c'd'$ au point m', nous aurons la projection verticale de la normale menée au second ellipsoïde par le point (m, m'); sa projection horizontale (en projetant s' en s sur cd) sera ms.

En menant la droite $r's'$, on aura la projection verticale de la trace du plan normal au point (m, m') sur le plan du méri-

dien commun aux deux surfaces ; et comme ce méridien est parallèle au plan vertical, la droite $(r's')$ fera connaître la direction de la trace verticale du plan normal. La perpendiculaire $m't'$ à $r's'$ sera donc la projection verticale de la tangente cherchée.

Pour avoir sa projection horizontale, on pourra déterminer la trace horizontale du plan normal ; ou bien, s'il est nécessaire de resserrer les constructions dans un cadre étroit, on pourra construire la droite d'intersection des deux normales avec un plan R convenablement choisi et parallèle au plan horizontal. Ayant obtenu la projection horizontale $\alpha\beta$ de cette droite (nécessairement parallèle à la trace horizontale du plan normal), on lui mènera la perpendiculaire mt, qui sera la projection horizontale de la tangente cherchée.

Aux points (p, p'), (q, q'), situés sur les contours apparents des deux ellipsoïdes relativement au plan vertical, les plans tangents aux deux surfaces sont perpendiculaires au plan vertical. Par suite, les tangentes en ces points à la courbe d'intersection *de l'espace* sont perpendiculaires au plan vertical. En projection horizontale, elles sont donc perpendiculaires à LT; en projection verticale, elles se réduisent à un point.

Cependant, la construction indiquée pour trouver la courbe $p'm'q'$ pourrait se continuer au delà de la partie de cette courbe qui répond à l'intersection des deux ellipsoïdes proposés ; et cette courbe, *considérée alors comme courbe plane indépendante de la question (traitée dans l'espace) qui y a conduit*, admet en p' et en q' des tangentes qu'il peut être utile de construire. La méthode du plan normal a l'avantage d'être immédiatement applicable à ce cas limite, parce qu'elle n'exige que l'emploi de lignes tracées dans le plan même de la courbe $p'm'q'$.

159. *Remarques.* — I. Les deux surfaces de révolution dont on vient de chercher l'intersection étant du second degré, la courbe $p'm'q'$ sera elle-même une courbe de second degré (*Géom. analyt.*, 392).

II. Si l'on voulait construire la tangente à la courbe d'intersection en suivant la méthode *du plan tangent*, on déterminerait d'abord facilement le plan tangent au premier ellipsoïde (116). Pour obtenir ensuite le plan tangent au second ellipsoïde, on mènerait la normale à cette surface au point considéré (m, m'). En conduisant par le point (m, m') un plan perpendiculaire à cette normale, on aurait le second plan tangent.

160. Second cas : *Intersection d'un cône de révolution et d'une sphère* (*fig.* 110).

Le cône, dont l'axe est supposé vertical, est donné par sa base *ab* sur le plan horizontal et par son sommet (*s*, *s'*). Les génératrices du cône parallèles au plan vertical sont donc les droites (*sa*, *s' a'*), (*sb*, *s' b'*).

Le centre de la sphère proposée est au point milieu (*o*, *o'*) de la droite (*sa*, *s' a'*), et le rayon de cette sphère est égal à la moitié du rayon de la base du cône. Son contour apparent sur le plan horizontal sera par suite la circonférence décrite sur *sa* comme diamètre ; son contour apparent sur le plan vertical sera une circonférence égale de centre *o'*. On pourra prendre pour axe de cette sphère la verticale dont le pied est en *o* et qui se projette sur l'autre plan de projection suivant la perpendiculaire $\omega o'$ à LT.

Les deux surfaces considérées ayant ainsi leurs axes *parallèles,* nous les couperons par des plans auxiliaires horizontaux. L'un de ces plans R coupera la sphère suivant un parallèle dont la projection verticale sera la corde *e' f'* et dont la projection horizontale sera la circonférence de diamètre *ef*; il coupera le cône suivant un autre parallèle dont la projection verticale $\varepsilon' \varphi'$ se confondra en direction avec *e' f'* et dont la projection horizontale sera la circonférence de diamètre $\varepsilon\varphi$. Les deux circonférences *ef* et $\varepsilon\varphi$ se couperont en deux points *m* et *n*, dont la projection verticale commune sera le point *m'*; et les deux points (*m*, *m'*), (*n*, *n'*), appartiendront à l'intersection cherchée. On en construira ainsi autant qu'on voudra.

Il est commode de prendre les parallèles de la sphère de part et d'autre et à égale distance de son équateur : ils se confondent alors deux à deux en projection horizontale.

Les points remarquables de la courbe d'intersection s'obtiennent comme dans le premier cas (158).

Les points (*k*, *k'*), (*l*, *l'*) de l'intersection, qui sont situés sur l'équateur de la sphère, font connaître les points qui séparent, sur la projection horizontale, la partie visible de la partie invisible.

Aux points *k* et *l*, la projection horizontale de l'intersection est tangente à la projection horizontale de l'équateur, parce que le plan tangent à la sphère aux points (*k*, *k'*) et (*l*, *l'*) est perpendiculaire au plan horizontal.

Les points *c'* et *d'* où la projection verticale du méridien de la sphère coupe la projection verticale du méridien du cône, appartiennent à la projection verticale de l'intersection, et se projettent horizontalement en *c* et en *d*. Ces points sont des point limites. En ces points, les plans tangents aux deux surfaces étant perpendiculaires au plan vertical, la tangente à l'intersection est elle-même perpendiculaire à ce plan, c'est-

à-dire qu'elle se réduit à un point en projection verticale et qu'elle est perpendiculaire à LT en projection horizontale.

Pour mener la tangente en un point (m, m') de l'intersection, on pourra encore avoir recours à la méthode du plan normal.

La normale à la sphère passant toujours par son centre, le pied constant des normales sur l'axe de la sphère sera le point (o, o').

Le point m' étant situé sur la droite $\varepsilon'\varphi'$, on mènera par le point φ' la perpendiculaire $\varphi' i'$ à $s'a'$ jusqu'à la rencontre de la droite $s's$. Le point i' sera la projection verticale du point où toutes les normales menées au cône suivant les différents points du parallèle $\varepsilon'\varphi'$ rencontrent l'axe de la surface. On n'aura donc (158) qu'à tracer la perpendiculaire $m' t'$ à la droite $i' o'$ pour avoir la projection verticale de la tangente demandée.

Quant à sa projection horizontale, on pourra construire la trace horizontale H^N du plan des deux normales, et abaisser du point m une perpendiculaire mt sur H^N.

Si les dimensions de l'épure l'exigent, on devra (158) construire, au lieu de H^N, la projection horizontale de l'intersection du plan normal avec un plan parallèle au plan horizontal (celui de l'équateur de la sphère).

On a indiqué sur l'épure les deux procédés.

On trouve facilement les tangentes à la courbe plane $c' m' d'$ aux points c' et d'.

161. *Remarque générale sur les intersections de surfaces.* Nous avons exposé dans ce chapitre les simplifications les plus remarquables qu'on ait à appliquer dans la recherche de l'intersection de deux surfaces : elles guideront suffisamment dans les autres cas qui pourront se présenter.

Si l'on veut, par exemple, déterminer l'intersection d'un cône quelconque et d'une sphère ayant son centre au sommet du cône, les surfaces auxiliaires devront être des plans menés par le sommet du cône : chacun d'eux coupera le cône suivant des génératrices et la sphère suivant une circonférence de grand cercle. Il sera d'ailleurs naturel de prendre ces plans verticaux, pour pouvoir les faire tourner autour du diamètre vertical de la sphère et obtenir en rabattement les points d'intersection des génératrices et de la circonférence de grand cercle.

Du reste, on peut toujours trouver l'intersection de deux surfaces quelles qu'elles soient, en les coupant par des plans horizontaux. Seulement, dans les cas compliqués, on est obligé de construire par points les sections déterminées sur les deux surfaces par chaque plan auxiliaire.

On peut d'ailleurs, dans certains cas, simplifier la question *par transformation de surface.*

Si l'on a à chercher, par exemple, l'intersection d'une sphère et d'un cylindre à base quelconque, un plan horizontal coupera la sphère suivant un cercle, le cylindre suivant une courbe qu'il faudrait construire par points. Si l'on suppose alors un second cylindre dont les génératrices soient parallèles à celles du premier et qui s'appuie sur le cercle déterminé dans la sphère par le plan horizontal considéré, ce second cylindre aura pour base un cercle facile à construire. Ce cercle coupera la base du premier cylindre en des points qui feront connaître les génératrices communes aux deux cylindres, lesquelles passent nécessairement par les points de l'intersection demandée situés dans le plan horizontal auxiliaire.

162. *Remarque relative aux ombres et à la perspective.*

Supposons un point lumineux O et un corps opaque dont nous désignerons la surface par C. Si l'on imagine (118) un cône dont le sommet soit en O et qui soit circonscrit à la surface C suivant la courbe A, toute la partie de cette surface comprise dans l'intérieur du cône et regardant son sommet O sera *éclairée;* toute la partie opposée sera au contraire *dans l'ombre.* La courbe A est *la ligne de séparation d'ombre et de lumière* sur le corps C. Derrière ce corps, le prolongement *du cône lumineux* au delà de la courbe A constitue l'ombre indéfinie projetée par le corps C dans l'espace. Si une surface C′ est plongée dans cette ombre, elle se trouve privée de la lumière qui émane du point O. Si la surface C′ est coupée par le prolongement du cône lumineux au delà de la courbe A, suivant une courbe A′, cette courbe A′ limite *l'ombre portée de la surface* C *sur la surface* C′.

Si l'on considère seulement la lumière du soleil, comme cela a lieu dans la pratique, le point lumineux O s'éloigne à l'infini, et le cône lumineux devient un cylindre lumineux dont les génératrices sont parallèles à la direction assignée aux rayons solaires.

On voit que chaque question d'ombre reviendra à une question théorique concernant les plans tangents aux surfaces et leurs intersections mutuelles.

Par exemple, chercher sur une sphère opaque éclairée la ligne de séparation d'ombre et de lumière, et l'ombre portée de cette sphère sur un plan horizontal, c'est construire les projections de la courbe de contact de la sphère avec un cylindre circonscrit dont la direction des génératrices est donnée; c'est ensuite déterminer la trace horizontale de ce cylindre.

Tout ce qu'on vient de dire relativement aux ombres peut se répéter pour la *perspective.*

Le sommet O du cône, circonscrit à la surface C considérée suivant la courbe A, est alors *le point de vue* ou le point où l'on se suppose placé; la ligne de contact A est *le contour apparent* de la surface C pour l'observateur placé au point O; *la perspective* du corps C est l'intersection *du cône visuel* avec une autre surface C′ (ordinairement plane) qu'on appelle *tableau*, et qui est en général située entre le point de vue O et le corps C.

Si le point de vue s'éloigne à l'infini et si le tableau est supposé perpendiculaire aux génératrices du cylindre visuel, la perspective du corps C sur le tableau se confond avec sa projection orthogonale sur ce plan (102).

QUESTIONS PROPOSEES.

I. Mener à un cône un plan tangent qui passe par un point extérieur donné. (Méthode des plans cotés.)

II. Étant donnée la projection d'un point d'une surface sphérique, trouver sa cote.

III. Mener à une sphère donnée un plan tangent parallèle à un plan donné. (Méthode des plans cotés.)

IV. On donne une droite et une sphère : mener par la droite un plan qui coupe la sphère suivant un cercle tangent à un autre cercle donné de cette sphère.

V. Construire les plans tangents communs à une sphère et à un cône de révolution donnés.

VI. Par un point extérieur, mener à une surface de révolution un plan tangent à cette surface en un point d'un parallèle *ou* d'un méridien donné. On résoudra ce problème dans le cas de l'ellipsoïde et de la surface gauche de révolution. (*Voir* Note IV.)

VII. Circonscrire à une sphère *ou* à un ellipsoïde de révolution un cône de sommet donné.

VIII. Mener à une surface de révolution, parallèlement à une droite donnée, un plan qui soit tangent à la surface suivant un parallèle *ou* un méridien donné. (*Voir* Note IV.)

IX. Circonscrire à une sphère *ou* à un ellipsoïde de révolution un cylindre dont la direction des génératrices est donnée.

X. Mener à une sphère, par un point extérieur, un plan tangent qui la touche suivant un parallèle *ou* un méridien donné. (Méthode des plans cotés.)

XI. Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à un plan donné. On résoudra ce problème dans le cas de l'ellipsoïde et de la surface gauche de révolution. (*Voir* Note IV.)

XII. On donne un cylindre vertical dont la base sur le plan horizontal est un cercle. On coupe ce cylindre par un plan perpendiculaire au plan vertical et faisant un angle de 45° avec le plan horizontal; on prend l'intersection obtenue pour base d'un nouveau cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de cette base; enfin, un point de la nouvelle surface cylindrique est donné par sa projection horizontale. On demande: 1° de trouver la projection verticale de ce point; 2° de mener par ce même point le plan tangent à la seconde surface cylindrique. (*Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique*, 1856.)

XIII. Un plan est donné par ses traces; dans ce plan, un cercle est donné par son rayon et la projection horizontale de son centre. Ce cercle étant pris pour base d'un cylindre droit, on propose de mener, par un point donné, un plan tangent à ce cylindre. (*Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique*, 1859.)

XIV. On donne : 1° un plan P passant par la ligne de terre et faisant un angle de 45° avec le plan horizontal ; 2° un point a du plan horizontal situé à 5 centimètres de la ligne de terre. On demande les traces horizontale et verticale d'un cône de révolution ayant pour sommet le point A du plan P qui se projette horizontalement en a, pour axe la perpendiculaire élevée en A au plan P, et pour demi-angle au sommet un angle de 40°. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1861.)

XV. On donne: 1° un plan passant par la ligne de terre et faisant un angle de 60° avec le plan horizontal ; 2° un point a situé dans le plan horizontal à 6 centimètres de la ligne de terre. On demande les traces horizontale et verticale d'un cylindre de révolution ayant pour axe la perpendiculaire élevée au plan donné par le point de ce plan qui se projette horizontalement en a, et un rayon de 3 centimètres. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1861.)

XVI. On donne: 1° une droite située dans le plan horizontal et faisant un angle de 45° avec la ligne de terre ; 2° un point m du plan horizontal, pris à volonté entre la droite précédente et la ligne de terre. La droite, en tournant autour de la ligne de terre, engendre un cône. On demande: 1° de mener à ce cône un plan tangent par l'un des deux points de la surface qui se projette horizontalement en m; 2° de construire les projections de l'intersection de ce plan tangent et d'un cylindre de révolution ayant la ligne de terre pour axe et un rayon de 3 centimètres. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1861.)

XVII. Deux cercles situés dans le plan horizontal ont leurs centres sur la ligne de terre à 9 centimètres l'un de l'autre, et des rayons respectivement égaux à 3 et à 4 centimètres. On mène à ces cercles deux tangentes communes, l'une *intérieure* A, l'autre *extérieure* B. La tangente A, en tournant autour de la ligne de terre, engendre un cône. On demande la projection verticale et la vraie grandeur de la section faite dans ce cône par le plan vertical qui a la tangente B pour trace horizontale. On tra-

cera les asymptotes de la section, si elle en admet. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1861.)

XVIII. On donne une sphère par son centre et son rayon. On fait passer un plan par la ligne de terre et le centre de cette sphère, et l'on demande les projections de la courbe d'intersection des deux surfaces. Tangente en un point quelconque. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1861.)

XIX. On donne : 1° une sphère de 4 centimètres de rayon, tangente aux deux plans de projection ; 2° le plan qui passe par les deux points de la sphère diamétralement opposés à ses points de contact avec les plans de projection, et dont la trace horizontale fait un angle de 60° avec la ligne de terre. On demande les projections et la vraie grandeur de la section déterminée par ce plan dans la sphère, ainsi que la tangente en un point de cette section. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1861.)

XX. Trouver l'intersection de la surface engendrée par la révolution d'une ellipse autour d'une droite située dans son plan et parallèle à son petit axe, et d'un plan parallèle à la ligne de terre. Construire les projections de la courbe d'intersection, en ayant soin de distinguer par la ponctuation les parties vues des parties cachées, et déterminer les projections d'une tangente à cette courbe. (*Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique*, 1861.)

XXI. On donne : 1° un tétraèdre régulier de 7 centimètres de côté, reposant sur le plan horizontal par une de ses faces : l'une des arêtes de cette face est perpendiculaire à la ligne de terre ; 2° un cylindre de révolution de 3 centimètres de rayon, dont l'axe situé dans le plan horizontal et parallèle à la ligne de terre passe par la projection horizontale du sommet du tétraèdre. Construire les projections des courbes d'intersection du cylindre et des faces du tétraèdre. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1861.)

XXII. Un cylindre de révolution dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre repose sur le plan horizontal. Trouver son intersection avec un cône vertical de révolution qui a son sommet sur l'axe du cylindre et qui a pour trace horizontale un cercle de même rayon que la section droite de ce cylindre. Construire la tangente en un point de la courbe d'intersection. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1862.)

XXIII. Trouver l'intersection d'un cône et d'un cylindre définis de la manière suivante :

Le cylindre est droit, sa base est un cercle donné dans le plan horizontal. Le cône a son sommet sur l'axe du cylindre ; sa base est une hyperbole tangente à la base du cylindre et ayant pour asymptotes deux diamètres rectangulaires de cette base, l'un parallèle à la ligne de terre.

On mènera la tangente en un point de la courbe d'intersection, et l'on ponctuera la partie cachée de cette courbe en supposant que le cylindre existe seul. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale*, 1862.)

XXIV. Un cylindre horizontal plein, terminé d'un côté au plan vertical de projection, et de l'autre à un plan vertical parallèle, rencontre un

cône dont la base est posée sur le plan horizontal. On demande : 1° de construire les projections de l'intersection des deux surfaces ; 2° de faire le développement de la surface du cylindre avec les transformées des bases et de l'intersection ; 3° de construire les projections d'une tangente à l'intersection et la tangente au point correspondant de la transformée de cette courbe.

On supposera que le cône est enlevé. Les bases du cylindre seront des cercles, celle du cône sera une ellipse. Le cylindre ne sera pas perpendiculaire au plan vertical. (*Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique,* 1860.)

XXV. Un tronc de cône droit à bases parallèles repose sur le plan horizontal par sa grande base qui est un cercle de 5 centimètres de rayon. La hauteur du tronc est de 10 centimètres, et sa petite base a 2 centimètres de rayon. Ce tronc de cône est surmonté d'un cylindre droit ayant même axe que le tronc, un rayon de 5 centimètres et 2 centimètres de hauteur.

Dans un plan, passant par l'axe commun des corps considérés et faisant un angle de 45° avec le plan vertical, on prend un point S situé à 12 centimètres de cet axe et à 20 centimètres du plan horizontal.

Cela posé, on propose de construire les projections de l'intersection du tronc de cône avec un cône oblique ayant pour sommet le point S, et pour base la base inférieure du cylindre qui surmonte le cône tronqué.

On veut aussi connaître : 1° la tangente en un point quelconque de l'intersection ; 2° la tangente en un point situé dans un plan tangent mené au tronc de cône par le sommet du cône oblique ; 3° la tangente en un des points pour lesquels elle a une direction horizontale. (*Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique,* 1858.)

XXVI. Construire les traces et les intersections, en vraie grandeur, de deux cylindres de révolution, dont les axes contenus dans un même plan vertical parallèle au plan vertical de projection se rencontrent en faisant tous deux un angle de 30° avec le plan horizontal. On sait d'ailleurs que le diamètre de la section droite de chaque cylindre est de 8 centimètres.

On construira la tangente en un point de chaque intersection, et on la reportera sur le rabattement correspondant. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale,* 1862.)

XXVII. Intersection de deux cônes A et B définis de la manière suivante :

Le cône A est de révolution ; son sommet est dans le plan horizontal, son axe est vertical, et le demi-angle au sommet y est égal à 30°.

Le cône B a pour directrice une section horizontale quelconque du cône A ; son sommet est pris arbitrairement dans l'espace, toutefois au-dessus du plan de sa directrice et extérieurement au cône A.

On demande les projections de l'intersection et la tangente en un point de cette courbe. Pour la ponctuation, on supposera que le cône A existe seul. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale,* 1862.)

XXVIII. Trouver l'intersection d'un cylindre et d'une sphère définis de la manière suivante :

Le cylindre est droit ; sa base est un cercle AB donné sur le plan horizontal (on suppose le diamètre AB parallèle à la ligne de terre). La sphère

a son rayon égal au diamètre du cylindre, et son centre est sur l'arête du cylindre dont le pied C est à 45° de l'extrémité B du diamètre AB ; elle repose d'ailleurs sur le plan horizontal.

On mènera la tangente en un point quelconque de la courbe d'intersection, et l'on en ponctuera la partie cachée en supposant que le cylindre existe seul. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale,* 1862.)

XXIX. On donne un cône droit de révolution dont la base est posée sur le plan horizontal et une sphère dont le centre est situé sur une génératrice du cône ayant pour projection une droite faisant un angle de 45° avec la ligne de terre.

On demande : 1° de déterminer l'intersection des deux surfaces par ses projections; 2° de développer la surface conique et de tracer sur le développement l'intersection des deux surfaces ; 3° de construire une tangente à la courbe développée.

Le diamètre de la base du cône est de 12 centimètres, sa hauteur est de 14 centimètres ; le diamètre de la sphère est de 10 centimètres, la hauteur de son centre au-dessus du plan horizontal est de 6 centimètres. (*Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique,* 1862.)

XXX. Intersection d'une sphère et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, définis de la manière suivante :

L'axe de l'hyperboloïde est vertical, la plus courte distance de la génératrice à cet axe est de 15 millimètres, l'angle que fait la génératrice avec l'axe est de 45°.

La sphère passe par le centre du cercle de gorge, elle a son centre sur l'hyperboloïde, à 3 centimètres du plan du cercle de gorge et dans le plan méridien parallèle au plan vertical de projection.

On construira la tangente en un point de la courbe d'intersection. (*Concours d'admission à l'Ecole Centrale,* 1862.)

XXXI. On sait qu'une niche est formée d'un demi-cylindre vertical, surmonté d'un quart de sphère ayant même centre et même rayon que sa base supérieure : trouver l'ombre portée du contour de la niche sur sa propre surface. (*Voir* le n° 162.)

NOTES.

NOTE I.

DES COURBES D'ERREUR.

Nous avons déjà vu (*Géom. analyt.*, 248) qu'on pouvait déterminer les racines réelles d'une équation $F(x) = 0$, en construisant la courbe $y = F(x)$, et en déterminant les abscisses des points où elle coupe l'axe des x.

Cette méthode peut être généralisée. Un problème quelconque étant proposé, il suffit de donner à l'inconnue différentes valeurs arbitraires et de chercher, soit numériquement, soit graphiquement, les erreurs qui en résultent, eu égard aux conditions du problème. Pour que le problème soit effectivement résolu, il faut qu'il n'y ait pas d'erreur ou *que cette erreur soit nulle*. Par suite, on regardera les erreurs commises comme les ordonnées y d'une courbe dont les abscisses x seront les valeurs correspondantes de l'inconnue. On pourra ainsi construire une courbe continue ou *courbe des erreurs* dont les points de rencontre avec l'axe des abscisses feront nécessairement connaître les solutions demandées.

Si deux erreurs successives sont, l'une par excès, l'autre par défaut, c'est-à-dire l'une positive, l'autre négative, la courbe entre les deux points correspondants coupera forcément l'axe des x, et l'on pourra approcher autant qu'on voudra de la véritable valeur de l'inconnue entre les abscisses des points ainsi obtenus, en resserrant les limites considérées.

Cette manière de résoudre les questions par des courbes d'erreur est, comme le dit Lagrange (*), auquel nous empruntons les considérations et l'exemple qui suivent, « une des plus utiles qu'on ait imaginées; » elle est d'un usage continuel en astronomie, où les solutions directes » seraient trop difficiles et souvent impossibles; elle peut servir à ré» soudre des problèmes importants de Géométrie et de Mécanique, et » même de Physique : c'est, à proprement parler, la règle de fausse posi» tion (ou Méthode des Hypothèses, voir l'*Arithmétique*, 275) prise dans » le sens le plus général et rendue applicable à toutes les questions où » il y a une inconnue à déterminer. »

Supposons qu'on veuille trouver le rayon de la circonférence dans laquelle on pourra inscrire exactement un polygone dont tous les côtés sont donnés.

On décrira à volonté une circonférence, et l'on y inscrira les côtés

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, VII^e et VIII^e Cahiers, page 270.

donnés en les plaçant à la suite les uns des autres. Si le polygone se ferme de lui-même, c'est-à-dire si le dernier côté se termine au point où commence le premier côté, le problème sera résolu. En général, on aura (relativement au rayon supposé) une erreur en plus ou en moins, et le dernier sommet du polygone inscrit tombera au delà ou en deçà de son premier sommet; de sorte que la corde qui unira ces deux sommets *ne sera pas nulle*.

Deux axes rectangulaires étant tracés, on portera alors le rayon choisi en abscisse, et en ordonnée la corde qui représente ou mesure l'erreur que ce choix a entraînée. En variant le rayon adopté, on obtiendra d'autres cordes ou d'autres ordonnées, et l'on pourra tracer une courbe dont le point d'intersection avec l'axe des abscisses fera connaître le rayon cherché. Pour un rayon trop petit, on regardera l'erreur comme positive; elle sera négative pour un rayon trop grand.

NOTE II.

THÉORÈME DE DANDELIN.

Étude géométrique des sections planes d'un cylindre ou d'un cône circulaire droit.

Un plan quelconque coupe un cylindre circulaire droit suivant une ellipse (*Géom anal., fig.* 161).

Supposons que la section obtenue soit la courbe AMA'. Menons par l'axe du cylindre un plan perpendiculaire au plan sécant. Ce plan coupera le plan sécant suivant la droite AA', et le cylindre suivant les deux génératrices AC, A'C'. Dans le plan *méridien* considéré, construisons les deux circonférences OC, O'C', tangentes à la fois à la droite AA' et aux génératrices AC, A'C'. Désignons par F et par F' leurs points de contact avec la droite AA'. Si l'on fait tourner le plan méridien autour de l'axe OO' du cylindre, les deux circonférences engendreront deux sphères, tangentes au cylindre le long des *parallèles* OC, O'C', et qui toucheront le plan sécant aux points F et F'. En effet, les droites OF et O'F' sont menées dans le plan méridien, perpendiculairement à son intersection AA' avec le plan sécant; donc elles sont perpendiculaires à ce plan. Les rayons des deux sphères inscrites étant nécessairement égaux, on a de plus

$$AF = A'F'.$$

Ceci posé, prenons un point M quelconque sur la courbe déterminée par le plan sécant; joignons-le aux points F et F', et menons la génératrice du cylindre qui passe par ce même point : elle coupera en G et en G' les deux parallèles OC et O'C' de la surface. D'après les propriétés connues du plan tangent à la sphère, MF sera une tangente à la sphère OC, MF' une tangente à la sphère O'C'. La génératrice GG' sera respectivement tangente aux deux sphères en G et en G'. Les tangentes menées d'un même point à une même sphère étant égales, on aura

$$MF = MG, \quad MF' = MG'.$$

d'où

$$MF + MF' = GG' = CB = CA + AB = AF + AF' = AA'.$$

La section obtenue est donc une ellipse ayant AA' *pour grand axe et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Si l'on prolonge les plans des circonférences CC et O'C' jusqu'à la rencontre du plan sécant, on obtiendra des droites qui passeront par les points D et D' et qui seront perpendiculaires au plan méridien considéré (*Géom.*, 184). Ces droites seront précisément les *directrices* de l'ellipse AMA' (*Géom. analyt.*, 69).

En effet, menons le parallèle de la surface qui passe au point M : il coupera le plan sécant suivant l'ordonnée MP de ce point. Or on a, en considérant le foyer F et en vertu de la similitude des triangles ALP, ACD,

$$\frac{MF}{PD} = \frac{MG}{PD} = \frac{LC}{PD} = \frac{AC}{AD} = \text{constante}.$$

On obtiendrait un résultat analogue en considérant le foyer F'.

On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cylindre circulaire droit (*fig.* 161).

Car, puisque

$$GG' = CB = AA',$$

on a, d'après les égalités AC = AF et A'C' = A'F',

$$FF' = AH.$$

Dans le triangle rectangle AA'H, on connaît donc alors l'hypoténuse et un côté de l'angle droit. Une fois ce triangle construit, on n'aura qu'à mener une perpendiculaire sur le milieu de A'H. Le cylindre engendré par le côté AH tournant autour de cet axe, sera coupé suivant l'ellipse donnée par un plan conduit perpendiculairement à celui du triangle AA'H et passant par l'hypoténuse AA'.

On voit qu'un cercle (base du cylindre) peut être regardé comme la projection d'une infinité d'ellipses (tracées sur ce cylindre), mais qu'un seul cercle correspond en projection à une ellipse donnée (*Géom. analyt.*, 163).

Considérons maintenant un cône circulaire droit.

1° *Supposons que le plan sécant rencontre toutes les génératrices du cône sur une même nappe* (*Géom. analyt.*, *fig.* 162). Menons le plan méridien perpendiculaire au plan sécant : il coupera le cône suivant les génératrices SA et SA', le plan sécant suivant la droite AA'. Dans le plan méridien considéré, construisons les deux circonférences O et O' tangentes à la fois à la droite AA' et aux génératrices SA, SA'. Désignons par F et par F' leurs points de contact avec la droite AA'. Si l'on fait tourner le plan méridien autour de l'axe OO' du cône, ces deux circonférences engendreront deux sphères tangentes au cône le long des parallèles BC, B'C', et qui toucheront le plan sécant aux points F et F'.

Ceci posé, prenons un point M quelconque sur la courbe déterminée par le plan sécant. Joignons-le aux points F et F', et menons la génératrice du cône qui passe par ce même point : elle coupera en G et en G'

les deux parallèles BC et B'C' de la surface. Les propriétés connues du plan tangent et des tangentes à la sphère permettent de poser

$$MF = MG, \quad MF' = MG',$$

d'où

$$MF + MF' = GG' = CC' = BB' = \text{constante}.$$

Or on a

$$CC' = CA' + C'A' = A'F + A'F' = 2A'F' + FF';$$

de même

$$BB' = BA + AB' = AF + AF' = 2AF + FF'.$$

Il en résulte

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad MF + MF' = AA'.$$

La section obtenue est donc une ellipse ayant AA' *pour grand axe et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Si l'on prolonge les plans des parallèles BC, B'C', jusqu'à la rencontre du plan sécant, on obtiendra comme intersections des droites qui passeront par les points D et D' et seront perpendiculaires au plan méridien considéré. Ces droites seront précisément les *directrices* de l'ellipse AMA'.

En effet, menons le parallèle de la surface qui passe au point M : il coupera le plan sécant suivant l'ordonnée MP de ce point. Or on a, en considérant le foyer F et en vertu de la similitude des triangles ALP, ABD,

$$\frac{MF}{PD} = \frac{MG}{PD} = \frac{LB}{PD} = \frac{AB}{AD} = \text{constante}.$$

On obtiendrait un résultat analogue en considérant le foyer F'.

On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cône circulaire droit aussi donné (*fig.* 162).

Car, puisque

$$GG' = BB' = AA',$$

on a, d'après les égalités AB = AF et A'C' = B'H = A'F',

$$FF' = AH.$$

Dans le triangle AA'H, on connaît donc deux côtés et l'angle opposé au plus grand d'entre eux (l'angle AHA' est le complément du demi-angle du cône) : ce triangle sera donc complétement déterminé (*Géom.*, 74). Une fois qu'on l'aura construit, on élèvera une perpendiculaire sur le milieu de A'H : le cône engendré par le côté AH tournant autour de cet axe, sera coupé suivant l'ellipse donnée par un plan conduit perpendiculairement à celui du triangle AA'H et passant par la droite AA'.

2° *Supposons que le plan sécant rencontre les deux nappes du cône* (*Géom. analyt.*, *fig.* 163).

En opérant comme dans le cas précédent, on aura

$$MF' - MF = MG' - MG = GG' = CC' = BB' = \text{constante}.$$

Or

$$CC' = AC' - AC = AF' - AF = AA' + A'F' - AF$$

et

$$BB' = BA' - A'B' = A'F - A'F' = AA' + AF - A'F'.$$

Il en résulte

$$A'F' - AF = AF - A'F \quad \text{ou} \quad AF = A'F'$$

et, par suite,

$$MF' - MF = AA'.$$

La section obtenue est donc une hyperbole ayant AA' *pour axe transverse et les points* F *et* F' *pour foyers.*

On en trouverait les *directrices* en suivant la même marche que dans le cas de la section elliptique.

On ne peut pas toujours placer une hyperbole donnée sur un cône circulaire droit aussi donné (*fig.* 163).

Car, puisque

$$GG' = CC' = AA',$$

on a, d'après les égalités $AC = AF$ et $C'H = B'A' = A'F$,

$$FF' = AH.$$

Dans le triangle AA'H, on connaît donc deux côtés et l'angle opposé au plus petit d'entre eux (l'angle AHA' est le complément du demi-angle du cône) : ce triangle n'est donc pas complétement déterminé (*Géom.*, 74), et pour qu'il soit possible, il faut qu'on ait

$$2a > 2c\cos\beta,$$

en posant $AA' = 2a$, $FF' = 2c$, et en appelant 2β l'angle du cône. La condition trouvée revient à

$$\cos\beta < \frac{a}{c}.$$

Or $\frac{a}{c} = \cos\theta$, en appelant 2θ l'angle des asymptotes de l'hyperbole considérée. On arrive donc finalement à la condition

$$\cos\beta < \cos\theta \quad \text{ou} \quad 2\beta > 2\theta.$$

Ainsi, *pour pouvoir placer une hyperbole donnée sur un cône circulaire droit donné, il faut que l'angle du cône soit supérieur à l'angle des asymptotes de l'hyperbole* (*Géom. analyt.*, 222).

3° *Supposons le plan sécant parallèle au plan tangent mené au cône par la génératrice* SL' (*Géom. analyt, fig.* 164).

Le plan sécant sera alors parallèle à cette génératrice et perpendiculaire au plan méridien L'SL qu'il coupera suivant la droite AP parallèle à SL' (*Géom. descriptive*). Dans le plan méridien considéré, construisons une circonférence O tangente aux trois droites SL', SL et AP. Désignons par C, B, F, les trois points de contact. Si l'on fait tourner le plan méridien autour de l'axe SO du cône, la circonférence O engendrera une sphère tangente au cône le long du parallèle BC et qui touchera le plan sécant au point F.

Ceci posé, prenons un point M quelconque sur la courbe déterminée par le plan sécant. Joignons-le au point F, et menons la génératrice du cône qui y passe : elle coupera en G le parallèle BC de la surface. On pourra alors écrire

$$MF - MG = BL - AB + AL.$$

D'ailleurs l'intersection du parallèle BC et du plan sécant est une droite perpendiculaire au plan méridien LSL', et qui perce ce plan au point D de rencontre des droites BC et AP. Au point M de la surface conique correspond le parallèle LL', et l'intersection de ce parallèle avec le plan sécant est l'ordonnée MP du point M. La distance du point M à la droite menée dans le plan sécant perpendiculairement à AP par le point D, est donc PD.

Mais

$$PD = AD + AP;$$

et les triangles ABD, PAL, étant évidemment isocèles d'après le parallélisme des droites AP et SL', on a

$$AD = AB \quad \text{et} \quad AP = AL,$$

c'est-à-dire

$$MF = PD.$$

La section obtenue est donc une parabole ayant le point F *pour foyer, la droite élevée en* D *perpendiculairement à* AP *pour directrice, et* 4 AD *pour paramètre.*

On peut toujours placer une parabole donnée sur un cône circulaire droit donné (*fig.* 164).

Car la droite OA est perpendiculaire à SO, puisque AP est parallèle à SL'. Dans le triangle rectangle OBA, on connaît donc le côté AB = AD (quart du paramètre de la parabole) et l'angle BAO (complément du demi-angle du cône). Ayant construit ce triangle et élevé OS perpendiculaire à OA, le cône engendré par la rotation du triangle SOA sera coupé suivant la parabole donnée, par le plan mené perpendiculairement à celui du triangle par la droite AP qui est telle, que l'angle SAO soit égal à l'angle OAP.

NOTE III.

COURBE DE CONTACT D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ AVEC UN CÔNE OU UN CYLINDRE CIRCONSCRIT.

Représentons par $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface proposée. Soient x', y', z', les coordonnées du sommet du cône circonscrit et x_1, y_1, z_1, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe suivant laquelle il touche la surface $F(x, y, z) = 0$.

L'équation du plan tangent à la surface du second ordre au point (x_1, y_1, z_1), est (*Géom. analyt.*, 346)

$$(x - x_1)F'_{x_1} + (y - y_1)F'_{y_1} + (z - z_1)F'_{z_1} = 0.$$

Ce plan, étant tangent à la fois au cône et à la surface F, contient le sommet du cône, et l'on a l'équation de condition

$$(x' - x_1)F'_{x_1} + (y' - y_1)F'_{y_1} + (z - z_1)F'_{z_1} = 0.$$

Le point (x_1, y_1, z_1) étant sur la surface F, on a de plus

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0. \qquad (2)$$

Les coordonnées de tous les points de la courbe de contact du cône et de la surface doivent satisfaire aux équations (1) et (2) : leur ensemble représente donc cette courbe. Mais l'équation (1) étant évidemment du premier degré en x_1, y_1, z_1, représente un plan, tandis que l'équation (2) est celle même de la surface F.

La courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface du second ordre provient donc aussi de l'intersection de cette surface par un plan : c'est une courbe plane.

En outre, *le plan de la courbe de contact est parallèle au plan diamétral de la surface qui est conjugué au diamètre passant par le sommet du cône, ou au plan tangent correspondant à ce diamètre* (*Géom. analyt.*, 385, 386).

En effet, s'il s'agit d'une surface à centre, on peut mettre son équation sous la forme

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = R.$$

L'équation (1) de la courbe de contact devient alors, en supprimant les indices,

$$P(x' - x)x + P'(y' - y)y + P''(z' - z)z = 0$$

ou

$$Pxx' + P'yy' + P''zz' = R,$$

en vertu de l'équation (2) de cette même courbe.

D'ailleurs, le diamètre passant par le sommet (x', y', z') du cône circonscrit a pour équations

$$x = \frac{x'}{z'}z, \qquad y = \frac{y'}{z'}z.$$

Le plan diamétral conjugué à ce diamètre aura donc pour équation (385)

$$Pxx' + P'yy' + P''zz' = 0;$$

ce qui vérifie la remarque énoncée dans le cas des surfaces à centre.

Pour les surfaces dénuées de centre, l'équation de la surface étant mise sous la forme

$$P'y^2 + P''z^2 + 2Qx = 0,$$

l'équation (1) de la courbe de contact deviendra, en supprimant les indices,

$$P'(y' - y)y + P''(z' - z)z + Q(x' - x) = 0$$

ou

$$P'yy' + P''zz' + Q(x + x') = 0,$$

en vertu de l'équation (2) de cette même courbe.

D'ailleurs, les équations du diamètre passant par le sommet (x', y', z') du cône circonscrit étant alors (*Géom. analyt.*, 384)

$$y = y', \qquad z = z',$$

ce diamètre percera la surface en un point dont les coordonnées seront

$$x_1 = -\frac{P'y'^2 + P''z'^2}{2Q}, \quad y_1 = y', \quad z_1 = z'.$$

L'équation du plan tangent mené en ce point sera donc

$$P'yy' + P''zz' + Q\left(x - \frac{P'y'^2 + P''z'^2}{2Q}\right) = 0;$$

ce qui vérifie encore la remarque énoncée, dans le cas des surfaces dénuées de centre.

S'il s'agit maintenant d'un cylindre circonscrit à une surface du second ordre, les équations de sa génératrice étant

$$x - x_1 = a(z - z_1),$$
$$y - y_1 = b(z - z_1),$$

on trouvera, en adoptant une marche analogue à celle qu'on vient d'indiquer ou en se reportant à ce que nous avons déjà dit précédemment (*Géom. analyt.*, 351), les équations suivantes pour la courbe de contact :

$$aF'_{x_1} + bF'_{y_1} + F'_{z_1} = 0, \tag{1}$$

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) représente évidemment le plan diamétral conjugué aux cordes de la surface qui sont parallèles aux génératrices du cylindre (*Géom. analyt.*, 361). *La courbe de contact est donc encore plane*, et l'on voit quelle est sa position sur la surface proposée.

NOTE IV.

SUR LES PLANS TANGENTS AUX SURFACES DE RÉVOLUTION.

Supposons d'abord qu'on veuille *mener à une surface de révolution un plan tangent qui la touche suivant un parallèle ou un méridien donné, et qui passe par un point extérieur donné.*

Si c'est un parallèle qui est donné, on peut concevoir ce parallèle comme la base d'un cône ayant pour génératrice la tangente menée en un point de ce parallèle au méridien qui y passe. Ce cône sera tangent à la surface de révolution tout le long du parallèle proposé, et la question sera ramenée à mener par le point extérieur donné un plan tangent au cône auxiliaire. Pour le faire simplement, on mène par le point donné un plan horizontal qui coupe le cône suivant un parallèle facile à construire. Les tangentes menées à ce parallèle par le point donné appar-

tiennent aux plans tangents cherchés qui sont dès lors déterminés, puisque chacun d'eux renferme en outre la génératrice correspondante du cône.

Si c'est un méridien qui est donné, on pourra le regarder comme la directrice d'un cylindre dont les génératrices (tangentes aux parallèles de la surface de révolution) seront perpendiculaires à son plan. En chaque point de ce méridien, la surface de révolution et le cylindre qui lui est circonscrit auront même plan tangent. La question sera alors ramenée à mener par le point extérieur donné un plan tangent au cylindre auxiliaire.

Dans le cas de la surface gauche de révolution, si c'est un parallèle qui est donné, on peut mener le plan tangent à la surface en un point quelconque de ce parallèle, puis le faire tourner autour de l'axe de la surface jusqu'à ce qu'il vienne passer par le point extérieur donné.

Si c'est un méridien qui est donné, comme le plan tangent cherché doit lui être perpendiculaire, on pourra construire immédiatement l'horizontale de ce plan qui passe par le point extérieur donné. De plus, les points où cette horizontale coupe le parallèle de la surface déterminé par le plan horizontal correspondant, sont aux plans tangents demandés et aux génératrices de la surface qu'ils contiennent. Il sera donc facile de déterminer ces génératrices, et par suite les plans tangents correspondants.

Pour mener à une surface de révolution, parallèlement à une droite donnée, un plan qui soit tangent à la surface suivant un parallèle ou un méridien donné, on emploiera le même procédé que dans le cas où le plan tangent doit passer par un point extérieur donné.

On substituera donc à la surface proposée un cône droit ayant même axe que la surface, et pour base le parallèle donné, ou un cylindre droit ayant pour base le méridien donné.

Dans le premier cas, on pourra d'ailleurs, s'il est nécessaire, transporter le cône auxiliaire parallèlement à lui-même, son sommet restant sur l'axe, sans altérer en rien les résultats. On pourra de même, dans le second cas, remplacer la droite donnée par une parallèle menée à cette droite par un point de l'axe de la surface considérée.

On peut encore demander de *mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à un plan donné.*

En conduisant par l'axe de la surface un plan perpendiculaire au plan donné, on aura le méridien sur lequel se trouve le point de contact du plan tangent cherché. Ce méridien coupera le plan donné suivant une droite parallèle à son intersection avec le plan tangent. Par suite, en menant au méridien des tangentes parallèles à la droite obtenue, on aura une droite de chacun des plans tangents demandés. Le problème sera donc résolu, puisque la direction de ces plans tangents est déterminée.

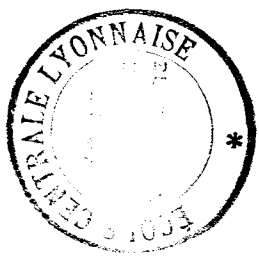
Dans le cas de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, on aura recours aux propriétés du cône asymptote.

Si l'on mène par le sommet de ce cône un plan parallèle au plan donné, ce plan coupera le cône suivant deux génératrices parallèles aux génératrices de la surface qui sont contenues dans les plans tangents cherchés. Ces génératrices seront donc faciles à déterminer, ainsi que les plans tangents correspondants.

Ce qui précède permettra de construire facilement la *courbe de contact d'une surface de révolution avec un cône circonscrit de sommet donné ou avec un cylindre circonscrit dont la direction des génératrices est connue.*

En effet, on mènera dans la surface proposée une suite de parallèles ou de méridiens, et on cherchera les points de contact des plans qui, touchant cette surface suivant ces parallèles ou ces méridiens, passent en même temps par le sommet du cône circonscrit ou sont parallèles aux génératrices du cylindre circonscrit.

La courbe demandée sera déterminée par les points de contact obtenus.



FIN DU TROISIÈME ET DERNIER VOLUME.