G. S. Mathey

RECUEIL

DE

PROBLÈMES.

RECUEIL

DE

PROBLÈMES

POSÉS DANS LES EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE
ET A L'ÉCOLE IMPÉRIALE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,
AINSI QUE DANS LES CONFÉRENCES DES PRINCIPALES ÉCOLES PRÉPARATOIRES.

PAR A. LONCHAMPT,
DIRECTEUR DES ÉTUDES A L'INSTITUTION POLYTECHNIQUE.

ÉNONCÉS ET SOLUTIONS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1865

CENTRALE LYONNAISE

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

AVERTISSEMENT.

Donner des Applications sur les différentes parties des Programmes imposés aux Aspirants à l'École impériale Polytechnique et à l'École impériale Centrale des Arts et Manufactures, et contribuer ainsi à leur faciliter une des épreuves les plus importantes de leurs examens, tel est le but que nous nous sommes proposé en composant cet Ouvrage. A cet effet, nous avons commencé par recueillir avec le plus grand soin les questions et les problèmes les plus intéressants qui ont été posés jusqu'à présent dans les examens d'admission à l'École Polytechnique et à l'École Centrale, ainsi que dans les conférences des principales Écoles préparatoires; nous les avons classés par ordre de matières, et nous les publions aujourd'hui avec les solutions raisonnées. A la suite des problèmes nous avons placé des spécimens de compositions écrites, données pour l'admission aux Écoles Polytechnique et Centrale.

Puisse cet Ouvrage rendre quelques services dans l'enseignement, et notre but sera atteint.

A. LONCHAMPT.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

ARITHMÉTIQUE.

PROBLÈMES DIVERS..... 3

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE Ier. — *Géométrie plane*..... 5
CHAPITRE II. — *Géométrie dans l'espace*..... 10

TROISIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

CHAPITRE Ier. — *Ligne droite et plan*..... 20
CHAPITRE II. — *Plans tangents*..... 21
CHAPITRE III. — *Intersections de surfaces*..... 25
CHAPITRE IV. — *Problèmes divers*..... 29

QUATRIÈME PARTIE.

ALGÈBRE.

CHAPITRE Ier. — *Problèmes sur les quatre opérations*..... 32
CHAPITRE II. — *Problèmes sur les équations du premier degré*..... 36
CHAPITRE III. — *Problèmes sur les équations du deuxième degré*..... 36
CHAPITRE IV. — *Problèmes sur les progressions et les séries*..... 44
CHAPITRE V. — *Formule du binôme et ses applications*..... 51
CHAPITRE VI. — *Exponentielles et logarithmes*..... 52
CHAPITRE VII. — *Dérivées*..... 54
CHAPITRE VIII. — *Théorie des équations*..... 72
CHAPITRE IX. — *Conditions de réalité de l'équation du troisième degré*..... 84
CHAPITRE X. — *Résolution des équations numériques*..... 98
CHAPITRE XI. — *Décomposition des fractions rationnelles*..... 108

CINQUIÈME PARTIE.

TRIGONOMÉTRIE.

CHAPITRE Ier. — *Problèmes sur les lignes trigonométriques* (269-320). 112
CHAPITRE II. — *Problèmes sur les résolutions des triangles* (321-334). 129
CHAPITRE III. — *Problèmes et applications diverses* (335-343)..... 135

SIXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE Ier. — *Constructions d'expressions algébriques* 145
CHAPITRE II. — *Ligne droite* 146
CHAPITRE III. — *Cercle* 162
§ 1. — Questions générales 162
§ 2. — Questions particulières 164
§ 3. — Lieux géométriques 166
CHAPITRE IV. — *Courbes du deuxième degré en général* 171
§ 1. — Constructions 171
§ 2. — Détermination des coefficients par des conditions particulières 177
§ 3. — Propriétés communes aux courbes du deuxième degré, quand certains coefficients varient seuls .. 183
§ 4. — Calcul des éléments des courbes du deuxième degré. 184
§ 5. — Simplification de l'équation du deuxième degré 187
§ 6. — Propriétés générales 188
§ 7. — Problèmes 194
§ 8. — Lieux géométriques 197
CHAPITRE V. — *Ellipse* 199
§ 1. — Propriétés générales 199
§ 2. — Problèmes 210
§ 3. — Lieux géométriques 227
CHAPITRE VI. — *Hyperbole* 239
§ 1. — Propriétés générales 239
§ 2. — Problèmes 243
§ 3. — Lieux géométriques 254
CHAPITRE VII. — *Parabole* 273
§ 1. — Propriétés générales 273
§ 2. — Problèmes 279
§ 3. — Lieux géométriques 285
CHAPITRE VIII. — *Complément relatif aux courbes du deuxième degré.* 296
§ 1. — Propriétés générales 296
§ 2. — Intersection des courbes du deuxième degré 300
§ 3. — Lieux géométriques 309
CHAPITRE IX. — *Sections coniques et cylindriques* 320
CHAPITRE X. — *Constructions des courbes en coordonnées rectilignes.* 323
§ 1. — Courbes algébriques 323
§ 2. — Courbes du quatrième degré 332
§ 3. — Courbes du cinquième degré 341
§ 4. — Courbes du sixième degré 345
§ 5. — Courbes transcendantes 347
CHAPITRE XI. — *Coordonnées polaires* 349
§ 1. — Questions diverses 349
§ 2. — Constructions de courbes 353

CHAPITRE XII. *Chapitre complémentaire* 369
§ 1. — Questions diverses 369
§ 2. — Lieux géométriques 377

SEPTIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE Ier. — *De la ligne droite et du plan* 394
CHAPITRE II. — *Surfaces du deuxième degré en général* 412
CHAPITRE III. — *Sphère* 439
CHAPITRE IV. — *Ellipsoïde* 443
CHAPITRE V. — *Hyperboloïde* 450
CHAPITRE VI. — *Cône du deuxième degré* 457
CHAPITRE VII. — *Paraboloïde* 467
CHAPITRE VIII. — *Surfaces cylindriques et coniques* 472
CHAPITRE IX. — *Problèmes divers* 474

HUITIÈME PARTIE.

COMPOSITIONS ÉCRITES.

CHAPITRE Ier. — *Spécimen de compositions écrites pour l'admission à l'École Centrale* 477
CHAPITRE II. — *Spécimen de compositions écrites pour l'admission à l'École Polytechnique* 479

ARITHMÉTIQUE.

1. — Trouver dans la suite naturelle des nombres m nombres consécutifs qui ne soient pas premiers.

R. — On peut toujours trouver un nombre N qui soit divisible par les m nombres consécutifs : $2, 3, 4, 5 \ldots\ldots m(m+1)$. Ainsi le produit $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots\ldots \times m \times (m+1)$ est un nombre divisible par les nombres $1, 2, 3, \ldots\ldots m+1$.

Le nombre N étant formé, $(N+2)$ sera divisible par 2, — $(N+3)$ sera divisible par 3, et ainsi de suite jusqu'à : $(N+m+1)$ qui sera divisible par $m+1$.

Donc les m nombres consécutifs : $N+2$, $N+3$, $N+4, \ldots$ $(N+m+1)$ satisferont à la question.

---

2. — Le produit de 3 nombres consécutifs ne peut pas être un carré parfait.

R. — Soient les 3 nombres : $n-1$, n, $n+1$. On a :

$$(n-1)\,n\,(n+1) = n\,(n^2-1)$$

Or tout nombre qui divise n divise n^2 et ne divise pas n^2-1. Pour que le produit $n(n^2-1)$ fût un carré, il faudrait que tous les facteurs premiers de n eussent des exposants pairs, ainsi que ceux de n^2-1, ce qui est impossible puisque n et n^2-1 n'ont aucun facteur premier commun. Mais n^2-1 ne peut pas non plus être un carré ; donc $n(n^2-1)$ ne peut pas être carré parfait.

---

3. — Un carré ne peut être de la forme : $12n+5$.

R. — En effet, le carré d'un nombre impair : $2p+1$ est : $4p^2+4p+1 = 2M+1$, c'est-à-dire un nombre impair. Donc si $12n+5$ était un carré il ne pourrait être que le carré d'un nombre impair : $2p+1$. Dans ce cas, on aurait :

$$(12n+5) = (2p+1)^2 = 4p^2+4p+1 = 4p(p+1)+1.$$

$$(12n+4) = 4p(p+1), \text{ d'où : } 3n+1 = p(p+1)$$

Je dis que cette dernière égalité est impossible. En effet le produit de 2 nombres consécutifs affecte toujours l'une des 3 formes :

$$(3n-1)\,3n = 3h$$
$$3n\,(3n+1) = 3h'$$
$$(3n+1)\left[3(n+1)-1\right] = 3h''-1$$

On devrait donc avoir $3n+1 = 3h$ ce qui est impossible, car 3 divisant $3n$ et $3h$ devrait diviser 1.

---

4. — Combien faut-il employer de chiffres dans chacun des facteurs $a, b, c, \ldots\ldots$ dont le nombre est p pour que l'on puisse compter sur les m premiers chiffres du produit ?

R. — L'erreur relative du produit sera moindre que $\frac{1}{10^m}$ ou que $\frac{1}{(K+1)10^{m-1}}$ K étant le chiffre des plus hautes unités du produit.

La somme des erreurs relatives des facteurs devant être au plus égale à cette même fraction, ce qu'il y aura de plus simple à faire sera de rendre chaque erreur relative inférieure à la $p^{ième}$ partie de $\frac{1}{10^m}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{p \cdot 10^m}$ ou mieux lorsque le chiffre K sera en évidence à :

$$\frac{1}{p\,(K+1)10^{m-1}}$$

L'erreur absolue de chaque facteur étant proportionnelle (ou à peu près) à ce facteur, on saura selon la grandeur de p, le nombre de chiffres qu'il faudra prendre dans chaque facteur. — Il suffira de $(m+1)$ chiffres pour tout facteur dont le 1er chiffre sera égal ou supérieur à p. — Dans le cas contraire il faudra prendre $m+2$ chiffres. — (Si l'on faisait usage de K, il suffirait de prendre m chiffres pour un facteur dont le premier chiffre serait égal ou supérieur à $p\,(K+1)$

---

5. — Quel sera le nombre de chiffres à employer du nombre a, pour que la puissance $n^{ième}$ de ce nombre soit calculée avec m chiffres exacts.

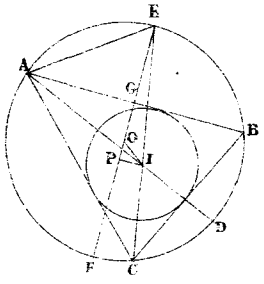
R. — Il suffit que l'erreur relative de a^n soit inférieure à $\frac{1}{10^m}$ et par suite que celle de a soit inférieure à $\frac{1}{n \cdot 10^m}$. Donc si le 1er chiffre de a est égal ou supérieur à n, il faudra employer $m+1$ chiffres de a; sinon, il faudra employer $m+2$ chiffres. — (Nous avons supposé dans le raisonnement $n < 10$.)

GÉOMÉTRIE.

I. Géométrie plane.

6. — La distance d des centres des circonférences inscrites et circonscrites à un triangle ABC est moyenne proportionnelle entre le rayon R de la seconde, et l'excès de R sur 2 fois le rayon r de la première.

R. — Les droites AI, CI bissectrices des angles A et C, divisent en 2 parties égales les arcs BDC, BEA aux points D et E. Donc DC + AE = ED et par suite $\widehat{AIE} = \widehat{DAE}$ ce qui donne AE = IE.



Menons le diamètre EOF du cercle circonscrit, nous avons :

$AE^2 = EF \cdot EG$, $IE^2 = 2R \cdot EG$.

D'un autre côté :

$$IO^2 = IE^2 + R^2 - 2R\,(EG + GP)$$
$$d^2 = IE^2 + R^2 - 2R\,(EG + r);$$

remplaçons IE par sa valeur, il vient :

$$d^2 = R\,(R - 2r)$$

7. — L'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des 3 hauteurs.

R. — Soient a', b', c' les hauteurs correspondantes aux côtés a, b, c, et soit T l'aire de ce triangle, et r le rayon du cercle inscrit.

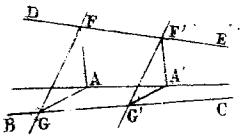
On a : $$2T = aa' = bb' = cc' = (a+b+c)r$$

D'où : $$\frac{a}{\left(\frac{1}{a'}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{1}{b'}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{1}{c'}\right)} = \frac{a+b+c}{\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Donc : $$\frac{1}{r} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$$

8. — Par un point A mener une droite qui passe par le point de concours de 2 droites BC, DE que l'on ne peut prolonger.

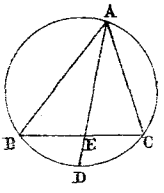
R. — Menons deux parallèles FG, F'G', joignons



FA et FG, en menant à ces droites les parallèles F'A' et G'A' qui se rencontrent en A', la droite AA' passera par le point de concours des 2 droites données.

9. — Construire un triangle ABC, connaissant la base BC, l'angle opposé A et le rapport $\frac{m}{n}$ des deux autres côtés AB et AC.

R. — Le sommet A est sur le segment capable de l'angle A décrit sur BC.



La bissectrice AD partage BC en 2 segments, tels que :

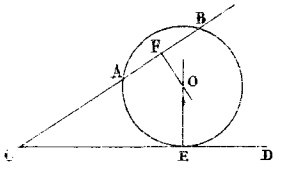
$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$$

en outre elle passe par le milieu de BC.

Construisant cette bissectrice, on aura le sommet A qui sera au point de rencontre de cette bissectrice et du segment décrit sur BC.

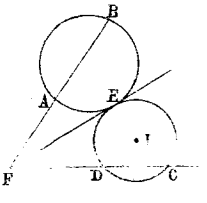
10. — Décrire une circonférence qui passe par 2 points donnés A et B et qui soit tangente à une droite donnée CD.

R. — Le centre est sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB et sur la perpendiculaire élevée au point E à la droite CD. CE est moyenne proportionnelle entre CA et CB.



11. — Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés A et B et qui soit tangente à une circonférence donnée I.

R. — Soit E le point de contact inconnu sur la circonférence I.



Soit F le point de concours de AB et de la tangente commune aux 2 circonférences, menons la sécante FDC, on aura :

$$FE^2 = AF \cdot FB = FD \times FC.$$

Les 4 points A, B, C, D appartiennent à une même circonférence, de sorte que pour résoudre le problème, il suffit de faire passer par A et B une circonférence qui coupe la circonférence I, aux points C et D, et le point F sera donné par la rencontre de AB et CD; on mènera ensuite FE qui déterminera le point cherché E.

---

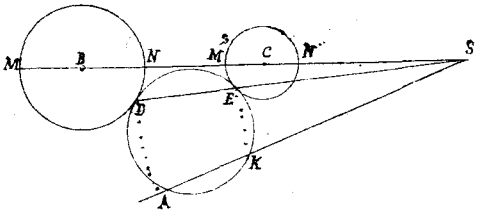
12. — Décrire une circonférence qui passe par un point donné et qui soit tangente à 2 droites données.

R. — Le centre de cette circonférence est sur l'axe de symétrie des 2 droites données. La circonférence qui passe par le point donné doit donc aussi passer par le symétrique de ce point par rapport à cet axe. On construit ce symétrique et l'on n'a plus alors qu'à faire passer une circonférence par ce point et le point donné et qui soit tangente à l'une des droites données. — On est donc ramené au problème 10.

---

13. — Décrire une circonférence qui passe par un point donné A et soit tangente à 2 circonférences données B et C.

R. — Soient D et E les points de contact inconnus, et soit S le centre de similitude directe des 2 circonférences B et C.



La droite qui joint DE passe par S, et on a : par une propriété du centre de similitude :

$$SM' \times SN = SD \times SE$$

Donc les 4 points N, M', E, D sont sur une même circonférence. Joignons AS, on a pour déterminer le point K

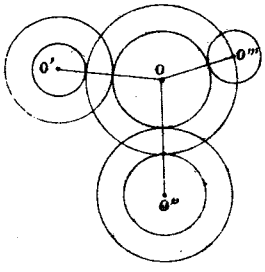
$$SA \times SK = SD \times SE = SN \times SM'$$

Donc le point K est sur la circonférence qui passe par N et M' et la question est ramenée à faire passer la circonférence cherchée par les 2 points A et B, tangentiellement à l'une des circonférences données. (*Voir problème 11.*)

---

14. — Décrire une circonférence O qui soit tangente à trois circonférences données O', O'', O'''.

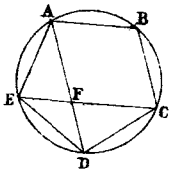
R. — On ramène le problème à faire passer une circonférence par un point O''' et qui soit tangente à deux circonférences (Voir problème 13) qui sont les circonférences concentriques à O' et O'' et dont les rayons ont été diminués chacun du rayon de la circonférence O''' (La circonférence O''' est la plus petite des 3 circonférences données).



Une fois qu'on connaîtra le centre O de cette circonférence on n'aura plus qu'à mener par ce point une circonférence tangente à la circonférence O''', et le problème sera résolu.

15. — Dans tout pentagone régulier les diagonales se coupent mutuellement en moyenne et extrême raison.

R. — Soient AD, CE 2 diagonales d'un pentagone régulier inscrit, je dis que



$$AF^2 = DF \times AD$$

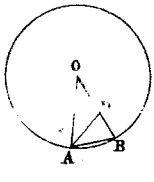
En effet, les 2 triangles isocèles DEF, DAE qui sont semblables donnent :

$$\frac{DF}{ED} = \frac{DE}{AD} \quad \text{ou} \quad DE = AE = AF$$

Donc $$AF^2 = DF \,.\, AD.$$

16. — Le côté du décagone régulier inscrit est égal à la plus grande partie du rayon partagé en moyenne et extrême raison.

R. — Soit AB le côté du décagone régulier inscrit. — L'angle AOB vaut $\frac{2}{5}$ d'angle droit, puisqu'il a pour mesure le 10ème de la circonférence et



$$OAB + OBA = \frac{8}{5} \text{ d'angle droit},$$

ces 2 angles sont égaux, chacun d'eux est égal à $\frac{4}{5}$ d'angle droit.

Menons AD bissectrice de l'angle OAB ; on aura :

$$OAD = DAB = \frac{2}{5} \text{ d'angle droit},$$

et comme le triangle AOD est isocèle, on a :

$$OD = AD = AB,$$

car le triangle ADB est aussi isocèle. Or les 2 triangles OAB, DAB sont semblables comme ayant leurs angles égaux chacun à chacun ;

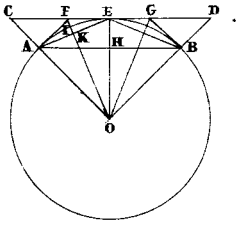
Donc : $\frac{OB}{AB} = \frac{AB}{DB}$ ou comme $AB = OD$

On a : $$\frac{OB}{OD} = \frac{OD}{DB}$$

On enfin $OD^2 = OB \cdot DB$, de sorte que le point D divise le rayon OB en moyenne et extrême raison.

17. — Connaissant les périmètres p et P de 2 polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit, déterminer les périmètres p' et P' des polygones réguliers inscrits et circonscrits d'un nombre double de côtés.

R. — Soit AB le côté du polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle O, si on mène la tangente CD parallèle à AB et qu'on la termine aux rayons prolongés OA, OB, on aura le côté CD du polygone régulier circonscrit.



On aura en AE le coté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.

En en menant les bissectrices OF et OG, on aura FG pour le côté du polygone régulier circonscrit de 2 n côtés.

Ainsi : $p = n \cdot AB$ $\qquad p' = 2n \cdot AE$

$P = n \cdot CD$ $\qquad P' = 2n \cdot FG$

Cherchons d'abord P', on a :

$$\frac{CF}{FE} = \frac{CO}{OE} = \frac{CO}{AO} = \frac{CD}{AB}$$

$$\frac{CE}{EF} = \frac{CD + AB}{AB}$$

D'où $$4n \cdot FE = \frac{4n \cdot CE \times n \cdot AB}{nCD \times nAB}$$

$$2n \cdot FG = \frac{2n \cdot CD \times nAB}{nCD \times nAB}$$

Donc $$P' = \frac{2Pp}{P+p}$$

Pour avoir p', remarquons que

$$\frac{EI}{AM} = \frac{EF}{AE},$$

D'où :

$$AE^2 = 2AH \times EF$$

Donc :

$$4n^2 . \overline{AE}^2 = nAB \times 4n . EF$$

$$p' = \sqrt{P' p}$$

18. — Connaissant les périmètres p et p' de 2 polygones réguliers inscrits, l'un de n côtés, l'autre de $2n$ côtés, trouver le périmètre p'' du polygone régulier inscrit de $4n$ côtés.

R. — Appelons P, P', P'' les périmètres des polygones réguliers circonscrits de n, $2n$, $4n$ côtés.

On a

$$P' = \frac{2Pp}{P+p}, \qquad p'^2 = P' p.$$

$$P'' = \frac{2P'p'}{P'+p'}, \qquad p''^2 = P'' p'$$

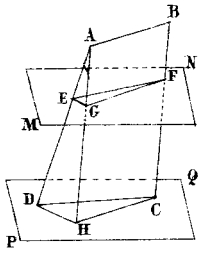
D'où l'on déduit $p''^2 = \dfrac{2p'^3}{p+p'}$

Géométrie dans l'espace.

19. — Tout plan parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche partage proportionnellement les 2 autres côtés.

R. — Soient E, F les points où le plan MN parallèle aux côtés AB, CD coupe les deux autres côtés AD, BC ; je dis que :

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{CF}$$



Menons suivant CD le plan PQ parallèle à AB et par le point A menons une parallèle à BC qui perce en G et H les plans MN et PQ ; les droites EG, DH seront parallèles comme intersections de 2 plans parallèles par un 3e, et on aura :

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GH}$$

Mais les droites AG et BF sont égales et parallèles.

De même $GH = FC$

Donc $\frac{AE}{DE} = \frac{BF}{CF}$

---

20. — Si une surface polyédrale convexe est terminée par une ligne brisée dont les côtés sont ou ne sont pas dans un même plan, le nombre F des faces, plus le nombre S des sommets est égal au nombre A des arêtes, plus un.

R. — La formule : $F + S = A + 1$ est vraie dans le cas de $F = 1$, car alors $S = A$. Admettons qu'elle ait été démontrée pour le cas d'un polyèdre de F faces. Nous allons démontrer qu'elle est encore vraie quand le polyèdre a $F + 1$ faces.

Soit ABC la ligne brisée qui termine la surface polyédrale. Construisons sur le côté AB une nouvelle surface composée de n sommets et de n côtés. Si cette face a m côtés communs avec ABCD, elle aura $m + 1$ sommets communs avec cette ligne ; car on suppose que le nouveau polygone ne ferme pas complètement la surface et qu'il laisse une seule ouverture. De cette manière les nombres F, S, A deviennent :

$$F' = F + 1, \quad S' = S + n - (m + 1), \quad A' = A + n - m.$$

Alors de $F + S = A + 1$

On conclut bien $F' + S' = A' + 1$

21. — Théorème d'Euler. — Dans tout polyèdre convexe, le nombre F des faces, plus le nombre S des sommets est égal au nombre A des arêtes plus 2.

R. — Je dis que $F + S = A + 2$. En effet, enlevons une face du polyèdre, nous aurons une surface polyédrale ouverte terminée à une ligne brisée et dans laquelle les nombres des faces, des sommets, des arêtes, sont respectivement :

$$(F - 1), \quad S, \quad A$$

On a donc (problème 20) $F - 1 + S = A + 1$

D'où $F + S = A + 2$.

---

22. — Dans tout polyèdre convexe, 1° les faces d'un nombre impair de côtés sont toujours en nombre pair; 2° les sommets auxquels aboutissent un nombre impair d'arêtes sont toujours en nombre pair.

R. — Soient respectivement $a, b, c, d \ldots$ les nombres de faces triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, etc... Représentons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ les nombres d'angles trièdres, tétraèdres, etc....,

De sorte que :
$$F = a + b + c + d$$
$$S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Chaque arête appartient à 2 faces et aboutit à 2 sommets, si donc nous comptons soit le nombre des côtés de toutes les faces, soit le nombre des arêtes de tous les angles polyèdres, nous aurons le double $2A$ du nombre des arêtes.

$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d \ldots\ldots$$
$$2A = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + \ldots\ldots$$

Or ces deux dernières égalités exigent évidemment que $a + b + c + \ldots\ldots$ et $\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots$ soient des nombres pairs.

23. — Dans tout polyèdre convexe de F faces, le nombre S des sommets et le nombre A des arêtes satisfont aux conditions :

$$S \leqslant 2(F-2) \qquad A \leqslant 3(F-2)$$
$$S \geqslant \frac{F}{2} + 2 \qquad A \geqslant \frac{3F}{2}$$

R. — En effet (d'après le problème 22), on a :
$$2A - 3F = b + 2c + 3d + \ldots\ldots$$
$$2A - 3S = \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots$$

Donc : $A \geqslant \frac{3}{2}F$ La dernière relation s'écrit :
$$A \geqslant \frac{3}{2}S \qquad A \leqslant 3(F-2)$$

Remplaçant A par $F + S - 2$, on obtient les 2 autres

conditions.

---

24. — Dans tous polyèdre convexe le nombre des faces triangulaires, augmenté du nombre des angles trièdres, donne une somme qui ne peut être supérieure à 8

R. — D'après les valeurs connues de F, S, A, la relation $F + S = A + 2$, donne :

$$2(a+b+c+d+\dots\dots)+2(\alpha+\beta+\gamma+\dots\dots)=4+3a+4b+5c+\dots$$

$$2(a+b+c+d+\dots\dots)+2(\alpha+\beta+\gamma+\dots\dots)=4+3\alpha+4\beta+5\gamma+\dots$$

D'où
$$2(\alpha+\beta+\gamma+\dots\dots)-(a+2b+3c+\dots)=4$$
$$2(a+b+c+\dots\dots)-(\alpha+2\beta+3\gamma+\dots)=4$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

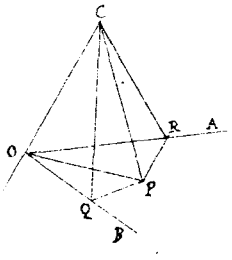
$$(a+\alpha)-(b+\beta)-\dots\dots\dots=8$$

D'où
$$a+\alpha \geqslant 8.$$

---

25. — Etant données 2 droites qui se coupent en O, trouver le lieu des droites menées en O qui font des angles égaux avec OA et OB.

R. — Soit OC une droite faisant des angles égaux avec OA et OB. Par le plan C menons CP perpendiculaire sur le plan AOB, joignons OP et menons PQ perpendiculaire sur OB. Si on mène la droite CQ, d'après le théorème des 3 perpendiculaires, cette droite sera perpendiculaire sur OB.



De même menons PR perpendiculaire sur OA et joignons CR cette droite sera perpendiculaire sur OA. Les 2 triangles OCQ, OCR qui sont rectangles en R et en Q sont égaux, comme ayant l'hypoténuse commune et un angle aigu égal. Donc $OQ = OR$. Les 2 triangles rectangles ORP, OQP sont égaux comme ayant l'hypoténuse commune et un coté de l'angle droit égal; donc $PR = PQ$ et par suite OP est la bissectrice de l'angle AOB.

La droite OC se projette donc sur le plan AOB suivant

la bissectrice OP de l'angle AOB, donc le lieu cherché est le plan perpendiculaire sur AOB et passant par la bissectrice de cet angle.

---

26. — Lieu des points équidistants de OA et de OB. — (Voir le problème précédent).

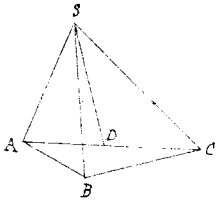
R. — Soit un point C équidistant de OA et OB, c'est-à-dire tel que CR = CQ.

Reportons-nous à la figure correspondant au problème précédent ; le point C se projette sur la bissectrice de l'angle AOB et on voit de la même manière que le lieu cherché est le même que celui du problème précédent.

---

27. — Dans un angle trièdre au plus grand angle dièdre est opposée la plus grande face.

R. — Soit le trièdre SABC. Supposons que le dièdre SB soit plus grand que le dièdre SA, je dis que la face ASC est plus grande que la face BSC.



En effet, menons par SB un plan qui fasse avec le plan ASB un angle dièdre égal au dièdre SA, et soit SD la droite suivant laquelle ce plan coupe la face ASC.

Dans le trièdre SABD, les 2 dièdres SA et SD sont égaux par construction, donc d'après un théorème connu les 2 faces BSD et ASD sont égales ; Mais dans le trièdre SBDC

On a : $BSD + DSC > BSC$

Or : $BSD = ASD$

Donc : $ASD + DSC > BSC$

Or : $ASC > BSC$.

---

28. — Réciproquement dans un angle trièdre, à la plus grande face est opposée le plus grand angle dièdre.

R. — Car si c'était le plus petit dièdre qui fut opposé à la plus grande face d'après le théorème précédent ce serait la plus petite face qui serait opposée à ce dièdre, ce qui est

contraire à l'hypothèse, puisqu'on considère la plus grande face.

---

29. — Les 3 plans menés perpendiculairement aux plans des faces d'un angle trièdre suivant les bissectrices de ces angles se coupent suivant une même droite.

R. — En effet, chacun de ces plans est le lieu des points équidistants des 2 arêtes qui sont dans le plan auquel il est perpendiculaire. Donc, si on considère 2 de ces plans ils se couperont suivant une droite qui sera équidistante des 3 arêtes de l'angle trièdre, par conséquent elle appartiendra au 3e plan. — Les 3 plans se coupent donc suivant une même droite.

---

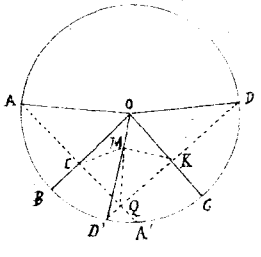
30. — Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un angle trièdre se coupent suivant une même droite.

R. — En effet, chaque plan bissecteur est le lieu des points équidistants des 2 plans dont il partage l'angle en deux parties égales. — Donc l'intersection de 2 de ces plans sera une droite équidistante des 3 plans des faces ; elle appartiendra donc au 3e plan. — Ainsi les 3 plans se coupent bien suivant une même droite.

---

31. — Construire un trièdre connaissant ses trois faces.

R. — Étalons à la suite les unes des autres sur un même plan, avec un sommet commun, O centre d'un cercle, les 3 faces données en ayant soin de mettre la plus grande BOC au milieu des 2 autres AOB et COD.



Abaissons de A et D les perpendiculaires AA', DD' respectivement sur OB et sur OC. La face BOC étant la plus grande des trois faces, BC sera plus grand que chacun des arcs BA, CD, et comme BA' = BA, il s'ensuit que le point A' tombera entre B et C, de même D' tombera aussi entre B et C.

De plus comme BOC < AOB + COD,

On a : $BC < AB + CD$ et comme $BA' = BA$ et $CD' = CD$, le point A' est sur l'arc BC à la droite de D'.

En outre comme $BOC + AOB + COD < 4$ droits, le point D sera placé après le point C, sur la circonférence parcourue à partir du point A dans le sens ABC.

Le point A étant situé en D' et D, et le point D' entre A et A' les cordes AA', DD' se couperont dans l'intérieur de la circonférence au point Q.

Si maintenant on mène par Q une perpendiculaire QM au plan BOC et si dans le plan IOM on décrit de I comme centre, avec AI pour rayon, une circonférence qui coupera QM au point M et si on joint OM, l'angle trièdre $OBMC$ sera le trièdre cherché.

En effet, l'angle $AOI = IOM$ puisque les triangles rectangles AOI et MOI sont rectangles ; de même l'angle $MOK = KOD$ à cause de l'égalité des triangles rectangles MOK et KOD.

---

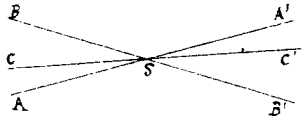
32. — Deux trièdres qui ont leurs faces égales ont aussi leurs dièdres égaux.

R. — Soient S et S' les 2 trièdres donnés T et T' leurs trièdres supplémentaires. — Puisque les trièdres S et S' ont leurs faces égales ; les trièdres T et T' auront leurs dièdres égaux, et par suite leurs faces égales chacune à chacune, donc les trièdres T et T' ayant leurs faces égales, les trièdres S et S' qui leur sont supplémentaires auront leurs dièdres égaux.

---

33. — Les trièdres symétriques sont ils superposables?

R. — Lorsqu'on prolonge de l'autre côté du sommet S les trois arêtes d'un trièdre $SABC$, on forme un nouveau trièdre $SA'B'C'$ qui est symétrique du premier. — Ces deux trièdres bien qu'ils soient composés d'éléments égaux, ne peuvent être superposés, parce que leurs éléments sont disposés en ordre inverse.



Concevons en effet que l'on fasse tourner le trièdre SA'B'C' autour de S de manière que l'angle A'SB' glisse dans le plan ASB, jusqu'à ce que l'arête SA' vienne s'appliquer sur l'arête SA ; alors l'arête SB' coïncidera avec SB, mais tandis que la 3e arête SC du 1er trièdre est d'un côté du plan ASB ; la 3e arête SC' du 2e trièdre se placera de l'autre côté de ce même plan ASB, et les 2 trièdres ne coïncideront pas.

Il est un cas où les 2 trièdres peuvent se superposer ; c'est celui où le trièdre SAB est isocèle, c'est-à-dire à deux de ses faces telles que ASC, BSC égales entre-elles. — Les 2 faces A'SC', B'SC' du 2e trièdre sont aussi égales entre-elles, et alors les deux dispositions que présentent les 2 trièdres ne se distinguent pas en réalité l'une de l'autre.

34. — Comment définit-on le trièdre supplémentaire d'un trièdre donné ? — Comment le construit-on ?

R. — On appelle trièdre supplémentaire d'un trièdre donné, un trièdre tel que ses angles plans sont les supplémentaires des angles qui mesurent les angles dièdres du trièdre proposé.

Pour le construire, il suffit de mener par le sommet du trièdre proposé, sur chaque face une perpendiculaire, de telle sorte que chacune des perpendiculaires soit située du côté de l'arête qui n'est pas dans le plan auquel elle est perpendiculaire ; l'angle trièdre qui a pour arêtes ces 3 perpendiculaires est supplémentaire du trièdre proposé.

35. — Dans tout angle trièdre, chaque angle dièdre augmenté de 2 droits donne une somme supérieure à la somme des 2 autres angles dièdres.

R. — En effet, désignons par A, B, C les 3 dièdres d'un trièdre quelconque et soient a', b', c' les angles plans de l'angle trièdre supplémentaire ; a' et A seront supplémentaires, il en sera de même de b' et B, de c' et C.

Or, on a dans l'angle trièdre supplémentaire $a' < b' + c'$,

c'est-à-dire que $2^{dr} - A < 2^{dr} - B + 2^{dr} - C$

D'où $2^{dr} + A > B + C$

On démontrerait de même que $2^{dr} + B > A + C$

$2^{dr} + C > A + B$.

36. — Combien y a-t-il de trièdres ayant les mêmes dièdres ?

R. — Étant donnés 3 angles dièdres, tels que leur somme soit > 2 droits et que chacun d'eux augmenté de 2 droits donne une somme supérieure à celle des 2 autres dièdres, il y aura 2 angles trièdres dont les angles dièdres seront les dièdres donnés.

En effet, si on prend 3 angles plans qui soient supplémentaires des dièdres donnés, ces angles plans seront ceux d'un angle trièdre et le trièdre supplémentaire de celui-ci aura pour angles dièdres les dièdres donnés.

Cet angle trièdre ainsi formé et son symétrique seront les seuls qui puissent avoir les dièdres donnés pour angles dièdres.

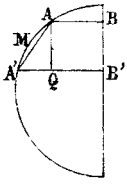
---

37. — Conditions pour que 3 dièdres appartiennent à un triangle sphérique.

R. — Si on joint le centre de la sphère au sommet du triangle sphérique, on forme un angle trièdre dont les angles plans ont pour mesure les côtés du triangle sphérique ; et dont les angles dièdres ne sont autre chose que les angles de ce triangle. — Donc les conditions cherchées sont les mêmes que celles auxquelles doivent satisfaire les 3 dièdres d'un trièdre.

38. — Volume d'une tranche sphérique comprise entre 2 plans parallèles.

R. — Soient AB, A'B' les rayons des bases de la tranche sphérique, BB' sa hauteur. — On peut considérer cette tranche sphérique comme engendrée par la révolution BAMA'B' autour de BB'.



On a : $\text{Vol. } AMA' = \frac{1}{6}\pi\,\overline{AA'}^2 . BB'$

$\text{Vol } AA'BB' = \frac{1}{3}\pi\, BB'(\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 + AB . A'B')$

La tranche sphérique est la somme de ces 2 volumes

Son volume est donc : $\frac{1}{6}\pi\, BB'(2\overline{AB}^2 + 2\overline{A'B'}^2 + 2AB . A'B' + \overline{AA'}^2$

Nous allons transformer cette expression de manière à montrer qu'une tranche sphérique est équivalente à un cylindre ayant pour base la demi somme des bases de la tranche et

pour hauteur la distance des 2 plans parallèles, plus une sphère ayant pour diamètre la distance des 2 plans parallèles.

Pour cela menons AQ parallèle à BB', on aura :

$$A'Q = A'B' - AB$$

$$\overline{A'Q}^2 = \overline{A'B'}^2 + AB^2 - 2AB \cdot A'B'$$

Or :

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{A'Q}^2 = \overline{BB'}^2 + \overline{A'B'}^2 - 2A'B' \times AB + \overline{AB}^2$$

Remplaçant $\overline{AA'}^2$ par sa valeur dans l'expression déjà trouvée du volume cherchée, il vient après réduction :

$$BB' \frac{\pi \overline{AB}^2 + \pi \overline{A'B'}^2}{2} + \frac{1}{6} \pi \overline{BB'}^3$$

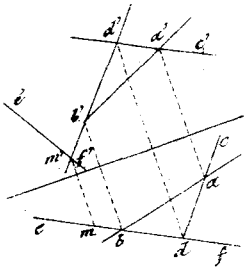
Expression qui traduite en langage ordinaire est bien la même que celle que nous avons énoncée plus haut.

Géométrie Descriptive.

I. — Ligne droite en plan.

39. — Trouver le point de rencontre d'une droite et d'un plan donné par 2 droites, sans recourir aux traces du plan.

R. — Soient AB, AC les deux droites qui déterminent le plan et EF la droite donnée. Cherchons l'intersection de chacune des droites AB, AC avec le plan que projette horizontalement EF, on aura en b et b', d et d' les traces de deux droites sur le plan qui projette horizontalement EF. La droite passant par les 2 traces verticales rencontrera la projection verticale de la droite donnée en un point m' qui sera précisément la projection verticale du point cherché; la projection horizontale sera donc en m sur ef.



Si les projections horizontales des droites qui déterminent le plan ne rencontraient pas la projection horizontale ef dans le champ de l'épure, on pourrait chercher l'intersection de ces 2 droites avec le plan qui projette verticalement EF.

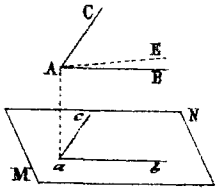
40. — Mener par un point une droite qui rencontre 2 droites données.

R. — On construit les traces d'un plan passant par le point et l'une des droites, puis celles d'un 2e plan passant par le point et l'autre droite, la droite demandée devant être à la fois dans ces 2 plans, n'est autre que leur intersection.

Il y a plusieurs vérifications dans l'épure.

41. — La projection d'un angle droit sur un plan est un angle droit quand l'un de ses côtés au moins est parallèle au plan de projection.

R. — Soit l'angle droit CAB dont le côté AB est parallèle au plan MN. La droite Aa est perpendiculaire sur AB et



ab, mais AB étant perpendiculaire à Aa et à AC est perpendiculaire au plan aAC. La droite ab parallèle à AB est perpendiculaire au même plan aAC et par suite à la droite ac contenue dans ce plan, donc l'angle cab est droit.

---

42. — Un angle est droit lorsque l'un de ses côtés est parallèle au plan de projection et que sa projection sur ce plan est un angle droit.

R. — En effet, soit BAC l'angle dont le côté AB est parallèle au plan MN et dont la projection BAC est un angle droit. ab étant perpendiculaire sur ac et sur Aa, est perpendiculaire au plan AaC, donc AB est aussi perpendiculaire au plan AaC et par suite à la droite AC contenue dans ce plan. Donc l'angle CAB est droit.

---

43. — Si la projection d'un angle droit sur un plan est un angle droit, l'un des côtés de cet angle est parallèle au plan de projection.

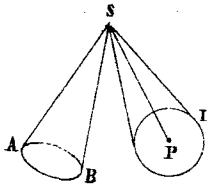
R. — Soit ABC un angle droit, et abc sa projection qui est aussi un angle droit. Si AB n'est pas parallèle à MN, soit AE une droite parallèle au plan MN et par suite à ab. La droite ab étant perpendiculaire au plan aAC, la droite AE est aussi perpendiculaire à ce plan et par suite au plan ACB; il en résulte que AC est perpendiculaire au plan AEB et par suite au plan BAab, et comme ac est aussi perpendiculaire à ce plan, AC et ac sont parallèles, et par suite AC est parallèle au plan de projection MN.

II. Plans tangents.

---

44. — Mener à un cône un plan tangent qui fasse un angle donné avec le plan horizontal.

R. — Soit SAB le cône donné, du sommet S abaissons sur le plan horizontal la perpendiculaire SP et dans un plan quelconque mené par SP traçons une droite SI faisant avec le plan horizontal l'angle donné. En décrivant de P comme



centre avec PI pour rayon (I étant la trace horizontale de la droite SI) un cercle, on formera la base d'un cône dont le sommet est en S et dont toutes les génératrices forment avec l'axe du cône SI l'angle donné.

Tout plan tangent à ce dernier cône, fait avec le plan horizontal un angle égal à l'angle donné; donc si on mène une tangente commune aux 2 bases AP et PI et si on regarde cette tangente comme la trace horizontale d'un plan passant par le sommet, ce plan sera tangent à la fois aux 2 cônes, et par suite ce sera bien un plan tangent au cône SAB faisant avec le plan horizontal l'angle donné.

Il y aura autant de solutions qu'on pourra mener de tangentes communes aux 2 bases — ainsi dans le cas où les bases sont des cercles, il pourra y avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 solutions.

---

45. — <u>Trouver les plans tangents communs à 3 sphères données</u>.

R. — Supposons que les 3 sphères A, A', A'' soient extérieures les unes aux autres. Déterminons les 2 cônes circonscrits aux sphères A et A'; soit C celui de ces cônes qui a son sommet au delà des 2 sphères (de manière à ce que les 2 sphères soient situées dans une même nappe du cône), et soit D l'autre cône qui a son centre entre les 2 sphères.

Déterminons aussi les 2 cônes analogues circonscrits aux sphères A et A''.

Tout plan tangent aux 3 sphères est tangent à l'un des 2 cônes C ou D et aussi à l'un des 2 cônes C' ou D', et réciproquement tout plan qui remplit ces conditions est un plan tangent commun aux 3 sphères.

Il faut donc prendre chacun des cônes C et D avec chacun des cônes C' et D', ce qui donne 4 systèmes différents, et mener des plans tangents communs aux 2 cônes de chaque système. Quelque système que l'on considère, les plans tangents doivent passer par la droite qui unit les 2 sommets; la question se réduira donc à mener par cette droite des

plans tangents à l'un des 2 cônes.

46. — Mener un plan tangent au cône parallèlement à une droite donnée.

R. — Soit SAB le cône et CD la droite donnée. Le plan tangent devant être parallèle à CD contient une parallèle à CD; or, comme le plan tangent doit en outre passer par le sommet du cône, si par S on mène une parallèle à CD, on n'aura plus pour résoudre le problème qu'à déterminer la trace horizontale K de cette parallèle et à mener par K des tangentes à la base du cône, qui seront précisément les traces horizontales des plans cherchés. — Quant à leurs traces verticales, on les déterminera par cette condition, qu'elles doivent passer par la trace verticale de la droite SK.

---

47. — Par un point donné mener un plan tangent commun à deux sphères.

R. — Considérons le cône circonscrit à ces 2 sphères; tous les plans tangents à ce cône passant par le point donné seront des plans tangents communs aux 2 sphères

On peut prendre le cône circonscrit, de telle manière que les 2 sphères soient situées toutes les 2 dans la même nappe, ou bien chacune d'elles dans une des 2 nappes.

Dans l'épure, on prendra pour simplifier comme plan horizontal de projection le plan passant par le point donné et les centres des 2 sphères.

Si le point donné est extérieur au cône circonscrit, il y aura 4 plans tangents; s'il est sur le cône entre les 2 sphères, il y aura 3 plans tangents; s'il est sur le cône mais en dehors des 2 sphères, il n'y aura plus qu'un seul plan tangent commun aux 2 sphères.

---

48. — Mener à un cylindre un plan tangent qui fasse un angle donné avec le plan horizontal.

R. — Supposons que ce cylindre ait pour base un cercle tracé dans le plan horizontal.

Par un point quelconque de l'espace menons une verticale et une oblique faisant avec le plan horizontal l'angle donné; puis engendrons un cône droit en faisant tourner cette oblique

autour de la verticale. Tous les plans tangents à ce cône formeront avec le plan horizontal un angle égal à l'angle donné; il suffit donc de mener à ce cône des plans tangents parallèles aux génératrices du cylindre, et en menant ensuite au cylindre des plans tangents parallèles à ceux-là, on aura les plans tangents demandés.

Il y a en général 4 solutions.

49. — Déterminer les plans tangents communs à une sphère et à un cône droit.

R. — Admettons pour un instant qu'on ait trouvé un plan tangent commun à ces 2 surfaces. — Menons le rayon de la sphère passant par le point de contact et par l'arête du cône et par l'axe faisons passer un plan qui sera perpendiculaire au plan tangent. Si par le centre de la sphère on mène un plan parallèle au plan tangent, il sera coupé par le plan passant par l'axe et l'arête suivant une droite parallèle à cette arête, et éloignée d'elle d'une distance égale au rayon de la sphère. Ce plan sera évidemment tangent au cône engendré par la révolution de cette parallèle autour de l'axe du cône donné.

Or on peut facilement déterminer ce nouveau cône, et lui mener par le centre de la sphère des plans tangents; alors si l'on mène des plans tangents au cône proposé parallèlement à ceux-là, on aura les plans tangents cherchés.

Le cône auxiliaire peut être intérieur ou extérieur au cône donné.

Il peut y avoir 4 plans tangents communs.

50. — Plan tangent à une surface de révolution mené parallèlement à un plan donné.

R. — Tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan du méridien qui passe par le point de contact, et en outre contient la tangente menée par ce point au méridien. — Or, le plan tangent cherché devant être parallèle à un plan donné, si on mène par l'axe de révolution de la surface un plan perpendiculaire au plan donné, il coupera la surface suivant le méridien sur lequel est situé le point de contact, et le plan donné suivant une droite à laquelle doit être parallèle la tangente au méridien.

Pour résoudre le problème, il suffit donc de mener par l'axe de révolution, un plan perpendiculaire au plan donné, lequel coupe la surface suivant un méridien et le plan donné suivant une droite, et de mener à ce méridien des tangentes parallèles à cette droite ; les plans menés par ces tangentes perpendiculairement au plan du méridien seront les plans tangents cherchés.

III. Intersection de surfaces.

51. — Section d'un cylindre oblique par un plan quelconque.

R. — Pour obtenir cette section, on coupe le cylindre et le plan donné par divers plans auxiliaires qui soient tous verticaux et parallèles aux arêtes du cylindre : parce qu'ainsi nous n'aurons à combiner que des sections rectilignes.

Il sera bon, si on veut faire le développement de la surface, de conduire ces plans auxiliaires par des points de la base du cylindre qui soient 2 à 2 sur des cordes parallèles à la trace horizontale du plan donné.

52. — Section faite par un plan perpendiculaire au plan vertical de projection dans un hyperboloïde de révolution à une nappe, défini par son axe et sa génératrice.

R. — On prend pour plan vertical de projection un plan parallèle à l'axe de l'hyperboloïde. — Pour obtenir la section cherchée, on coupe le plan donné et l'hyperboloïde par des plans auxiliaires horizontaux. Considérons en particulier un de ces plans auxiliaires : il coupe l'hyperboloïde suivant un cercle, et le plan donné suivant une droite ; les points communs à cette droite et au cercle sont des points de la courbe d'intersection cherchée.

Cette intersection peut être, suivant l'inclinaison du plan donné, une ellipse, une hyperbole, une parabole, ou une variété de ces courbes.

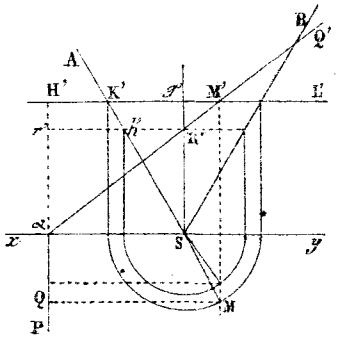
Il est bon de commencer le tracé de l'épure par la construction des sommets, parce que la recherche de ces sommets fera connaître le genre de la section.

53. — Une droite et une sphère étant données construire la trace horizontale du cylindre circonscrit à la sphère et dont les génératrices sont parallèles à la droite, et déterminer en outre les projections de la courbe de contact.

R. — On coupe la sphère suivant un grand cercle par un plan parallèle à la droite donnée; si on mène à ce cercle une tangente parallèle à la droite et si on imagine que le cercle et la tangente tournent autour d'un axe parallèle à la droite et passant par le centre de la sphère, il est évident que le point de contact décrit sur la sphère un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et qui n'est autre chose que la courbe de contact, tandis que la tangente décrit le cylindre demandé qui a en chaque point du grand cercle, même plan tangent que la sphère.

54. — La projection d'une section plane du cône circulaire droit sur un plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône a pour l'un de ses foyers le sommet du cône et pour directrice correspondante, la droite de rencontre des 2 plans.

R. — Prenons pour plan vertical un plan perpendiculaire au plan sécant et passant par l'axe du cône. Soit P α Q' le plan sécant. Pour avoir la projection horizontale de l'intersection (la projection verticale est α Q') nous emploierons des plans auxiliaires horizontaux. Soit H' L' un de ces plans, il détermine dans le cône une circonférence de rayon K'g' décrite du point S comme centre sur la projection, et dans le plan une droite menée par M' perpendiculairement au plan vertical.



On obtient en M un point du lieu.

Pour démontrer le théorème, il faut faire voir que

$$\frac{SM}{MQ} = \text{Constante}$$

ou ce qui est la même chose $\frac{K'g'}{M'H'} = \text{Constante}$.

Or $$\frac{K'g'}{h'R'} = \frac{Sg'}{SR'} = \frac{\alpha H'}{\alpha r'} = \frac{H'M'}{r'R'}$$

D'où $$\frac{K'g'}{H'M'} = \frac{h'R'}{r'R'} = \frac{h'R'}{S\alpha} = \text{Constante}$$

Car le point R est un point fixe, c'est celui où $\alpha Q'$ rencontre l'axe du cône

Le théorème est donc démontré.

---

55. — Intersection de 2 Cônes (Cas des branches infinies)

R. — Tant qu'il n'existe pas sur l'un des cônes de génératrice parallèle à l'une des génératrices de l'autre cône, la rencontre de 2 génératrices appartenant chacune à l'un des cônes ne pourra jamais se faire qu'à une distance finie, et par conséquent aucune branche de l'intersection ne sera infinie, quand même les bases des cônes seraient des courbes non fermées.

Mais s'il y a sur l'un des cônes une génératrice parallèle à une génératrice de l'autre cône, la courbe d'intersection a des branches infinies.

Pour reconnaître si cela a lieu, on transporte l'un des cônes parallèlement à lui-même le long de la droite qui joint les sommets des 2 cônes, jusqu'à ce que son sommet vienne coïncider avec le sommet de l'autre cône. On construit alors la nouvelle base ou trace horizontale de ce cône transporté, cette nouvelle base sera semblable à l'ancienne. Si cette nouvelle base ne coupe pas la base du 2e cône, les 2 cônes proposés n'ont pas de génératrices parallèles, et par suite l'intersection n'a pas de branches infinies. Mais si ces 2 bases se coupent, la courbe d'intersection aura autant de branches infinies qu'il y a de points communs aux 2 bases.

Lorsqu'il y a arrachement, l'intersection se compose d'une seule courbe ayant 2 points à l'infini. Lorsqu'il y a pénétration, l'intersection se compose de 2 courbes entièrement distinctes et qui ne se rejoignent pas à l'infini. L'une de ces courbes seulement ou toutes les deux auront des branches infinies.

Lorsque la base de l'un des cônes après qu'on l'a transporté, est tangente à la base de l'autre cône, l'intersection offre une branche infinie, mais qui n'admet pas d'asymptote.

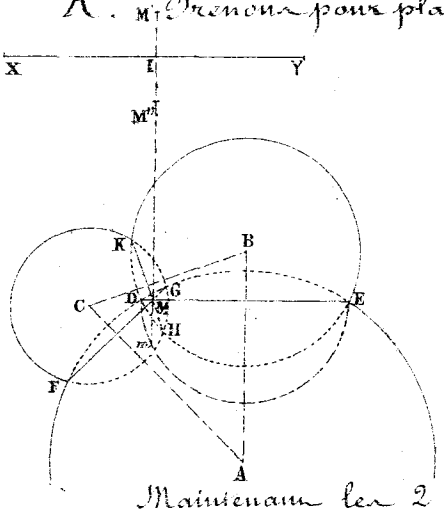
On peut dire d'une manière générale que chaque point

de section entre ces 2 bases indique l'existence d'une branche infinie douée d'asymptote, et que chaque point de contact entre ces mêmes bases indique l'existence d'une branche infinie dépourvue d'asymptote. Ces 2 circonstances peuvent du reste se présenter à la fois dans l'intersection de 2 cônes.

---

56. — Trouver l'intersection de 3 sphères données.

R. — Prenons pour plan horizontal celui qui contient les centres A, B, C des sphères proposées, et décrivons les grands cercles qui sont les traces horizontales de ces surfaces. Alors si les circonférences A et B se rencontrent aux points D et E, il est clair que le cercle vertical décrit sur DE comme diamètre, sera l'intersection des deux sphères A et B; tandis que les sphères A et C se couperont suivant un autre cercle vertical projeté sur FG.



Maintenant les 2 cordes DE et EG se rencontrent en M, on pourra affirmer que les circonférences projetées sur ces cordes se coupent effectivement en 2 points qui sont projetés horizontalement en M; ces points de l'espace seront communs aux 3 sphères données.

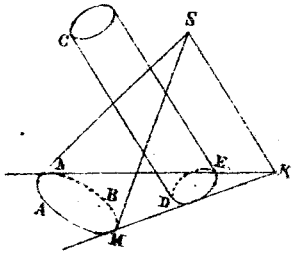
Pour achever de fixer la position de ces points, projetons les sur un plan vertical quelconque XY, en rabattant le cercle DE autour de son diamètre horizontal, et tirons l'ordonnée M m; cette droite mesurera la hauteur de l'un des points cherchés au-dessous du plan horizontal; donc en prenant au-dessus et au-dessous de XY les distances IM' IM'' égales à M m, on obtiendra les projections (M, M') et (M, M'') des 2 points demandés.

---

57. — Intersection d'un cylindre et d'un cône.

R. — Soit le cône SAB et le cylindre CDE dont les bases AB, DE, sont sur le plan horizontal. — Si par le sommet S du cône on mène une droite SK parallèle aux génératrices du cylindre, et si par cette droite on fait passer des plans

sécante, ils couperont les 2 surfaces suivant des génératrices dont les points d'intersection 2 à 2 seront des points de la courbe d'intersection.



Si K est la trace horizontale de la droite SK, toute droite menée par K et qui coupe les 2 bases pourra être considérée comme la trace horizontale des plans sécants, et KM et KN seront les plans sécants limites.

Ces plans limites fourniront les points où la courbe d'intersection sera touchée par les génératrices du cylindre ou par celles du cône, suivant que le point limite coupera le cylindre ou le cône.

Branches infinies. — Quand les 2 bases sont des courbes fermées, pour que la courbe d'intersection ait des branches infinies, il faut que l'une des génératrices du cône soit parallèle aux génératrices du cylindre. Lorsque cela aura lieu, la droite SK sera une génératrice du cône.

Le nombre des branches infinies est égal à celui des points où la tangente, à la trace du cône menée par le point K, rencontre la trace du cylindre.

---

58. — Intersection d'un cône et d'une sphère.

R. — On coupera ces 2 surfaces par des plans verticaux menés par le sommet du cône. Les sections du cône par ces plans auxiliaires sont des génératrices du cône, et les sections de la sphère sont des cercles.

Les points communs aux génératrices et au cercle, déterminés par un de ces plans auxiliaires, sont des points de la courbe d'intersection.

On détermine la tangente en un point de la courbe d'intersection, en cherchant l'intersection des plans tangents à la sphère et au cône en ce point.

IV. Problèmes divers.

59. Construire une pyramide triangulaire dont les 6

arêtes sont connues de grandeur.

R. — On tracera d'abord, sur le plan horizontal, une des faces ABC de la pyramide, au moyen des 3 arêtes données qui se rapportent à cette face; ensuite on déterminera le 4e sommet (M, M') en cherchant (problème 56) l'intersection de 3 sphères qui auraient pour centres les points A, B, C et pour rayons les longueurs des 3 autres arêtes assignées par la question.

Il y aura évidemment 2 pyramides symétriques l'une de l'autre, puisque le dernier sommet peut être placé en (M, M') ou en (M, M'').

---

60. — Construire un point dont on connaît les distances à 3 points donnés.

R. — Soient A, B, C les 3 points, et α, β, γ leurs distances respectives au point inconnu x.

Imaginons une sphère qui ait son centre en A et pour rayon la distance α, le point x devra évidemment se trouver quelque part sur la surface de cette sphère; il sera pareillement sur 2 autres sphères qui auraient leurs centres en B, C et pour rayons les longueurs β, γ. Le problème revient donc à l'intersection de 3 sphères données, question traitée dans le problème 56.

---

61. — Construire un point dont on connaît les distances à 3 plans donnés.

R. — Soient P, P', P'' les 3 plans donnés et δ, δ', δ'' leurs distances au point inconnu x; ce dernier devra être à la fois dans les 3 plans p, p', p'' respectivement parallèles à P, P', P'' et éloignés de ceux-ci de quantités égales à δ, δ', δ''. Donc en construisant les plans p, p', p'', le problème sera ramené à l'intersection de 3 plans.

Seulement comme le plan p, par exemple, pourra être mené à la distance δ, soit au-dessus, soit au-dessous de P, il y aura 8 solutions pour la position du point x.

---

62. Construire un point dont on connaît les distances à 3 droites données.

R. — Soient A, B, C les 3 droites dont le point inconnu x est éloigné des quantités α, β, γ. — Si l'on imagine un cylindre

de révolution qui ait pour axe la ligne A, et pour section droite un cercle de rayon α, ce cylindre contiendra le point x. De même ce point se trouvera aussi sur deux autres cylindres de révolution qui auront pour axes B et C et pour rayons β et γ: le problème est donc ramené à trouver tous les points communs à ces 3 cylindres; il n'y aura plus qu'à chercher la courbe d'intersection du cylindre A avec le cylindre B, puis celle des cylindres A et C. Ces 2 courbes qui pourront au plus se couper en huit points (attendu que les 3 cylindres sont du 2e degré, feront connaître par leurs rencontres les diverses positions que peut avoir le point cherché x.

Observons toutefois que, pour obtenir les points vraiment communs aux 2 courbes dans l'espace, il ne faudra prendre parmi les sections des 2 projections horizontales, que les points qui correspondront exactement à des sections sur le plan vertical, c'est-à-dire que ces points devront être 2 à 2 sur des perpendiculaires à la ligne de terre.

Les Quatre Opérations.

63. — Division d'un polynome entier par $x^2 + px + q$. Forme du reste.

R. — Coëfficients successifs du quotient :

$$C_0 = A$$
$$C_1 = A_1 - pA$$
$$C_2 = A_2 - pA_1 + (p^2 - q)A$$
$$C_3 = A_3 - pA_2 + (p^2 - q)A_1 - (p^3 - 2p^2q)A$$
$$C_4 = A_4 - pA_3 + (p^2 - q)A_2 - (p^3 - 2p^2q)A_1 + (p^4 - 3p^2q + q^2)A$$
$$C_5 = A_5 - pA_4 + (p^2 - q)A_3 - (p^3 - 2p^2q)A_2 + (p^4 - 3p^2q + q^2)A_1 - (p^5 - 4p^3q + 3pq^2)A \text{ etc.}$$

On a d'une manière générale :

$$C_r = A_r - pC_{r-1} - qC_{r-2}$$

Le reste est : $R = C_{m-1}x + A_m - qC_{m-2}$

Pour la loi de formation des C, on peut remarquer dans le tableau ci-dessous que le coefficient des A reste toujours le même dans une même colonne verticale. — Si on écrit les uns au-dessous des autres les coefficients successifs, on a au signe près :

$$p.$$
$$p^2 - q$$
$$p^3 - 2pq$$
$$p^4 - 3p^2q + q^2$$
$$p^5 - 4p^3q + 3pq^2$$
$$p^6 - 5p^4q + 6p^2q^2 - q^3$$
$$p^7 - 6p^5q + 10p^3q^2 - 4pq^3$$
&c. ....

On voit que les exposants de p vont en diminuant de 2 d'un terme à l'autre, les exposants de q, en croissant de 1, et si on considère les lignes verticales, on a, au signe près, comme facteurs numériques :

Dans la 2ème les nombres naturels;
Dans la 3ème les nombres triangulaires, somme des nombres naturels.
Dans la 4ème les sommes des nombres triangulaires.
Dans la 5ème les sommes des nombres de la 4ème &c...

---

64. — Montrer que lorsque le polynome $f(x)$ est divisible par $(x-a)$ et par $(x-b)$, il est divisible par $(x-a)(x-b)$.

R. — Puisque $f(x)$ est divisible par $(x-a)$ on a :

$$f(x) = (x-a)\,\varphi(x)$$

Si l'on porte la valeur $x = b$, dans cette équation, il vient :

$$0 = (b-a)\,\varphi(b)$$

Donc : $\varphi(b) = 0$, car on suppose que b est différent de a.

Ainsi : $\varphi(b)$ est de la forme $(x-b)\,\psi(x)$;

Donc, enfin : $f(x) = (x-a)(x-b)\,\psi(x)$

65. — Démontrer que :

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) = 1+x+x^2+\ldots+x^{15}.$$

R. — En multipliant par $1-x$ les 2 membres, on trouve une identité.

---

66. — Caractère de divisibilité de $x^m - a^m$ par $x^h - a^h$.

R. — Les restes successifs commencent par $a^h x^{m-h}$, $a^{2h} x^{m-2h}$ .....

Il faut que : $m = Kh$.

67. — Division de $x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + 1$ par $x^h + x^{h-1} + \ldots\ldots + 1$.

R. — On peut écrire :

$$\frac{x^{m+1}-1}{x^{h+1}-1}$$

La division est possible quand :

$$m+1 = K(h+1)$$

68. — Condition pour que $(x+1)^m + (x-1)^m$ soit

divisible par x.

R. — $x = 0$ donne au dividende $1^m + (-1)^m$.

Il faut donc que $m = 2K + 1$.

Autrement. On peut écrire :

$$2 \cdot \frac{(x+1)^m + (x-1)^m}{x+1+x-1}$$

Et on sait que : $\frac{y^m + a^m}{y+a}$ peut s'effectuer quand m est impair.

---

69. — Simplifier $a^3(b^2-c^2) + b^3(c^2-a^2) + c^3(a^2-b^2) = P$

R. — P s'annule pour $a = b$ $c = a$ $b = c$; Donc il contient $(a-b)(c-a)(b-c)$. Divisant par ce produit on aura un quotient du 1er degré en a ;

Le terme en a est $\frac{a^3(b^2-c^2)}{-a^2(b-c)} = -a(b+c)$;

Le terme indépendant de a est :

$$\frac{b^2c^2(b-c)}{-bc(b-c)} = -bc$$

Donc : $P = (a-b)(b-c)(a-c)(ab+ac+bc)$.

---

70. — Condition pour que $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ soit divisible par $x+y+z$.

R. — Substituant $-y-z$ à la place de x,

On a : $-(m+3)(y^2z + z^2y)$

Il faut donc que $m = -3$.

---

71. — Condition pour que $a^4 + b^4 + c^4 + m(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$ soit divisible par $a+b+c$.

R. — Substituant $-b-c$ à la place de a, on a pour reste :

$$(2+m)\left[b^4 + 2b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 + c^4\right]$$

Donc $m = -2$.

---

72. — Quotient de $1+ax$ par $1-2x+x^2$.

R. — Le quotient par $1-x$ est :

$$1+(a+1)x+(a+1)x^2+(a+1)x^3+\ldots\ldots$$

Donc par $(1-x)^2$ le quotient est :

$$1+(a+2)x+(2a+3)x^2+(3a+4)x^3+\ldots\ldots$$
$$+(na+n+1)x^n+\ldots\ldots$$

Faisant directement la division par $1-2x+x^2$, on voit que les coefficients obéissent à la loi :

$$C_n = \underline{2C_{n-1}} - C_{n-2}$$

73. — Quotient de $1+ax+bx^2$ par $(1-x)^3$.

R. — Faisant la division, on a pour les restes successifs :

$$(a+3)x+(b-3)x^2+x^3$$

$$(b+3a+6)x^2-(3a+8)x^3+(a+3)x^4$$

$$(3b+6a+10)x^3-(3b+8a+15)x^4+(b+3a+6)x^5.$$

&c.

Donc le quotient sera :

$$1+(a+3)x+(b+3a+6)x^2+(3b+6a+10)x^3+\ldots$$

Formation du coefficient de x^{n-1} :

1° Le coefficient de b est le nombre triangulaire :

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

2° Le coefficient de a égale celui de b augmenté de l'exposant de x dans le terme cherché.

C'est donc : $$\frac{(n-1)n}{2}$$

3° Le terme constant est égal au coefficient de a augmenté de l'exposant de x dans le terme suivant :

Donc $$\frac{n(n+1)}{2}$$

Autrement : $$\frac{1+ax+bx^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3}+\frac{ax}{(1-x)^3}+\frac{bx^2}{(1-x)^3}$$
$$= 1+3x+6x^2+10x^3+\ldots$$
$$+ax(1+3x+6x^2+10x^3+\ldots)$$
$$+bx^2(1+3x+6x^2+\ldots\ldots)$$

Ainsi on obtient immédiatement la loi.

74 — Démontrer que $(a+b)ab+(a+c)ac+(b+c)bc > 6abc$, quels que soient les nombres positifs a, b, c.

R. — Pour cela il suffit de prouver que :

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a} > 6,$$

ou que : $$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} > 6$$

ou enfin que : $$\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{a^2+b^2}{ab} > 6$$

Or chacun des termes du premier membre est > 2, car $(a-c)^2 > 0$

c'est-à-dire $$a^2+c^2 > 2ac$$

ou $$\frac{a^2+c^2}{ac} > 2$$

Il en est de même de $\frac{b^2+c^2}{bc}$ et de $\frac{a^2+b^2}{ab}$

Le théorème est donc démontré.

Équations du 1er degré.

75. — Le système :

$$3x+4y+5z=0 \qquad (1)$$
$$x+2y-z=3 \qquad (2)$$
$$5x+8y+3z=40 \qquad (3)$$

est-il compatible ?

R. — Multipliant (2) par 2 et ajoutant avec (1), il vient :

$$5x+8y+3z=6$$

équation incompatible avec (3).

Équations du 2e degré.

76. — Racines de $x^2+(a+b)x+ab=0$

R. — Somme des racines $= -a-b$;

Produit des racines $= ab$;

Donc $x' = -a$, $x'' = -b$.

77. — Condition pour que les 2 équations :

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

aient une racine commune.

R. — 1° Regardant les 2 équations comme simultanées, on en tire :

$$(ab' - ba')x^2 + cb' - bc' = 0 \qquad (ba' - ab')x + ca' - ac' = 0$$

D'où $$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb'). \quad (\alpha)$$

2° Divisant $ax^2 + bx + c$ par $a'x^2 + b'x + c'$, on trouve au reste :

$$\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)x + c - \frac{ac'}{a'}.$$

Écrivant que ce reste divise l'un des 2 trinômes, on trouve la condition (α)

Seconde solution. — La solution suivante donne en même temps une propriété de ces équations, c'est que les racines s'expriment dans ce cas sans radical.

Soient les équations :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0 \qquad (2)$$

Soient x', x'' les racines de (1).
x', x''' celles de (2)

On a les relations :

$$(3) \quad x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$(4) \quad x'x'' = +\frac{c}{a}$$

$$(5) \quad x' + x''' = -\frac{b'}{a'}$$

$$(6) \quad x'x''' = +\frac{c'}{a'}$$

D'où en retranchant (5) de (3), et (6) de (4)

$$x'' - x''' = \frac{b'}{a'} - \frac{b}{a} = \frac{ab' - ba'}{aa'}$$

$$x'(x'' - x''') = \frac{c}{a} - \frac{c'}{a'} = \frac{a'c - ac'}{aa'}$$

Donc $$x' = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$$

On en tire ensuite :

$$x'' = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}}$$

$$x''' = \frac{\frac{c'}{a'}}{\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}}$$

On aura la condition cherchée en exprimant que x' est racine de l'équation (1), on retombe sur la condition (α) que l'on peut écrire :

$$a(a'c - c'a)^2 + b(ca' - ac')(ab' - ba') + c(ab' - ba')^2 = 0.$$

78. — Faire disparaître le terme du premier degré dans l'équation du 2e degré

R. — $$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Si on pose donc $x = y - \frac{b}{2a}$

L'équation sera $ay^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$ (Voir théorie des équations, Problèmes)

79. — Racines de $x^2 + xy + y^2 = 0$

R. — $$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$$

Solutions réelles : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Solutions imaginaires : $\frac{y}{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

80. — Maxima et minima de $x + \frac{1}{x}$

R. — $x + \frac{1}{x} = m \qquad x^2 - mx + 1 = 0$

Donc $\frac{m^2}{4} > 1 \qquad m > 2$ ou $m < -2$

$m = -2$ est donc un maximum correspondant à $x = -1$

$m = 2$ est donc un minimum correspondant à $x = 1$

81. — Maximum de $m \cos x + n \sin x$

R. $\sin x = y$.

$$m \cos x + n \sin x = m\sqrt{1-y^2} + ny = z$$

$$y^2(m^2+n^2) - 2nzy + z^2 - m^2 = 0$$

Il faut donc que $\quad z^2 n^2 > (z^2 - m^2)(m^2+n^2)$

Ou $\quad z^2 < m^2 + n^2$

Pour $\quad z = \sqrt{m^2+n^2}$

$$y = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{n}{m}$$

(Voir dérivées. Problème 20).

82. Maximum et minimum de la fraction

$$y = \frac{7x^2+8x+1}{5x^2+7x+2}$$

R. — On a :

$$y = \frac{(x+1)(7x+1)}{(x+1)(5x+2)} = \frac{7x+1}{5x+2}$$

La fraction peut donc prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. On peut distinguer 2 séries de valeurs : dans l'une x variant de $-\infty$ à $-\frac{2}{5}$, y varie de $\frac{7}{5}$ à $+\infty$; dans la seconde x variant de $-\frac{2}{5}$ à $+\infty$, y varie de $-\infty$ à $\frac{7}{5}$. On peut dire que $\frac{7}{5}$ est un minimum pour la 1re série, un maximum pour la seconde.

83. — Maximum de $y = \dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$

R. —

$$y = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x+3}{x+2}$$

Comme dans le problème précédent, il est le maximum d'une série de valeurs de y, allant de 1 à $-\infty$ quand x varie de $-\infty$ à -2, et le minimum d'une autre série de valeurs de y, allant de $+\infty$ à 1 quand x varie de -2 à $+\infty$.

84. — Maximum et minimum de $y = \dfrac{5x^2-3x-2}{4x^2+7x-11}$

R. —

$$y = \frac{5x+2}{4x+11}$$

Donc $\frac{5}{4}$ est un maximum pour une 1re série de valeurs,

un minimum pour une seconde.

Remarque. — La solution des 3 questions précédentes se complète en remarquant que la dérivée de la fraction ne change pas de signe, et aussi en construisant les courbes représentées par les équations et en les résolvant à la manière ordinaire.

---

85. — Maximum et minimum de $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 1}$.

R. —
$$x^2(y-1) - x(y-1) - y - 1 = 0$$
Donc
$$(y-1)^2 + 4(y+1)(y-1) > 0$$
ou
$$(y-1)(4y+3) > 0$$
De là
$$y < -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad y > 1$$
$-\frac{3}{4}$ maximum correspondant à $x = \frac{1}{2}$

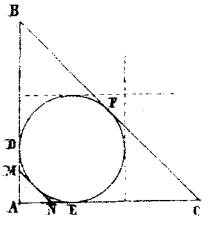
1 Minimum correspondant à $x = \pm\infty$

86. — Maximum du volume du cylindre droit ayant une surface latérale donnée.

R. —
$$V = \pi x^2 y = \frac{S}{2} x.$$
S étant constant le volume croît sans limite avec x.

87. — Étant donné une circonférence tangente aux deux côtés d'un angle droit, mener une troisième tangente qui forme avec les deux autres un triangle maximum ou minimum.

R. — Considérons la tangente supérieure BC : si nous relevons le point B suivant la ligne AB, le triangle formé augmente jusqu'à devenir infini quand la tangente est parallèle à AB ; si nous éloignons le point C suivant AC, la même chose arrive ; donc le triangle a passé par un minimum ; et comme tout est symétrique des 2 côtés, il aura lieu pour la tangente à 45°.



De même AMN passe par un maximum dans le même cas.

Pour traiter par le calcul

Soit : $AB = y$, $AC = x$

en posant $xy = m^2$ (1)

On a $BF = y - R$ $CE = x - R$

Donc $(x + y - 2R)^2 = x^2 + y^2$ (2)

Cette équation renferme les 2 cas ; car elle ne change pas quand on y remplace $x - R$ en $y - R$ par $R - x$ en $R - y$

L'Equation se simplifie en s'écrit :

$$2xy + 4R^2 = 4R(x + y)$$

On $$\frac{m^2}{2R} + R = x + y$$

Donc x et y sont les deux racines de l'équation

$$z^2 - \left(R + \frac{m^2}{2R}\right) z + m^2 = 0$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$\left(R + \frac{m^2}{2R}\right)^2 > 4m^2$$

On $$m^4 - 12R^2 m^2 + 4R^4 > 0$$

Décomposons en facteurs :

$$\left\{m^2 - 2R^2(3 + 2\sqrt{2})\right\}\left\{m^2 - 2R^2(3 - 2\sqrt{2})\right\} > 0$$

Ce qui exige que l'on ait

$$m^2 - 2R^2(3 - 2\sqrt{2}) < 0$$

On $$m^2 - 2R^2(3 + 2\sqrt{2}) > 0$$

La première condition donne le maximum

$$m^2 = 2R^2(3 - 2\sqrt{2})$$

Et la seconde le minimum

$$m^2 = 2R^2(3 + 2\sqrt{2})$$

x et y sont égaux entre eux et à

$$\frac{m^2 + 2R^2}{4R}$$

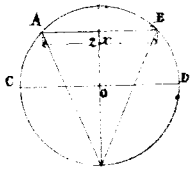
Ce qui donne pour les valeurs maxima de m^2 :

$$x = y = R\,(2 - \sqrt{2})$$

Et pour la valeur minima :

$$x = y = R\,(2 + \sqrt{2})$$

88. — Inscrire dans une sphère un cône ayant pour base AB et dont le volume soit égal à celui du segment ABCD.



R. — Équation :

$$\frac{1}{3}\pi x^2\left(r + \sqrt{r^2 - x^2}\right) = \frac{1}{2}\pi\left(r^2 + x^2\right)\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{6}\pi\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

On $\quad x^2 = 2r\sqrt{r^2 - x^2}$

D'où $\quad x = \frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{5} - 1} = R\sqrt{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}$

89. — Résoudre $x^4 + px^2 + q = 0$

R. — 1er Cas. $\frac{p^2}{4} - q > 0$, $x^4 + px^2 + q = \left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$

$$= \left(x^2 + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x^2 + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

2e Cas. $\frac{p^2}{4} - q < 0$, $x^4 + px^2 + q = \left(x^2 + \sqrt{q}\right)^2 - x^2\left(2\sqrt{q} - p\right)$

$$= \left(x^2 + x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q}\right)\left(x^2 - x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q}\right)$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{q} - p} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{q} + p}\sqrt{-1}$$

90. — Résoudre $x^4 + 1 = 0$

R. — Appliquant la formule ci-dessus

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

On peut appliquer le procédé directement.

91. — L'équation $x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1 = 0$, a-t-elle des racines imaginaires ?

R. — $$\frac{p^2}{4} - q = \cos^2 2\alpha - 1 < 0 ;$$

Donc toutes les racines sont imaginaires.

Le premier membre peut s'écrire :

$$(x^2+1)^2-2x^2(1+\cos 2\alpha)=(x^2+1)^2-4x^2\cos^2\alpha=(x^2+2x\cos\alpha+1)(x^2-2x\cos\alpha+1)$$

92. — Décomposer $(x^2+px+q)^2+1$ en facteurs réels du 2e degré.

R. — Diviser par $x^2+\alpha x+\beta$; le reste sera $Mx+N$. Posant $M=0$, $N=0$ on aura 2 équations du 2e degré, donnant 2 valeurs de α et 2 de β.

93. — Résoudre le système :

$$x^2+y^2+axy+b(x+y)+c=0$$
$$x^2+y^2+\alpha xy+\beta(x+y)+\gamma=0$$

R. — $xy=u \quad x+y=z$

Équations :
$$z^2+(a-2)u+bz+c=0$$
$$z^2+(\alpha-2)u+\beta z+\gamma=0$$

Par soustraction on aura une équation donnant u en fonction de z ; substituant, on tirera la valeur de z, d'où on déduira u ; x et y seront les racines de :

$$X^2-zX+u=0$$

94. — Résoudre l'équation :

$$a^2b^2x^{\frac{1}{q}}-4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}x^{\frac{p+q}{2pq}}=a^2b^2x^{\frac{1}{p}}$$

R. — Je divise par a^2b^2 les deux membres de l'équation.

$$x^{\frac{1}{q}}-4a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{p+q}{2pq}}=x^{\frac{1}{p}}$$

Je pose $\quad x^{\frac{2p}{2pq}}=y \qquad x^{\frac{2q}{2pq}}=z$

Il en résulte $\quad x^{\frac{p+q}{2pq}}=y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$

Et l'équation devient : $y-4a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-z=0$

D'où $\quad y^{\frac{1}{2}}=2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\pm\sqrt{4a^{-1}b^{-1}z+z}$

ou $\quad y^{\frac{1}{2}}=z^{\frac{1}{2}}\left\{2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\pm\sqrt{1+4a^{-1}b^{-1}}\right\}$

Or on a :
$$y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{p}{2pq}}$$
$$z^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{q}{2pq}}$$

Substituant, il vient :

$$x^{\frac{p-q}{2pq}} = \frac{2 \pm \sqrt{4+ab}}{\sqrt{ab}}$$

D'où on tire x.

Progressions et séries.

95. — Somme de n premiers nombres impairs.

R. — Les nombres impairs sont $2.1-1$, $2.2-1$, $2.3-1$ ..... $2n-1$.

La somme demandée $= \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$

96. — Y a-t-il une progression telle que 3 termes consécutifs soient les 3 côtés d'un triangle rectangle ?

R. — 1° Progression arithmétique.

Equations : $y - x = z - y$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

De là $x^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 = z^2$

Ce qui donne $x = -z$ ou $x = \frac{3}{5}z$

Et par suite $y = 0$ ou $y = \frac{4}{5}z$

Exemple : $x = 3$ $y = 4$ $z = 5$.

2° Progression géométrique.

Equations : $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

D'où $x^2 + xz = z^2$

x est le plus grand segment de z partagé en moyenne et extrême raison :

$$x = \frac{z}{2}\sqrt{5-1}$$

$$y = z\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

---

97. — Somme de $1 + 2q + 3q^2 + \dots\dots + nq^{n-1}$

1re Solution. — Cette somme peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
1 + q + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^{n-1} &= \frac{q^n - 1}{q-1} \\
+ q + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^{n-1} &= \frac{q^n - q}{q-1} \\
+ q^2 + q^3 + \dots\dots\dots + q^{n-1} &= \frac{q^n - q^2}{q-1} \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ q^{n-2} + q^{n-1} &= \frac{q^n - q^{n-2}}{q-1} \\
+ q^{n-1} &= \frac{q^n - q^{n-1}}{q-1}
\end{aligned}$$

Elle est donc égale à :

$$S = \frac{1}{q-1}\left[nq^n - (1 + q + q^2 + \dots\dots + q^{n-1})\right] = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}$$

Seconde solution. [Catalan (Traité des séries)]

Soit $\quad S(n) = 1 + 2q + 3q^2 + \dots\dots + nq^{n-1}$

On a $\quad q.S(n) = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots\dots + nq^n$

Donc $\quad (1-q)\,S(n) = 1 + q + q^2 + \dots\dots + q^{n-1} - nq^n$

D'où $\quad S(n) = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q}$

Si l'on suppose $q^2 < 1$, auquel cas seulement la série est convergente.

$$S = \lim S(n) = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Donc la somme de la série convergente

$$1 \qquad 2q \qquad 3q^2 \quad \dots\dots\dots \quad nq^{n-1}$$

obtenue en multipliant terme à terme les deux progressions :

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & \dots\dots\dots\; n \\
1 & q & q^2 & \dots\dots\dots\; q^{n-2}
\end{array}$$

est égale au carré de la somme de la seconde progression.

98. — La série $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots\dots\dots + \frac{x^n}{1.2-n}$ est-elle convergente ?

R. — Le rapport d'un terme au précédent est $\frac{x}{n+1}$; or, lorsque n devient de plus en plus grand, ce rapport tend vers 0, si la valeur de x est finie, donc cette série est

convergente tant que x a une valeur finie.

Cette série a pour somme e^x

99. — En s'arrêtant au terme $\frac{x^n}{1.2\ldots n}$ dans la série précédente, trouver une limite du reste de la série.

R. — Soit un nombre $K < 1$, le reste R de la série sera:

$$R < \frac{\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots\ldots n(n+1)}}{1-K}$$

Ou

$$R < \frac{x^{n+1}}{(1-K).1.2\ldots\ldots n(n+1)}$$

On peut aussi trouver une autre limite du reste, mais moins approchée que la précédente.

$$R < \frac{K}{1-K}\,\frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n}$$

100. — Développement de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$; trouver directement la limite de ce développement quand m tend vers l'infini, x étant fini.

R. — Donnons à m une valeur positive et très grande, on aura:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + m\frac{x}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{x^2}{m^2} + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots n}\frac{x^n}{m^n} + \rho$$

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{(1-\frac{1}{m})x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots\ldots(1-\frac{n-1}{m})}{1.2\ldots\ldots n}x^n + \rho$$

Considérons la série convergente:

$$u = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n} + R$$

1° Soit $x > 0$. Prenons n assez grand pour que $R < \varepsilon$, si petit que soit ε, et soit en outre $m > n$

Si on compare les termes du développement à ceux de la série, on voit que les 2 premiers termes sont les mêmes de part et d'autre, mais qu'ensuite les termes du développement sont respectivement plus petits que les termes correspondants de la série, et comme cela s'étend aux termes qui composent ρ et R, il s'ensuit que $\rho < R$.

Mais si n restant fixe, on fait croître m indéfiniment, chacun des termes du développement a pour limite le terme correspondant de la série, de sorte que la différence entre chaque terme du développement et le correspondant de la série pourra en venir à être aussi petite qu'on voudra.

Si on désigne par δ la plus grande des différences, et par D la somme de ces différences, on aura $D < (n-1)\delta$, et si on veut que $D < \varepsilon'$; ε' étant un nombre donné si petit qu'il soit, il suffit que $\delta < \frac{\varepsilon'}{n-1}$

On a donc $$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = u - (R-\rho) - D$$

Or puisque $R < \varepsilon$, a fortiori, $R - \rho < \varepsilon$, et comme $D < \varepsilon'$, il s'ensuit que $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ diffère de u d'une quantité $< \varepsilon + \varepsilon'$.

Donc $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ peut en venir pour une valeur de m suffisamment grande à différer de u d'aussi peu qu'on voudra.

Donc enfin lorsque m croît indéfiniment

$$\text{Lim.}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = u = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \cdots\cdots = e^x$$

2° Soit $x < 0$. En reprenant les mêmes raisonnements, on arriverait à la même conclusion.

101. — Trouver une progression arithmétique telle qu'il existe un rapport constant entre la somme des x premiers termes et la somme des Kx suivants, quelque soit x.

R. — Soit S la première somme, S' la seconde : le premier terme étant a, le terme de rang x est $a + r(x-1)$;

Donc $$S = \frac{2a + r(x-1)}{2}\,x$$

Le $(x+1)^{\text{ème}}$ terme est $a + rx$ et le $Kx^{\text{ème}}$ est $a + rx + r(Kx-1)$

Donc $$S' = \frac{2(a+rx) + r(Kx-1)}{2}\,Kx$$

Prenons le rapport :

$$\frac{S}{S'} = \frac{2a + r(x-1)}{[2a + rx(K+2) - r]K} = \frac{2a - r + rx}{(2a-r)K + Krx(K+2)}$$

Expression de la forme $\frac{Ax+B}{A'x+B'}$, pour que ce rapport soit indépendant de x, il faut que $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ c'est-à-dire que :

$$\frac{2a-r}{(2a-r)K} = \frac{r}{rK(K+2)}$$

Ce qui donne $$2a - r = 0$$

Ou $$\frac{1}{K} = \frac{1}{K(K+2)}$$

La 2me égalité est impossible.

Donc la progression demandée est telle que sa raison est double du premier terme.

102. — Étudier la série :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\ldots\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\ldots$$

R. — Si nous considérons la série des arcs :

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\ldots$$

On voit que cette série est convergente, car c'est une progression géométrique décroissante dont chaque terme est multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi quand n augmente, la somme des n premiers termes tend vers une limite finie et déterminée. Or, le rapport de la tangente à l'arc ayant pour limite 1, on peut prendre n assez grand pour que l'arc diffère de la tangente d'aussi peu qu'on voudra. Ainsi, à partir de cette valeur de n, la somme des termes suivants de la série proposée différera d'aussi peu qu'on voudra de la somme des termes de la série (1), elle ne pourra donc devenir infinie. La somme des termes qui précèdent ceux-là, aura une valeur quelconque mais finie, donc la somme des termes de la série proposée restera constamment finie ; donc cette série est convergente.

---

103. — Démontrer qu'une série dont les termes sont des fractions ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur les termes d'une progression arithmétique est divergente.

R. — Soit $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+r}+\frac{1}{a+2r}+\ldots\ldots\ldots\frac{1}{a+nr}+\ldots\ldots$ la série proposée.

Soit K un nombre entier, tel que $Kr>a$, les termes de la série proposée seront respectivement plus grands que les termes de la série :

$$\frac{1}{Kr}+\frac{1}{(K+1)r}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(K+n)r}+\ldots\ldots$$

Or

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{K+1}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{K+n}+\ldots\ldots\right)$$

qui est une série divergente parce que la quantité entre parenthèses n'est autre que la série harmonique prise à partir d'un terme de rang K.

Donc, à fortiori, la série proposée est convergente.

104. — Trouver la divergence de la série :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n+1} + \cdots\cdots$$

R. — En effet, on a : $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} > \frac{1}{3}$

De même : $\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots\cdots + \frac{1}{27} > \frac{9}{27}$ ou $\frac{1}{3}$

Ainsi de suite. — On peut donc prendre dans la série, une infinité de groupes tels que la somme des termes de chacun de ces groupes soit $> \frac{1}{3}$; donc la valeur de la série croît indéfiniment avec n. Donc la série est divergente.

---

105. — La série $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}$ est divergente.

R. — Le procédé de démonstration est le même que dans le cas précédent.

Il y a dans la série une infinité de groupes tels que la somme des termes de chacun d'eux soit $> \frac{1}{4}$, donc la série est divergente.

---

106. — Le nombre e n'est pas racine d'une équation du 2e degré.

R. — On aurait : $Ae^2 + Be + C = 0$

ou $Ae + Ce^{-1} + B = 0$

ou $A\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \cdots\cdots\right) + C\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \cdots\cdots\right) + B = 0$

Multipliant par $1.2.3\ldots\ldots n$

$$\frac{A}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right) \pm \frac{C}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots\right) = E$$

E représente un nombre entier. La première parenthèse ne peut dépasser 2 ; donc $\frac{A}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots\right)$ est une fraction déterminée avec n en pouvant devenir aussi petite qu'on voudra. Cela est vrai à fortiori pour le second terme. Ainsi une fraction serait égale à un entier E ; ce qui est impossible.

---

107. Série :

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots\ldots p}+\frac{x^{p+q}}{1.2\ldots\ldots(p+q)}+\frac{x^{p+2q}}{1.2\ldots\ldots(p+2q)}+\ldots\ldots+\frac{x^{p+nq}}{1.2\ldots\ldots(p+nq)}+\ldots$$

R. — Rapport d'un terme au précédent

$$\frac{x^q}{(p+(n-1)q+1)(p+(n-1)q+2)\ldots\ldots(p+nq)}$$

Quand n augmente indéfiniment, ce rapport tend vers Zéro. La série est donc convergente.

108. — Série : $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$

R. — Cas particulier de la précédente.

Pour traiter directement : rapport d'un terme au précédent $\frac{x}{n}$. Tend vers Zéro quelque soit x, quand n augmente indéfiniment.

109. — Série : $x+2x^2+3x^3+\ldots\ldots+nx^2+\ldots\ldots$

R. —
$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{nx^n}{(n-1)x^{n-1}}=\frac{n}{n-1}x$$

Pour qu'il soit plus petit que 1 à la limite, il faut que x soit <1 en valeur absolue.

Quand n augmente indéfiniment, nx^n diminue, x étant <1.

En effet, pour que $nx^n>(n+1)x^{n+1}$, il suffit que $x<\frac{n}{n+1}$. Or $\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$ peut différer de 1 de moins de toute quantité donnée ; donc, pour n assez grand, on aura $x<\frac{n}{n+1}$ et nx^n décroîtra.

Pour n infini, nx^n est nul. Car $nx^n=\frac{n}{\frac{1}{x^n}}$, et le rapport des dérivées $=-\frac{x^n}{\log x}$; pour n infini, il s'annule.

110. — La Série :

$$\sin\alpha+x\cos\alpha-\frac{x^2}{1.2}\sin\alpha-\frac{x^3}{1.2.3}\cos\alpha\ldots\ldots$$ est convergente.

R. — Considérons la série à termes positifs :

$$\sin\alpha+x\cos\alpha+\frac{x^2}{1.2}\sin\alpha+\ldots\ldots$$

Le rapport d'un terme quelconque au précédent est :

$$\frac{x}{2n} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

En prenant n suffisamment grand, ce rapport peut devenir aussi près qu'on voudra de 0; la série considérée est donc convergente:

La série proposée sera donc a fortiori convergente.

Formule du binôme et ses applications.

111. — $$C_{m,n} = C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1}$$

R. — Distinguons dans les combinaisons de m lettres n à n, celles qui contiennent une lettre a et celles qui ne la contiennent pas. Ces dernières sont au nombre de $C_{m-1,n}$. Les premières, si on supprime la lettre a, deviennent la combinaison de $m-1$ lettres $n-1$ à $n-1$. — Ce qu'il fallait démontrer.

112. — Lim $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$ quand m augmente indéfiniment

R $$\lim\left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \lim\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}\right]^{-1} = e^{-1}$$

113. — Calculer $x^m + \frac{1}{x^m}$ en fonction de $x + \frac{1}{x}$

1° m entier et positif.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^m = x^m + m x^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-4} + \ldots\ldots + \frac{m}{x^{m-2}} + \frac{1}{x^m}$$

Si m est impair:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^m = x^m + \frac{1}{x^m} + m\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+1}{2}}{1.2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Si m est pair:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^m = x^m + \frac{1}{x^m} + m\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$$

Faisant successivement $m = 2, 3, 4, 5$ &c, on tirera de là:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + 2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^5 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + 5\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{ \&c}$$

2° Méthode générale.

$$x = e^{y\sqrt{-1}} \qquad \frac{1}{x} = e^{-y\sqrt{-1}} \qquad x + \frac{1}{x} = 2\cos y$$

$$x^m + \frac{1}{x^m} = e^{my\sqrt{-1}} + e^{-my\sqrt{-1}} = 2\cos my$$

Or $\cos my$ peut toujours s'exprimer rationnellement en fonction de $\cos y$.

Le problème est donc résolu.

114. — Plus grand coefficient dans le développement de la puissance $m^{ème}$ d'un binôme.

R. — $$(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \dots + a^m$$

Le terme général T_n qui en n avant lui est :

$$T_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} a^n x^{m-n}$$

Le terme suivant $T_{n+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{1.2\dots n+1} a^{n+1} x^{m-n}$

Le rapport des coefficients de ce dernier terme au précédent est $\frac{m-n}{n+1}$. Si on résout cette inégalité par rapport à n, on en tire $n < \frac{m-1}{2}$. Il y a alors 2 hypothèses à faire : 1° m impair, alors le nombre total des termes étant $m+1$, les 2 termes du milieu seront ceux qui auront le plus grand coefficient.

2° m pair, alors $\frac{m-1}{2}$ n'est pas entier, mais on peut se contenter de prendre pour satisfaire à l'inégalité : $n < \frac{m-1}{2}$ le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{m-1}{2}$; et comme n représente toujours le nombre des termes qui précède celui auquel on s'arrête, on voit que c'est le terme du milieu qui aura le plus grand coefficient.

Exponentielles et Logarithmes.

115. — Pourquoi $\frac{\log p}{\log q}$ ne change-t-il pas quand on change de base ?

R. — Parce qu'il y a un rapport constant entre les logarithmes d'un même nombre dans des systèmes différents.

116. — Sens de la formule des annuités quand le nombre des années grandit sans limite.

R. — Formule : $A(1+r)^n = a\,\frac{(1+r)^n-1}{r}$

Pour n infini $A = \frac{a}{r}$ $a = Ar$; a est donc l'intérêt annuel de A ; on rentre dans l'espèce des rentes sur l'État.

117. — On place tous les ans des annuités en progression arithmétique de raison a, on donne la valeur de la somme au bout de n années. Calculer la 1re annuité.

R. — Équation

$$A = x(1+r)^{n+1} + (x+a)(1+r)^{n-1} + (x+2a)(1+r)^{n-2} + \dots + x + na$$

$$= x\,\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r} + a\left\{\frac{(1+r)^n-1}{r} + \frac{(1+r)^{n-1}-1}{r} + \dots + \frac{1+r-1}{r}\right\}$$

$$= x\,\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r} + \frac{a}{r}\left\{(1+r)\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r} - n\right\}$$

$$x = \frac{Ar^2 - a\left((1+r)^{n+1} - (n+1)r - 1\right)}{r\left[(1+r)^{n+1}-1\right]}$$

118. — Continuité de x^x.

R. — Il faut montrer que $(x+h)^{x+h} - x^x$ peut être rendu plus petit que toute quantité donnée.

Or : $(x+h)^{x+h} - x^x = (x+h)^{x+h} - (x+h)^x + (x+h)^x - x^x$

Et on sait que les deux différences $(x+h)^{x+h} - (x+h)^x$ et $(x+h)^x - x^x$ peuvent être rendues chacune moindre que toute quantité donnée.

Il en est de même de leur somme.

119. — Vraie valeur de $(a^{\frac{1}{m}}-1)^m$ quand m croît sans limite.

R. — 1° Soit $a > 1$. — Pour m suffisamment grand, $a^{\frac{1}{m}} - 1 < 1$; alors $m\,l\,(a^{\frac{1}{m}}-1)$ est négatif. Quand m croît indéfiniment, ce logarithme augmente indéfiniment en valeur absolue, sans changer de signe ; donc la fonction tend vers zéro.

2° Soit $a < 1$. Posons $a = \frac{1}{a'}$, alors $a' > 1$ et d'après le cas précédent $(a^{\frac{1}{m}}-1)^m$ a pour limite 0, quand m croît indéfiniment.

Or $\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right)^m = \left(\frac{1}{a^m}-1\right)^m = \left(\frac{1-a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{m}}}\right)^m = \frac{1}{a}\left(1-a^{\frac{1}{m}}\right)^m$

Donc cette dernière quantité a pour limite 0 et a étant constant $\left(1-a^{\frac{1}{m}}\right)^m$ a pour limite 0.

Donc $\left(a^{\frac{1}{m}}-1\right)^m$ a bien aussi pour limite 0.

120. — Vraie valeur de $\frac{a^x-1}{x}$ pour $x=0$

R. — $$a^x = 1 + x\,La + \frac{x^2(La)^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$\frac{a^x-1}{x} = La + x\,F(x)$$

$F(x)$ étant une fonction entière.

Donc pour $x=0$, $\lim \frac{a^x-1}{x} = La$

Remarque. — Il faut se garder de prendre le rapport des dérivées; la connaissance de la dérivée de a^x résulte précisément de la détermination du rapport $\frac{a^x-1}{x}$ pour $x=0$.

On peut aussi résoudre cette question sans s'appuyer sur les développements des fonctions en séries.

Posons : $$a^x - 1 = \frac{1}{m}$$

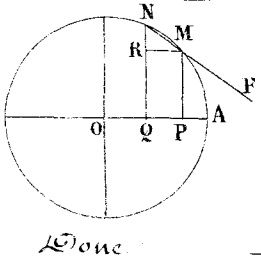
D'où $$x = \frac{L\left(1+\frac{1}{m}\right)}{La}$$

Et par suite $$\frac{a^x-1}{x} = \frac{La}{m\,L\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \frac{La}{L\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}$$

Quand x tend vers 0, m croît indéfiniment, alors $L\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers 1, et par suite $\frac{a^x-1}{x}$ tend vers La

Dérivées.

121. — Trouver géométriquement la dérivée du sinus.



R. — $AM = x$ $MN = h$

$MP = \sin x$ $NQ = \sin(x+h)$ $NR = K$

Or h étant très petit, l'arc MN se confond avec la corde,

Donc $$\frac{K}{h} = \frac{NR}{\text{arc } MN} = \frac{NR}{\text{corde } MN}$$

Ainsi $\frac{K}{h} = \cos MNR$; Or l'angle MNR = l'angle FMT qui à la limite tend vers x puisque la limite de la

position de la sécante MF est la tangente en M.

122. — La fonction arc sin x n'est pas complètement déterminée ; comment peut-elle avoir une dérivée ?

R. — Parce que toutes ses déterminations pour une valeur donnée de x, diffèrent par des constantes.

123. — Trouver une fonction telle que le carré de sa dérivée soit égal à cette fonction multipliée par sa dérivée seconde.

R. — Soit $y = f(x)$ cette fonction. On doit avoir :

$$y'^2 = yy'' \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{y} = \frac{y''}{y'}$$

Remontant aux fonctions primitives :

$$\log y' = \log y + a = \log y + \log c = \log cy$$

et par suite $y' = cy$ D'où $\frac{y'}{y} = c$ et par suite $\log y = cx + d$.

D'où :

$$y = c^d . e^{cx} = Ae^x .$$

124. — Dérivée de $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

R. —

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

125. — Dérivée de $\log \cot \left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$

R. — 1° $\cot \left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right)$

Donc la dérivée

$$= \frac{1}{\sin(90^\circ + x)} = \frac{1}{\cos x}$$

2° Directement

$$y' = \frac{1}{\cot\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2 \sin^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{1}{\cos x}$$

126. — Dérivée de $y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$

R. —

$$e^{\operatorname{arc\,tg} x} . \frac{1}{1 + x^2}$$

127. — Dérivée de $\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

R. — $\frac{1}{1+x^2}$ = dérivée de $\operatorname{arc\,tg} x$. Les 2 fonctions ne

diffèrent donc que par une constante. On sait en effet que :

$$\sin y = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}}$$

128. — Dérivée successive de $e^{mx} + e^{-mx}$.

R. —
$$y^{(n)} = m^n \left(e^{mx} + (-1)^n e^{-mx}\right)$$

129. — Dérivée de x^x.

R. — Par le théorème sur les dérivées des fonctions composées.

$$y' = x.x^{x-1} + x^x \ln x = x^x (1 + \ln x)$$

130. — Dérivée de $y = (4x)^{\sin x}$

R. —
$$y' = 4(4x)^{\sin x - 1} (\sin x + x \cos x \ln . 4x)$$

131. — Dérivée de $y = \operatorname{tg} x (\ln x)^{\operatorname{arc}\sin x}$

R. — $y' = \frac{1}{\cos^2 x} (\ln x)^{\operatorname{arc}\sin x} + \operatorname{tg} x (\ln x)^{\operatorname{arc}\sin x - 1} \left(\frac{\operatorname{arc}\sin x}{x} + \ln x . \ln . \ln x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Remarque. — On peut appliquer aux 3 derniers problèmes la formule :

Dérivée de $u^v = u^{v-1} (vu' + uv' \ln u)$

132. — Dérivée de y dans l'équation :

$$x^2 + y^2 - a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = 0$$

R. —
$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x + a^2 \frac{y}{x^2+y^2}}{2y - a^2 \frac{x}{x^2+y^2}}$$

133. — Dérivée de y dans l'équation :

$$x^2 + y^2 = a^2 e^{2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}$$

R. —
$$x + yy' = a^2 e^{2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}} . \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

134. Dérivée de arc sin x. Explication des 2 valeurs.

R 1°. Procédé.

On a $y = \operatorname{arc}\sin x$, d'où $x = \sin y$,

et par suite, en dérivant :

$$1 = \cos y \cdot y'$$

et comme $\cos y = \pm \sqrt{1-x^2}$

$$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Le double signe qu'on trouve pour y' n'indique pas nécessairement une double valeur pour y' dans chaque cas. Il peut se faire que suivant les circonstances, on doive prendre tantôt l'une, tantôt l'autre.

Supposons l'arc > 0 et $< \frac{\pi}{2}$.

Soit $AM = y$, $MP = x$. Lorsque sin MP augmente, l'arc y augmente en même temps ; Δx et Δy étant alors de même signe, on doit prendre pour y' le signe $+$.

Mais si l'arc est $> \frac{\pi}{2}$ et $< \pi$, lorsque le sinus diminuera l'arc augmentera, Δy et Δx sont alors de signe contraire et il faut prendre pour y' le signe $-$.

On verrait de même que si l'arc $> \pi$ et $< \frac{3\pi}{2}$, il faut prendre pour y' le signe $-$, tandis que si l'arc est $> \frac{3\pi}{2}$ et $< 2\pi$, il faut prendre le signe $+$.

135. — Dérivée de arc sin x.

R. — 2e Procédé.

Soit
$$\frac{\text{arc sin}(x+h) - \text{arc sin}\, x}{h} = \frac{K}{h}$$

Prenons les sinus des deux membres.

$$\frac{\sin K}{h} = \frac{(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}}{h}$$

Dans le second membre, je multiplie et je divise par la somme des quantités entrant au numérateur.

$$\frac{\sin K}{h} = \frac{(x+h)^2(1-x^2) - x^2\{1-(x+h)^2\}}{h\{(x+h)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+h)^2}\}}$$

Réduisant et divisant par h.

$$\frac{\sin K}{h} = \frac{2x+h}{(x+h)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+h)^2}}$$

Faisant $h = 0$, on a pour la dérivée cherchée :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On trouverait de même la dérivée de arc cos x.

136. — Dérivée de arc tg x.

R. — Posons $K = \text{arc tg}(x+h) - \text{arc tg}\, x$.

en prenant les tangentes des deux membres.

$$\text{tg}\, K = \frac{h}{1 + x(x+h)}$$

On
$$\frac{\text{tg}\, K}{h} = \frac{1}{1 + x(x+h)}$$

Faisant $h = 0$, on trouve pour la dérivée :

$$\frac{1}{1+x^2}$$

137. — Trouver une fonction telle que la somme de son carré et du carré de sa dérivée soit égale à une constante.

R. — Soit $y = f(x)$; on doit avoir $y^2 + y'^2 = a^2$

D'où
$$y' = \sqrt{a^2 - y^2}$$

$\frac{y'}{\sqrt{a^2-y^2}} = 1$ remontant aux primitives, il vient :

$$\frac{1}{a} \text{arc sin} \frac{y}{a} = x + c$$

ou
$$\text{arc sin} \frac{y}{a} = a(x+c)$$

D'où
$$y = a \sin a(x+c)$$

138. — Trouver une fonction de x qui soit le logarithme de sa dérivée.

R. — Soit y cette fonction, on doit avoir :

$$y = \log y' \quad \text{ou} \quad e^y = y'$$

D'où
$$\frac{y'}{e^y} = y' \cdot e^{-y} = 1$$

Remontant aux primitives, il vient :

$$-e^{-y} = x + c$$

Donc
$$e^{-y} = -c - x = a - x$$

Ainsi $\frac{1}{e^y} = a - x$, ou $e^y = \frac{1}{a-x}$

Et enfin $y = \log \frac{1}{a-x}$.

139. — Trouver la dérivée de arc sin $2x\sqrt{1-x^2}$

R. — Soit $y = F(x) = \text{arc sin } 2x\sqrt{1-x^2}$

y' étant la dérivée, on a

$$y' = \frac{F'(x)}{\sqrt{1-F(x)^2}}$$

$$y' = \frac{2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi, cette dérivée est double de celle de arc sin x, résultat dont il est facile de se rendre compte ;

Si, en effet, on pose :

$$z = \text{arc sin } x$$

$$z' = \text{arc sin } 2x\sqrt{1-x^2}$$

On en conclut $x = \sin z$

$$2x\sqrt{1-x^2} = \sin z'$$

Or $\sqrt{1-x^2} = \cos z$

Donc $\sin z' = 2 \sin z \cos z$

Par suite $z' = 2z$

Et la dérivée de z' doit être double de celle de z.

140. — Trouver la dérivée de arc tg $\frac{a+x}{1-ax}$

R. — $$y' = \frac{F(x)}{1+F(x)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1-ax+a(a+x)}{(1-ax)^2}}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} = \frac{a^2+1}{1+a^2x^2+x^2+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Cette dérivée est la même que celle de arc tg x ; si l'on pose, en effet :

$$z = \text{arc tg } x$$

$$z' = \text{arc tg } \frac{a+x}{1-ax}$$

On en conclut : $x = \operatorname{tg} z$

$$\frac{a+x}{1-ax} = \operatorname{tg} z'$$

Donc $z' = z + \operatorname{arc\,tg} a$

Remarque. — On trouverait de même que la dérivée de $\operatorname{arc\,tg} \frac{a+b+x-abx}{1-ab-ax-bx}$ égale celle de $\operatorname{arc\,tg} x$.

141. — Dérivée de :

$$y = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a \sin x}{a+b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)\right]$$

R. — La dérivée de $\frac{a \sin x}{a+b\cos x}$ est : $\frac{a(b+a\cos x)}{(a+b\cos x)^2}$.

La dérivée de $\frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$ est toutes réductions faites : $\frac{b}{a+b\cos x}$

Donc $$y' = \frac{\cos x}{(a+b\cos x)^2}$$

142. — Dérivée de

$$y = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{a \sin x}{a+b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right).$$

On a trouvé précédemment que la dérivée de :

$$\frac{a \sin x}{a+b\cos x} \quad \text{est} \quad \frac{a(b+a\cos x)}{(a+b\cos x)^2}$$

La dérivée de : $\operatorname{arc\,cos} \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$ est $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$

Donc : $$y' = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a(b+a\cos x)}{(a+b\cos x)^2} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}\right] = \frac{\cos x}{(a+b\cos x)^2}$$

143. — Dérivée de :

$$y = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{a \sin x}{a+b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin x \sqrt{a^2-b^2}}{b+a\cos x}\right)$$

R. — On connaît la dérivée du 1er terme.

La dérivée de : $\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin x \sqrt{a^2-b^2}}{b+a\cos x}$ est après réduction : $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$

Donc $$y' = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{a(b+a\cos x)}{(a+b\cos x)^2} - \frac{b}{a+b\cos x}\right) = \frac{\cos x}{(a+b\cos x)^2}.$$

144. — Démontrer que e^x est la seule fonction qui se reproduise par la dérivation.

R. — Soit $y = f(x)$ une fonction jouissant de cette propriété. Je dis que $f(x)$ e^x

Remarquons d'abord que si la fonction est identique avec sa dérivée 1re, elle l'est avec toutes ses dérivées successives; car si $f(x) = f'(x)$, en prenant les dérivées, on aura :

$$f'(x) = f''(x)$$

Donc, alors $\quad f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots\ldots$

Si on a $\quad f(x) = f'(x)$, on aura $\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 1$

Prenant les primitives, il vient :

$$\mathrm{L}\, f(x) = x + C\,; \qquad \underline{\text{ou}} \qquad f(x) = e^{x+C} = e^C . e^x = A . e^x$$

145. — Dérivée de $y = \mathrm{l}\left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right)$

R. — $$y' = \frac{-\sin x + \sqrt{-1}\cos x}{\cos x + \sqrt{-1}\sin x} = \frac{(-\sin x + \sqrt{-1}\cos x)(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)}{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)} = \sqrt{-1}$$

Donc : $$y = x\sqrt{-1} + C$$

Faisant $x = 0$, on conclut $C = 0$

Et par suite : $$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

146. — Maximum de $m\cos x + n\sin x = y$.

R. — $$y' = -m\sin x + n\cos x = 0$$

D'où $\quad \mathrm{tg}\, x = \dfrac{n}{m} \qquad\qquad y = \sqrt{m^2 + n^2}$

(Voir Equat. du 2e degré. — Problème 6).

147. — Maximum de $\dfrac{x^m}{e^x}$

R. — $x = e^{\mathrm{l}x}$; donc la fonction peut s'écrire $e^{m\mathrm{l}x - x}$; elle sera maximum avec son logarithme $m\mathrm{l}x - x$, ce qui donne $\dfrac{m}{x} - 1 = 0 \qquad x = m$; — Alors la fonction $= \left(\dfrac{m}{e}\right)^m$

148. — $\underline{\mathrm{Lim}}\ \dfrac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{l}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$ quand $x = \dfrac{\pi}{2}$

R. — La fonction prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Le rapport des dérivées $\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 x}$ prend la forme $\frac{0}{0}$; prenant de nouveau le rapport des dérivées, on aura une quantité $-\frac{1}{2\sin x\cos x}$ qui, pour $x=\frac{\pi}{2}$, croît sans limite en valeur absolue ; il en est donc de même de la fonction proposée.

149. — Dérivée de : $y = \text{arc sin}\,\frac{\sqrt{1-e^2}\,.\sin x}{1-e\cos x}$

R. —
$$y' = \frac{\sqrt{1-e^2}\,(\cos x - e)}{\sqrt{(1-e\cos x)^2 - \sin^2 x(1-e^2)}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\cos x - e}$$

150. — Dérivée de : $y = \text{arc cos}\,\frac{a+b.\cos x}{b+a\cos x}$

R. Posons $\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x} = u$; On aura alors à trouver la dérivée de Arc Cos u.

$$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sin x\,(b+a\cos x)}$$

151. — Valeur pour $x=a$, de $\frac{px^2-(a+b)px+pab}{qx^2-(a+c)qx+qac}$

R. — Elle prend la forme $\frac{0}{0}$. Le rapport des dérivées est, pour $x=a$, égal à

$$\frac{p(a-b)}{q(a-c)}$$

152. — Valeur de $\frac{x^2}{\sqrt{\sin x}}$ pour $x=0$

R. — 1° $y = \frac{x^2}{\sqrt{\sin x}} = \frac{x}{\sin x}\,.\,x\sqrt{\sin x}$

$\frac{x}{\sin x}$ tend vers 1. Donc y tend vers Zéro.

2° $y^2 = \frac{x^4}{\sin x}$. Rapport des dérivées $\frac{4x^3}{\cos x}$ tend vers Zéro.

153. — Valeur de $\sqrt[x^2]{\cos x}$ pour $x=0$

R. —
$$\text{l}\,y = \frac{1}{x^2}\,\text{l}\cos x$$

Rapport des dérivées $\frac{-\sin x}{2x}$; limite : $-\frac{1}{2}$

Donc à la limite :

$$y = e^{-\frac{1}{2}}$$

154. — Lim $(1-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}$ pour $x = 1$

R — $\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^{-1}}$. Rapport des dérivées $\frac{\pi}{2}\left(\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right)^2$

Pour avoir lim $\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$, prenons encore le rapport des dérivées. Il est : $\dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}$ et à la limite $\frac{2}{\pi}$.

Donc la limite est :

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{2}{\pi}.$$

(Voir problèmes de Trigonométrie.)

155. — Lim $\dfrac{\sin(\omega - 60^\circ)}{4\cos^2\omega - 1}$ pour $\omega = 60^\circ$

R. — Rapport des dérivées $\dfrac{\cos(\omega - 60^\circ)}{-8\sin\omega\cos\omega}$. Limite $= \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

156. — Lim $m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right)$ pour m infini.

R. — Posant $m = \frac{1}{x}$, on rentre dans la question 5 relative aux Exponentielles.

Ce serait un cercle vicieux de se servir des dérivées.

157. — Démontrer que dans les séries :

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

R. — Soit une fonction $F(x)$ qui augmente indéfiniment avec x.

Pour x infini $\lim \dfrac{F(x)}{x} = \lim F'(x)$.

Or : $F(x+h) = F(x) + h\,F'(x+\theta h)$

D'où $F'(x+\theta h) = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

Donc quand x augmente indéfiniment :

$$\lim F'(x) = \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

On peut faire en particulier $h = 1$ et on a :

$$\lim F'(x) = \lim \left[F(x+1) - F(x)\right]$$

Cela posé soit une fonction $\varphi(x)$ qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. Pour avoir $\lim [\varphi(x)]^{\frac{1}{x}}$, on prendra le logarithme

$$\frac{l\varphi(x)}{x}$$

et, d'après le lemme posé :

$$\lim l(\varphi(x))^{\frac{1}{x}} = \lim \left(l\varphi(x+1) - l\varphi(x)\right) = \lim l\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$$

D'où $$\lim (\varphi(x))^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

158. — Trouver la dérivée de la tangente d'un arc en considérant le sinus de cet arc comme la variable indépendante.

R. — Soit z cet arc

On a $$y = tg\, z, \text{ or } tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\cos^3 z}$$

159. — Trouver une fonction qui soit l'inverse de sa dérivée.

R. — Il faut que $y = \frac{1}{y'}$ Donc $yy' = 1$

En prenant les primitives

$$y = \sqrt{2x + C_1}$$

160. — Valeur de :

$$\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} \text{ pour } x = \frac{\pi}{6}$$

R. — La fonction prend la forme $\frac{0}{0}$

En prenant le rapport des dérivées qui est :

$$\frac{4\sin x + 1}{4\sin x - 3}$$

On trouve pour la valeur cherchée : -3.

161. — Valeur de $\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\, x}$ pour $x = 0$

R. — La fonction prend la forme ∞^0

Soit y la vraie valeur, on a :

$$Ly = tg\,x \cdot L\,\frac{1}{x} = \frac{L\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{tg\,x}}$$

Prenant le rapport des dérivées qui est :

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x\,;$$

On voit que quand x tend vers 0, le 1er facteur tend vers 1, le 2e vers 0, la limite est 0.

La vraie valeur de l'expression est donc 1, puisque son logarithme est 0.

---

162. — Trouver la dérivée du cosinus d'un arc, en considérant le sinus de cet arc comme la variable indépendante.

R. — On a $y = \cos z$, $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - x^2}$;

Donc
$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$y' = -\frac{\sin z}{\cos z} = -tg\,z.$$

---

163. — Trouver une fonction telle que sa dérivée soit la racine carrée de cette fonction.

R. — Il faut que $y' = \sqrt{y}$

Donc $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1$; $y^{-\frac{1}{2}}\,y' = 1$

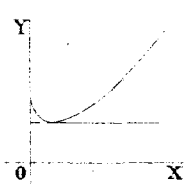
En prenant les primitives :

$$2y^{\frac{1}{2}} = x + c$$
$$4y = x^2 + 2cx + c^2$$
$$y = \frac{x^2 + 2cx + c^2}{4}$$
$$y = \frac{x + c}{2}$$

---

164. — Discuter x^x.

R. — Pour $x < 0$, la fonction serait discontinue. Ne donnons que des valeurs positives.



1° $x = 0$; forme d'indétermination : $Lx^x = \frac{Lx}{\frac{1}{x}}$ prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$; le rapport des dérivées $= -x$ s'annule, donc la fonction tend

vers 1.

2° x croissant à partir de zéro, la dérivée $x^x(1+lx)$ est d'abord négative; donc la fonction décroît. Elle est minimum pour $1+lx=0$, d'où $lx=-1$, $x=e^{-1}$ et la fonction $=\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$

3° A partir de ce minimum, la fonction croît jusqu'à l'infini quand x grandit sans limite.

---

165. — Vraie valeur de $\frac{tg\,\pi x-\pi x}{2x^2\,tg.\,\pi x}$, pour $x=0$.

R. — Le rapport des dérivées est :

$$\frac{\pi(1-\cos^2\pi x)}{4x\sin\pi x.\cos\pi x+2\pi x^2}\text{ ; pour } x=0\text{, on a } \frac{0}{0}$$

Prenons encore le rapport des dérivées qui est :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2\sin\pi x.\cos\pi x}{\sin\pi x\cos\pi x+\pi x(2\cos^2\pi x-1)+\pi x}\text{ ;}$$

pour $x=0$, on a $\frac{0}{0}$

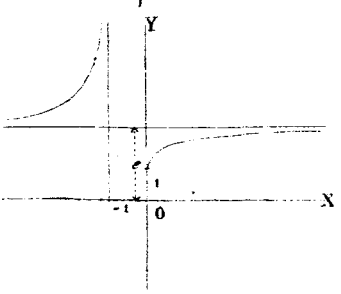
Prenant encore le rapport des dérivées, on trouve pour la vraie valeur : $\frac{\pi^2}{6}$.

166. — Vraie valeur de $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ pour $x=a$.

R. — La fonction se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; si on prenait le rapport des dérivées pour $x=a$, on trouverait $\frac{\infty}{\infty}$, et les dérivées suivantes donneraient toujours $\frac{\infty}{\infty}$. Alors pour déterminer la vraie valeur, on pose : $x=a+h$; l'expression devient : $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a+h}}$. En cherchant la valeur de cette expression pour $h=0$, on trouve $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, qui est la vraie valeur cherchée.

167. — Variations de $y=(1+\frac{1}{x})^x$

R. — La fonction est continue pour $x<-1$ et $x>0$.



1° Pour $x=-\infty$, la fonction $=e$, comme on sait.

La dérivée est

$$-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-1}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^x l\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

elle s'annule pour $x=\pm\infty$.

Et comme la fonction est alors égale à e, la droite $y=e$ est

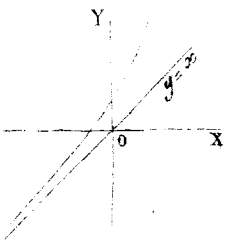
asymptote aux points :

$$x = \pm \alpha$$

La figure montre la forme de 2 branches.

168. — Variations de $y = (x^2+1)e^x + x$.

R. — $x = -\infty$. Indétermination. Changeant x en $-x$, il faut avoir la vraie valeur de $\frac{x^2+1}{e^x}$ pour $x = \infty$. Prenant 2 fois le rapport des dérivées, on trouve 0 ; donc pour $x = -\infty$, $y = -\infty$. La dérivée $y' = e^x(x+1)^2+1$ est toujours positive, donc y croît toujours. y s'annule entre 0 et -1



(Voir Problème 15 sur la résolution des Équations numériques).

169. — Vraie valeur de $\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$ pour $x = 0$

R. — La fonction se présente sous la forme $\infty - \infty$

On peut l'écrire : $\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x}$; prenant le rapport des dérivées, on a : $\frac{\cos^2 x - 1}{\sin x \cos x + x}$ qui donne $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$

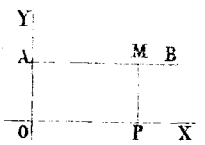
Prenant encore le rapport des dérivées, on trouve

$\frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1}$, qui pour $x = 0$ donne 0.

La vraie valeur est donc 0.

170. — Une fonction dont la dérivée est toujours nulle est une constante.

R. — Démonstration géométrique. — Imaginons la fonction représentée par une ligne. Si l'on désigne par α l'angle que fait la tangente à la ligne en un point quelconque avec l'horizontale OX, on sait que la dérivée de la fonction représente $\operatorname{tg} \alpha$. Puisque la dérivée est constamment nulle, l'angle α est lui même constamment nul. Ainsi la ligne en chacun de ses points a



sa tangente horizontale, ce ne peut donc être qu'une droite AB horizontale. L'ordonnée MP de chacun des points de cette droite est constante; donc la fonction proposée a une valeur constante.

---

171. — Vraie valeur de $\frac{\log x}{x-1}$ pour $x = 1$.

R. — La fonction se présente sous forme $\frac{0}{0}$. Le rapport des dérivées est $\frac{\frac{\log e}{x}}{1}$ qui pour $x = 1$ donne $\log e$.

172. — Vraie valeur de $\frac{Lx}{x}$ pour $x = \infty$.

R. — Le rapport des dérivées est $\frac{\frac{1}{x}}{1}$, la vraie valeur est donc 0.

---

173. — Vraie valeur de $x\,Lx$ pour $x = 0$.

R. — La fonction se présente sous la forme $0 . \infty$.

On l'écrit : $\frac{Lx}{\frac{1}{x}}$ et on prend le rapport des dérivées qui est $\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$ qui pour $x = 0$ donne pour la vraie valeur cherchée : 0.

174. — On donne une expression de la forme : $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$ on suppose que pour $x = 0$, les quantités $\varphi(a)$, $\psi(a)$ prennent l'une des valeurs : 0, ∞, 1, ce qui peut donner lieu aux 3 combinaisons 0^0, ∞^0, 1^∞; trouver la vraie valeur de l'expression dans chacun de ces cas.

R. — On prend une inconnue auxiliaire :

$$F(x) = L\,f(x) = \psi(x) . L\,\varphi(x)$$

expression qui rentrera dans des types connus et dont on pourra trouver la valeur $F(a)$.

On aura ensuite : $f(a) = e^{F(a)}$

175. — Vraie valeur de x^x pour $x = 0$

R. — On a la forme 0^0

Posons : $F(x) = L(x^x) = x\,Lx$

On aura : $F(0) = (x\,Lx)_0 = 0$

Donc x^x pour $x = 0$, donne $e^{F(0)} = 1$.

---

176. — Vraie valeur de $\sqrt[x]{x}$ pour $x = \infty$.

R. — La fonction peut s'écrire $x^{\frac{1}{x}}$ qui pour $x = \infty$ donne la forme ∞^0

Posons $$F(x) = L\sqrt[x]{x} = \frac{L\,x}{x}\ ;$$

On a : $$F(\infty) = \left(\frac{L\,x}{x}\right)_\infty = 0$$

Donc $\sqrt[x]{x}$ pour $x = \infty$ donne $e^{F(\infty)} = 1$

177. — Étant donnés sur une droite n points équidistants, trouver sur cette ligne un point tel que la somme des carrés de ses distances aux points donnés, multipliés par le numéro correspondant, soit un minimum.

R. — Je prends pour unité la distance qui sépare deux points consécutifs ; l'expression du problème est :

$$x^2 + 2(x-1)^2 + 3(x-2)^2 + \ldots\ldots n\left[x - (n-1)x\right]$$

Ou, en développant

$$x^2 + 2x^2 + \ldots\ldots + nx^2 - \left\{4x + 12x + 24x + 40x + \ldots\ldots + 2n(n+1)x\right\}$$
$$+ 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n(n-1)^2$$

Ou $$\frac{n(n+1)}{2}x^2 - 4x\left[1+3+6+10+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\right] + 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n(n-1)^2$$

La seconde partie est le quadruple de la somme des $n-1$ premiers nombres triangulaires ; elle est donc égale à $$\frac{2n(n-1)(n+1)}{3}x$$

Donc l'expression qu'il faut rendre minima est la suivante : $$\frac{n(n+1)}{2}x^2 - \frac{2n(n-1)(n+1)}{3}x + 1^2, 2^2 + \ldots\ldots + n(n-1)^2$$

Je prends la dérivée et je l'égale à 0

$$n(n+1)x - \frac{2n(n-1)(n+1)}{3} = 0$$

D'où $$x = \frac{2}{3}(n-1)$$

178. — Vraie valeur de $\sqrt[x^2]{\cos x}$ pour $x = 0$

R. — La fonction prend la forme 1^∞.

Posons $$F(x) = L\sqrt[x^2]{\cos x} = \frac{L\cos x}{x^2}$$

D'où $$F(0) = \left(\frac{L\cos x}{x^2}\right)_0 = \frac{0}{0} = \left(\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}\right)_0 = \left(-\frac{1}{2\cos x}\,\frac{\sin x}{x}\right)_0$$

qui donne $-\frac{1}{2}$

Donc : $\left(\sqrt[x^2]{\cos x}\right)_0 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

179. — Vraie valeur de $\frac{x^x - x}{1 - x + Lx}$ pour $x = 1$.

R. — On applique la règle comme :

On a : $\frac{x x^{x-1} + x^x Lx - 1}{-1 + \frac{1}{x}}$

Pour le rapport des dérivées, en continuant on trouve que la vraie valeur est -2.

180. — Vraie valeur de $\frac{Lx}{x-1}$ pour $x = 1$.

R. — Le rapport des dérivées est $\frac{\frac{1}{x}}{1}$ qui donne 1 pour la vraie valeur.

181. — Vraie valeur de $\frac{a^x - b^x}{x}$ pour $x = 0$.

R. — Le rapport des dérivées est $a^x La - b^x Lb$, qui pour $x = 0$, donne pour la vraie valeur cherchée :

$$La - Lb$$

182. — Vraie valeur de $\frac{x^4 + tg^2 x}{x^5 + \sin^2 x}$ pour $x = 0$.

R. — Le rapport des dérivées est $\frac{4x^3 + 2\,tg\,x \frac{1}{\cos^2 x}}{5x^4 + 2\sin x \cos x}$ qui se présente encore sous la forme de $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$

Prenant de nouveau les rapports des dérivées, on trouve que la vraie valeur est 1.

183. — Vraie valeur de $\frac{2x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 14x + 4}{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3}$ pour $x = 1$.

R. — Le rapport des dérivées $\frac{8x^3 - 30x^2 + 36x - 14}{4x^3 - 18x^2 + 24x - 10}$ donne $\frac{0}{0}$

Prenons encore le rapport des dérivées, nous aurons aussi $\frac{0}{0}$.

En le prenant une 3e fois, on aura 1 pour la vraie valeur.

184 — Vraie valeur de $(1 - x)\,tg\,\frac{\pi x}{2}$ pour $x = 1$.

R. — L'expression prend la forme $0 \cdot \infty$; on l'écrit alors :

$$\frac{1-x}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}}$$

En en prenant le rapport des dérivées on trouve que la vraie valeur est 1.

185. — Vraie valeur de $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ pour $x = 0$.

R. — Le rapport des dérivées donne $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$, pour $x = 0$

Prenant encore le rapport des dérivées, on a :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ pour } x = 0$$

En prenant encore une fois ce rapport, on a :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \text{ pour } x = 0$$

La vraie valeur est donc 2.

186. — Limite de $\frac{\sin^2 x}{x}$ pour $x = 0$

R. — On a : $\lim. \frac{\sin^2 x}{x} = \lim \frac{\sin x}{x} \times \lim. \sin x = 1 \times 0 = 0$

La limite cherchée est donc 0.

187. — Vraie valeur de $\frac{x^m - a^m}{x - a}$ pour $x = a$

R. — Le rapport des dérivées est $\frac{m x^{m-1}}{1}$, donc la vraie valeur est $m a^{m-1}$ pour $x = a$, quel que soit m.

188. — Vraie valeur de $\frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^2 - a^2}$ pour $x = a$.

R. — On verrait, en appliquant la règle comme que cette vraie valeur est 0.

On peut le voir autrement, car :

$$x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3 = (x-a)^2(x-2a)$$
$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$

La fraction donnée est donc égale à :

$$\frac{(x-a)^2(x-2a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{(x-a)(x-2a)}{x+a} \text{ qui}$$

devient bien 0 pour $x = a$.

189. — Point le plus éclairé par 2 lumières sur la droite qui les joint.

R. — Soient a et b les 2 intensités ; $b = ma$

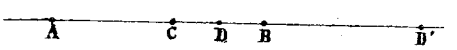
Alors la quantité à rendre maximum est :

$$\frac{a}{x^2} + \frac{ma}{(d-x)^2}$$

Égalant la dérivée à 0, il vient $x = \dfrac{d}{1+\sqrt[3]{m}}$

190. — Le problème précédent résolu, calculer la valeur de m par laquelle C est le plus éloigné possible du point également éclairé par les 2 lumières.

R. — Il y a sur la droite AB, 2 points D et D' également éclairés et tels que



$$\frac{1}{y^2} = \frac{m}{(d-y)^2}$$

D'où $y = \dfrac{d}{1 \pm \sqrt{m}}$

Prenons le point entre A et B, la distance CD sera égale à

$$\delta = d\left[\frac{1}{1+\sqrt{m}} - \frac{1}{1+\sqrt[3]{m}}\right]$$

Pour en chercher le maximum et n'avoir que des exposants entiers et positifs, posons $m = z^6$

Dérivée de $\dfrac{1}{1+z^3} - \dfrac{1}{1+z^2}$ $\qquad \dfrac{-3z^2}{(1+z^3)^2} + \dfrac{2z}{(1+z^2)^2}$

La solution $z = 0$ correspond à une lumière d'intensité nulle. Il reste :

$$-3z(1+z^2)^2 + 2(1+z^3)^2 = 0$$

Ou $\qquad 2z^6 - 3z^5 - 2z^3 - 3z + 2 = 0$

La discussion de cette équation montre qu'elle a 2 racines positives, l'une voisine de Zéro, l'autre un peu inférieure à 2.

Théorie des Équations.

191. — Conditions pour que $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ soit un carré parfait.

R. 1°. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + \alpha x + \beta)^2 = x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$

Identifiant et éliminant α et β.

$$b = \frac{a^2}{4} + 2\frac{c}{a}, \qquad d = \frac{c^2}{a^2}$$

Alors $\quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a}\right)^2$

2° — Extraire la racine carrée du polynome donné. Le reste doit être identiquement nul. De là : $c = a\left(\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8}\right)$, $\qquad d = \left(\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8}\right)^2$

Conditions qui donnent comme tout à l'heure, $b = \frac{a^2}{4} + \frac{2c}{a}$, $\qquad d = \frac{c^2}{a^2}$

192. — Un polynome entier en x est une fonction continue de cette variable.

R. — Soit $\quad F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m$ un polynome entier en x. Si on fait varier x d'une manière continue, chacun des termes du polynome $F(x)$ variera d'une manière continue, et par suite $F(x)$ lui-même variera d'une manière continue.

En général, on peut dire que toute fonction dont la dérivée est finie pour certaines valeurs de x, est continue pour ces mêmes valeurs.

---

193. — Si α est racine de l'équation $x^4 + ax^3 + ax + 1 = 0$, $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi.

R. — En effet, l'équation ne change pas quand on change x en $\frac{1}{x}$.

---

194. — Conditions suffisantes pour ramener une équation dont le 1er terme est un nombre différent de 1 à une autre dans laquelle il sera l'unité.

R. — Changeons x en Ky, l'équation sera :

$$AK^m y^m + A_1 K^{m-1} z^{m-1} + \ldots\ldots = 0$$

Pour que les coefficients restent entiers, avec $AK^m = 1$, il suffit que A_1, A_2, ... soient des multiples respectivement de $A^{\frac{m-1}{m}}$, $A^{\frac{m-2}{m}}$ .....

---

195. — Conditions pour qu'une équation algébrique ait 2 racines infinies.

R. — Divisant par x^m en faisant x infini ; on trouve $A = 0$; divisant alors par x^{m-1} en faisant x infini, on trouve encore $A_1 = 0$.

---

196. — Dans quel cas suffit-il de n équations pour éliminer entre elles n inconnues ?

R. — Dans le cas où les équations sont homogènes et ne contiennent, par suite, que les rapports de $n-1$ inconnues à la $n^{\text{ième}}$.

---

197. — Mettre en évidence, par des substitutions, la réalité des racines de

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - 1 = 0$$

R. — La fonction est discontinue ; il faut ne prendre que des intervalles $a > b$ où elle est continue.

$a > b$. $b + \varepsilon$, pour ε suffisamment petit, donne un résultat > 0

$a - \varepsilon$ " " " " " " < 0

Il y a donc une racine entre a et b.

$a + 1$ donne $\frac{1}{a-b+1}$; résultat > 0

$a + 2$ " $-\frac{1}{2} + \frac{1}{a-b+2} = \frac{b-a}{2(a-b+2)}$ " < 0

Donc, il y a une 2de racine entre $a+1$ et $a+2$.

Remarque. — On peut traiter la question par l'intersection des hyperboles.

$$y = \frac{1}{x-a}, \qquad y + \frac{1}{x-b} - 1 = 0$$

---

198. — L'équation $\frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \dots\dots + \frac{A_m}{x-x_m} = 0$, a-t-elle toutes ses racines réelles, tous ses coefficients étant positifs ?

R. — Posant $f(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_m)$

On peut sans changer les racines, écrire l'équation :

$$A_0 \frac{f(x)}{x-x_0} + A_1 \frac{f(x)}{x-x_1} + \dots\dots + A_m \frac{f(x)}{x-x_m} = 0$$

Pour $x = x_0, x_1, x_2, \dots\dots x_m$.

Le 1er membre devient $A_0 f'(x_0)$, $A_1 f'(x_1) \dots\dots$ Or, pour 2 racines consécutives de $f(x)$, $f'(x)$ est de signe contraire ; donc les résultats précédents sont alternativement $>$ ou < 0. Donc il y a autant de changements de signes que de coefficients moins un ; toutes les racines sont donc réelles.

---

199. — Relations entre les coefficients et les racines dans une équation algébrique.

R. — Soit une équation du degré m :

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Soit $a, b, c, \ldots\ldots K, l$, les m racines de cette équation.

On a : $x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m = (x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-l)$

Si on effectue le produit des m facteurs contenus dans le 2e membre, et si on pose :

$$S_1 = a + b + \ldots\ldots + l$$
$$S_2 = ab + ac + \ldots\ldots + Kl.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_m = abc\ldots\ldots\ldots\ldots kl$$

Le 2d membre pourra s'écrire :

$$x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} \ldots\ldots \pm S_m$$

Ce 2d membre étant identique au 1er quelque soit x, on devra avoir les m relations :

$$A_1 = -S_1$$
$$A_2 = +S_2$$
$$A_3 = -S_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m = \pm S_m$$ suivant que m sera pair ou impair.

---

200. — Ces relations peuvent-elles servir pour déterminer une racine en particulier

R. — Ces relations ne peuvent pas en général servir à déterminer les racines, car ces relations sont symétriques par rapport aux racines ; c'est-à-dire que, dans ces relations, toutes ces racines figurent de la même manière. Ainsi b y figure de la même manière que a ; ces relations ne changent donc pas quand on y change a en b et b en a.

Il résulte de cela que les calculs à faire pour déterminer a au moyen de ces relations sont ceux qu'il y aurait à faire pour déterminer $b, c, \ldots\ldots l$; et si on veut avoir a seulement, on aboutira aussi bien à $b, c, \ldots\ldots K, l$ qu'à a ; de sorte que la détermination de a au moyen de ces

relations doit conduire à l'équation proposée elle-même.

201. — Du moment où m quantités satisfont à ces relations, sont-elles nécessairement les m racines de l'équation ?

R. — Oui, car les relations :

$$\begin{cases} a+b+c+\ldots\ldots+l = -A_1 \\ ab+ac+\ldots\ldots+kl = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ abc\ldots kl\ldots\ldots\ldots = \pm A_m \end{cases}$$

forment un système de valeurs qui est le seul système de valeurs possibles pour les racines de l'équation

En effet, on a vu que :

$$(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-l) = x^m + A_1 x^{m-1} \ldots\ldots A_m$$

Or, le 1er membre s'annule pour $x = a$; donc a est racine de l'équation :

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + A_m = 0$$

Il en sera de même de $b, c, \ldots\ldots l$.

Cela a lieu du reste que les quantités $a, b, c, \ldots\ldots l$ soient ou non différentes les unes des autres.

---

202. — Si une racine imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ est m fois racine d'une équation, cette équation admet aussi m fois pour racine la conjuguée $a - b\sqrt{-1}$

R. — En effet, de ce que l'équation $f(x) = 0$ admet la racine $a + b\sqrt{-1}$ il en résulte que $f(x)$ est divisible par $(x-\alpha)^2 + \beta^2$. — On a donc $f(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]\,\varphi(x)$. Or $\varphi(x) = 0$ admet encore $m-1$ fois la racine $a + b\sqrt{-1}$, mais de ce qu'elle l'admet une fois, il en résulte que $\varphi(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]\,\psi(x)$

Si on reprend le même raisonnement sur $\psi(x)$, on voit en continuant de la même manière que l'existence de la racine $a + b\sqrt{-1}$ entraîne le même nombre de fois l'existence de la racine $a - b\sqrt{-1}$

---

203. — Étant donnée une fonction de x ordonnée suivant les puissances décroissantes de cette variable, on peut trouver une valeur de x à partir de laquelle le signe de la fonction reste constamment le même que le signe de son 1er terme

R. — Soit $\quad f(x) = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m$

d'où : $\quad f(x) = x^m \left(A + \frac{A_1}{x} + \ldots\ldots + \frac{A_m}{x^m}\right)$

Si l'on fait croître indéfiniment la valeur numérique de x, tous les termes $\frac{A_1}{x}, \frac{A_2}{x^2}, \ldots \frac{A_m}{x^m}$ tendent vers 0, mais leur nombre étant fini, leur somme tend aussi vers 0; donc à partir d'une valeur numérique de x assez grande, cette somme sera toujours $< A$; par conséquent le signe de la quantité entre parenthèses sera le même que celui de A; et par suite, la fonction conservera constamment le signe de son 1er terme Ax^m.

204. — Toutes les racines d'une équation algébrique $f(x) = 0$ étant inégales, calculer :

$$S_1 = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots\ldots + \frac{1}{x-l}$$

et

$$S_2 = \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(x-l)^2}.$$

R. — 1° $$f(x) = A(x-a)(x-b)\ldots\ldots\ldots(x-l) \qquad (1)$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \ldots\ldots + \frac{f(x)}{x-l} \qquad (2)$$

D'où $$S_1 = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

2° De (2) on tire :

$$f''(x) = f'(x)\,S_1 - f(x)\,S_2$$

D'où $$S_2 = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2 - \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

On conclut de là que, si toutes les racines de $f(x)$ sont réelles et inégales, S_2 étant toujours < 0, toutes les racines de $[f'(x)]^2 - f''(x)\,f(x) = 0$ seront imaginaires.

205. — Résoudre le système :

$$x + ay + a^2z + a^3u + \ldots\ldots + a^{m-1}s + a^m = 0$$
$$x + by + b^2z + \ldots\ldots\ldots + b^{m-1}s + b^m = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x + Ky + K^2z + \ldots\ldots\ldots + K^{m-1}s + K^m = 0$$

R. — Supposons les inconnues $x, y, z, \ldots$ déterminées, et prenons la fonction :

$$X^m + sX^{m-1} + \ldots\ldots + uX^3 + zX^2 + yX + x.$$

Elle s'annule pour $X = a, b, c, \ldots$ donc ces quantités $a, b, \ldots$ sont les racines de l'équation :

$$X^m + sX^{m-1} + \ldots\ldots = 0$$

On aura donc : $S = -(a+b+c+\ldots\ldots+K) = -S_1$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z = \pm S_{m-2}$$

$$y = \mp S_{m-1}$$

$$x = \pm abcd\ldots\ldots K.$$

206. — Les racines imaginaires d'une équation étant conjuguées deux à deux, conclure à la réalité des coefficients R. — Un coefficient égale, au signe près, la somme des produits n à n des racines. Quand 2 racines conjuguées entreront dans un produit, le produit des facteurs correspondants à ces 2 racines sera réel ; — Quand une racine imaginaire entrera dans un produit sans sa conjuguée, il y en aura un autre ne différant de celui-là que parce que $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ y sera substitué à $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. La somme de ces deux produits sera réelle. Donc, il en sera de même du coefficient considéré, ce qu'il fallait démontrer.

207. — Somme des carrés des racines de :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

R. —
$$x' + x'' + x''' = -a$$

$$x'x'' + x'''x' + x'x''' = b$$

Donc
$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 = a^2 - 2b.$$

208. — Somme des inverses des racines d'une équation algébrique.

R. — Soit $f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m = 0$ l'équation proposée.

La transformée en $\frac{1}{x}$ sera :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) = A + A_1y + A_2y^2 + \ldots\ldots + A_my^m = 0$$

Or, la somme des racines de $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ est $\frac{A_{m-1}}{A_m}$ donc la somme des inverses des racines de l'équation proposée est aussi : $\frac{-A_{m-1}}{A_m}$

209. — Condition pour que l'une des racines de $x^3 + px + q = 0$ soit double de l'une des autres.

R. — On a : $a + b + c = 0$, $ab + ca + bc = p$, $abc = -q$

Et on doit avoir $a = 2b$

De là $c = -3b$, $-7b^2 = p$, $6b^3 = q$

Condition $\left(\frac{q}{6}\right)^2 + \left(\frac{p}{7}\right)^3 = 0$

210. — Équation aux sommes deux à deux des racines de l'équation :

$$x^3 + mx^2 + px + q = 0$$

R. — 1° $y = \alpha + \beta$, $\alpha + \beta + \gamma = -m$

$$\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma = p$$
$$\alpha\beta\gamma = -q$$

De là $\gamma = -m - y$, $\alpha\beta = p + y(m+y)$, $[p + y(m+y)](m+y) = q$

Équation $y^3 + 2my^2 + (m^2 + p)y + mp - q = 0$ (5)

2° L'équation cherchée est du 3e degré ; car $C_{3,2} = 3$. Elle peut s'écrire :

$$y^3 + m'y^2 + p'x + q' = 0$$

$-m' = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma)$, donc $m' = 2m$

$p' = (\alpha + \beta)(\gamma + \alpha) + (\beta + \gamma)(\alpha + \beta) + (\gamma + \alpha)(\beta + \gamma)$

$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 + \alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma$ $\quad p' = p + m^2$

$-q' = (\alpha + \beta)(\gamma + \alpha)(\beta + \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma) - \alpha\beta\gamma$

$+q' = mp - q$

Quand $m = 0$, l'équation (5) devient :

$$y^3 + py - q = 0$$

Elle ne diffère de la proposée que par le signe de q. Alors, en effet, la somme de 2 racines égale la 3e changée de signe. L'équation aux sommes n'est donc autre que la transformée en $-x$.

211. — Trouver une équation dont les racines soient le double de celles de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

R. — Il suffit de poser $x = \frac{y}{2}$;

En l'équation : $y^3 + 4py + 8q = 0$:

sera l'équation cherchée.

---

212. — Condition de réalité des 3 racines du 3e degré.

R. — L'équation du 3e degré peut toujours se ramener à la forme $x^3 + px + q = 0$.

I. — Soit $q > 0$. Toute équation de degré impair a au moins une racine de signe contraire à son dernier terme.

Donc l'équation qui nous occupe a au moins une racine négative.

Soit c cette racine en appelant a et b les 2 autres racines

On a :
$$a + b + c = 0$$
$$p = ab + ac + bc = ab + c(a+b) = ab - (a+b)^2$$
$$= -(a^2 + ab + b^2)$$
$$q = -abc.$$

Ainsi p est < 0, de même que c, et comme $a + b + c = 0$ il faut que $(a+b)$ soit > 0, et comme en outre ab est > 0, il s'ensuit que a et b sont positifs.

Soit $a < b$, on aura :

$$-3a^2 > p > -3b^2$$

Et par suite : $b > \sqrt{-\frac{p}{3}} > a$

$x = 0$ donnant un résultat positif, $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ doit donner un résultat négatif.

Ainsi
$$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0$$

Ou
$$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0$$

Ou
$$\frac{4p^3}{27} + q^2 < 0$$

Si q était < 0, il en résulterait que c étant alors une racine positive, le produit ab serait > 0 ; seulement $a + b < 0$ donc $a < 0$ et $b > 0$. On conclurait comme tout-à-l'heure $p < 0$, et, en supposant $a < b$

$$-3a^2 < p < -3b^2$$
$$a < -\sqrt{-\frac{p}{3}} < b$$

0 donne un résultat < 0, $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ doit donner un résultat > 0 ; donc :

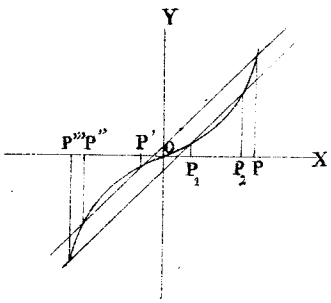
$$\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0$$

$$q > \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$\frac{4p^3}{27} + q^2 < 0$$

Cette condition est suffisante ; car elle entraîne $p < 0$

II. — On peut se servir d'une figure ; les racines sont les abscisses des points d'intersection de $y = x^3$ avec $y + px + q = 0$. On voit d'abord que $p < 0$, et que pour $q > 0$, on a deux racines > 0 OP_1 et OP_2 et une racine < 0, OP_3 ; — et pour $q < 0$, une racine > 0, OP, et 2 racines < 0, OP' et OP''.



Étant donnée une valeur de p, il faut pour avoir 3 racines réelles, prendre q entre les ordonnées à l'origine des 2 tangentes parallèles à la droite $y + px + q = 0$. L'équation d'une tangente est $Y = 3x^2X - 2x^3$, représentons-la par $y + px + q' = 0$:

Nous aurons : $p = -3x^2$

$$q' = 2x^3 \begin{cases} q'_1 = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \\ q'_2 = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \end{cases}$$

Il faut que $q'_2 < q < q'_1$, conditions qui se réduisent à $4p^3 + 27q^2 < 0$.

On peut conclure en même temps que $4p^3 + 27q^2 = 0$ correspond au cas de 2 racines égales ; et $4p^3 + 27q^2 > 0$, au cas d'une seule racine réelle.

---

213. — <u>Condition de réalité des racines de :</u>

$$\underline{x^3 + px^2 + q = 0.}$$

R. — $x = \frac{1}{y}$. L'équation devient $1 + py + qy^3 = 0$ La condition de réalité est donc :

$$\frac{4p^3}{q^3} + \frac{27}{q^2} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{4p^3}{q} + 27 < 0$$

Si $q > 0$, cette condition peut s'écrire : $4p^3 + 27q < 0$; mais si $q < 0$, elle devient $4p^3 + 27q > 0$.

214. — Les 3 racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, sont α, β, γ.

Qu'indique la relation : $(\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \gamma)^2 > 0$?

R. — Elle indique que les 3 racines de l'équation sont réelles. En effet, l'équation aux carrés des différences, (Voir Algèbre de Lefébure, 6e édition, p. 370) est :

$$z^3 + 6pz^2 + 9p^2 z + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

La condition donnée entraîne $4p^3 + 27q^2 < 0$, donc la réalité des 3 racines de la proposée.

Pour établir directement l'équation aux carrés des différences, dans le cas particulier,

On posera $\alpha - \beta = y$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (1)

$$\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma = p \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -q \qquad (3)$$

On en tirera $\alpha = -\frac{1}{2}(y - c)$ $\quad \beta = -\frac{1}{2}(y + c)$

Donc l'équation (2) donnera $c^2 = -\frac{y^2 + 4p}{3}$

En l'équation (3) deviendra, toutes réductions faites :

$$y^6 + 6py^4 + 9p^2 y^2 + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

2e Solution. — On peut aussi démontrer cette proposition sans se servir de l'équation aux carrés des différences.

Supposons, en effet, que β et γ soient imaginaires. Elles sont alors imaginaires conjuguées ; il en est de même de $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$.

Donc $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$ est positif ; il en est de même de son carré.

$\beta - \gamma$ est de la forme $m\sqrt{-1}$; son carré est donc négatif ; donc, dans ce cas, le produit ne saurait être positif. Donc toutes les racines sont réelles. C.q.f.d.

215. — Application du théorème de Descartes.

Pour que les racines d'une équation soient réelles, il faut d'abord que l'on ait $p < 0$, sans quoi, comme le terme en x^2 n'existe pas, il y aurait nécessairement deux racines imaginaires, puisque x^3 et px seraient toujours de même signe.

Cela posé, je change x en $x + h$, c'est-à-dire que je diminue les racines de h, et je détermine h de manière que le terme du premier degré disparaisse; il vient :

$$x^3 + 3hx^2 + (3h^2 + p)x + ph + h^3 + q = 0.$$

$$3h^2 + p = 0$$

$$h = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Substituant l'équation devient :

$$x^3 + 3x^2\sqrt{-\frac{p}{3}} - \frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0.$$

Ou
$$x^3 + 3x^2\sqrt{-\frac{p}{3}} + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0.$$

Si l'équation proposée a ses racines réelles, la transformée les aura aussi, et réciproquement. Soit $q > 0$, et supposant le dernier terme positif

$$q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > 0$$

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

Si cette condition est satisfaite, l'équation n'a pas de variations; donc elle n'a pas de racines positives; la transformée en $-x$ n'a qu'une variation, donc elle ne saurait avoir qu'une racine positive, donc il y a, pour sûr, deux racines imaginaires.

Supposons maintenant le dernier terme négatif :

$$q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} < 0$$

Ou
$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

L'équation a une variation; donc elle a une racine positive, or la racine de la proposée s'obtient en ajoutant p à celle de la transformée; donc la proposée a aussi une racine positive. Et comme elle a déjà une racine négative, puisque $q > 0$,

il s'ensuit qu'elle a ses trois racines réelles.

Ainsi la condition est suffisante : de plus, elle est nécessaire, car si elle n'est pas satisfaite, la transformée a deux racines imaginaires, et par conséquent la proposée aussi.

Conditions de réalité de l'équation du 3e degré.

216. — (Application de la méthode de la Division)

1° Soit d'abord $q > 0$, alors il y a une racine négative; soit $-a$ cette racine, on a :

$$x^3 + px + q = (x+a)(x^2 - ax + p + a^2)$$

Et l'on a la condition :

$$a^3 + pa - q = 0 \qquad (2)$$

Si l'équation proposée a ses 3 racines réelles, l'équation :

$$x^2 - ax + p + a^2 = 0$$

aura aussi ses racines réelles, ce qui donne la condition :

$$\frac{-3a^2}{4} - p > 0$$

Ou $$a^2 < -\frac{4p}{3}$$

Donc, il faut nécessairement que $p < 0$. Or, l'égalité (2) peut s'écrire :

$$a(a^2 + p) - q = 0.$$

Si je remplace a^2 par une quantité plus grande, j'aurai :

$$\frac{-2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > q$$

En supposant $q > 0$; en élevant au carré :

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

Si l'équation du second degré a ses racines imaginaires, on a

$$\frac{a^2}{4} - p - a^2 < 0$$

Donc $$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

Donc si l'on a $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ l'équation proposée a ses trois racines réelles ; si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, elle a deux racines imaginaires.

Donc la condition est nécessaire et suffisante.

2° Si $q < 0$, l'équation prend la forme :

$$x^3 + px - q = 0.$$

Mais cette équation n'est autre chose que la transformée en $-x$ de l'équation : $x^3 + px + q = 0$, or comme cette dernière a ses racines réelles lorsque : $4p^3 + 27q^2 < 0$, il s'ensuit que la condition de réalité des racines de $x^3 + px - q = 0$, est aussi $4p^3 + 27q^2 < 0$.

---

217. — Étant donnée l'équation :

$$x^m + \ldots\ldots + Ax^p + Aax^{p-1} + Aa^2x^{p-2} + \ldots\ldots = 0$$

qui a trois coefficients en progression géométrique, cette équation a au moins deux racines imaginaires.

R. — Je multiplie le premier membre par $x - a$ et il vient :

$$x^{m-1} + \ldots\ldots + Ax^{p+1} + Aax^p + Aa^2x^{p-1} + \ldots\ldots$$
$$- Aax^p - Aa^2x^{p-1} - \ldots\ldots = 0$$

Donc, dans la nouvelle équation, qui a les mêmes racines que la proposée, plus la racine a, il manque deux termes consécutifs. Il suffit donc de démontrer que si le premier membre d'une équation manque de deux termes consécutifs, l'équation a au moins deux racines imaginaires.

Pour le faire voir, remarquons que si ces 2 termes qui manquent existaient ils formeraient avec le terme Ax^{p+1} qui les précède et le terme $A'x^{p-2}$ qui les suit, au moins trois variations, tant dans la proposée que dans la transformée en $-x$. Or, quand ces termes n'existent pas, il n'avait au plus 2 variations entre Ax^{p+1} et $A'x^{p-2}$, tant dans la proposée que dans la transformée. Donc ces 2 équations ont au moins une variation de moins, que si les termes manquants existaient, et comme dans ce dernier cas le nombre total des variations est égal au degré m de l'équation ; dans le cas qui nous occupe il est au moins inférieur d'une unité à m, il y a donc au moins une racine imaginaire et par suite, il y en a au moins deux.

---

218. — Si le produit du premier membre d'une équation $f(x) = 0$ à coefficients réels par un binôme $x + a$, dont le second

terme est positif, donne un nombre de variations inférieur de n à celui des variations de $f(x)$, l'équation $f(x)=0$ a au moins n ou $n+1$ racines imaginaires, selon que n est pair ou impair.

R. — Soit v le nombre des variations de $f(x)$, celui des variations de $(x+a)f(x)$ est $v-n$.

L'équation $f(x)=0$ a au plus $m-v$ racines négatives et le nombre de ses racines positives, qui sont les mêmes que celles de l'équation $(x+a)f(x)=0$ est au plus $v-n$; donc elle ne saurait avoir plus de $m-v+(v-n)=m-n$ racines réelles; donc elle a au moins n racines imaginaires.

---

219. — Reconnaître si a est racine double d'une équation.

R. — Pour que a soit racine commensurable de:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m = 0$$

Il faut que a divise à la fois

$$A_m,\ A_{m-1}+q,\ A_{m-2}+q_2,\ \ldots\ldots\ A_1+q_{m-1}$$

Pour que a soit encore racine il suffira que a divise à la fois

$$\frac{A_m}{a},\ \frac{A_{m-1}+q}{a},\ \ldots\ldots\ \frac{A_1+q_{m-1}}{a}$$

En effet, lorsqu'on aura fait la suite de calculs nécessaire pour vérifier si a est racine commensurable de l'équation, on aura trouvé les quantités

$$\frac{A_m}{a},\ \frac{A_{m-1}+q}{a},\ \ldots\ldots\ \frac{A_1+q_{m-1}}{a}$$

Or l'équation

$$\frac{A_1+q_{m-1}}{a}x^{m-1} + \frac{A_2+q_{m-2}}{a}x^{m-2} + \ldots\ldots + \frac{A_{m-1}+q}{a}x + \frac{A_m}{a} = 0$$

est précisément l'équation qu'on obtiendrait en divisant:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m \text{ par } (x-a)$$

en égalant le quotient à 0.

---

220. — Si le 1er membre d'une équation algébrique n'a qu'une variation, un nombre qui rend le 1er membre >0 est une limite supérieure des racines.

1° Soit le polynome $Ax^m + \ldots + \ldots - \ldots - Hx^n - \ldots\ldots - K$ qui n'a qu'une variation

On peut l'écrire $x^{n+1}\left(Ax^{m-n-1} + \ldots - \frac{H}{x} - \ldots\ldots - \frac{K}{x^{n-1}}\right)$

Si x_1 rend la parenthèse > 0, il en sera de même a fortiori pour $x > x_1$; car les termes positifs augmenteront et les termes négatifs diminueront en valeur absolue. C.q.f.d.

2° De petites valeurs de x rendent le 1er membre < 0; de très grandes valeurs de x, le rendent > 0, il y a donc au moins une racine > 0; et comme il n'y a qu'une variation, cette racine est unique, donc si un nombre a rend le 1er membre > 0, tout nombre plus grand jouira de la même propriété. C.q.f.d.

---

221. — Résoudre $x^3 - 3x + 2 = 0$. Trouver de suite la racine double.

R. — 1° 1 est racine. Divisant par $x - 1$, on a :

$$x^2 + x - 2 = 0, \text{ d'où } \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

2° Pour la racine double, diviser $x^3 - 3x + 2$ par sa 1re dérivée $3x^2 - 3$, ou simplement par $x^2 - 1$. Reste de la division : $-x + 1$. Ce reste divise $3x^2 - 3$, c'est donc le plus grand commun diviseur entre le 1er membre et sa dérivée. Donc $x = 1$ est racine double.

---

222. — Appliquer la méthode des racines égales à l'équation $x^6 + x + 2 = 0$.

R. — Reste de la division par la 1re dérivée :

$$5x + 12 \qquad x = -\frac{12}{5} \text{ substitué dans}$$

la 1re dérivée, donne $6\left(-\frac{12}{5}\right)^5 + 1$: cette quantité n'étant pas nulle, la proposée n'a pas de racines égales.

---

223. — Appliquer la méthode des racines égales à :

$$x^{10} + x + 1 = 0.$$

R. — Reste de la 1re division : $9x + 10$, il ne divise pas la 1re dérivée : pas de racines égales.

---

224. — Déterminer α de façon que $x^4 + x + \alpha = 0$ ait 2 racines égales.

R. — Il faut qu'il y ait un plus grand commun diviseur du 1er degré entre le 1er membre de l'équation et sa dérivée $4x^3 + 1$.

Divisant : $$\frac{4x^4 + 4x + 4\alpha}{4x^3 + 1},$$

On a pour reste $3x + 4\alpha$. Ce reste devant diviser $4x^3 + 1$, on doit avoir $4\left(\frac{-4\alpha}{3}\right)^3 + 1 = 0$ d'où $\alpha = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

La racine double est $x = -\frac{4\alpha}{3} = -\sqrt[3]{16}$

225. — Déterminer a de façon que $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ ait 2 racines égales.

R. — L'équation doit avoir une racine commune avec sa dérivée $4x^3 + 2ax = 0$

De là $x^2 = -\frac{a}{2}$ Donc $a = \pm 2$

226. — Condition pour que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ admette 2 racines égales.

R. — Il faut qu'il y ait un plus grand commun diviseur du 1er degré entre le 1er membre et sa dérivée $4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$.

Divisant le 1er membre par sa dérivée, on aura un reste du 2d degré $x^2 + \alpha x + \beta$.

Divisant la dérivée par ce reste, on aura un reste du 1er degré $x + \gamma$.

La condition à remplir est $-4\gamma^3 + 3a\gamma^2 - 2b\gamma + c = 0$

227. — Relations entre les coëfficients de :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

pour qu'elle ait une racine triple.

R. — Divisant par $(x - \alpha)^3$ et égalant à zéro les coëfficients du reste du 2d degré

On a
$$6\alpha^2 + 3a\alpha + b = 0$$
$$8\alpha^3 + 3a\alpha^2 - c = 0$$
$$3\alpha^4 + a\alpha^3 + d = 0$$

Éliminant α, on trouve les 2 conditions :

$$\alpha^4 = \frac{3a^2d - b(8d+ac)}{3(3a^2+8b)} = \left(\frac{16d+ac}{3a^2+8b}\right)^2 = \left[\frac{128d - 2ac + ba^2}{3(a^3+16c)}\right]^4$$

Quand $a = 0$ les conditions deviennent :

$$\frac{12c}{a^2} = \left(\frac{8}{b}\right)^4 \left(\frac{c}{3}\right)^3 = -1$$

---

228. — Déterminer α et β dans l'équation :

$$x^4 + \alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$$

de façon qu'elle admette une racine triple ; ou 2 racines doubles.

R. — 1° Une racine triple. — $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ et sa dérivée doivent avoir un plus grand commun diviseur du 2d degré. Le reste de la division est $2\alpha x^2 + 3\beta x + 4$.

Le 2d reste $(2\alpha^3 - 8\alpha + 9\beta^2)x + \alpha^2\beta + 12\beta$. Pour qu'il soit identiquement nul, il faut :

$$2\alpha^3 - 8\alpha + 9\beta^2 = 0$$

$$\alpha^2\beta + 12\beta = 0$$

La 2de équation donne $\beta = 0$ ou $\alpha^2 + 12 = 0$. La 1re solution donnerait $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pm 2$; d'où les équations $x^4 + 1 = 0$ ou $x^4 \pm 2x + 1 = 0$ qui n'ont pas de racines multiples. — La solution $\alpha^2 + 12 = 0$ satisferait à la question, mais donnerait des coëfficients imaginaires. (Voir Problème 26).

Autrement. — L'équation doit être de la forme :

$$(x+a)^3(x+b).$$

Identifiant les coëfficients, on a :

$$3a + b = 0. \qquad 3a^2 + 3ab = \alpha$$

$$a^3 + 3a^2b = \beta \qquad a^3b = 1$$

D'où $\alpha^2 = -12$.

2° Deux racines doubles. — La 1re marche indiquée tout à l'heure serait longue à appliquer. Identifiant le 1er membre de l'équation avec $(x+a)^2(x+b)^2$

On a $a + b = 0$ $\quad a^2 + 4ab + b^2 = \alpha$

$2ab(a+b) = \beta$ $\quad a^2 + b^2 = 1$

D'où $\beta = 0$ $\quad \alpha = -2$ $\quad a = \pm 1$

Eq. $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2 = 0.$
(Voir Problème 24).

---

229. — A quelle condition doit satisfaire l'équation $f(x) = 0$ pour qu'elle admette 2 racines dont la différence soit d?

R. — Il faut qu'il y ait un commun diviseur du 1er degré entre $f(x)$ et $f(x+d)$.

---

230. — Résoudre $P + Q\sqrt{-1} = 0$, P et Q étant des fonctions entières de x.

R. — Cette équation représente le système $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$

Ses racines s'obtiendront en égalant à 0 le plus grand commun diviseur entre P et Q.

---

231. — Limites supérieures des racines de l'équation : $x^5 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$

R. — Appliquant la formule $1 + \sqrt[n]{N}$, on a pour limite supérieure des racines positives $1 + \sqrt[3]{3}$.

Transformée en $-x$ (2) $x^5 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Appliquant la même formule, on a pour limite supérieure des racines négatives $-1 - \sqrt[4]{3}$. On peut trouver une limite plus rapprochée en remarquant que

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x-1)$$

Donc ce trinôme est positif pour $x > 1$, et comme pour $x = 1$ le polynome (2) est > 0, il suit que -1 est une limite inférieure des racines négatives de la proposée.

---

232. — Limites supérieures des racines de l'équation :

$$x^4 + x^3 - 2x - 5 = 0.$$

R. — 1° Racines > 0 $\quad 1 + \sqrt[n]{N} = 1 + \sqrt[3]{5}$

autrement $\quad x^4 - 5$ est positif pour $x > \sqrt[4]{5}$;

$x^3 - 2x$ est > 0 pour $x > \sqrt{2}$

Comme $\sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$, on prendra $\sqrt[4]{5}$ comme limite supérieure des racines positives.

2° Racines < 0 transformées en $-x$:

$$x^4 - x^3 + 2x - 5 = 0$$

$$1 + \sqrt[n]{N} = 1 + 5 = 6.$$

autrement . $x^4 - x^3 > 0$ pour $x > 1$;

$2x - 5 > 0$ pour $x > \frac{5}{2}$

Donc $-\frac{5}{2}$ sera une limite inférieure des racines négatives.

---

233. — <u>Limite des racines positives de</u> :

$$\underline{x^5 - x^3 + 2x - 4m = 0}$$

R. — $m > 0$. Le 1er membre peut s'écrire :

$$x^3(x^2 - 1) + 2(x - 2m)$$

Si $m \leqslant \frac{1}{2}$, il est positif depuis $x = 1$

Si $m > \frac{1}{2}$, depuis $\underline{x = 2m}$.

---

234. — <u>Limite supérieure des racines positives de l'équation</u> : $\underline{x^5 - x^3 + x - 2 = 0}$.

R. — $x = 2$ rend le 1er membre > 0. On peut trouver une limite plus rapprochée comme suit. — Le trinôme $x^4 - x^2 + 1$ étant, pour $x = 1$ moindre que 2, la valeur qui le rendra égal à 2 sera > 1 ; donc $x(x^4 - x^2 + 1)$ sera, pour cette valeur, supérieur à 2.

Résolvant donc l'équation $x^4 - x^2 + 1 = 2$

On trouve $x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ ou à peu-près 1,3.

---

235. — <u>Equation</u> : $\underline{x^6 + x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 3x - 2 = 0}$.

R. — Comme il n'y a qu'une variation, il ne peut y avoir qu'une racine positive, et il y en a une certainement, car

$x = 0$ et $x = +\infty$ donnent des résultats de signes contraires.

La transformée en $-x$ a 3 variations ; il y a donc 1 ou 3 racines négatives.

La dérivée : $6x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 3 = 0$ a une racine positive et une nulle. Pour les racines négatives, incertitude.

La dérivée seconde peut s'écrire :

$$2x\left[x\left\{\left(x\sqrt{15} - \frac{5}{\sqrt{15}}\right)^2 + \frac{49}{3}\right\} - 12\right].$$

Elle est constamment positive pour $x < 0$; la dérivée 1re n'a donc pas de racines négatives, donc la proposée n'en a qu'une.

---

236. $\underline{x^6 - 4x^3 - 3x - 2 = 0.}$

R. — Le procédé appliqué à la question précédente fera reconnaître que la dérivée n'a qu'une racine, positive. Donc la proposée, qui a nécessairement 2 racines réelles, l'une positive, l'autre négative, (puisqu'elle est de degré pair et que le dernier terme est négatif), n'a que ces 2 racines réelles, et 4 racines imaginaires.

---

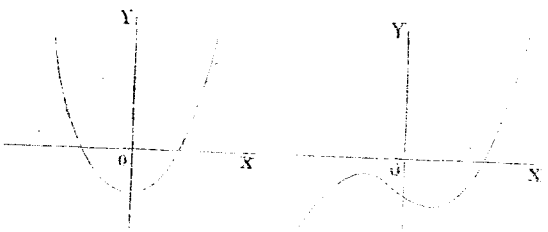
237. — Étude de : $\underline{y = 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 5x - 2}$.

R. — Pour $x > 0$, y ne change qu'une fois de signe ; d'abord < 0, il est ensuite > 0.

Pour $x < 0$ y peut changer 2 fois de signe.

Dérivées $y' = 10x^4 + 12x^3 + 12x^2 - 5$

$$y'' = 40x^3 + 36x^2 + 24x = 4x\left[\left(x\sqrt{10} + \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{159}{40}\right]$$



y'' est toujours de même signe que x et ne s'annule que pour $x = 0$; y' n'a donc qu'une racine positive et une négative. Pour la racine négative, voisine de $-0,76$, y est égal sensiblement à $-0,53$; donc y ne s'annule

par entre $x = 0$ et $x = -\infty$. Il passe seulement par un maximum.

---

238. — Trouver les racines de : $x^4 - 7x^2 + 3x + 1 = 0$.

R. — Cette équation a une racine comprise entre 0 et -1, et une entre 0 et 1.

Par suite, comme l'équation comporte 2 variations de même que sa transformée en $-x$, il s'ensuit que cette équation a ses 4 racines réelles, elle en a 2 positives et 2 négatives.

Or une limite supérieure des racines positives est 4; une limite inférieure des racines négatives est -4. Mais pour $x = 2$ le polynôme $x^4 - 7x^2 + 3x + 1$ est < 0, pour $x = 3$, il est > 0. Donc la 2e racine positive est comprise entre 2 et 3.

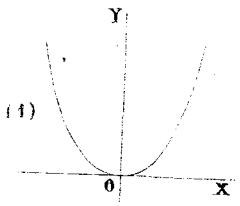
La 2e racine négative est comprise entre -2 et -3.

---

239. — Conditions de réalité des racines de l'équation : $x^m + px^n + q = 0$.

R. — Ne considérons que le cas où m et n sont entiers positifs. Les autres cas s'y ramènent et en sont des cas particuliers. Il y a lieu de distinguer dans le cas général 4 cas.

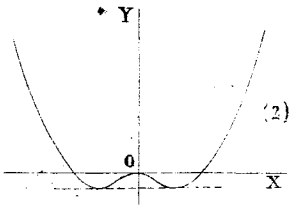
I. — m pair, n pair. 1° $p > 0$. En construisant les courbes $y = x^m$, $y = x^n$, déduisant de celle-ci la courbe $y = px^n$, et ensuite $y = x^m + px^n$, on verra que cette dernière, dans le cas particulier, est comme la figure (1).



Donc pour $q > 0$, pas de racines réelles;
$q = 0$ n racines égales à zéro;
$q < 0$ 2 racines égales et de signes contraires.

2° $p = 0$ $q > 0$ pas de racines réelles;
$q = 0$ m racines égales à zéro;
$q < 0$ $x = \pm \sqrt[m]{-q}$

3° $p < 0$ $y = x^m + px^n$ prend la forme (2)



$q > 0$. Il faut que $-q$ soit plus grand que l'ordonnée correspondante à la tangente horizontale.

Coefficient angulaire $mx^{m-1} + npx^{n-1}$.

Pour qu'il soit nul $x = \pm\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}$

$$y = \left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}} + p\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} = p\,\frac{m-n}{m}\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}$$

Et par suite $A = q + p\,\frac{m-n}{m}\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} < 0$ (α)

Avec la condition (α), 4 racines réelles égales deux à deux et de signes contraires ; les deux racines de même signe deviennent égales entre-elles quand

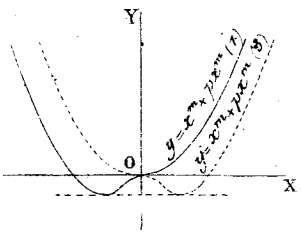
$A = 0$; il n'y a pas de racines réelles quand $A > 0$

$q = 0$ 1 racines $= 0$ et de plus $x = \pm\sqrt[m-n]{-p}$

$q < 0$ 2 racines égales et de signes contraires.

II. — m pair, n impair.

1° $p > 0$,



$q > 0$ 2 racines négatives inégales quand $A < 0$.
2 racines égales quand $A = 0$

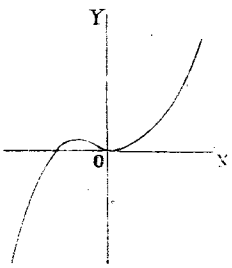
$q = 0$ 1 racines nulles ; de plus $x = \sqrt[m-n]{-p}$

$q < 0$ 2 racines réelles, une positive et une négative.

2° $p = 0$ comme dans le cas (I, 2°)

3° $p < 0$ c'est le cas (II, 1°) en changeant x en $-x$.

III. — m impair, n pair. 1° $p > 0$



$q > 0$ une racine négative.

$q = 0$ 1 racines nulles, de plus $x = \sqrt[m-n]{-p}$

$q < 0$ $A < 0$ 2 racines < 0 et une racine > 0

$A = 0$. 2 racines égales < 0 et une racine > 0.

$A > 0$ une racine > 0.

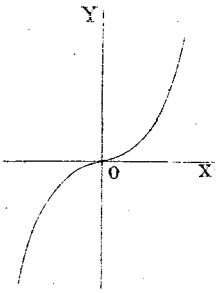
2° $p = 0$ $q \gtrless 0$ $x = \sqrt[m]{-q}$
$q = 0$ m racines nulles.

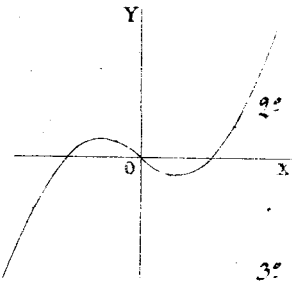
3° $p < 0$, comme pour $p > 0$ en changeant x en $-x$ et q en $-q$.

IV. — m impair, n impair

1° $p > 0$

$q > 0$ une racine < 0
$q = 0$ n racines nulles.
$q < 0$ une racine > 0





2° $p = 0$

$q \gtrless 0$ une racine $\lessgtr 0$
$q = 0$ m racines nulles.

3° $p < 0$

$q \gtrless 0$ $A < 0$ 3 racines réelles.

---

240. — Examiner : $x^4 - 2x + a = 0$ $a > 0$.

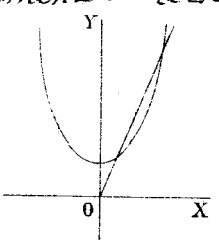
R. — Deux variations, donc il peut y avoir 2 racines > 0. Il n'y a pas de racines < 0. $x = 0$ donne $+$; pour que le 1er membre puisse devenir < 0, il faut que a ne soit pas trop grand. Sa limite sera donnée par le cas des racines égales.

Equation dérivée : $4x^3 - 2 = 0$

D'où $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $a = \frac{3}{\sqrt[3]{16}}$

Donc il faut que $a < \frac{3}{\sqrt[3]{16}}$

Autrement. — Les racines sont les abscisses des points communs aux lignes



$y = a + x^4$ $y = 2x$

Pour qu'il y ait des solutions il faut que 2 soit plus grand

que le coefficient angulaire de la tangente issue de l'origine.

Equation d'une tangente $Y = 4x^3 X + a - 3x^4$

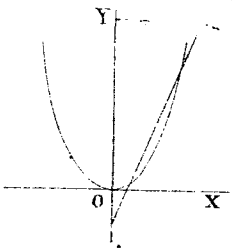
Donc, il faut que $4x^3 < 2$ $\qquad a - 3x^4 = 0$

Or $x^{12} < \frac{1}{16}$ $\qquad x^{12} = \frac{a^3}{27}$

D'où $a < \frac{3}{\sqrt[3]{16}}$

On peut aussi considérer les lignes :

$$y = x^4 \qquad y = 2x - a$$



Il faut que $-a$ soit plus grand que l'ordonnée à l'origine de la tangente parallèle à $y = 2x$.

Equation d'une tangente :

$$Y = 4x^3 X - 3x^4$$

On doit avoir : $4x^3 = 2$ $\qquad -a > -3x^4$

D'où $a < \frac{3}{\sqrt[3]{16}}$

N. B. — Cette question rentre dans le problème précédent. Car (II, 3°) avec $q > 0$, il y a donc 2 racines positives inégales quand $A < 0$; or ici $A = a - \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$.

---

241. — Etudier : $5x^4 - 20x + 6 = 0$.

R. — 1° Pas de variations dans la transformée en $-x$; donc pas de racines négatives.

La dérivée a pour racine 1 ; substituée dans le 1er membre de l'équation, cette racine donne le signe $-$; Donc il y a 2 racines positives

Elles sont entre 0 et 1 et entre 1 et 2.

2° Se reportant au problème 239, on verra que la question actuelle rentre dans le cas (H, 3°) et qu'il y a deux racines positives si $A < 0$

Or, dans le cas actuel

$$A = \frac{6}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{9}{5}$$

Donc 2 de même signe que q et une de signe contraire.

$A = 0$, les 2 racines de même signe que q sont égales.

$A > 0$, une racine de signe contraire à q.

$q = 0$ n racines nulles, de plus $x = \pm \sqrt[m-n]{-p}$

Appliquons au cas particulier $x^3 + px + q = 0$, on voit que les 3 racines ne sont réelles que quand $p < 0$ et que la condition $A < 0$ devient $4p^3 + 27q^2 < 0$.

La question peut se traiter sans courbes. — Reprenons le cas IV par exemple.

1° $p > 0$ $q > 0$ Pas de variations, donc pas de racines positives.
Il y a nécessairement une racine négative, et elle est seule, car la transformée en $-x$ n'a qu'une variation.
$q = 0$ n racines égales.
$q < 0$ Une racine positive et une seule; pas de racines négatives.

2° $p = 0$ $q \gtrless 0$ Une racine de signe contraire à q

3° $p < 0$ $q > 0$ La proposée a 2 variations, la transformée en $-x$ en a une; donc une racine négative et 0 ou 2 racines positives.
$q = 0$ n racines nulles et $x = \pm \sqrt{-p}$
$q < 0$ La proposée a une variation; la transformée en $-x$ en a deux. Donc une racine positive et 0 ou 2 racines négatives.

Il peut donc y avoir 3 racines au plus, et cela quand $p < 0$.

Les racines de la dérivée, les racines nulles supprimées sont :

$$x = \pm \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}}$$

Si α, β, γ sont les 3 racines de la proposée, on a donc:

$$-\infty < \alpha < -\sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}} < \beta < \sqrt[m-n]{-\frac{np}{m}} < \infty$$

$-\infty$ donnant un résultat < 0 il faut donc que l'on

ain :

$$\left.\begin{array}{l} -\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}} - p\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} + q > 0 \\ \left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}} + p\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} + q < 0 \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} -p\frac{m-n}{m}\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} + q > 0 \\ p\frac{m-n}{m}\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} + q < 0 \end{array}\right.$$

D'où en multipliant membre à membre :

$$-p^2\frac{(m-n)^2}{m^2}\left(-\frac{np}{m}\right)^{\frac{2n}{m-n}} + q^2 < 0$$

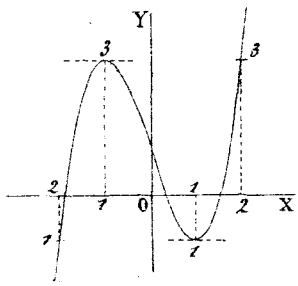
Condition nécessaire et suffisante.

Résolution des Équations numériques.

242. — Racines de : $x^3 - 3x + 1 = 0$.

R. — $4p^3 + 27q^2 < 0$, donc les 3 racines sont réelles. — L'équation peut s'écrire :

$$x(x^2 - 3) + 1 = 0 ;$$



$\sqrt{3}$ est donc une limite supérieure des racines positives. Pour la transformée en $-x$ $1 + \sqrt[n]{N} = 1 + \sqrt{3}$; donc $-(1+\sqrt{3})$ est une limite inférieure des racines négatives.

La substitution des nombres -2, -1, 0, 1, 2 apprend que les racines sont entre -2 et -1, entre 0 et 1, et entre 1 et 2.

La construction de la courbe $y = x^3 - 3x + 1$ permet de les restreindre entre :

-2 et $-1{,}75$ $\qquad$ 0 et $0{,}50$ $\qquad$ $1{,}25$ et $\sqrt{3}$

En resserrant les substitutions et appliquant la méthode de Newton, on trouve :

$-1{,}8794$ $\qquad$ $0{,}3457$ $\qquad$ $1{,}5321$.

243. — Séparer les racines de $x^3 - 10x^2 + 6x - 1 = 0$.

R. — La transformée en $-x$ n'a pas de variations ; il n'y a pas de racines négatives.

Racines de la dérivée $x = \frac{10 \pm \sqrt{82}}{3}$. La plus grande donne un résultat négatif très grand en valeur absolue ; la plus petite donne :

$$\frac{1}{27}\left(164\sqrt{2} - 1487\right) \text{ résultat négatif.}$$

Il n'y a donc qu'une racine. $x = 10$, limite supérieure des racines, donne comme résultat 59 ; $x = 9$ donne -28. Pour approcher de la racine, on peut supprimer le dernier terme en résoudre l'équation $x^2 - 10x + 6 = 0$, qui donne :

$$x = 5 + \sqrt{19} = 9,358.$$

$x = 9,36$ donne $-0,911$.
$x = 9,37$ " $-0,094$.

De là on conclut par parties proportionnelles $h = 0,0001$.
On trouve ensuite pour :

$x = 9,371$ $-0,01194$
$9,3711$ $-0,00364$
$9,37114$ $-0,0004$
$9,371144$ $-0,000006$.

N.B. — Pour reconnaître qu'il n'y a qu'une racine réelle on peut ramener à la forme :

$$x^3 + px + q = 0, \text{ ce qui donne : } x^3 - \frac{82}{3}x - \frac{1487}{27} = 0$$

Donc $$\underline{4p^3 + 27q^2} > 0.$$

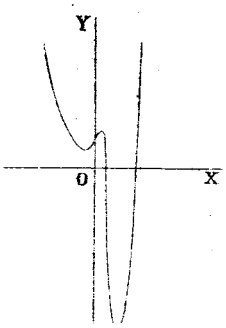
244. — <u>Séparer les racines de</u> :

$$\underline{9x^3 - 24x^2 + 16x - 0,001 = 0}$$

R. — La proposée peut s'écrire $x(3x-4)^2 - 0,001$. La transformée en $-x$ n'a pas de variations, donc pas de racines négatives. $x = 0$ et $x = \frac{4}{3}$ donnent le signe $(-)$; dans l'intervalle le 1er membre devient > 0, donc les 3 racines sont réelles ; elles sont, du reste, voisines, l'une de Zéro, les 2 autres de $\frac{4}{3}$.

---

245 <u>Résoudre</u> : $\underline{x^4 - 4x^3 + x + 4 = 0}$.



R. — La dérivée $4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$ a une racine entre $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{4}$, une seconde entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$; une troisième un peu moindre que 3.

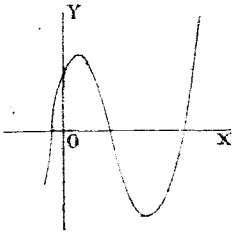
De là pour la courbe :

$y = x^4 - 4x^3 + x + 4$ la forme ci-contre, et pour l'équation deux racines réelles.

L'une un peu moindre que 1 ;
L'autre un peu moindre que 4.

246. — Résoudre : $x^5 - 10x^2 + 6x + 1 = 0$

R. — $x = 0$ donne 1
$x = 1$ donne -2 } donc 3 racines réelles ; d'après le nombre des variations, il ne peut y en avoir davantage.



La dérivée $5x^4 - 20x + 6 = 0$, comme on l'a vu (Problème 39 de la Théorie des Équations), a deux racines réelles, l'une entre 0 et 1, la seconde entre 1 et 2. — Des substitutions donnent pour la proposée :

$$x_1 = 0{,}765 \qquad x_2 = 1{,}866 \qquad x_3 = -0{,}13593$$

La dernière racine peut se trouver en négligeant x^5 qui est petit par rapport aux autres termes dans le voisinage de la racine.

---

247. — Racines de l'équation $x - a \sin x = b$.

R. — On peut toujours supposer $a > 0$; s'il ne l'était pas, on poserait $x = x' + \pi$, ce qui donne :

$$x' + \pi - a \sin(x' + \pi) - b = 0$$

ou

$$x' + a \sin x' - b + \pi = 0$$

La fonction $y = x - a \sin x - b$ a pour dérivée

$$y' = 1 - a \cos x.$$

De là 2 cas : 1° $a \leqq 1$, alors y' est toujours positif ; la fonction croît toujours ; il n'y a qu'une seule racine.

2° $a > 1$, y' s'annule par une infinité de valeurs de x. Soit α l'arc entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\cos \alpha = \frac{1}{a}$; y' s'annule pour $x = 2K\pi \pm \alpha$.

Pour $x = 2K\pi - \alpha$, y passe par un maximum, car la dérivée seconde $y'' = a \sin x$, est négative ;

Pour $x = 2K\pi + \alpha$, y passe par un minimum.

Pour le maximum $y = 2K\pi - \alpha + a \sin \alpha - b$

CENTRALE LYONNAISE

Pour le minimum :

$$y = 2K\pi + \alpha - a \sin \alpha - b.$$

Le maxima et le minima vont donc en croissant avec K.

Il s'agit de chercher la plus petite valeur de K pour laquelle le maximum est positif, et la plus grande valeur de K, pour laquelle le minimum est négatif.

La première sera le plus petit nombre entier m supérieur à

$$\frac{b + \alpha - a \sin \alpha}{2\pi};$$

La seconde, le plus grand nombre entier n inférieur à

$$\frac{b - \alpha + a \sin \alpha}{2\pi}$$

Avant $K = m$, il y a une racine; après $K = n$, il y en a une également; dans l'intervalle, il y a deux racines entre 2 maxima consécutifs. Le nombre total des racines est donc égal au double du nombre des maxima, plus un. — Le nombre des maxima est égal à celui des nombres entiers,

$$m \qquad m+1 \qquad m+2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad n-1, \; n.$$

C'est-à-dire $n - m + 1$. Le nombre des racines est donc $2(n - m + 1) + 1 = 2(n - m) + 3$.

1er Exemple. — $a = 3142 \qquad b = 157$

$$a = 1000\pi \qquad b = 50\pi \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

m est le plus petit nombre entier supérieur à

$$\frac{50\pi + \frac{\pi}{2} - 1000\pi}{2\pi} = -\frac{950}{2} + \frac{1}{4}$$

$m = -474$ De même $n = 524$.

Nombre des racines $2,998 + 3 = 1999$

2e Exemple. — $2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m} = 0$

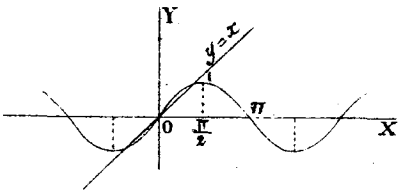
$$2x = y = \pi + y'$$

L'équation devient $y' - \sin y' + \pi\left(1 - \frac{2}{m}\right) = 0$

$a = 1$; il n'y a qu'une racine.

248. — Résoudre : $x - \sqrt{2} \sin x = 0$

R. — $x = 0$ est une racine. La dérivée $1 - \sqrt{2} \cos x$ est d'abord négative, donc la fonction décroît, et comme



elle est nulle pour $x = 0$; elle est ensuite négative ; quand x a dépassé $\frac{\pi}{4}$, la dérivée redevient positive, et la fonction croît ; d'ailleurs pour $x = \frac{\pi}{2}$, la fonction est positive, il y a donc une racine entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. Il y en a une autre négative et de même valeur absolue. — Ce sont les seules comme le montre la figure.

L'équation en rend compte également, car x croît toujours à partir de la racine, $\sqrt{2}\sin x$ reprenant périodiquement les mêmes valeurs ; le premier membre ne change donc plus de signe

On trouvera p. 86 des Tables de logarithmes de Houël une table des lignes trigonométriques naturelles avec 3 décimales, donnant aussi les arcs en parties du rayon.

Essayant 80° on verra que la racine en est très près

Pour approcher davantage et substituer directement les arcs en secondes, on écrira l'équation :

$$x \sin 1'' - \sqrt{2} \sin x = 0$$

Ou $$\log x - \log \frac{\sqrt{2}}{\sin 1''} - \log \sin x = 0$$

Ou encore $$\log x - (5,4649401 + \log \sin x) = 0$$

Substituant d'abord avec 5 décimales, on verra que :

$x = 79° = 284400''$ donne $-0,00296$.
$x = 80° = 288000''$ " $+0,00110$
$x = 79°, 40', = 286800$ " $-0,00026$

Faisant ensuite les substitutions avec 7 décimales, on aura :

pour $x = 79° 44' = 287040''$ $+0,0000121$.
$79° 43' 30'' = 287010''$ $-0,0000219$.

De là, par la méthode des parties proportionnelles, il faut ajouter $30'' . \frac{219}{340} = 19''$

En effet, $x = 79°, 43', 19'' = 287029''$
ne donne plus qu'une différence de $-0,0000001$
On peut donc prendre cette valeur pour la racine.

Remarque. — Appliquant la théorie générale du N° 6 on verra que

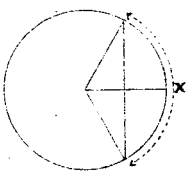
$$a = \sqrt{2} \qquad b = 0 \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} \qquad m = 0 \qquad n = 0$$

Donc le nombre des racines réelles est de 2, comme nous l'avons trouvé.

---

249. — <u>Déterminer le segment qui est le tiers du cercle.</u>

R. — Equation $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{3}\pi$



ou $x - \frac{2}{3}\pi - \sin x = 0$

$x = \pi$ donne un résultat positif.

$x = \frac{2}{3}\pi$ " négatif

$x = \frac{5}{6}\pi$ " positif $= 0{,}023$

La racine est donc très voisine de $\frac{5}{6}\pi$

Représentant maintenant par x des secondes, on aura :

$$(x - 432000)\sin 1'' - \sin x = 0$$

Ou $\log(x - 432000'') + \bar{6},6855749 - \log\sin x = 0$

Prenant d'abord 5 décimales, on verra que :

$x = 150^\circ = 540000''$	donne	$+ 0{,}02003$
$145^\circ = 522000''$	"	$- 0{,}11077$
$149^\circ = 536400''$	"	$- 0{,}00756$
$149^\circ, 10' = 537000''$	"	$- 0{,}00297$
$149^\circ, 17' = 537420''$	"	$+ 0{,}00025$
$149^\circ, 16' = 537360''$	"	$- 0{,}0004295$

Substituant ensuite avec 7 décimales, on trouve pour :

$149^\circ, 16', 30'' = 537390''$	$+ 0{,}0000231$
$149^\circ, 16', 27'' = 537387''$	$+ 0{,}0000001$

On peut donc prendre pour la racine $149^\circ, 16', 27''$

Remarque. — D'après le N° 6 comme $a = 1$, il n'y a qu'une racine.

---

250. — <u>Equation : $a^x - bx = 0$</u>

R. — I. — $a > 1$. $y = \frac{a^x}{x}$ varie de 0 à $-\infty$ quand x varie

de $-\infty$ à 0 ; en de $+\infty$ à $+\infty$ quand x varie de 0 à $+\infty$. Le minimum a lieu dans l'intervalle pour

$$a^x \, la . x - a^x = 0$$

$$x = \frac{1}{la}$$

$$y = la . a^{\frac{1}{la}} = ela$$

$b < 0$ une racine réelle négative

$b > 0$ 2 racines réelles positives; quand $b > e(la)^2$ on a $a^{ela} < e^b$

2 racines égales a $\frac{1}{la}$ quand $a^e = e^b$,

pas de racines réelles quand $a^e > e^b$

II. — $a < 1$ Alors $\frac{a^x}{x}$ varie de 0 à $+\infty$ quand x varie de $+\infty$ à 0, en de $-\infty$ à $-\infty$ quand x varie de 0 à $-\infty$. La fonction atteint son maximum quand

$$x = \frac{1}{la} \quad \text{alors} \quad y = ela$$

Si $b > 0$. une racine réelle > 0

Si $b < 0$ 2 racines réelles < 0

Si $b \gtrless ela$ 2 racines égales à $+\frac{1}{la}$

Si $b = ela$ pas de racines réelles

---

251. — <u>Équation</u>: $\underline{lx - ax = 0}$.

R. — I. — $y = lx$. L'équation devient $y - ae^y = 0$.

D'après la question précédente celle-ci a donc

une racine négative quand $a < 0$

deux racines positives quand $e^e < e^{\frac{1}{a}}$ ou $a < \frac{1}{e}$

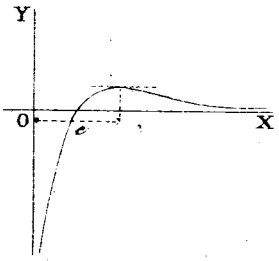
deux racines égales quand $a = \frac{1}{e}$

pas de racines réelles quand $a > \frac{1}{e}$

La proposée aura donc suivant ces cas :

une racine < 1, deux racines > 1, deux racines $= e$ ou pas de racines réelles.

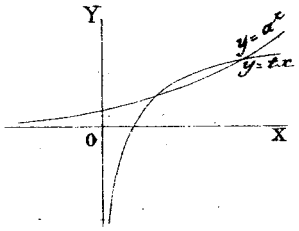
II. — La fonction $y = \frac{lx}{x}$, négative pour $x < 1$, positive pour $x > 1$ varie de $-\infty$ à 0



quand x varie de 0 à $+\infty$. Elle passe par un maximum $=\frac{1}{e}$ pour $x = e$. Prenant l'intersection avec $y = a$, on arrivera aux mêmes conséquences que ci-dessus.

252. — Racines réelles de : $a^x - lx = 0$.

R. — Il n'y a pas de racines au dessous de 1.



1° $a > 1$. Il faut que la tangente à la courbe $y = a^x$ passant par 0 soit au-dessous de la tangente à $y = lx$.

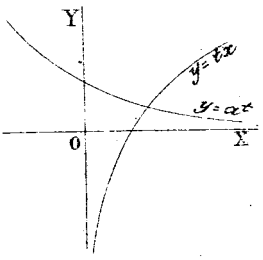
Équation de la 1re $y = x\,la^e$

Équation de la 2e $y = \frac{x}{e}$

Il faut donc que $la^e < \frac{1}{e}$

ou $a^e < e^{\frac{1}{e}}$ ou $a < e^{\frac{1}{e}}$

Si au lieu du logarithme Népérien, on avait le logarithme dont la base est a, la condition serait $a < e^{\frac{1}{e}}$ comme pour l'équation $a^x - x = 0$. En effet, alors les courbes $y = a^x$, $y = \log x$ sont symétriques par rapport à $y = x$.



2° $a < 1$. — Toujours une racine réelle, et une seule.

253. — Reconnaître si l'équation $e^x + e^{-x} - 3x - 5 = 0$ a des racines réelles.

R. — Construire les courbes

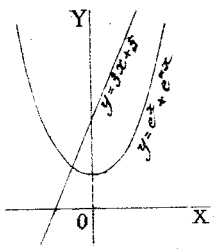
$$y = e^x \quad \text{et} \quad y = e^{-x}$$

D'où on conclura la courbe

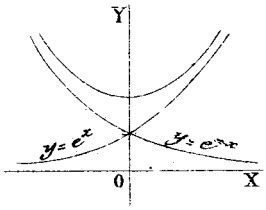
$$y = e^x + e^{-x}$$

Combinant cette 3e courbe avec la droite :

$$y = 3x + 5,$$



on verra qu'il y a deux racines réelles, parce que la tangente à l'infini à la courbe est verticale.



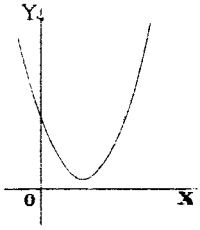
La racine négative est entre 0 et -1

(-1 étant l'abscisse de la droite pour $y = 2$)

254. — Résoudre : $e^x + e^{-x} - 2x = 0$.

R. — (Voir problème 13)

La courbe $y = e^x + e^{-x} - 2x$ a la forme ci-contre



La question qui reste à décider est de savoir si le minimum est $\gtrless 0$.

L'équation dérivée

$$e^x - e^{-x} - 2 = 0$$

peut s'écrire $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$

et a pour racine réelle :

$$e^x = 1 + \sqrt{2} = 2,41421$$

D'où $\quad x = l(1+\sqrt{2}) = 0,88137$

Le résultat de la substitution est :

$$1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1+\sqrt{2}} - 2l(1+\sqrt{2}) = 0,1066$$

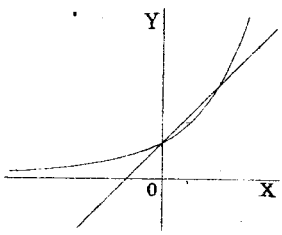
Il est donc positif, et il n'y a pas de racines réelles.

255. — Résoudre l'équation : $3^x = 54x - 135$

R. — Afin de ramener l'équation à une forme plus simple, je pose :

$$x = z + 3$$

Et il vient



$$3^{z+3} = 54(z+3) - 135$$

Je divise tous les termes par 3^3 et il reste :

$$3^3 = 2z + 1$$

On voit immédiatement que cette équation admet pour racine :

$$z = 0 \qquad z = 1$$

D'où l'on déduit pour x les deux valeurs :

$$x = 3 \qquad x = 4.$$

L'équation proposée n'admet pas d'autres racines. En effet, l'équation dérivée

$$3^x \ell 3 - 54 = 0$$

n'a qu'une racine, comme en général l'équation $a^x = b$.

---

256. — Résoudre l'équation : $x^4 - 2x + 1 = 0$

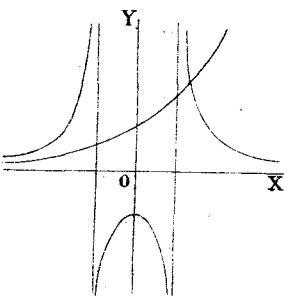
R. — La transformée en $-x$ ne présentant pas de variations, l'équation n'a pas de racines négatives, et comme elle ne peut avoir plus de 2 racines positives, il s'ensuit qu'elle a 2 racines imaginaires.

L'une des racines positives est 1. Si on divise $x^4 - 2x + 1$ par $x - 1$, il reste l'équation du 3e degré $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ qui a une racine positive comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1. Cette racine est précisément la 2ème racine positive de l'équation proposée.

---

257. — Discuter l'équation : $(x^2 - 1)\, e^x - 1 \doteq 0$

R. — Se servir des courbes



$$y = e^x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Du côté négatif, pour savoir s'il y a une racine, prenons l'équation dérivée :

$$2xe^x + (x^2 - 1)e^x = 0$$

d'où $x^2 + 2x - 1 = 0$ et $x = -1 \pm \sqrt{2}$

$x = -\infty$ donne le signe (−) dans la proposée.

$x = 0$ de même. S'il y a des racines négatives, il faut que $-1 - \sqrt{2}$ donne le signe (+). Or, le résultat de la substitution est :

$$2\,\frac{1 + \sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}} - 1$$

On a $e^{1+\sqrt{2}} > e^2 > 7$; donc $2\,\frac{1+\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}} < \frac{6}{7}$ et le résultat de la substitution est négatif. Il n'y a donc pas

de racines négatives.

Il y a une racine positive, plus grande que 1 et moindre que 1,5.

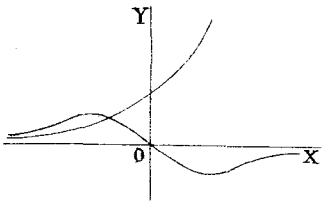
---

258. — $(x^2+1)e^x + x = 0.$

R. — Se servir des courbes

$$y = e^x$$

$$y + \frac{x}{x^2+1} = 0$$

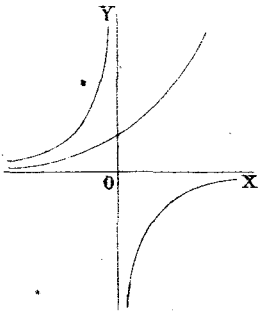


Il y a une racine entre 0 et -1 ;

$e^{-1} < \frac{1}{2}$ et pour $x = -1$, $\frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}$

Donc le 1er membre est négatif.

259. — $xe^x + 1 = 0.$



R. — On peut se servir des courbes $y = e^x$ $xy + 1 = 0$ (fig. 1), ou de la courbe $y = 1 + xe^x$ (fig. 2). Le minimum a lieu pour $x = -1$; alors $y = 1 - \frac{1}{e}$. Il n'y a pas de racines réelles.

Décomposition des fractions rationnelles.

---

260. — $\frac{x}{(x^2-1)^2}$

R. — $$\frac{x}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1}$$

$$x = A(x+1)^2 + A_1(x+1)^2(x-1) + B(x-1)^2 + B_1(x-1)^2(x+1)$$

$x = -1$ donne $B = -\frac{1}{4}$

$x = 1$ " $A = \frac{1}{4}$

D'où $x - \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{4}(x-1)^2 = [A_1(x+1) + B_1(x-1)](x^2-1)$

On $$0 = A_1(x+1) + B_1(x-1)$$

Identité qui donne $A_1 = 0$ $\qquad B_1 = 0$

Ainsi $$\frac{x}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x+1)^2}$$

261. — $\dfrac{x^3+x-1}{x(x^2+1)^3}$.

R. — $$\frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{Px+Q}{(x^2+1)^3} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)^2} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2+1}$$

$$x^3+x-1 = A(x^2+1)^3 + (Px+Q)x + (P_1x+Q_1)x(x^2+1) + (P_2x+Q_2)x(x^2-1)^2$$

$x = 0$ donne $A = -1$

$x = \sqrt{-1}$ " $-1 = (P\sqrt{-1}+Q)\sqrt{-1}$ d'où $P = 1$ $\quad Q = 0$

Et $$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2+1)^3 + (P_1x+Q_1)x(x^2+1) + (P_2x+Q_2)x(x^2+1)^2$$

On $$x - 1 = (x^2+1)^2 + (P_1x+Q_1)x + (P_2x+Q_2)x(x^2+1)$$

$x = \sqrt{-1}$ donne $\sqrt{-1} - 1 = (P_1\sqrt{-1}+Q_1)\sqrt{-1}$ d'où $P_1 = 1$ $\quad Q_1 = 1$

Et par suite $$-1 = x^2 + 1 + (P_2x+Q_2)x$$

$x = \sqrt{-1}$ donne $P_2 = 1$ $\qquad Q_2 = 0$

Ainsi $$\frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}$$

262. — $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$

R. — $$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$x = 0$ donne $A = 1$

$x = -1$ donne $C = 1$

De là $1 - x - 1 - x^2 = Bx(x+1)$ ou $B = -1$

Donc $$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

263. — $\dfrac{x^4+1}{x^2(x^2+1)}$

R. — $$\frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)} = 1 + \frac{1-x^2}{x^2(x^2+1)} = 1 + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Px+Q}{x^2+1}$$

De là $\quad 1 - x^2 = A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Px+Q)x^2$

$$x = 0 \text{ donne } A = 1$$

Prenant la dérivée $-2x = 2Ax + B(x^2+1) + 2Bx^2 + (Px+Q)2x + Px^2$

$x = 0$ donne $B = 0$ $\quad x = \sqrt{-1}$ donne $P = 0$ $\quad Q = -2$.

Donc $\dfrac{x^4+1}{x^2(x^2+1)} = \underline{1 + \dfrac{1}{x^2}} - \dfrac{2}{x^2(x^2+1)}$

264. — $\underline{\dfrac{f(x)}{F(x)} = \dfrac{1+x^2}{-x+x^3}}$

R. — On a : $\dfrac{1+x^2}{-x+x^3} = \dfrac{1+x^2}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1}$

Or $\quad A = \dfrac{f(0)}{F'(0)} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$$B = \frac{f(1)}{F'(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$C = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc : $\dfrac{1+x^2}{-x+x^3} = \underline{\dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{x-1}} + \dfrac{1}{x+1}$

265. — $\underline{\dfrac{f(x)}{F(x)} = \dfrac{4x^2-5x+3}{(x-2)(x-3)(x-1)}}$

R. — On a : $\dfrac{4x^2-5x+3}{(x-2)(x-3)(x-1)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{x-1}$

$$A = \frac{f(2)}{F'(2)} = -9$$

$$B = \frac{f(3)}{F'(3)} = 12$$

$$C = \frac{f(1)}{F'(1)} = 1.$$

Donc : $\dfrac{4x^2-5x+3}{(x-2)(x-3)(x-1)} = \dfrac{-9}{x-2} + \dfrac{12}{x-3} + \dfrac{1}{x-1}$

266. — $\underline{\dfrac{1}{x^3-x}}$

R. — On a : $\dfrac{1}{x^3-x} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x-1}$

D'où $\quad 1 = A(x^2-x) + B(x^2-1) + C(x^2-x)$

D'où $\quad (A+B+C)x^2 - (A-C)x - (B+1) = 0.$

Ce polynôme devant être identiquement nul, on doit avoir :

$$B + 1 = 0$$
$$A - C = 0$$
$$A + B + C = 0$$

D'où $B = -1$ et $A = C = \frac{1}{2}$

Donc : $\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)}$

267. — $\frac{1}{x^3 + x}$

R. — On a : $\frac{1}{x^3 + x} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x}$

D'où $(A + C)x^2 + Bx + C - 1 = 0$

On doit avoir : $A + C = 0$
$B = 0$
$C - 1 = 0$

D'où $A = -1$ $C = 1$

Donc : $\frac{1}{x^3 + x} = \frac{-x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x}$.

TRIGONOMÉTRIE.

---

269. — Résoudre : $\sin(x+a) = -\cos x$

R. — $\sin x \cos a + \sin a \cos x = -\cos x$.

Divisant par $\cos x$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1+\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$

$$x = K\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{a}{2}.$$

270. — Résoudre $\operatorname{tg}(a+bx)\operatorname{tg}(c+dx) = 1$.

R. — $\operatorname{tg}(a+bx) = \cot(c+dx) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - c - dx\right)$

D'où $a + bx - \left(\frac{\pi}{2} - c - dx\right) = K\pi$

$$x = \frac{(2K+1)\frac{\pi}{2} - (a+c)}{b+d}$$

271. — Résoudre l'équation : $\cot^2 x - \sec^2 x = \frac{1}{4}$.

R. — On peut écrire $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - 1 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{4}$

D'où $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{-5 \pm \sqrt{29}}{8}}$

De là 2 valeurs de x : x', $-x$ en leur lieu $K\pi \pm x'$

272. — Rétablir le rayon dans la formule qui donne $\operatorname{tg}(x+b)$.

R. — Dans la formule

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$\operatorname{tg} a$ représente un rapport : le rayon est pris pour unité.
Si on veut introduire le rayon, on devra écrire :

$$\frac{\operatorname{tg}(a+b)}{r} = \frac{\frac{\operatorname{tg} a}{r} + \frac{\operatorname{tg} b}{r}}{1 - \frac{\operatorname{tg} a}{r}\frac{\operatorname{tg} b}{r}} \qquad \operatorname{tg}(a+b) = \frac{r^2(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)}{r^2 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

273. — Vérifier que $\frac{1 - x\cos a}{1 - 2x\cos a + x^2} = 1 + x\cos a + x^2\cos 2a + x^3\cos 3a + \ldots$

R. — On peut vérifier la loi pour les 3 premiers termes. — Je dis qu'elle est générale.

En effet, si on a obtenu au quotient le terme $x^n \cos na$, le reste correspondant sera :

$$R = -x^{n+1}\cos(n-1)a + 2x^{n+1}\cos a \cos na - x^{n+2}\cos na$$

or, d'après la règle :

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

On a $\quad 2\cos a \cos na = \cos(n+1)a + \cos(n-1)a$

Donc $\quad R = x^{n+1}\cos(n+1)a - x^{n+2}\cos na$

Et le terme suivant du quotient sera : $x^{n+1}\cos(n+1)a$, C.q.f.d

274. — Calculer $x = 378(\sin 38^\circ - \cos 27^\circ)$

R. — $\cos 27^\circ = \sin 63^\circ$. Appliquant la formule :

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q)$$

On aura : $\quad x = -756\sin(12^\circ\ 30')\cos(50^\circ\ 30')$

275. — Exprimer rationnellement $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

R. —
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

276. — Calculer $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$. Possibilité.

R. —
$$\sin\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a} \pm 1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a} \mp 1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}}$$

La quantité sous le radical est toujours réelle, car $\operatorname{tg}^2 a$ est au moins égal à 1. Et elle n'est jamais supérieure à 1 ; car en l'écrivant

$$\frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}\right]$$

On voit que la parenthèse est au plus égale à 2.

On a donc 4 valeurs. — En effet, la tangente correspond aux $K\pi + \alpha$, dont les moitiés sont données par

$$\frac{K\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \text{ soit : } \frac{\alpha}{2},\ \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2},\ \pi + \frac{\alpha}{2},\ \frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

---

277. — Transformation de l'expression $1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2} = x$

R. —
$$x = 1 + \frac{2\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{1}{\cos a}$$

278. — Sur le côté du décagone régulier inscrit dans un cercle, pris pour rayon, on décrit une nouvelle circonférence ; on inscrit un nouveau décagone, et ainsi de suite. Faire la somme des côtés de ces décagones successifs, à l'infini. —

R. —
$$S = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\left[1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + \left[\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2 + \ldots\right] = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) =$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

Cette somme est donc égale à la racine négative changée de signe de l'équation du 2e degré obtenue par le passage d'une droite en moyenne extrême raison, — racine qui représente le côté du décagone étoilé.

---

279. — Valeur du côté du pentagone régulier inscrit.

R. — Le côté est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les 2 côtés de l'angle droit sont le rayon du cercle circonscrit et le côté du décagone régulier inscrit.

Soit O la circonférence, AB, le côté du décagone, prenons AK = OA ; alors OK sera le côté du pentagone régulier inscrit. — Menons par K une tangente au cercle. Le triangle OKH donne

$$\overline{KH}^2 = KA \cdot KB$$

Or $\overline{AB}^2 = AK \cdot BK$

Donc $AB = KH$

Ainsi OK, est le côté du pentagone.

On peut encore trouver simplement le côté C_5 du pentagone régulier inscrit, en remarquant que :

$$C_5 = 2R \sin\frac{\pi}{5} = 4R \sin\frac{\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{10}$$

280. — Valeur du côté du pentédécagone régulier inscrit.

R. — Le $\frac{1}{15}$ de la circonférence est l'arc sous-tendu par le côté du pentédécagone. — Si donc on inscrit dans la circonférence le côté $AB = R$ de l'hexagone, et ensuite le côté AC du décagone, BC sera le côté du pentédécagone, car $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$

On a donc pour le côté C_{15} du pentédécagone :

$$C_{15} = 2R \sin\frac{\pi}{15} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) = 2R\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{6}\right).$$

281 — Exprimer $\sin\frac{a}{4}$ en fonction de $\sin a$.

R. — On a $\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 a}}{2}}$

D'où
$$\sin\frac{a}{4} = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{-\sin^2\frac{a}{2}}}{2}}$$

$$2\sin^2\frac{a}{4} = 1 - \sqrt{1-\sin^2\frac{a}{2}}$$

D'où : $\left(2\sin^2\frac{a}{4} - 1\right)^2 = -\left\{1 - \frac{1-\sqrt{1-\sin^2 a}}{2}\right\}^2$

Cette équation est du 4e degré en $\sin\frac{a}{4}$. Si on fait disparaître les radicaux, on a une équation du 8e degré dont les 8 racines sont réelles.

En effet, les angles correspondants à $\sin a$ sont compris dans les 2 formules : $2K\pi + a$ et $2K\pi + \pi - a$; donc les angles correspondants à $\sin\frac{a}{4}$ sont compris dans les 2 formules $2K\pi + \frac{a}{4}$ et $2K\pi + \frac{\pi - a}{4}$, dans lesquelles il suffira de donner à K successivement les valeurs 0, 1, 2, 3.

On aura ainsi les 8 valeurs :

$\sin\frac{a}{4}$		$\sin\frac{\pi-a}{4}$
$\sin\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{a}{4}\right)$	et	$\sin\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi-a}{4}\right)$
$\sin\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{a}{4}\right)$		$\sin\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi-a}{4}\right)$
$\sin\left(\frac{6\pi}{4} + \frac{a}{4}\right)$		$\sin\left(\frac{6\pi}{4} + \frac{\pi-a}{4}\right)$

282. — Expression de tg a en fonction de Cos a.

R. — $$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \pm \frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$$

On trouve 2 valeurs pour tg a. Cela s'explique en remarquant que lorsqu'on donne Cos a, tous les arcs compris dans la formule $2K\pi \pm a$ satisfont à Cos a; de sorte qu'en ne considérant que les arcs plus petits que 2π, on a 2 arcs correspondants à Cos a, l'arc a et l'arc $2K\pi - a$.

---

283. — Trouver $\dfrac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}$

R. — Sin 60° est la moitié de la corde de 120°, c'est-à-dire du côté du triangle équilatéral inscrit.

Ainsi $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

L'expression proposée est donc :

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

---

284. — Déterminer $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de Sin a.

R. — On a
$$\sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} = 1$$
$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a$$

D'où
$$\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2 = 1 + \sin a$$
$$\left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)^2 = 1 - \sin a$$

En par suite :
$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1+\sin a}$$
$$\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1-\sin a}$$

Donc enfin :
$$\sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}\right\}$$
$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}\right\}$$

Dans ces 2 expressions le 1er radical est toujours à prendre avec le même signe, tandis que le 2e doit être pris avec des signes contraires.

Donc, lorsque les signes sont fixés pour l'une des

2 expressions, elles le sont par là même pour l'autre.

Chacune des inconnues admet 4 valeurs ; on s'explique cela en considérant que Sin a se rapporte non-seulement à l'angle a, mais à tous les angles compris dans les deux formules

$$2K\pi + a \quad \text{et} \quad (2K+1)\pi - a \;;$$

alors le résultat du calcul se rapporte aux angles compris dans les formules :

$$\left(K\pi + \frac{a}{2}\right) \text{ et } \left(K\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

285. — Étant donné tg a, trouver $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$. — Discussion Géométrique

R. — On a : $\operatorname{tg} 3a = \dfrac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^3 a}$; d'où $\operatorname{tg} a = \dfrac{3\operatorname{tg}\frac{a}{3} - \operatorname{tg}^3\frac{a}{3}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{a}{3}}$

On a donc pour déterminer $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ l'équation complète du 3e degré : $\operatorname{tg}^3\frac{a}{3} - 3\operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tg}^2\frac{a}{3} - 3\operatorname{tg}\frac{a}{3} + \operatorname{tg} a = 0$

Étant donné tg a, on donne les tangentes des angles compris dans la formule $K\pi + a$

Donc, pour les racines de l'équation, on aura les tangentes des angles compris dans la formule : $\frac{K\pi}{3} + \frac{a}{3}$, dans laquelle on donnera successivement à K les valeurs 0, 1, 2.

On a ainsi 3 valeurs réelles qui sont :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{3}, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{a}{3}\right), \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}\right)$$

Si α est l'angle compris de 0 à π qui a même tangente que l'angle a, les 3 racines seront :

$$\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$$

Remarquons que les angles $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$, $\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ seront compris de 0 à π.

Soit une circonférence O, et soient C et D des points qui partagent la $\frac{1}{2}$ circonférence ABA' en 3 parties égales, $\frac{\alpha}{3}$ sera compris de 0° à 60°, $\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ de 60° à 120°, et $\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$, de 120° à 180°.

Donc $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ sera compris entre :

$$0 \text{ en } tg\, 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}$$

$tg\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$ sera compris entre $\sqrt{3}$ en $+\infty$, ou entre $-\infty$ en $-\sqrt{3}$.

$tg\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$ sera compris entre $-\sqrt{3}$ en 0

Les 3 racines de l'équation sont ainsi séparées.

286. — Trouver l'angle dont la tangente est : $\sqrt{2} - 1$.

R. — Soit O le cercle trigonométrique, OO' la diagonale du carré OB'O'A qui est égale à $\sqrt{2}$.

De O' comme centre avec OO', décrivons un arc de cercle qui coupera en T la tangente O'A.

On aura $O'T = OA = AT = \sqrt{2} - 1$; ainsi l'angle cherché est TOA.

Or, dans le triangle O'OT, l'angle $OO'T = 45^\circ$, les angles en T et en O sont égaux entre eux et a $\frac{3\pi}{8}$ l'angle cherché est $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$.

287. — Démontrer que $\sin 2x = \frac{2\, tg\, x}{1 + tg^2 x}$.

R. — En effet, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \frac{2\, tg\, x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2\, tg\, x}{\sec^2 x} = \frac{2\, tg\, x}{1 + tg^2 x}$

288. — Montrer que :

$$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) = 4 \sin \tfrac{1}{2}(x+y) \sin \tfrac{1}{2}(x+z) \sin \tfrac{1}{2}(x+y)$$

R. — Soit V, la valeur du 1er membre, on a :

$$V = (\sin x + \sin y) + (\sin z - \sin(x+y+z))$$

$$V = 2 \sin \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y) - 2 \sin \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x+y+2z)$$

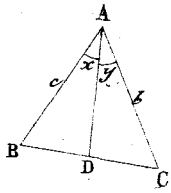
$$V = 2 \sin \tfrac{1}{2}(x+y) \left\{ \cos \tfrac{1}{2}(x-y) - \cos \tfrac{1}{2}(x+y+2z) \right\}$$

$$V = 2 \sin \tfrac{1}{2}(x+y) \left\{ 2 \sin \tfrac{1}{2}(x+z) \sin \tfrac{1}{2}(y+z) \right\}$$

On enfin : $V = 4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x+z) \sin \frac{1}{2}(y+z)$

289. — On mène la médiane AD du triangle ABC, on demande la relation qui lie les 2 côtés AB, AC avec les 2 angles BAD, DAC.

Si l'on considère les 2 triangles BAD, DAC, on a :



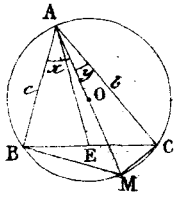
$$\frac{BD}{DA} = \frac{\sin x}{\sin B} = \frac{DC}{DA} = \frac{\sin y}{\sin C}$$

Donc $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin B}{\sin C}$; or $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$

$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b}{c}$; c'est la relation cherchée.

290. — Étant donné un triangle ABC inscrit dans un cercle, quelle est la relation qui lie les côtés AB, AC et les angles que font ces côtés avec le diamètre passant par A.

R. — Joignons BM et CM. Dans le triangle rectangle AMC, on a : $b = 2R \cos y$.



Dans le triangle rectangle AMB, on a :

$$c = 2R \cos x, \quad \text{d'où } \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{c}{b}$$

Or, en menant la médiane AE, on aura

$$\frac{\sin BAE}{\sin EAC} = \frac{b}{c}$$

Donc :

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sin EAC}{\sin BAE}$$

291. — Calculer les sinus et cosinus de 9 en 9 degrés.

R. — On connaît $\sin \frac{\pi}{10}$ et $\cos \frac{\pi}{10}$

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos 72^\circ$$

$$\cos \frac{\pi}{10} = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sin 72^\circ$$

On en déduit $\cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \sin 54^\circ$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos 54^\circ$$

D'où $\sin 9^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^\circ} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

$$\cos 9^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^\circ} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\sin 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \cos 63^\circ$$

$$\cos 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sin 63^\circ$$

Enfin $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

292. — Longueur du côté du décagone régulier inscrit.

R. — Si R est le rayon de la circonférence et x la longueur du côté du décagone, cette longueur est donnée par l'équation:

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

$$x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2}$$

La racine positive de cette équation donne la longueur cherchée.

$$x = \frac{-R + R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{3}).$$

293. — Montrer que $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$.

R. — En effet, on a:

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$$

294. — Montrer que $\operatorname{cotg} a = \frac{\sqrt{1-\sin^2 a}\sqrt{1-\cos^2 a}}{1-\cos^2 a}$

R. — En effet: $\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\cos a \sin a}{1-\cos^2 a} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 a}\sqrt{1-\cos^2 a}}{1-\cos^2 a}$

295. — Montrer que $\frac{\operatorname{tg} a - \sin a}{\operatorname{tg} a} = 1 - \cos a$.

R. — En effet: $1 - \cos a = \frac{\sin a(1-\cos a)}{\sin a} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} - \sin a}{\frac{\sin a}{\cos a}} = \frac{\operatorname{tg} a - \sin a}{\operatorname{tg} a}$

296. — Montrer que $\sin a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$.

R. — En effet: $\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}} = \sin a$.

297. — Combien y a-t-il de décagones réguliers inscrits?

R. — On a vu, en cherchant la longueur du côté du décagone, qu'on trouve 2 valeurs; il y a donc 2 décagones réguliers inscrits, l'un dont la longueur du côté est

$$\frac{R}{2}(-1 + \sqrt{3}),$$

et l'autre qui est le décagone régulier étoilé et dont la longueur du côté est

$$\frac{R}{2}(1 + \sqrt{3})$$

298. Formule de Moivre.

R. — $(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx$.

En effet : $(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$

De même quelque soit le nombre des facteurs :

$$\begin{cases} (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)\ldots \\ = \cos(x+y+z+\ldots) + \sqrt{-1}\sin(x+y+z+\ldots) \end{cases}$$

En supposant $x = y = z = \ldots$ on en déduit m désignant un nombre entier et positif.

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx.$$

Cette formule est encore vraie lorsque m est un nombre fractionnaire positif ou négatif.

299. Ramener une quantité imaginaire de la forme $a + b\sqrt{-1}$ à la forme $l(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$.

R. — Il suffit pour cela qu'on ait :

$$l = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ et } \sin\omega = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La quantité l que l'on prend toujours > 0, est dite le module de l'expression imaginaire.

Les valeurs de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$ font connaître l'arc ω ou l'argument ; on le choisit ordinairement positif et plus petit que la circonférence.

300. — Montrer que :

$$\cos 2a\cos 2b + \cos 2a\cos 2c + \cos 2b\cos 2c = \cos a\cos(2c-a) + \cos b.\cos(2c-b) + \cos c.\cos(2b-a)$$

sachant que $a + b + c = \pi$.

R. — Si on multiplie par 2 les 2 membres de cette égalité, on aura des doubles produits de cosinus que nous pourrons transformer en une somme de cosinus, et on devra tomber sur une identité.

$$\cos[2(a+b)] + \cos[2(a-b)] + \cos[2(a+c)] + \cos[2(a-c)] + \cos[2(b+c)] + \cos[2(b-c)] =$$
$$= \cos 2c + \cos[2(a-c)] + \cos 2b + \cos[2(b-c)] + \cos 2a + \cos[2(a-b)]$$

Mais on a :

$$\cos 2a = \cos[2(b+c)]$$
$$\cos 2b = \cos[2(a+c)]$$
$$\cos 2c = \cos[2(a+b)]$$

Si on substitue ces valeurs dans le 2e membre de l'égalité précédente, ce 2e membre devient identique au 1er.
Donc l'égalité proposée était vraie.

---

301. — Déterminer $\operatorname{tg}\frac{1}{4}a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

R. — Equation : $\operatorname{tg} 4a = \dfrac{4\operatorname{tg} a - 4\operatorname{tg}^3 a}{1 - 6\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^4 a}$

Posons : $\operatorname{tg} 4a = b$ $\qquad \operatorname{tg} a = x$

On a donc $\qquad bx^4 + 4x^3 - 6bx^2 - 4x + b = 0.$

C'est une équation réciproque ; on peut l'écrire :

$$bx^2 + 4x - 6b - \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2} = 0.$$

Posant $x - \frac{1}{x} = z$, elle devient : $bz^2 + 4z - 4b = 0$

D'où on tire deux valeurs de z toujours réelles. Chaque valeur de z donne 2 valeurs réelles pour x : ce qui fait en tout 4 racines réelles.

On peut les expliquer $\quad z = \operatorname{tg} a - \cot a = -2\cot 2y$.
à chaque valeur de z correspond une valeur pour $\cot 2y$. Soit 2α le plus petit arc qu'on trouve pour $2y$; on aura de plus les arcs

$$\pi + 2\alpha \qquad 2\pi + 2\alpha \qquad \&c.$$

Ce qui donne pour y $\qquad \alpha \qquad \frac{\pi}{2} + \alpha \qquad \pi + \alpha \qquad \&c.$

Les 2 premiers correspondent à des tangentes différentes. Chacune des 2 valeurs de z donne donc 2 valeurs pour y

A priori, étant donnée une tangente b, on a tous les arcs compris dans la formule $K\pi + \alpha$, ce qui donne pour l'arc quart :

$$\frac{\alpha}{4} \qquad \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} \qquad \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} \quad \&c.$$

Les 4 premiers ont des tangentes distinctes c.q.f.d.

Cas particulier où le coefficient de x^4 tend vers zéro. L'équation se réduit à $4x^3 - 4x = 0$; elle a une racine

infinie, une racine nulle et 2 racines égales à ± 1.

Alors $4a = K\pi$; d'où $a = K\frac{\pi}{4}$, ou $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Car où le coefficient de x^4 augmente indéfiniment : L'équation devient :

$x^4 - 6x^2 + 1 = 0$; d'où $x^2 = 3 \pm \sqrt{8}$ $\quad x = \pm\sqrt{2} \pm 1$

On reconnaît les tangentes de $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ ou généralement de $(2K+1)\frac{\pi}{8}$.

---

302. — Quand $a+b+c=\pi$, on a $\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2}$.

R. — $\cos a + \cos b + \cos c = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos(a+b)$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - 2\cos^2\frac{a+b}{2} + 1$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right] + 1$$

$$= 4\sin\frac{c}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} + 1 \text{ C.q.f.d.}$$

---

303. — Quand $a+b+c=\pi$, trouver $\sin a + \sin b + \sin c$.

R. — $\sin a + \sin b + \sin c = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin(a+b)$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right]$$

$$= 4\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}.$$

---

304. — Quand $a+b+c=\pi$, $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1$. $\quad (\alpha)$

R. — $\cos c = -\cos(a+b) = -\cos a \cos b + \sin a \sin b$.

$$(\cos c + \cos a \cos b)^2 = \sin^2 a \sin^2 b.$$

Développant et remplaçant les $\sin^2$ en $\cos^2$, on trouve l'équation (α).

---

305. — Quand $a+b+c=\pi$, $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4\sin a \sin b \sin c$.

R. — $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 2\sin(a+b)\cos(a-b) - \sin 2(a+b)$

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 2\sin(a+b)\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$= 4 \sin c \sin a \sin b \text{ . C.q.f.d.}$$

306. — Quand $a+b+c=\pi$, $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + 4\cos a \cos b \cos c + 1 = 0$.

R. —
$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 2\cos(a+b)\cos(a-b) + \cos 2(a+b)$$
$$= 2\cos(a+b)\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right] - 1$$
$$= -4\cos c \cos a \cos b - 1 \text{ . C.q.f.d.}$$

307. — Quand $a+b+c=\pi$, $\sin^2 2a + \sin^2 2b + \sin^2 2c + 2\cos 2a \cos 2b \cos 2c = 2$.

R. —
$$\sin 2c = -\sin 2(a+b) = -\sin 2a \cos 2b - \cos 2a \sin 2b$$
$$\sin^2 2c = \sin^2 2a \cos^2 2b + 2\sin 2a \cos 2a \sin 2b \cos 2b + \cos^2 2a \sin^2 2b$$

De plus $\cos 2c = \cos 2(a+b)$

Donc la somme cherchée est égale à :

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2a\,(1+\cos^2 2b) + \sin^2 2b\,(1+\cos^2 2a) + 2\cos^2 2a \cos^2 2b \\ \quad + 2\sin 2a \cos 2a \sin 2b \cos 2b - 2\sin 2a \cos 2a \sin 2b \cos 2b\end{array}\right\}$$

Ou $\sin^2 2a + \sin^2 2b + \cos^2 2a(\sin^2 2b + \cos^2 2b) + \cos^2 2b(\sin^2 2a + \cos^2 2a) = 2$.

308. — Dans tout triangle, on a :

$$1 - \sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 0$$

R. — $A + B + C = 180^\circ$ $\qquad \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}$

$$\sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} = 1 - \sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2}$$

C.q.f.d.

309. — Dans tout triangle, on a :

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}.$$

R. En effet : $\cot(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma - \cot\alpha - \cot\beta - \cot\gamma}{\cot\alpha\cot\beta + \cot\gamma \quad \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma - 1}$

En quand $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$ le numérateur est nul.

310. — Démontrer que $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$, quand x est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

R. — On a $1 - \cos x > 0$

La fonction $x - \sin x$ est donc croissante, et comme elle est nulle pour $x = 0$, x croissant, on aura :

$$x - \sin x > 0.$$

De là, on déduit que la fonction $\frac{x^2}{2} + \cos x$ est croissante, et comme pour $x = 0$, elle est égale à 1, x croissant à partir de zéro, on aura :

$$\frac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0$$

Donc la fonction $\frac{x^3}{6} + \sin x - x$ est croissante, et comme elle est nulle pour $x = 0$ on en conclut, quand x croît depuis zéro :

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}$$

2e Solution. — L'inégalité proposée revient à :

$$\frac{x^3}{6} + \sin x - x > 0, \text{ ou à : } x\left(\frac{x^2}{6} - 1\right) + \sin x > 0.$$

Or le 1er membre augmente quand x augmente, et comme pour $x = 0$, il est nul, il s'ensuit que pour des valeurs de x supérieures à 0, l'inégalité est vérifiée.

311. — Lim $(1-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}$ pour $x = 1$.

R. — $1 - x = y$.

La fonction est : $y\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}(1-y) = y \cot \frac{\pi y}{2} = \frac{y}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi y}{2}} = \frac{\frac{\pi y}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{2}{\pi}$

Faisant tendre x vers 1 ou y vers 0, on a pour limite :

$$\frac{2}{\pi} \quad \text{(Voir Algèbre - Dérivées)}$$

312. — Lim $\frac{\sin(\omega - 60^\circ)}{4\cos^2\omega - 1}$ quand $\omega = 60^\circ$.

R. — $4\cos^2\omega - 1 = 4\left(\cos^2\omega - \frac{1}{4}\right) = 4(\cos\omega + \cos 60^\circ)(\cos\omega - \cos 60^\circ)$

$$= -4\sin(\omega + 60^\circ)\sin(\omega - 60^\circ)$$

La fraction est donc égale à

$$-\frac{1}{4\sin(\omega + 60^\circ)}$$

Pour $\omega = 60^\circ$, on a :

$$\frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

(Voir Algèbre, Dérivées).

313. — Limite du rapport de la corde à l'arc quand l'arc reste de longueur constante et que le rayon augmente indéfiniment.

R. — $l = 2R \sin \frac{a}{2R} = a \frac{\sin \frac{a}{2R}}{\frac{a}{2R}}$ $\qquad \lim \frac{l}{a} = 1.$

314. — Si on prend $1 - \frac{x^2}{2}$ pour le cosinus d'un arc petit x, quelle est la limite de l'erreur commise ?

R. — On a : $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2}{4} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$

D'où $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + 2\left(\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)$.

L'erreur commise est donc : $2\left(\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)$.

Or : $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$, donc $\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{8}$.

Donc l'erreur commise est $< \frac{x^3}{16}\left(\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)$;

Ou à fortiori : $< \frac{x^4}{16}$.

315. — Un triangle n'est pas déterminé par ses angles.

R. — Les équations :

$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = c \cos A + a \cos C$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Etant homogènes en a, b, c ne déterminent que les rapports $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, encore faut-il pour cela, comme on le sait par la discussion d'un système de 3 équations du 1er degré à 3 inconnues, que le déterminant soit nul. Ce déterminant est ici :

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$$

L'annulant, on en déduit :

$$(\cos C + \cos A \cos B)^2 = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) = \sin^2 A \sin^2 B$$
$$\cos C = -\cos A \cos B \pm \sin A \sin B.$$

$\cos C = -\cos(A + B)$ ou $\cos C = -\cos(A - B)$

$C = (2K+1)\pi \pm (A + B)$ ou $C = (2K+1)\pi \pm (A - B)$

La 1re de ces relations donne pour $K = 0$ $A + B + C = \pi$, condition qui est remplie, pour les 3 angles d'un triangle.

2e Solution. — En effet, prenons les 3 relations :

$$(1) \qquad A + B + C = 180^\circ$$

$$(2) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$(3) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

On a 3 équations en 3 inconnues. Mais (1) ne contient aucune des inconnues, il restera donc (2)(3) pour les déterminer, et ces 2 équations sont insuffisantes pour trois inconnues.

---

316. — Déduire des relations $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, les relations $a = b \cos C + c \cos B$.

R. — $$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Donc $$c = a \cos B + b \cos A. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

317. — Déduire des relations $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ les relations $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

R. — $$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = \frac{bc}{\sin B \sin C}$$

Donc $$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}{\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A}$$

Or la relation $A + B + C = \pi$ donne :

$$\sin^2 A = \sin^2 B \cos^2 C + \sin^2 C \cos^2 B + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C$$

$$= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C)$$

$$= \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$$

Donc : $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Autrement. — De ce que $A + B + C = \pi$, on a $\sin C = \sin(A+B)$

Donc : $$\frac{\sin(A+B)}{\sin A} = \frac{c}{a}$$

Développant $\sin(A+B)$ en remplaçant $\sin B$ par $\frac{b}{a} \sin A$

Il vient : $$c = a \cos B + b \cos A$$

Faisant maintenant $\cos B = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$,

On a : $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} = c - b \cos A$

Elevant au carré et simplifiant

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Autrement $\cos C = \cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B$

Et $-\sin A \sin B + \cos C = -\cos A \cos B.$

Elevant au carré

$$\sin^2 A \sin^2 B + \cos^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C + \cos^2 A \cos^2 B$$

Remplaçant les cosinus en fonction de sinus

$$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C$$

Ou bien, d'après les relations données :

$$\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

318. — Trouver dans un triangle $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$, $\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C$.

R. — Par les formules $\sin \frac{1}{2} A \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ &c.

On a :

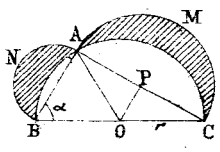
$$\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = \frac{S^2}{pabc};$$

$$\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C = \frac{pS}{abc}$$

Donc :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{S}{p^2}$$

319. — Sur les côtés d'un triangle rectangle, on décrit des demi-circonférences. — Trouver que la somme des parties ombrées égale l'aire du triangle.



R. — La partie AMC est égale à :

$$\frac{\pi r^2 \sin^2 \alpha}{2} - ar^2 + r^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Changeant α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ on aura pour l'autre

$$\frac{\pi r^2 \cos^2 \alpha}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) r^2 + r^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

La somme est donc égale à $2r^2 \sin \alpha \cos \alpha$. C. q. f. d.

2e Solution. — Soit S la surface du triangle ; la surface de la figure BNAMC sera :

$$S + \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2 = S + \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2)$$

La surface des parties ombrées sera donc :

$$S + \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Ou bien $\quad S + \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2 - a^2)$

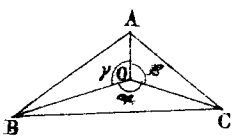
Or : $\quad b^2 + c^2 = a^2$

Donc la surface des parties ombrées est S ; c'est-à-dire qu'elle est égale à la surface du triangle.

---

320. — Relations entre les 3 côtés d'un triangle et les droites qui en joignent les sommets à un point quelconque O intérieur.

R. — On a :



$$a^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos\alpha$$

$$b^2 = a'^2 + c'^2 - 2a'c' \cos\beta$$

$$c^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\gamma$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$

On sait que la dernière équation peut s'écrire :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

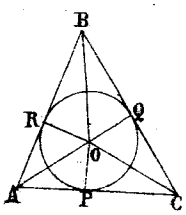
La relation demandée sera donc, toutes réductions faites :

$$a'^2(a^2 - b'^2 - c'^2)^2 + b'^2(b^2 - a'^2 - c'^2)^2 + c'^2(c^2 - a'^2 - b'^2)^2 + (b'^2 + c'^2 - a^2)(c'^2 + a'^2 - b^2)(a'^2 + b'^2 - c^2) = 4a'^2b'^2c'^2.$$

---

321. — Distances des sommets d'un triangle au centre du cercle inscrit.

R. — Menons les perpendiculaires OP, OQ, OR. —



Comme $BR = BQ \qquad CP = CQ$

Il s'ensuit :

$$BR + CP = a$$

Si du périmètre on retranche a en de plus BR + PC, il reste donc : $2p - 2a$; d'où on tire :

$$AP = AR = p - a$$

Par suite : $OA = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$ $\quad OB = \frac{p-b}{\cos\frac{B}{2}}$ $\quad OC = \frac{p-c}{\cos\frac{C}{2}}$

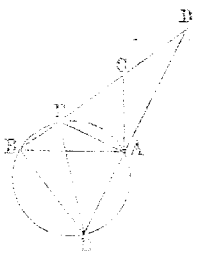
---

322. — Dans un triangle, on sait que :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B) = \cot\frac{1}{2}C\,\frac{a-b}{a+b}$$

Quelle est la représentation géométrique de cette formule?

R. — Prenons $CD = CA$ sur BC prolongé ; l'angle CDA sera $\frac{1}{2}C$. Menons en B la perpendiculaire à BC jusqu'à AD prolongé, on a :



$$BE = (a+b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$$

Prenons maintenant $CF = CA$. L'angle CAF sera égal à :

$$\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} = BFA\ ;$$

et l'angle BFA sera égal à :

$$C + CAF = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} = \pi - BEA$$

Donc le quadrilatère $BFAE$ est inscriptible.

Joignons FE, on a $\quad BEF = BAF = \frac{A-B}{2}$

Donc $\quad BE = (a-b)\cot\frac{A-B}{2}$ $\quad$ c.q.f.d.

---

323. — Relation entre le rayon du cercle inscrit, celui du cercle circonscrit et le périmètre du triangle.

R. — On a $\quad S = pr = \frac{abc}{4R}$.

---

324. — Étant donnés 2 côtés et l'angle compris dans un triangle, calculer directement le 3e côté.

R. — Soit a, b les 2 côtés, et C l'angle donné.

On aura : $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$$c^2 = (a^2+b^2)\left(\cos^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$c^2 = (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$$

D'où $\quad c = (a+b)\sin\frac{C}{2}\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cos^2 C}$

Si on pose : $\frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \varphi$

Il vient : $c = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\varphi}$

325. — Résoudre un triangle connaissant les trois hauteurs.

R. — Soit h la hauteur tombant sur le côté a, h' sur le côté b et h'' sur le côté c

On a : $ah = bh' = ch''$; d'où $\frac{a}{\frac{1}{h}} = \frac{b}{\frac{1}{h'}} = \frac{c}{\frac{1}{h''}}$

Posons $2 \cdot \frac{1}{K} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$ et soit $2p$ le périmètre ; il vient :

$$\frac{a}{\frac{1}{h}} = \frac{p}{\frac{1}{K}} = \frac{p-a}{\frac{1}{K}-\frac{1}{h}} = \frac{p-b}{\frac{1}{K}-\frac{1}{h'}} = \frac{p-c}{\frac{1}{K}-\frac{1}{h''}}$$

Or :
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

On peut dans cette formule remplacer p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ par des nombres qui leur sont proportionnels, et l'on aura.
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{h'}\right)\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{h''}\right)}{\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{h}\right)}}$$

On aurait les formules analogues pour calculer les angles B et C.

Quant aux 3 côtés, on les aura par les formules :

$$a = \frac{h'}{\sin C}, \quad b = \frac{h}{\sin C}, \quad c = \frac{h}{\sin B}$$

326. — Surface d'un trapèze en fonction de ses 4 côtés.

R. — Soient b et B les 2 bases, a et c les 2 autres côtés non parallèles, T la surface du triangle $A'C'I$ obtenu en menant $A'I$ parallèle à AC, et T' la surface du triangle $CA'I$.

Les 2 triangles $AA'C$ et $A'C'I$ ayant même hauteur donnent :
$$\frac{T}{T'} = \frac{B-b}{b}$$

D'où
$$\frac{T+2T'}{T} = \frac{B+b}{B-b}$$

Or T et 2T' est la surface S du trapèze;

Donc $S = \frac{B+b}{B-b} T$. Or $T = \sqrt{p(p-a)(p-c)(p-B+b)}$

Donc $$S = \frac{B+b}{B-b}\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-B+b)}$$

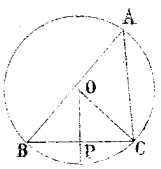
327. — Dans un triangle on a entre le rayon du cercle inscrit et les 3 hauteurs la relation:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$$

En effet: $S = pr$;

Donc: $$\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$$

328. — Rayon du cercle circonscrit à un triangle.



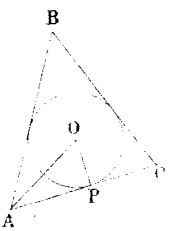
R. — L'angle A du triangle a pour mesure la moitié de l'arc BC, donc il est égal à COP

Donc:

$$R = \frac{a}{2 \sin A}$$

329. — Résoudre un triangle, connaissant les angles et le rayon du cercle inscrit. — Calculer en fonction des données la surface et le rayon du cercle circonscrit.

R. — Le triangle OAP dans lequel $AP = p-a$, donne:



$$p-a = r \cot \tfrac{1}{2} A$$

de même $p-b = r \cot \frac{1}{2} B$

D'où en ajoutant membre à membre:

$$c = r\left(\cot \tfrac{1}{2} A + \cot \tfrac{1}{2} B\right) = r \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}$$

$$c = \frac{r \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}$$

De même a et b.

Surface. — $S = pr$.

$$p = p-a + p-b + p-c = r\left(\cot \tfrac{1}{2} A + \cot \tfrac{1}{2} B + \cot \tfrac{1}{2} C\right)$$

Or : $\cot(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma - \cot\alpha - \cot\beta - \cot\gamma}{1 - \cot\alpha\cot\beta - \cot\gamma\cot\alpha - \cot\beta\cot\gamma}$

Et quand $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$ comme il arrive pour $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$.

On en déduit :

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma.$$

Donc : $p = r\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C$

Et $S = r^2\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C$.

On peut y arriver autrement, en remarquant que :

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donc $p = \frac{1}{r^2}(p-a)(p-b)(p-c) = r\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C$

Rayon du cercle circonscrit :

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Donc

$$R = \frac{r}{4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

330. — Résoudre un triangle, connaissant les 3 angles et la surface.

R. — Les formules $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ donnent

$$c = \sqrt{\frac{2S\sin C}{\sin A\sin B}}$$

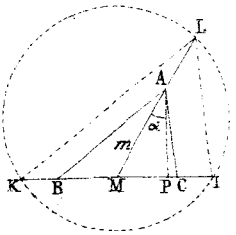
De même a et b.

331. — Résoudre un triangle connaissant le périmètre et les angles.

R. — $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} = \dfrac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

332. — Résoudre un triangle, connaissant un angle, la distance des pieds de la hauteur et de la médiane correspondantes, et l'angle de ces 2 droites.

R. — Soient AM la médiane, AP la hauteur. — Pour



résoudre la question géométriquement, sur MP on décrira le segment capable de l'angle α ; en P on élèvera la perpendiculaire à MP, et le point de rencontre A avec le segment, donnera le sommet du triangle. — Cela fait, on prendra MI = MK, on décrira sur KI le segment capable de l'angle A, on prolongera MA jusqu'en L, et IKL sera semblable au triangle cherché ; menant par A des parallèles à LK, LI, on achevera ainsi la construction de ABC.

Pour traiter la question par le calcul, on peut chercher, par exemple, d'abord à déterminer a par les relations connues :

$$2m^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$

$$bc \sin A = ah$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

D'où on tire $\quad 2m^2 + \frac{a^2}{2} = a^2 + 2ah \cot A$

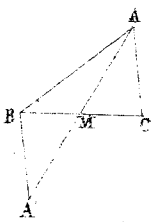
Et $\quad a = \ldots 2h \cot A \pm 2\sqrt{h^2 \cot^2 A + m^2}$

D'ailleurs $b = l \cot \alpha$

On aura ensuite : $\quad b^2 = \left(\frac{a}{2} - l\right)^2 + h^2$

$$c^2 = \left(\frac{a}{2} + l\right)^2 + h^2$$

Remarque. — On peut modifier comme suit la construction géométrique :



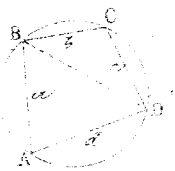
En prolongeant AM d'une longueur égale AA', on peut voir que l'angle ABA' = ABC + ACB est supplémentaire de l'angle donné A. Décrivant sur AA' le segment capable de l'angle π − A on déterminera ainsi le point B.

Pour rendre a calculable par logarithmes, on posera $\frac{m}{h \cot A} = \operatorname{tg} \varphi$ ce qui donnera $a = \frac{4h \cot A \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{\cos \varphi}$

333. — On donne les côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle donné. — Déterminer les angles.

R. — $\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$

De là $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$



Si l'on désigne par $2p$ $a+b+c+d$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}$$

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}$$

On peut tirer de là les formules pour les triangles.

334. — Surface du quadrilatère inscriptible en fonction des 4 côtés.

R. — $S = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin C =$

$\frac{1}{2}(ad + bc)\sin A.$

$= (ad + bc)\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A =$

$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

335. — Résoudre $x^3 - 3x + 1 = 0$.

R. — L'équation de $\cos\frac{1}{3}a$. $z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos a}{4} = 0$

De là $x = \lambda z$ $\lambda^2 = 4$ $-\frac{\cos a}{4} = \frac{1}{\lambda^3}$

Et $\lambda = \pm 2$ $\cos a = \mp\frac{1}{2}$ $a = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Les trois racines sont :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -\frac{2\pi}{9} \\ (2) & \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \\ (3) & \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{ll} & \frac{\pi}{9} \quad (4) \\ & \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad (5) \\ & \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad (6) \end{array}\right.$$

Les cosinus de (1) et de (4), de (2) et de (5), de (3) et de (6) sont égaux et de signes contraires. Les racines de la proposée sont donc :

$$-2\cos\frac{\pi}{9} \qquad +2\cos\frac{2\pi}{9} \qquad +2\cos\frac{4\pi}{9}$$

ou $\quad -1,87939 \qquad 1,53209 \qquad 0,34570$

336. — Résoudre l'équation $x^3+3x+1=0$

R. — $p>0$. Posons $x=\lambda(\alpha\,tg\,\varphi-\beta\,cot\,\varphi)$ suivant la méthode connue. — D'où $x^3+3\lambda^2x+2\lambda^3\cot 2\psi=0$, en faisant $tg^3\varphi=tg\,\psi$. On aura donc : $\lambda^2=1$ $\quad tg\,2\psi=2\lambda^3$ Prenant $\lambda=1$, on déduira de là :

$$\begin{aligned} 2\psi &= 63^\circ\ 26 \\ \psi &= 31^\circ\ 43 \\ \varphi &= 40^\circ\ 25\ \ 30'' \\ 2\varphi &= 80^\circ\ 51 \\ \cot 2\varphi &= 0,1612 \\ \sec 2\varphi &= 1,0129 \end{aligned}$$

$$x' = -2\lambda\cot 2\varphi = -0,3224$$

$$x'' = \lambda\left[\cot 2\varphi+\sqrt{-3}\sec 2\varphi\right] = 0,1612+1,0129\sqrt{-3}$$

$$x''' = \lambda\left[\cot 2\varphi-\sqrt{-3}\sec 2\varphi\right] = 0,1612-1,0129\sqrt{-3}.$$

337. — Résoudre l'équation du 3e degré au moyen des Tables trigonométriques, dans le cas où elle a des racines imaginaires.

R. — On peut toujours ramener l'équation du 3e degré à la forme $x^3+px+q=0$ en faisant disparaître le terme du 2e degré.

Lorsque l'équation a des racines imaginaires, on a : $4p^3+27q^2>0$

Nous distinguerons 2 cas : $p<0$ et $p>0$

1° Soit $p<0$. Posons $x=\lambda(a\,tg\,\varphi+b\cot\varphi)$ en désignant par a et b, deux quantités respectivement égales aux racines cubiques imaginaires α et β de 1, ou égales toutes deux à 1.

Alors $x^3=\lambda^3(a\,tg\,\varphi+b\cot\varphi)^3=\lambda^3\left[tg^3\varphi+\cot^3\varphi+3ab(a\,tg\,\varphi+b\cot\varphi)\right]$

D'où $x^3-3\lambda^2abx-\lambda^3(tg^3\varphi+\cot^3\varphi)=0$

Pour que les coëfficients de cette équation soient réels il faut que ab soit réel, il faut donc :

$$\left.\begin{array}{ll} a=1 & b=1 \\ a=\alpha & b=\beta \\ a=\beta & b=\alpha \end{array}\right\}$$ alors dans les 3 cas, l'équation est :

$$x^3 - 3\lambda^2 x - \lambda^3(\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cot}^3\varphi) = 0$$

Les 3 racines de cette équation sont :

$$x' = \lambda(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cot}\varphi)$$

$$x'' = \lambda(\alpha\operatorname{tg}\varphi + \beta\operatorname{cot}\varphi)$$

$$x''' = \lambda(\beta\operatorname{tg}\varphi + \alpha\operatorname{cot}\varphi)$$

L'équation proposée sera donc résolue, si l'on parvient à identifier cette équation avec l'équation proposée.

Pour cela, il suffit de poser :

$$-3\lambda^2 = p \quad \text{et} \quad -\lambda^3(\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cot}^3\varphi) = q$$

La 1re donne $\lambda = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ ce qui montre bien qu'il faut $p < 0$, pour que la valeur de λ soit admissible

La 2e donne :

$$\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cot}^3\varphi = -\frac{q}{\lambda^3};$$

Pour trouver φ employons un angle auxiliaire ω tel que $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}^3\varphi$, alors $\operatorname{cot}\omega = \operatorname{cot}^3\varphi$; et l'on a :

$$\operatorname{tg}\omega + \operatorname{cot}\omega = -\frac{q}{\lambda^3}, \quad \text{d'où} \quad q = -\lambda^3(\operatorname{tg}\omega + \operatorname{cot}\omega)$$

$$q = -\lambda^3\frac{\sin^2\omega + \cos^2\omega}{\cos\omega\sin\omega} = -\frac{2\lambda^3}{\sin 2\omega}$$

D'où $\sin 2\omega = -\frac{2}{q}\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3$

Pour que la valeur de ω soit admissible, il faut que $\sin 2\omega$ soit compris entre -1 et $+1$; il faut donc que :

$$\frac{4\left(-\frac{p}{3}\right)^3}{q^2} < 1 \text{ ; ou } -\frac{4p^3}{27} < q^2 \text{ , ou } 4p^3 + 27q^2 > 0$$

Ce qui montre que ce mode de résolution n'est applicable que lorsque les racines sont imaginaires.

λ comporte une double valeur, et on voit qu'elle exige $p < 0$.

On choisira pour λ la valeur qu'on voudra, cette valeur une fois prise, on en déduira la valeur de ω, puis celle de φ, et enfin, les racines de l'équation proposée qui sont :

$$x' = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi\right)$$
$$x'' = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\operatorname{tg}\varphi + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cot\varphi\right)$$
$$x''' = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\operatorname{tg}\varphi + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cot\varphi\right).$$

2° Soit $p > 0$. On pose alors $x = \lambda(a\operatorname{tg}\varphi - b\cot\varphi)$, et en suivant la même marche que dans le cas précédent, on arrive à :

$$x' = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi\right)$$
$$x'' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\operatorname{tg}\varphi - \cot\varphi\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-p}\left(\operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi\right)$$
$$x''' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\operatorname{tg}\varphi - \cot\varphi\right) - \frac{1}{2}\sqrt{-p}\left(\operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi\right)$$

---

338. — Résoudre par la Trigonométrie l'équation binôme $x^{15} - 1 = 0$.

R. — Posons $x = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$

D'où $\quad x^{15} = r^{15}(\cos 15\varphi + \sqrt{-1}\sin 15\varphi)$

On aura pour déterminer r et φ l'équation :

$$r^{15}(\cos 15\varphi + \sqrt{-1}\sin 15\varphi) = 1$$

qui revient aux suivantes :

$$r^{15}\cos 15\varphi = 1 \quad , \quad r^{15}\sin 15\varphi = 0$$

Élevant ces deux équations au carré et ajoutant, il vient :

$$r^{30} = 1 \quad \text{d'où} \quad r = 1$$

Il suit de là que : $\sin 15\varphi = 0$, et $\cos 15\varphi = 1$

Donc $\quad 15\varphi = 2i\pi \quad$ d'où $\quad \varphi = \frac{2i\pi}{15}$,

i étant un nombre entier quelconque positif, ou négatif.
Ainsi l'équation proposée est résolue par la formule :

$$x = r\left(\cos\frac{2i\pi}{15} + \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{15}\right)$$

Pour avoir toutes les valeurs de x, il suffit de donner à i, les valeurs $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots 14$.

---

339. — Diverses expressions de la surface d'un triangle.

R. — 1° En fonction de 2 côtés et de l'angle compris.

$$S = \frac{1}{2}\, ab \sin C$$

On trouve immédiatement cette formule en exprimant la hauteur du triangle en fonction des côtés et des angles.

2° En fonction d'un côté et des angles.

$$S = \frac{1}{2}\, \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

3° En fonction des 3 côtés :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

On déduit cette formule de la 1ère en remplaçant d'abord $\sin C$ par $2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$, et puis $\sin \frac{C}{2}$ et $\cos \frac{C}{2}$ par leurs valeurs qui sont : $\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ et $\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$.

---

340. — Résoudre par la Trigonométrie l'équation : $x^2 + px + q = 0$. — Cas des racines réelles.

R. — Soit $\frac{p^2}{4} - q > 0$.

Alors $x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}$, et $\frac{4q}{p^2} < 1$

Soit d'abord $q > 0$. Alors les 2 racines sont de même signe et on peut poser :

$$\frac{4q}{p^2} = \sin^2 \varphi \quad \text{d'où} \quad \sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$$

Donc $x = -\frac{p}{2}(1 \mp \cos \varphi)$. Les 2 racines sont donc : $x' = -p \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $x'' = -p \cos^2 \frac{\varphi}{2}$

Si $q < 0$ alors les 2 racines sont de signe contraire, et comme $-\frac{4q}{p^2} > 0$, on pose $-\frac{4q}{p^2} = \operatorname{tg}^2 \theta$, d'où $\operatorname{tg} \theta = \frac{2\sqrt{-q}}{p}$

Donc
$$x = -\frac{p}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\cos \theta}\right)$$

Les 2 racines sont alors : $x' = p\,\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos \theta}$

$$x'' = -p\,\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos \theta}$$

3° Soit $\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0$. Alors les 2 racines sont égales à $-\frac{p}{2}$.

---

341. — Résolution de l'équation $x^5 - 1 = 0$.

R. — L'équation admet la racine 1 ; je divise par $x - 1$, et il vient :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

équation qui n'a que des racines imaginaires. Je divise par x^2

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$$

Je pose :

$$x + \frac{1}{x} = z$$

D'où

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

Et l'équation devient :

$$z^2 + z - 1 = 0$$

Cette équation donne pour z deux valeurs réelles, et substituant successivement ces deux valeurs dans l'équation :

$$x^2 - zx + 1 = 0$$

On aura pour x deux valeurs imaginaires, correspondant à chaque valeur de z. On voit de plus que z est la somme de deux racines imaginaires conjuguées, puisqu'il est le coefficient du terme en x dans l'équation :

$$x^2 - zx + 1 = 0$$

Résolvant l'équation en z, on a :

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La racine $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ est précisément le côté du décagone régulier inscrit dans la circonférence de rayon 1. C'est ce qu'il s'agit d'expliquer.

Or, on peut résoudre directement l'équation proposée par la trigonométrie, en posant :

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

Et l'équation devient :

$$\cos 5\varphi + \sqrt{-1}\sin 5\varphi = 1$$

Ce qui exige que l'on ait :

$$\cos 5\varphi = 1$$
$$\sin 5\varphi = 0$$

Ou
$$5\varphi = 2K\pi$$
$$\varphi = \frac{2K\pi}{5}$$

Faisant successivement :

$$K = 0, \quad \varphi = 0, \quad x' = 1$$
$$K = 1, \quad \varphi = \frac{2\pi}{5}, \quad x'' = \cos\frac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}$$
$$K = 2, \quad \varphi = \frac{4\pi}{5}, \quad x''' = \cos\frac{4\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}$$

Prenons la somme des racines imaginaires conjuguées, nous aurons Z :

$$Z'' = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$
$$Z''' = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

Il faut donc montrer qu'une de ces valeurs est égale au côté du décagone régulier inscrit. Or, on a :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{10}$$

Donc
$$Z'' = 2\sin\frac{\pi}{10}.$$

Z'' est donc bien la valeur du côté du décagone régulier. Quant à l'autre valeur, on a :

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5}\right) = -\sin\frac{3\pi}{10}$$

Donc
$$-Z''' = 2\sin\frac{3\pi}{10}.$$

Or $2\sin\frac{3\pi}{10}$ est la corde obtenue en joignant de trois en trois les sommets du décagone inscrit ; donc la seconde racine, changée de signe, est égale au côté du décagone étoilé.

---

342. — Résoudre l'équation : $x^6 - 2x^3\cos\varphi + 1 = 0$.

R. — On en tire :

$$x^3 = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm \sqrt{-\sin^2\varphi}$$

$$(1) \qquad x^3 = \cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}$$

L'équation n'a donc que des racines imaginaires.

Soit : $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$, l'une de ces racines, élevant au cube, on a, d'après la formule de Moivre :

$$\cos 3\alpha + \sqrt{-1}\,\sin 3\alpha$$

En vertu de (1) on aura donc :

$$\cos 3\alpha = \cos\varphi \qquad \sin 3\alpha = \sin\varphi$$

Ce qui exige :

$$3\alpha - \varphi = 2K\pi \qquad \alpha = \frac{2K\pi+\varphi}{3}$$

On a donc :

$$x = \frac{2K\pi+\varphi}{3} \pm \sin\frac{2K\pi+\varphi}{3}\cdot\sqrt{-1}$$

Les 6 racines de l'équation proposée seront donc :

$$\cos\frac{\varphi}{3} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\varphi}{3}$$

$$\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right) \pm \sqrt{-1}\,\sin\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\varphi+\frac{4\pi}{3}\right) \pm \sqrt{-1}\,\sin\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)$$

---

343. — Trouver vers quelle limite tend le produit :

$$P = \cos\varphi\cdot\frac{\cos\varphi}{2}\,\frac{\cos\varphi}{2^2}\,\frac{\cos\varphi}{2^3}\cdots\cdots\frac{\cos\varphi}{2^n}$$

n augmentant indéfiniment et φ étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

R. — On a :

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2^2}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\sin\frac{\varphi}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2^n}$$

Multipliant ces n égalités membre à membre, en faisant disparaître les facteurs communs, il vient :

$$\sin 2\varphi = P.\,2^{n+1}.\,\sin\frac{\varphi}{2^n}$$

D'où $P = \dfrac{\sin 2\varphi}{2^{n+1}\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi}{2^n}\cdot\sin 2\varphi}{\varphi\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n}} =$

$\dfrac{\varphi}{2^n}$ $\dfrac{\sin 2\varphi}{\varphi}$

Lorsque n augmente indéfiniment, le premier facteur tend vers 1 ;

Donc :

$$\text{Limite}\left(\cos\varphi \,.\, \cos\frac{\varphi}{2} \,.\, \cos\frac{\varphi}{2^2} \;\ldots\ldots\ldots\; \cos\frac{\varphi}{2^n}\ldots\right) = \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A 2 DIMENSIONS.

I. Construction d'expressions Algébriques.

344. — Construire $x = \frac{abc \ldots kl}{b'c' \ldots k'l'}$

R. — On peut construire x par une série de 4ièmes proportionnelles.

Si $p = \frac{ab}{b'}$ on a : $x = \frac{pcd}{c'd'} \ldots \frac{k}{k'} \cdot \frac{l}{l'}$

Si $p' = \frac{pc}{c'}$ on a : $x = \frac{p'd}{d'} \ldots \frac{k}{k'} \frac{l}{l'}$

On continue ainsi de proche en proche.

345. — $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4 - c^4}$.

R. — $x = \sqrt{a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{a}\right)^2}}$; $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{c^2}{a}$ sont 2 lignes α et β qu'on sait construire. $a^2 + \alpha^2$ peut se remplacer par un seul carré γ^2 ; $\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$ est une ligne δ qu'on sait construire ;

On a, alors : $x = \sqrt{a\delta}$

346. — $x = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc}$

R. — On peut écrire :

$$x = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{(a+b)(b-c)(a+c)}$$

Ce qui se construira par 3 quatrièmes proportionnelles successives.

$$\alpha = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{a+b}$$

$$\beta = \frac{\alpha(a-b+c)}{b+c}$$

$$x = \frac{\beta(-a+b+c)}{a+c}$$

347. — Construire $x = \dfrac{abc + a'b'c' + a''b''c'' + \cdots\cdots}{mn + m'n' + m''n'' + \cdots\cdots}$

R. — On a : $$x = \frac{a \cdot \frac{bc}{m} + a' \frac{b'c'}{m} + \cdots}{n + \frac{m'n'}{m} + \frac{m''n''}{m} + \cdots}$$

On voit d'abord que dans le dénominateur, on a une somme de 4ème proportionnelles qu'on peut construire successivement, on aura alors une somme de lignes réductibles à une seule K.

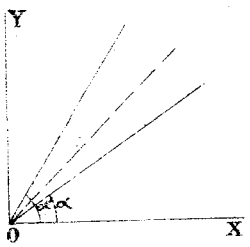
Alors $$x = \frac{a}{K} \cdot \frac{bc}{m} + \frac{a'}{K} \frac{bc'}{m} + \cdots\cdots$$

La valeur d'x est donc égale à une somme d'expressions qu'on sait construire (*Problème 355*).

II. — Ligne droite.

348. — Bissectrice de l'angle de deux droites.

R. — Les deux droites étant données, je leur mène des parallèles par l'origine des coordonnées ;



Soient α, α' les angles de ces parallèles avec l'axe des x, l'angle de la bissectrice avec le même axe est $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$. Ainsi on donne $tg\,\alpha = a$, $tg\,\alpha' = a'$ et il s'agit de trouver $tg\,\frac{\alpha + \alpha'}{2}$.

On a : $$tg\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$$

Il ne faut pas de double signe car $tg\,\frac{a}{2}$ est toujours de même signe que $\sin a$. En effet, $\sin a$ étant donné, l'arc a est de l'une des 2 formules

$$2K\pi + \alpha$$

ou $$(2K+1)\pi - \alpha$$

Donc l'arc $\frac{a}{2}$ est compris dans l'un des deux signes

$$K\pi + \frac{\alpha}{2}$$

$$K\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

Supposons $\sin a > 0$; alors $\alpha < 90°$ et $\frac{\alpha}{2} < 45°$. Or $tg\left(K\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = tg\frac{\alpha}{2}$; donc $tg\frac{a}{2} > 0$. Si l'arc est de la seconde formule, $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; donc encore $tg\frac{a}{2} > 0$.

Soit maintenant $\sin a < 0$, alors α est compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$; donc $\frac{\alpha}{2}$ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$; donc $tg\frac{\alpha}{2} < 0$; si l'arc est de la seconde formule, $\frac{\alpha}{2}$ est compris entre 0 et $-\frac{\pi}{4}$; donc encore $tg\frac{\alpha}{2} < 0$; donc $tg\frac{a}{2}$ est toujours de même signe que $\sin a$.

Cela posé, on a pour le coefficient angulaire cherché.

$$tg\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{1+\cos(\alpha+\alpha')} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha'}{1+\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha'}$$

Divisant haut et bas par $\cos\alpha\cos\alpha'$, il vient :

$$tg\,\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{a+a'}{1-aa'+\sqrt{(a^2+1)(a'^2+1)}}$$

Considérons maintenant le cas général : on donne 2 droites

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

et l'on demande l'équation de la bissectrice de l'angle de ces deux droites.

On a le coëfficient angulaire de cette bissectrice ; si donc on écrit qu'elle passe par le point de rencontre des deux droites données, on aura son équation. Mais on peut éviter de calculer ce point de rencontre. En effet, l'équation générale d'une droite passant par l'intersection de deux autres est :

$$y - ax - b + \lambda(y - ax' - b') = 0$$

Soit a'' le coëfficient angulaire de la bissectrice ; l'équation précédente sera celle de cette droite, si nous écrivons que son coëfficient angulaire est égal à a'', ce qui donne :

$$\frac{a + a'\lambda}{1+\lambda} = a''$$

D'où
$$\lambda = \frac{a - a''}{a'' - a'}$$

Remplaçant a' par sa valeur trouvée précédemment, il vient :

$$\lambda = \frac{a\sqrt{(a^2+1)(a'^2+1)} - a'a^2 - a'}{a + aa'^2 - a'\sqrt{(a^2+1)(a'^2+1)}}$$

En toutes réductions faites :

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{a^2+1}{a'^2+1}}$$

L'équation de la bissectrice devient donc :

$$y - ax - b \pm \sqrt{\frac{a^2+1}{a'^2+1}}\,(y - a'x - b') = 0$$

Le signe $\pm$ est donné par $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}$, parce que l'on a à la fois la bissectrice de l'angle aigu des deux droites et la bissectrice de l'angle obtus.

Remarque. — L'équation précédente peut se mettre sous la forme :

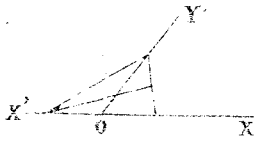
$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{a^2+1}} = \pm\frac{y - a'x - b'}{\sqrt{a'^2+1}}$$

qui montre que tous points de la bissectrice sont également distants des deux droites données.

---

349. — *Les médianes d'un triangle se coupent en un même point.*

R. — Prenons pour axe des x l'un des côtés et pour axe des y la médiane correspondante.



L'équation de l'une des autres médianes sera :

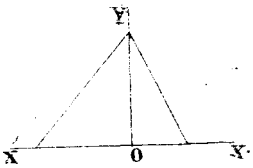
$$y = \frac{\frac{y''}{2}}{\frac{x'}{2} + x'}(x + x')$$

Elle coupe l'axe des y au point $y = \frac{y''}{3}$. Ce point est indépendant de x' ; donc il est le même pour les 3 médianes.

---

350. — *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.*

R. — Prenons pour axes un côté et la hauteur correspondante.



L'équation d'une des autres hauteurs sera :

$$y = -\frac{x''}{-y''}(x - x')$$

L'ordonnée à l'origine est donc :

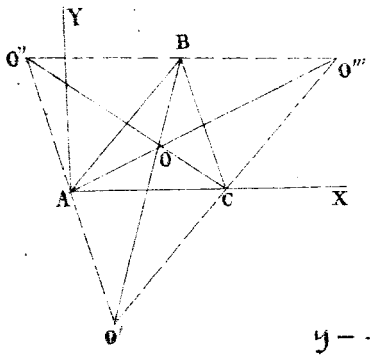
$$-\frac{x' x''}{y'}$$

comme elle est symétrique en x' et x'', elle sera la même pour la 3e hauteur.

---

351. — Les bissectrices des angles intérieurs d'un triangle se coupent en un même point ; il en est de même des bissectrices de 2 angles extérieurs et du 3e angle intérieur.

R. — Soient pour axe AC et la perpendiculaire Ay.



L'équation de AB est :

$$y = \frac{y'}{x'}x$$

celle de AC ... $y = 0$

celle de BC ... $y = \frac{y'}{x' - x''}(x - x'')$

Donc les équations des bissectrices passant par le point A sont :

$$\frac{y - \frac{y'}{x'}x}{\sqrt{\frac{y'^2}{x'^2} + 1}} = \pm\ y$$

Celle des bissectrices passant par le point C est :

$$\frac{y - \frac{y'}{x' - x''}(x - x'')}{\sqrt{\frac{y'^2}{(x' - x'')^2} + 1}} = \pm\ y$$

Enfin, l'équation des bissectrices passant par le point B est :

$$\frac{y - \frac{y'}{x'}x}{\sqrt{\frac{y'^2}{x'^2} + 1}} = \pm\ \frac{y - \frac{y'}{x' - x''}(x - x'')}{\sqrt{\frac{y'^2}{(x' - x'')^2} + 1}}$$

Or cette dernière équation est une conséquence des 2 premières ; donc les trois bissectrices se coupent en un même point.

Maintenant, dans tous les seconds membres, nous avons le double signe ; il faut donc examiner les différents cas qui peuvent se présenter.

Soient

$$A = \pm y$$
$$B = \pm y$$
$$A = \pm B$$

les trois équations : si l'on prend les deux premières avec le signe +, il faut prendre le même signe pour la 3e, et l'on aura un point de rencontre.

Si l'on prend le signe — pour les deux premières, on aura encore $A = B$, ce qui donnera un second point.

En continuant de la sorte, on voit que l'on a les 4 combinaisons suivantes :

$$1^e \left\{ \begin{array}{ll} A = y & \text{bissectrice de } 180 - A \\ B = y \ldots\ldots \text{ ig} \ldots\ldots & 180 - C \\ A = B \ldots \text{ ig} \ldots\ldots & B \end{array} \right\} \text{ point } O'$$

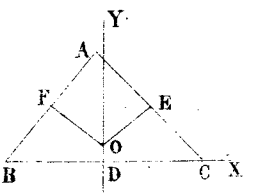
$$2^e \left\{ \begin{array}{ll} A = -y & \text{bissectrice de } A \\ B = -y \ldots \text{ ig} \ldots\ldots & C \\ A = B \ldots \text{ ig} \ldots\ldots & B \end{array} \right\} \text{ point } O$$

$$3^e \left\{ \begin{array}{ll} A = y & \text{bissectrice de } 180 - A \\ B = -y \ldots\ldots \text{ ig} \ldots\ldots & C \\ A = -B \ldots\ldots \text{ ig} \ldots\ldots & 180 - B \end{array} \right\} \text{ point } O''$$

$$4^e \left\{ \begin{array}{ll} A = -y & \text{bissectrice de } A \\ B = y \ldots\ldots \text{ ig} \ldots\ldots & 180 - C \\ A = -B \ldots\ldots \text{ ig} \ldots\ldots & 180 - B \end{array} \right\} \text{ point } O'''$$

---

352. — Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point.



R. — Soit D le milieu de BC ; je prends BC pour axe des x, et pour axe des y la perpendiculaire élevée au point D. Soit x' l'abscisse

de C ; celle de B est $-x'$; les coordonnées du point A sont x'' et y''.

La perpendiculaire élevée sur BC au point D a pour équation $x = 0$; de plus si l'on remarque que les points E et F ont respectivement pour coordonnées :

$$\frac{y''}{2}, \quad \frac{x''+x'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y''}{2}, \quad \frac{x''-x'}{2},$$

on écrira immédiatement pour les équations de Eo et de Fo :

$$y - \frac{y''}{2} = -\frac{x''-x'}{y''}\left(x - \frac{x''+x'}{2}\right)$$

$$y - \frac{y''}{2} = -\frac{x''+x'}{y''}\left(x - \frac{x''-x'}{2}\right)$$

Cherchons les points où ces deux droites rencontrent l'axe des y, et pour cela, faisons $x = 0$, nous trouverons pour les deux

$$y = \frac{y''}{2} + \frac{x''^2 - x'^2}{2y''}$$

Ce qui démontre la proposition.

Au moyen de cette valeur de y, on peut démontrer un théorème de géométrie. On a :

$$y = \frac{y''^2 + x''^2 - x'^2}{2y''}$$

Cherchons le rayon OC du cercle circonscrit au triangle. Nous aurons :

$$R^2 = \frac{(y''^2 + x''^2 - x'^2)^2}{4y''^2} + x'^2$$

On :

$$R^2 = \frac{(y''^2 + x''^2 + x'^2)^2 - 4x'^2 x''^2}{4y''^2}$$

Ou encore :

$$R^2 = \frac{\{y''^2 (x'+x'')^2\}\{y''^2 + (x''-x')^2\}}{4y''^2}$$

Or

$$y''^2 + (x''+x')^2 = \overline{AB}^2$$

$$y''^2 + (x''-x')^2 = \overline{AC}^2$$

$$y'' = h$$

Donc

$$R^2 = \frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2}{4h^2}$$

$$R = \frac{bc}{2h}$$

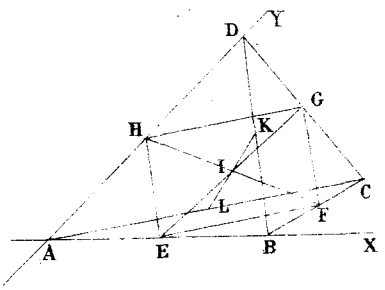
$$bc = 2Rh$$

Multipliant les deux membres par a, on a la relation comme :

$$abc = 4RS.$$

353. — Les diagonales du parallélogramme obtenu en joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère se coupent au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère.

R. — Prenons AB, AD pour axes.



Les coordonnées de H et de F, milieux de AD et de BC seront :

$$x = 0 \qquad x = \frac{x' + x''}{2}$$

$$y = \frac{y'}{2} \qquad y = \frac{y''}{2}$$

Les coordonnées de I, milieu de HF seront donc :

$$x = \frac{x' + x''}{4} \qquad y = \frac{y' + y''}{4}$$

Les coordonnées des milieux K et L des diagonales sont :

$$x = \frac{x'}{2} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{x''}{2}$$

$$y = \frac{y'}{2} \qquad\qquad y = \frac{y''}{2}$$

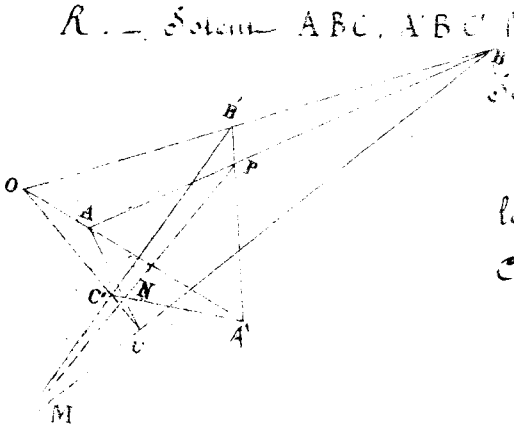
Le milieu de KL aura donc pour coordonnées

$$\frac{x + x''}{4} \qquad\qquad \frac{y' + y''}{4}$$

C. q. f. d.

354. — Quand 2 triangles ont leurs sommets sur 3 droites concourantes, les points d'intersection des côtés sont en ligne droite.

R. — Soient ABC, A'B'C' les triangles.



Soient $A = 0$ $\qquad B = 0$

$C = 0$ $\qquad C' = 0$

les équations de OA OB AB et A'B'

Celle de AC et BC seront de

la forme :

$$P + \lambda A = 0 \qquad P + \mu B = 0$$

et celles de A'C' et B'C'.

$$P' + \lambda' A = 0 \qquad P' + \mu' B = 0$$

$\mu, \mu', \lambda, \lambda'$ sont liés par la relation qui exprime que O, C, C' sont en ligne droite.

La droite $\lambda A - \mu B = 0$ passe en C

La droite $\lambda' A - \mu' B = 0$ " en C'

D'ailleurs chacune de ces droites passe en O ; donc elles se confondent et on a :

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$$

On déduit encore des équations précédentes :

$$A'P - \lambda P' = 0$$

cette droite passe en N et en P : Donc c'est NP. — De même $\mu' P - \mu P' = 0$ représente MP.

Mais $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$; donc les deux droites se confondent.

C. q. f. d.

Remarques. — 1. On démontre de même que, si les points M, N, P sont en ligne droite, les droites AA', BB', CC' sont concourantes

2. — On obtient une démonstration géométrique, en regardant la figure comme la projection d'un trièdre OA, OB, OC et de 2 de ses sections planes ABC, A'B'C'. —

---

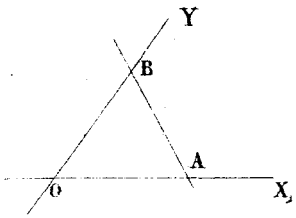
355. — *La droite AB telle que l'on a :*

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{l}$$

passe par un point fixe.

R. — Equation de la droite

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \qquad (1)$$



L'équation de condition s'écrit :

$$\frac{l}{OA} + \frac{l}{OB} = 1 \qquad (2)$$

Retranchant membre à membre, on a :

$$\frac{x-l}{OA} + \frac{y-l}{OB} = 0$$

Quelle que soient OA et OB, on voit que la droite passe au point ; $\begin{cases} x = l \\ y = l \end{cases}$

---

356. — Caractère commun à toutes les droites représentées par l'équation :

$$(am + a')x + (bm + b')y = cm + c'$$

R. — Ces droites passent toutes par le point de rencontre des droites : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Exemple : Les droites données par :

$$(m+1)x + (2m-1)y = -3m + 2$$

passent au point de rencontre des droites :

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire au point :} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

---

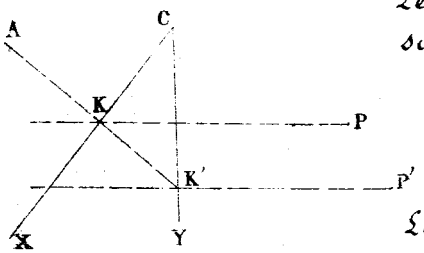
357. — $P = 0$ $Q = 0$ sont les équations de 2 droites. Comment sont placées les droites $P + \delta Q = 0$ $P - \delta Q = 0$?

R. — Ces droites passent au point d'intersection des 2 premières et font avec elles des angles égaux de part et d'autre de chacune d'elles.

---

358. — Étant donné un angle C et un point A dans son plan, trouver 2 points P et P' tels que, menant par ces points 2 droites parallèles, A soit toujours sur la diagonale KK' du trapèze formé.

R. — Soient α, β les coordonnées de A
x', y' et x'', y'' celles de P et de P'.



Les équations des parallèles sont :

$$y - y' = m\,(x - x')$$

$$y - y'' = m\,(x - x'')$$

Les coordonnées de K seront :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{mx' - y'}{m} \end{cases} \quad \text{et celles de K'} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = y'' - mx'' \end{cases}$$

On doit avoir, par l'énoncé :

$$\frac{\beta}{\alpha - \dfrac{mx' - y'}{m}} = \frac{y'' - mx''}{\dfrac{y' - mx'}{m}}$$

Ou : $$m^2 x''(\alpha - x') - m\left[\beta x' + y''(\alpha - x') - x''y'\right] + y'(\beta - y'') = 0$$

Ce doit être vrai quel que soit m. Donc on doit avoir :

$$x''(\alpha - x') = 0 \qquad (1)$$

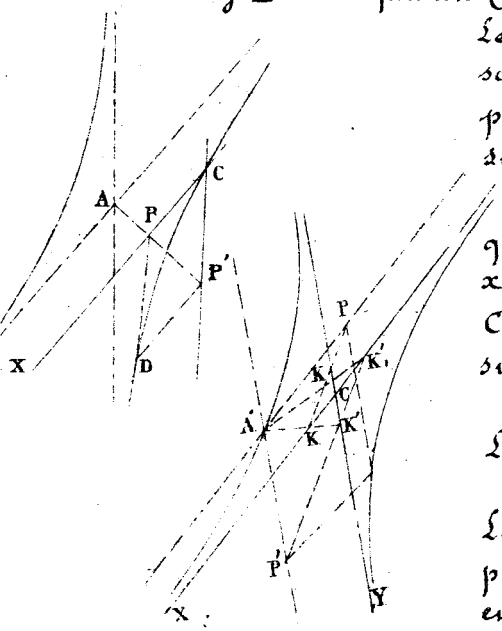
$$\beta x' + y''(\alpha - x') - x''y' = 0 \qquad (2)$$

$$y'(\beta - y'') = 0 \qquad (3)$$

1° $x'' = 0$ $y'' = \beta$ la 2de équation donne . . . . . $\alpha\beta = 0$

2° $x' = \alpha$ $y'' = 0$ id

3° $x'' = 0$ $y' = 0$ L'équation (2) devient $\beta x' + y''(\alpha - x') = 0$



Le point dont les coordonnées sont y'' et x', ou le 4e point du parallélogramme PCP'D se déplace sur l'hyperbole

$$xy - \alpha y - \beta x = 0$$

qui a pour asymptotes les droites $x = \alpha$ $y = \beta$ et qui passe en C. — Les points P et P' sont sur les côtés de l'angle.

4° $x' = \alpha$ $y'' = \beta$.

L'équation (2) devient :

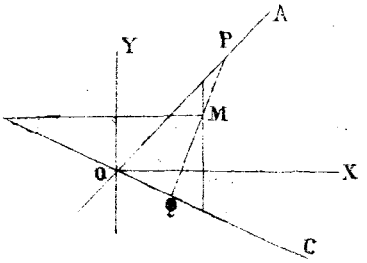
$$x''y'' = \alpha\beta$$

Le point D se meut sur l'hyperbole qui passe au point A, et a pour axes les côtés de l'angle. P et P' sont les parallèles aux côtés de

l'angle menée par A.

359. — On donne un angle AOC et un point M dans cet angle, mener par ce point une droite telle que le produit des segments MP.MQ, soit un minimum.

R. — Je prend pour axe des x la bissectrice de l'angle donné, et pour axe des y, la bissectrice de l'angle supplémentaire, l'équation de AO est :



$$y = ax \qquad (1)$$

et celle de OC :

$$y = -ax \qquad (2)$$

L'équation d'une droite passant par le point x', y' est :

$$y - y' = m(x - x') \qquad (3)$$

Je cherche l'intersection de cette droite avec les deux premières :

$$ax - y' = mx - mx'$$

$$x = \frac{y' - mx'}{a - m}$$

$$y = a\frac{y' - mx'}{a - m}$$

On aurait de même, pour le point d'intersection avec la droite (2), en changeant a en $-a$:

$$x_1 = -\frac{y' - mx'}{a + m}$$

$$y_1 = a\frac{y' - mx'}{a + m}$$

Je calcule maintenant les quantités $x - x'$, $y - y'$, dont le carré entre dans l'expression des longueurs MP et MQ

$$x - x' = -x' + \frac{y' - mx'}{a - m} = \frac{y' - ax'}{a - m}$$

$$y - y' = m \cdot \frac{y' - ax'}{a - m}$$

On a donc :

$$\overline{MP}^2 = \frac{(y' - ax')^2(1 + m^2)}{(a - m)^2}$$

$$\overline{MQ}^2 = \frac{(y' + ax')^2(1 + m^2)}{(a + m)^2}$$

Par suite :

$$MP.MQ = \pm \frac{(1+m^2)(y'^2 - a^2 x'^2)}{a^2 - m^2}$$

Or, il y a un facteur constant $y'^2 - a^2 x'^2$; il suffit donc de trouver le minimum de

$$\frac{1+m^2}{a^2 - m^2}$$

Sa dérivée égalée à 0 donne :

$$\frac{2m(a^2 - m^2) + 2m(1+m^2)}{(a^2 - m^2)^2} = 0$$

Ou

$$\frac{2m\ (a^2 + 1)}{(a^2 - m^2)^2} = 0$$

Ce qui donne :

$$2m(a^2+1) = 0 \qquad m = 0 \quad 1^{re}\ \text{solution.}$$

Ou

$$(a^2 - m^2)^2 = \infty \qquad m = \pm\infty$$

Pour la valeur : $m = \pm\infty$

la dérivée se présente sous une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$: prenant le rapport des dérivées de ses deux termes, elle devient :

$$\frac{2}{-2m(a - m^2)}$$

pour $m = \pm\infty$, égale à 0. Donc $m = \pm\infty$ est aussi une solution.

On a donc pour solution deux droites parallèles aux axes des coordonnées.

---

360 — On donne deux droites AB et AB' qui se coupent en A. D'un point extérieur P, on mène 3 sécantes Pc, Pe, Pg, qui rencontrent AB' aux points b, d, f ; puis on donne à la droite AB' une autre position AB', et l'on rabat sur ces lignes les longueurs Ab, Ad, Af, en b', d', f' ; enfin, l'on joint cb', ed', gf', et l'on propose :

1° De démontrer que ces trois lignes se coupent en un même point ;

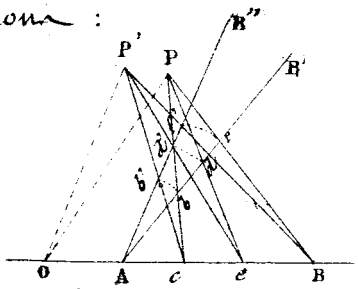
2° De trouver le lieu décrit par ce point quand la droite AB' prend toutes les positions possibles autour du point A.

R. — Supposons que l'on prenne AB pour axe des x, et AB' pour axe des y;

Soient : $Ac = \alpha$, $Ae = \alpha'$, $Ag = \alpha''$

Et : $Ab = \beta$, $Ad = \beta'$, $Af = \beta''$

les droites issues du point P ont respectivement pour équations :



$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} &= 1 \\ \frac{y}{\beta'} + \frac{x}{\alpha'} &= 1 \\ \frac{y}{\beta''} + \frac{x}{\alpha''} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dans ces équations $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' sont constants, et elles admettent une solution commune

$$x = x' \qquad y = y'$$

x' et y' étant les coordonnées du point P. Or, si j'imagine que l'axe des y suive la droite AB' dans son mouvement de rotation, x' ne changeant pas, y' conservera sa longueur en changeant de direction, et comme, dans ce mouvement, les équations des droites b'c, d'e, f'g restent toujours de la même forme (1), il s'ensuit que ces équations admettent constamment la solution commune x', y' ; donc les 3 droites se coupent en un même point.

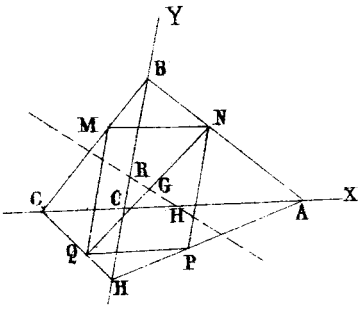
D'après cela, il est facile de trouver le lieu de ce point d'intersection. Si, en effet, je mène PO, parallèle à AB' ; on aura :

$$PO = y' \qquad AO = -x'$$

Par conséquent, puisque, par rapport aux axes variables, l'y du point d'intersection des droites reste constant en grandeur et égal à y', il s'ensuit que pour avoir la position de ce point, lorsque AB' est venue en AB'', il faut mener par le point O une parallèle à AB'', et prendre sur cette ligne une longueur $y' = PO$. Donc le point P décrit un cercle, dont le centre est en O.

361. — Lieu des centres des parallélogrammes inscrits dans un quadrilatère, ses ayant leurs côtés parallèles aux diagonales de ce quadrilatère.

R. — Prenons pour axes les diagonales. — Si nous menons MN parallèle à CA, puis MQ, NP parallèles à BD, QP sera parallèle à CA, vu la proportionnalité des diverses lignes de la figure. — Le point G a pour coordonnées :



$$\beta = \frac{y' + y''}{2} \qquad \alpha = \frac{x' + x''}{2}$$

En appelant a, b, c, d les segments des diagonales comptés à partir de O,

On a :

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{x''}{-c} + \frac{y'}{b} = 1 \qquad (2)$$

$$\frac{x''}{-c} + \frac{y''}{-d} = 1 \qquad (3)$$

$$\frac{x'}{a} + \frac{y''}{-d} = 1 \qquad (4)$$

Ces 4 équations n'en forment que 3 d'après ce qui a été dit plus haut. — Ajoutant ensemble (1) et (3) et retranchant (2), on trouve (4) : c'est une vérification.

Éliminant x', x'', y', y'' on trouve pour le lieu :

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{2}(a-c)} + \frac{\beta}{\frac{1}{2}(b-d)} = 1.$$

C'est une droite qui passe par les milieux des diagonales. — La portion HK de cette droite comprise entre ces 2 points correspond aux parallélogrammes inscrits dans le quadrilatère. Le reste répond aux parallélogrammes dont les sommets sont sur les côtés prolongés du quadrilatère.

---

362. — Les côtés d'un triangle variable pivotent autour de 3 points fixes, P, P', P'', qui sont en ligne droite, 2 des sommets glissent sur 2 droites fixes

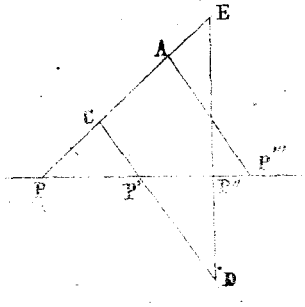
Lieu du 3e sommet.

R. — Prenons pour axe des x la droite PP' et pour axe des y une droite quelconque passant en P.

Soient :
$$y + ax + \alpha = 0$$
$$y + bx + \beta = 0$$
les équations des droites fixes. Menons par P une droite $y - mx = 0$ et joignons à P' et P'' les points où elle rencontre les droites fixes. Soient p' et p'' les abscisses de P' et P''. L'équation de l'un des côtés sera :
$$y - mx + \lambda(y + ax + \alpha) = 0$$
Et l'on aura :
$$-mp' + \lambda(ap' + \alpha) = 0$$
Donc, éliminant λ
$$y - mx + \frac{mp'}{ap' + \alpha}(y + ax + \alpha) = 0$$
Et de même
$$y - mx + \frac{mp''}{ap'' + \beta}(y + bx + \beta) = 0$$
L'équation du lieu est donc :
$$\frac{p'}{ap' + \alpha}(y + ax + \alpha) = \frac{p''}{ap'' + \beta}(y + bx + \beta)$$
C'est une droite qui passe au point de rencontre des 2 droites fixes.

Remarques. — 1. — On peut déduire de là la solution de ce problème : Inscrire dans un triangle donné un triangle dont les côtés passent par 3 points fixes, en ligne droite.

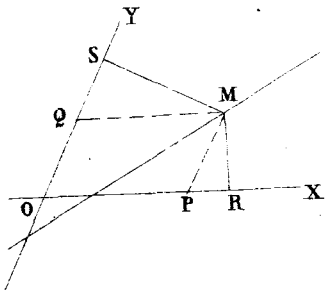
2. — On peut généraliser. Considérons un quadrilatère ABCD dont les côtés passent par 4 points fixes en ligne droite, P, P', P'', P''' et dont 3 sommets se déplacent sur des droites fixes. Cherchons le lieu du 4e sommet. Les côtés du triangle ABE pivotent autour de 3 points fixes. A et B décrivent des lignes droites ; donc E décrit une ligne droite. Par suite ECD



même de même à la conclusion que D décrit une droite.

On voit immédiatement qu'on arrivera successivement à la même conclusion pour le polygone d'un nombre croissant de côtés, et comment on peut inscrire dans un polygone de n côtés un autre polygone de n côtés dont les côtés passent par n points fixes.

363. — *Lieu des points tels que la différence de leurs distances à 2 droites données soit fixe.*

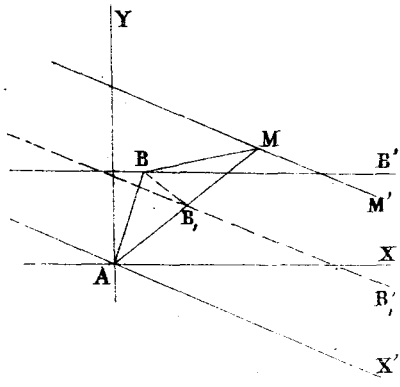


R. — Prenons les 2 droites pour axes, et soit C la différence donnée. Nous aurons :

$$(x - y) \sin \theta = C$$

Le lieu est donc une parallèle à la bissectrice de l'angle des axes.

364 *Le triangle* ABM *a son sommet* A *constant, le sommet* B *se meut sur la droite* BB', *le triangle reste semblable à lui-même, lieu de* M.



R. — Si on prenait sur AM,

$$AB_1 = AB,$$

le lieu de B serait évidemment une droite $B_1B'_1$ distante de A autant que BB', en faisant avec Ax un angle égal à BAB_1.

Le rapport $\frac{AM}{AB}$ étant constant, le lieu de M sera une droite parallèle à $B_1B'_1$.

365. — *Lieu des points dont la différence des distances à 2 points donnés est égale à un carré donné.*

R. — $$(x-a)^2 + (y-b)^2 - (x-a')^2 - (y-b')^2 = d^2$$

ou $$2x(a'-a) + 2y(b'-b) + a^2 - a'^2 + b^2 - b'^2 = d^2$$

C'est donc une droite perpendiculaire à celle qui joint les 2 points.

III. — Cercle.

A. Questions générales.

366. — *Le produit des segments d'une sécante menée par un point extérieur à un cercle est constant.*

R. — Prenons pour axes 2 des sécantes. L'équation du cercle sera :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta - R^2 = 0$$

Les abscisses des points de rencontre avec l'axe des x sont données par :

$$x^2 - 2(a + b\cos\theta) + a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - R^2 = 0$$

Les ordonnées des points de rencontre avec l'axe des y, par :

$$y^2 - 2(b + a\cos\theta) + a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - R^2 = 0$$

Les produits des racines de ces équations sont égaux; C. q. f. d.

---

367. — *Tangente au cercle par un point extérieur.*

R. — x'', y'' les coordonnées de ce point;

$x^2 + y^2 = R^2$ l'équation du cercle.

x' y' les coordonnées du point de contact.

On doit avoir :

$$y''y' + x''x' = R^2$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2 \qquad (1)$$

Retranchant membre à membre, il vient :

$$\left(x' - \frac{x''}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{y''}{2}\right)^2 = \frac{x''^2 + y''^2}{4} \qquad (2)$$

x' et y' étant regardés comme coordonnées courantes, l'équation (1) représente le cercle donné; l'équation (2) le

cercle décrit sur la distance de l'origine au point x'', y'' comme diamètre. L'intersection de ces cercles donne le point de contact. — On retrouve ainsi la construction élémentaire connue.

Remarque. — L'équation (2) étant indépendante de R, on voit que le lieu des points de contact des tangentes, menées d'un point fixe à tous les cercles, qui ont un même centre, est la circonférence décrite sur la distance du point fixe au centre.

---

368. — Conditions analytiques de l'intersection de 2 circonférences.

R. — $x^2 + y^2 = R^2$ $\quad (x-a)^2 + y^2 = R'^2$ les équations des 2 circonférences; en soit $a > 0$

Retranchant membre à membre, on a :

$$2ax - a^2 = R^2 - R'^2 \qquad x = \frac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a}$$

Il faut donc que l'on ait :

$$-R < \frac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a} < R$$

Ou

$$(a+R)^2 > R'^2$$

$$(a-R)^2 < R'^2$$

Ou encore

$$(a + R + R')(a + R - R') > 0$$

$$(a - R + R')(a - R - R') < 0$$

La 1re condition donne :

$$a > R' - R \qquad (1)$$

La seconde :

$$\begin{cases} a < R - R' & (2) \\ a > R + R' & (3) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a > R - R' & (4) \\ a < R + R' & (5) \end{cases}$$

Mais (2) et (3) sont incompatibles, car (2) donne $a < R$ et (3) $a > R$.

Donc on doit avoir (1), (4) et (5); d'ailleurs une des deux inégalités (1) et (4) entraîne l'autre, suivant que $R \gtrless R'$. En résumé donc il faut que la distance des centres a soit moindre que la somme des rayons et plus grande que

leur différence.

---

369. Les cordes communes à 3 circonférences 2 à 2 se rencontrent au même point.

R. — Soient $C = 0$ $C' = 0$ $C'' = 0$ les équations des 3 circonférences.

$C - C' = 0$ $C - C'' = 0$ $C' - C'' = 0$, équations du 1er degré, représenteront les cordes de contact. L'une de ces équations pouvant se conclure des 2 autres, le théorème se trouve démontré.

B. Questions particulières.

370. — Propriétés communes aux circonférences

$$x^2 + y^2 + \lambda x + by + c = 0.$$

Lieu des points de contact des tangentes issues d'un point de l'axe des y. Propriétés communes aux cordes de contact.

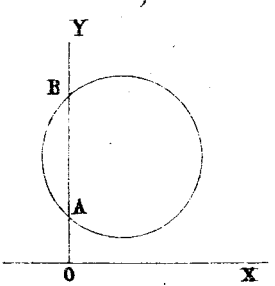
R. — Si on fait $x = 0$, l'équation qui donne les ordonnées des points de rencontre avec Oy est la même pour toutes les circonférences. Elles ont toutes 2 points communs sur l'axe des y. Les tangentes issues d'un point de la corde commune sont toutes égales entre-elles, comme moyennes proportionnelles entre 2 longueurs constantes. Si β est l'ordonnée du point donné, la corde de contact aura pour équation :

$$\beta(2y + b) + \lambda x + by + 2c = 0$$

Quel que soit λ, elle rencontre l'axe des y au même point.

---

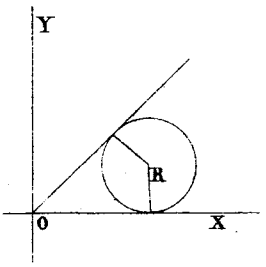
371. — Équation de toutes les circonférences, qui ont pour sécante commune une portion AB de l'axe des y.



R. — Coordonnées rectangulaires. α, un paramètre variable. L'équation sera :

$$(x - \alpha)^2 + \left(y - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{(a-b)^2}{4}.$$

372. — Équation d'un cercle tangent à l'axe des x et à la bissectrice des axes.



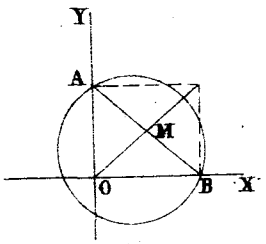
R. — Soient a et b les coordonnées du centre.
On doit avoir $b = R$, la distance à la droite $y = x$ étant $\frac{a-R}{\sqrt{2}}$ on doit aussi avoir

$$\frac{a-R}{\sqrt{2}} = R \quad \text{d'où} \quad a = R(\sqrt{2}+1)$$

Et l'équation demandée est :

$$[x - R(\sqrt{2}+1)]^2 + (y-R)^2 = R^2.$$

373. — Étant donnés un cercle et 2 droites rectangulaires, trouver l'équation de la droite OM, qui joint le sommet de l'angle au milieu M de la droite AB.



R. — Prenons les droites pour axes. — Équation du cercle :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

De là $OB = a \pm \sqrt{R^2 - b^2}$

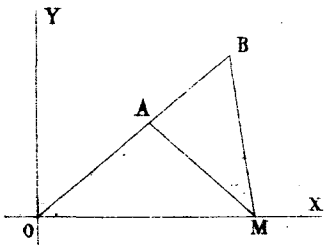
$$OA = b \pm \sqrt{R^2 - a^2}$$

et l'équation de OM sera :

$$y = \frac{b \pm \sqrt{R^2 - a^2}}{a \pm \sqrt{R^2 - b^2}}\, x$$

374. — Étant donnés une droite OX, et 2 points A, B dans son plan, trouver le maximum de l'angle AMB dont le sommet est sur OX.

R. — Dans les divers cercles circonscrits aux triangles tels que ABM, l'angle AMB a pour mesure la moitié de l'arc sous tendu par AB. Il est clair que cet arc est d'autant plus grand par rapport à la circonférence, que le rayon est plus petit. Le maximum correspond donc au cercle tangent à OX.



Par le Calcul. Soit pris pour axe des Y la perpendiculaire à OX, au point de rencontre avec AB. Appelons (x', y'), (x'', y'') les coordonnées de A et de B ; α la longueur OM ; nous aurons :

$$\operatorname{tg} AMB = \frac{\frac{y'}{x'-\alpha} - \frac{y''}{x''-\alpha}}{1 + \frac{y'y''}{(x'-\alpha)(x''-\alpha)}}$$

Réduisant et remarquant que $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''}$;

$$\operatorname{tg} AMB = \frac{\alpha(y'-y'')}{x'x''+y'y''-\alpha(x'+x'')+\alpha^2}$$

En annulant la dérivée par rapport à α, on a pour le maximum :

$$\alpha = \sqrt{x'x''+y'y''}$$

Or, on a :

$$OA \times OB = \sqrt{(x'^2+y'^2)(x''^2+y''^2)} = \sqrt{(x'x''+y'y'')^2 + (y'x''-x'y'')^2}$$

ou d'après la relation $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''}$

$$OA \times OB = x'x''+y'y'' = \alpha^2$$

Donc M est le point de contact du cercle passant par A et B et tangent à OX.

C. Lieux géométriques.

375. — *Lieu des intersections successives des droites*

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = 1.$$

R. — 1° L'équation du cercle $x^2+y^2=1$ peut s'écrire :

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = 1$$

La droite $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$ est donc tangente à ce cercle qui est, par suite, le lieu demandé.

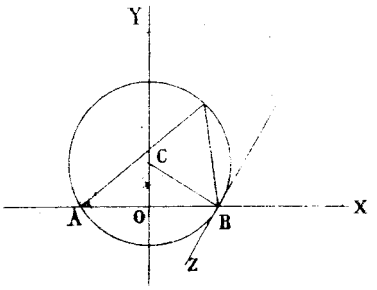
2° Appliquant la méthode générale des enveloppes, on prendra la dérivée par rapport à α :

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$$

Élevons au carré et ajoutons, il vient :

$$x^2+y^2=1.$$

376. — Lieu des sommets des triangles qui ont même base et même angle au sommet.



R. — AB la base.

axe des x la droite AB;

axe des y la perpendiculaire au milieu; il est évident que le lieu est symétrique par rapport à cette perpendiculaire.

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} MBx - \operatorname{tg} MAx}{1 + \operatorname{tg} MBx \operatorname{tg} MAx}$$

Or $\operatorname{tg} MBx = \dfrac{y}{x-a}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} MAx = \dfrac{y}{x+a}$

Substituant et réduisant

$$x^2 + y^2 - 2ay \cot M = a^2$$

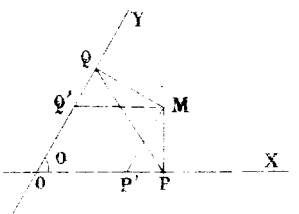
Ou

$$x^2 + (y - a \cot M)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 M}$$

C'est un cercle dont le rayon $= \dfrac{a}{\sin M}$ et dont le centre est sur l'axe des x, au point C tel que $OC = a \cot M$. Pour construire ce point il faudra faire $OBz = M$, mener BC perpendiculaire à Bz, et on aura $OC = a \cot M$. On retrouve ainsi la construction géométrique connue.

---

377. — Lieu du point M tel, que la droite qui joint les projections octogonales de ce point sur les axes soit constante.



R. — Le quadrilatère OPMQ est inscriptible.

Donc $PQ^2 = MP^2 + MQ^2 + 2MP.MQ \cos\theta$

Soit $PQ = a$; on a:

$MP = y \sin\theta$ $\qquad$ $MQ = x \sin\theta$

L'équation du lieu est donc:

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta = \frac{a^2}{\sin^2\theta}.$$

C'est un cercle de centre O, et de rayon $\dfrac{a}{\sin\theta}$.

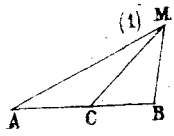
---

378. — *Lieu des points dont la somme des carrés des distances à 2 points donnés est égale à un carré donné.* (Voir problème suivant.)

R. $$(x-a)^2+(y-b)^2+(x-a')^2+(y-b')^2=d^2$$

Ou : $$2x^2+2y^2-2(a+a')x-2(b+b')y+a^2+b^2+a'^2+b'^2=d^2$$

C'est une circonférence de cercle dont le centre est au milieu de la droite qui joint les 2 points.

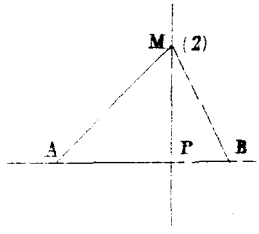


Autrement. — Si M est un point du lieu, A et B les 2 points fixes, et C le milieu de AB, on a :

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=\frac{\overline{AC}^2}{2}+\overline{MC}^2$$

Le 1er membre devant être constant et AC l'étant, MC le sera aussi, et le lieu sera un cercle de centre C.

Autrement. — Soient M un point du lieu, A,B les 2 points donnés, MP perpendiculaire à AB. —



On doit avoir :

$$\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=d^2$$

Donc : $$\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=d^2 \qquad (1)$$

Mais on a : $$AP+PB=AB \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) déterminent les longueurs AP et BP : donc le lieu est la perpendiculaire MP.

---

379. — *Lieu des points tels que la somme des produits des carrés des distances de chacun d'eux à un nombre quelconque de points donnés par des constantes m', m'', ... soit égale à K^2*

R. — Équation du lieu :

$$m'\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]+m''\left[(x-x'')^2+(y-y'')^2\right]+\ldots\ldots=K^2$$

1° Quand on n'a aucune relation entre les coëfficients, cette équation représente une circonférence, dont le centre

est au point :

$$x_0 = \frac{m'x' + m''x'' + \cdots\cdots}{m' + m'' + \cdots\cdots}$$

$$y_0 = \frac{m'y' + m''y'' + \cdots\cdots}{m' + m'' + \cdots\cdots}$$

c'est-à-dire au centre des distances proportionnelles.

2° Quand $m' + m'' + \cdots\cdots = 0$, les termes du 2d degré disparaissent ; le lieu est une droite ; le centre des distances proportionnelles est en même temps à l'infini. — *Exemple* : La différence des carrés des distances de 2 points fixes aux divers points d'un lieu étant constante ($m' + m'' = 0$), ce lieu est une droite

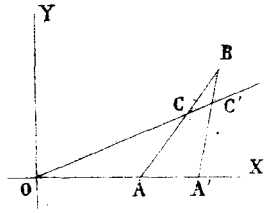
3° Faisons $m' = m'' = m''' = \cdots\cdots$ et portons l'origine au centre des moyennes distances. L'équation devient :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{n}\left(K^2 - x'^2 - y'^2 - x''^2 - y''^2 - \cdots\cdots\right)$$

La valeur minimum de K^2 est donc $x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2 + \cdots\cdots$: par suite, le point dont la somme des carrés des distances aux divers points d'un système donné est minimum, n'est autre que le centre des moyennes distances de ce système ; et la somme croît quand le point s'éloigne de ce centre.

---

380. — Soient ABA′ un triangle fixe, O un point fixe. Par O on mène une droite qui coupe les côtés du triangle en C et C′. Lieu du point de rencontre des circonférences circonscrites aux triangles ACO, OCA′.



R. — Équations de

AB $\quad y = a(x - \alpha)$

A′B $\quad y = \alpha'(x - \alpha')$

OC $\quad y = mx$

Les coordonnées de C seront :

$$x = \frac{a\alpha}{a - m} \qquad y = \frac{ma\alpha}{a - m}$$

Tout cercle passant par O et A a pour équation :

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0$$

Ecrivant qu'il passe en C, on aura :

$$\beta = \frac{\alpha(\alpha m + 1)}{a - m}$$

Pour l'autre cercle, équations analogues. — Éliminant m, on trouve pour le lieu $x^2 + y^2 = 0$, ce qui donne le point fixe ;

Et
$$x^2 + y^2 - (\alpha + \alpha')x - \frac{(1 + a\alpha')(\alpha - \alpha')}{a - \alpha'} y + \alpha\alpha' = 0$$

c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle ABA'.

---

381. — *Lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à une circonférence.*

R. — Soient
$$y = mx + r\sqrt{1 + m^2}$$
$$y = m'x + r\sqrt{1 + m'^2}$$

les équations des côtés de l'angle. m et m' sont les racines de l'équation

$$m^2(r^2 - x^2) + 2xy\,m + r^2 - y^2 = 0$$

dans laquelle x et y sont les coordonnées du sommet. — On a entre m et m' la relation :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m - m'}{1 + m m'}$$

Or
$$m - m' = \frac{\pm 2\sqrt{x^2 y^2 - (r^2 - y^2)(r^2 - x^2)}}{r^2 - x^2}$$
$$m m' = \frac{r^2 - y^2}{r^2 - x^2}$$

Donc
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pm 2r\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{2r^2 - x^2 - y^2}$$

Élevant au carré, il vient :

$$(x^2 + y^2)\operatorname{tg}^2\varphi - \frac{4r^2}{\cos^2\varphi}(x^2 + y^2) + \frac{4r^4}{\cos^2\varphi} = 0$$

Ou
$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{4r^2}{\sin^2\varphi}(x^2 + y^2) + \frac{4r^4}{\sin^2\varphi} = 0$$

D'où
$$x^2 + y^2 = 2r^2\,\frac{1 \pm \cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

L'équation représente les 2 cercles

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \frac{r^2}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}$$

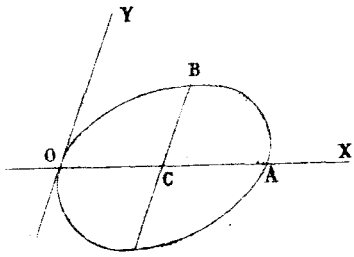
Cela tient à ce que, en élevant au carré, on a aussi bien

$tg(\pi - \varphi)$, que $tg\,\varphi$.

IV. Courbes du 2e degré en général.

A. Construction.

382. — $5x^2 + 5y^2 - 2x = 0$.



R. — En coordonnées obliques : ellipse.
En coordonnées rectangles : cercle.

Centre C $\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$

Oy est tangente à l'origine :

$$CO = CB.$$

383. — $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 2 = 0$.

R. — Genre ellipse $\quad y = x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$

$$= x + 1 \pm \sqrt{-(x-1)^2}$$

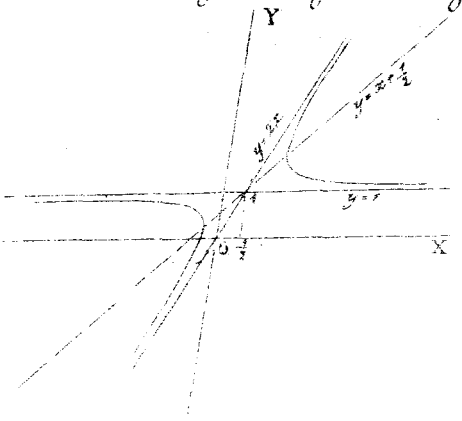
La courbe se réduit à son centre, qui est le point $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

384. — $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 3 = 0$.

R. — Genre ellipse. $\quad y = x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 2x - 2}$.

La quantité sous le radical étant égale à : $-(x-1)^2 - 1$, est constamment < 0, et l'ellipse est imaginaire.

385. — $y^2 - 2xy + 2x - y + 2 = 0$.



R. — Hyperbole :

$$y = x + \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{x^2 - x - \tfrac{7}{4}}$$

Asymptotes : $y = x + \frac{1}{2} \pm (x - \frac{1}{2})$

ou $\begin{cases} y = 2x \\ y = 1 \end{cases}$

Point de rencontre avec Ox $\begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

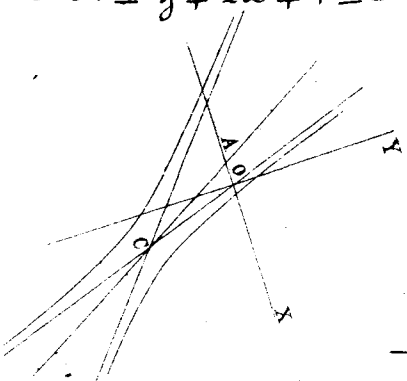
Points de rencontre avec le diamètre $y = x + \frac{1}{2}$:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2} \begin{cases} 1,914 \\ -0,914 \end{cases}$$

Centre $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

---

386. — $y + 2x + 1 = \pm \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.



R. — Hyperbole

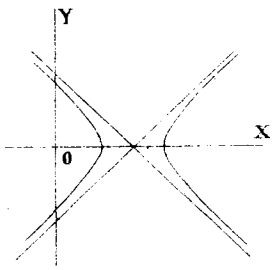
Asymptotes : $y + 2x + 1 = \pm (x - 1)$

Centre $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Le diamètre AC $y + 2x + 1 = 0$, ne rencontre point la courbe.

---

387. — $y = \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.



R. — $B^2 - 4AC > 0$

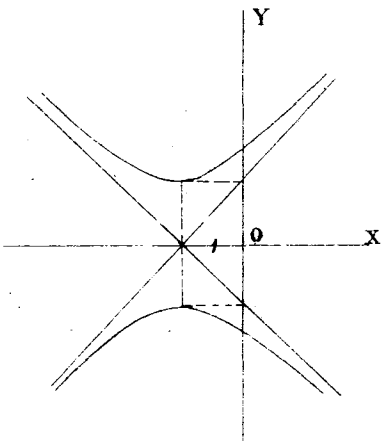
Hyperbole : $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)}$

Asymptotes : $y = \pm \left(x - \frac{3}{2}\right)$

Centre $\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

---

388. — $y = \pm \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.



R. — Le coefficient de x^2 est > 0 sous le radical ; donc la courbe est une hyperbole. D'après la forme de l'équation, l'axe des x est un diamètre (un axe en coordonnées rectangulaires). — L'équation peut s'écrire :

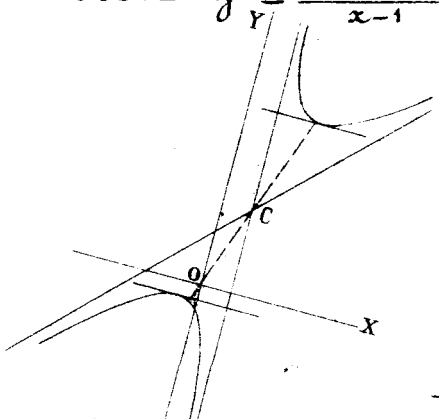
$$y = \pm \sqrt{(x+1)^2 + 1}$$

asymptotes $y = \pm (x + 1)$

Si les coordonnées sont rectangulaires, l'hyperbole est équilatère.

---

389. — $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$



R. — Hyperbole : $y = x + 2 + \frac{3}{x-1}$

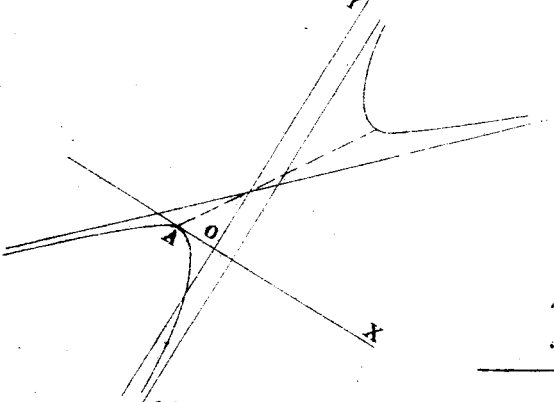
Asymptotes : $y = x + 2$ et $x = 1$

Centre $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Tangentes horizontales $\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{3} \\ y = 3 \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$

---

390. — $y = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$



R. — Hyperbole :

$$y = x + 3 + \frac{4}{x-1}$$

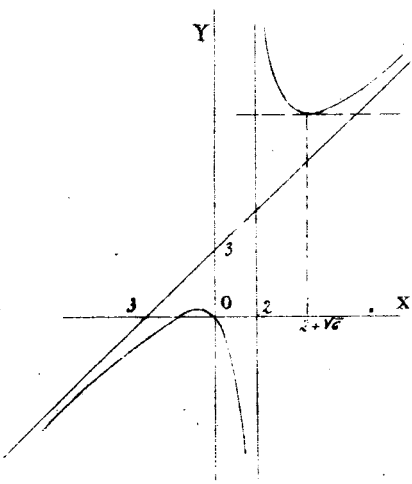
Asymptotes :

$$y = x + 3 \quad \text{et} \quad x = 1$$

La courbe est tangente en A à l'axe des x.

---

391. — $x^2 - yx + x + 2y = 0$.



R. — Hyperbole :

$$y = \frac{x^2+x}{x-2} = x + 3 + \frac{6}{x-2}$$

Asymptotes :

$x = 2$ et $y = x + 3$

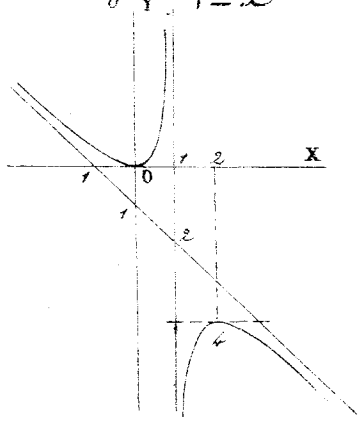
Tangentes horizontales :

$$\begin{cases} x = 2 - \sqrt{6} = -0,45 \\ y = 5 - 2\sqrt{6} = 0,10 \end{cases}$$

et $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{6} = 4,45 \\ y = 5 + 2\sqrt{6} = 9,90 \end{cases}$

---

392 $y = \frac{x^2}{1-x}$



R. — Hyperbole.

$$y = -x - 1 - \frac{1}{x-1}$$

$$y = -1 + \frac{1}{(x-1)^2}$$

asymptotes :

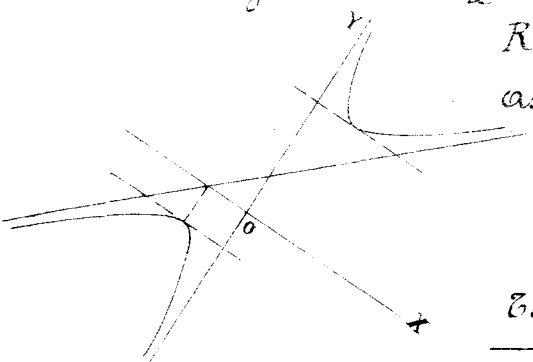
$x = 1$ et $y = -x - 1$.

Centre $x = 1$ $y = -2$

Tangentes horizontales $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

---

393. — $y = x + 1 + \frac{1}{x}$.



R. — $B^2 - 4AC > 0$ Hyperbole

asymptotes :

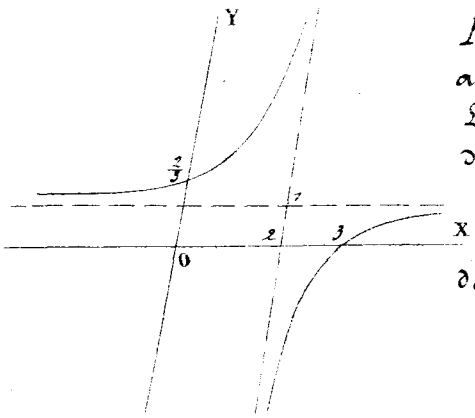
$y = x + 1$ et $x = 0$

Centre $\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

Tangentes horizontales : $x = \pm 1$.

---

394. — $y = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 8}$.



R. — $x - 4$ est facteur commun aux 2 termes de la fraction. L'équation représente donc la droite $x = 4$ et l'hyperbole

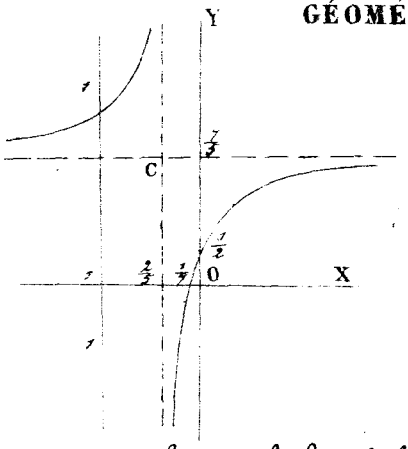
$$y = \frac{x-3}{x-2} = 1 - \frac{1}{x-2}$$

dont les asymptotes sont :

$y = 1$ et $x = 2$.

395. — $y = \frac{7x^2 + 8x + 1}{5x^2 + 7x + 2}$.

R. — Le numérateur et le



dénominateur contiennent le facteur $x+1$.

L'équation se réduit à :

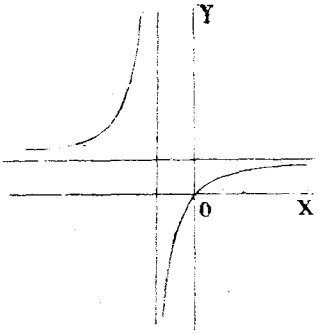
$$y = \frac{7x+1}{5x+2},$$

et représente une hyperbole dont les asymptotes sont :

$$x = -\frac{2}{5} \qquad y = \frac{7}{5}$$

A cette hyperbole il faut joindre la droite $x+1=0$.

396. — $y = \frac{x}{x+1}$.



R. — Hyperbole :

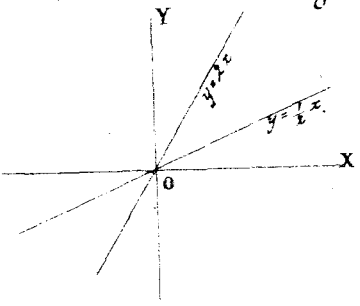
$$y = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Asymptotes

$$y = 1$$

et $\quad x = -1$

397. — $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$



R. — $\frac{y}{x} = 2$

et $\quad \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$

2 droites passant par l'origine.

398. — $(x+y)^2 = 4 - 2(x+y)$.

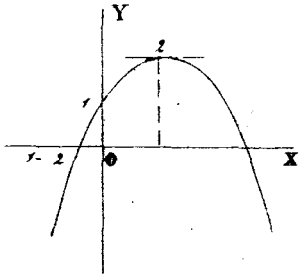
R. — Cette équation représente les 2 droites.

$$x + y = -1 + \sqrt{5}$$

$$x + y = -1 - \sqrt{5}.$$

399. — $2x + 1 - y = x^2$

R. — Parabole. — Point de rencontre avec Oy $\quad y = 1$



Points de rencontre avec Ox

$$x = 1 - \sqrt{2} = -0,414$$

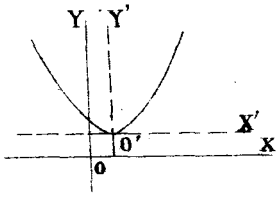
$$x = 1 + \sqrt{2} = 2,414.$$

Tangente horizontale :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

---

400. — $y = x^2 - x + 1.$



R. — Parabole $y = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

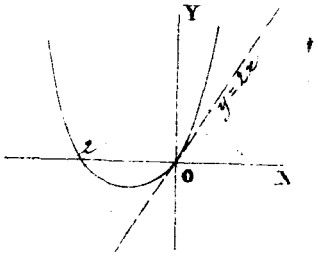
Tangente horizontale $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

Prenant pour axes $O'x'$ et $O'y'$, il vient :

$$y = x^2.$$

---

401. — $y = 2x + x^2.$



R. — Parabole. — La droite $y = 2x$ est tangente à l'origine ; en effet, si on fait

$$y - 2x = 0$$

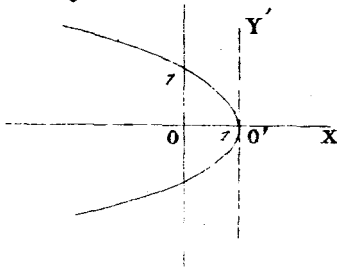
il vient $\quad x^2 = 0.$

Ce qui donne 2 points réduits à un seul.

Direction des diamètres : l'axe des y.

---

402. $y = \sqrt{-x+1}.$



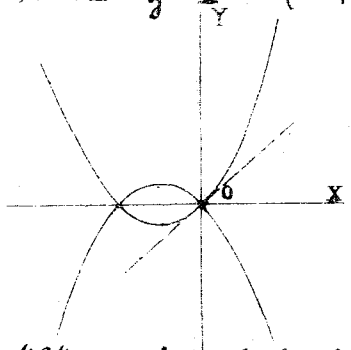
R. — Parabole.

Tangente parallèle à Oy

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Prenant cette tangente pour axe des y, on aura : $\quad y^2 + x = 0.$

403. — $y^2 = x^2(x+1)^2$



R. — Cette équation représente les 2 paraboles du 2e degré :

$$y = x(x+1)$$

et $$y = -x(x+1)$$

symétriques par rapport à Ox.

404. — $y^2 + m^2x^2 - 2xy = 2m^2 - 3m + 1$

R. — L'équation peut s'écrire :

$$(y-x)^2 + x^2(m^2-1) = 2\left(m - \tfrac{1}{2}\right)(m-1)$$

$m = -\infty$	l'équation devient $x^2 = 2$, et représente 2 parallèles à Oy
m variant de $-\infty$ à -1	on a une ellipse.
$m = -1$	2 droites parallèles.
m variant de -1 à $\frac{1}{2}$	une hyperbole.
$m = \frac{1}{2}$	2 droites qui se coupent.
$\frac{1}{2} < m < 1$	une hyperbole.
$m = 1$	la droite $y = x$.
$m > 1$	une ellipse.
$m = \infty$	2 droites parallèles.

B. *Détermination des coefficients par des conditions particulières.*

405. — *Condition pour que l'équation du 2e degré en coordonnées obliques représente une hyperbole équilatère.*

R. — L'équation aux coefficients angulaires est :

$$Ac^2 + Bc + C = 0 ;$$

elle donne $c + c' = -\frac{B}{A}$ $\qquad cc' = \frac{C}{A}$

Donc la condition demandée est

$$1 + \frac{C}{A} - \frac{B}{A}\cos\theta = 0.$$

Elle entraîne $B^2 - 4AC > 0$. Car on en déduit :

$$(B^2 - 4AC)\cos^2\theta = (A+C)^2 - 4AC\cos^2\theta.$$

Si AC est nul ou négatif, le 2d membre est positif évidemment ;

Soit $AC > 0$. On sait que $4AC < (A+C)^2$. Donc a fortiori

$$4AC\cos^2\theta < (A+C)^2$$

Ainsi le 2d membre est toujours > 0 ; donc le 1er l'est également.

---

406. — *Condition pour qu'une équation du 2d degré représente un point.*

R. — Il faut que l'équation puisse se mettre sous la forme :

$$P^2 + Q^2 = 0$$

P et Q étant des polynomes du 1er degré en x et y tels que le système $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$ ait une solution unique et finie.

---

407. — *Condition pour que* $y = \dfrac{x^2 + px + q}{x + l}$ *représente 2 droites.*

R. — $x^2 + px + q$ doit être divisible par $x + l$; on doit donc avoir $l^2 - pl + q = 0$; les 2 droites sont :

$$y = x + p - l \quad \text{et} \quad x + l = 0.$$

---

408. — *Déterminer m de manière que l'équation :*

$$y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x + m},$$

représente une droite et une parabole.

R. — Il suffit d'exprimer que la division peut se faire, d'où

$$-am^3 + bm^2 - cm + d = 0.$$

Condition toujours remplie par une valeur réelle de m.

---

409. — *Conditions pour que l'axe des x soit asymptote.*

R. — Équation des asymptotes :

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\left(x + \frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC}\right)$$

Il faut que le coëfficient angulaire de l'une d'elles soit

nul, ce qui donne $C = 0$.

Il faut encore que le terme tout connu soit nul; donc $E = 0$.

2° Les coëfficients angulaires des asymptotes sont donnés par l'équation

$$Ac^2 + Bc + C = 0.$$

Pour que l'un d'eux soit nul, $C = 0$.

Le terme tout connu est donné par la relation:

$$d = -\frac{Dc + E}{2Ac + B}.$$

Pour qu'il soit nul avec $c = 0$, il faut que $E = 0$.

3° L'équation résolue par rapport à x doit avoir y en dénominateur; il faut donc qu'il n'y ait ni terme en x^3, ni terme en x; donc $C = 0$ $E = 0$

Il paraît inutile d'ajouter que pour qu'il y ait asymptote, il faut que $B^2 - 4AC > 0$.

410. — *Conditions pour que l'axe des x soit tangent à l'origine.*

R. — Il faut que la courbe passe à l'origine; donc $F = 0$. En second lieu, le coëfficient angulaire

$$-\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D}$$

doit être nul pour $x = 0$ et $y = 0$; donc $E = 0$ avec $D \gtrless 0$.

Si D était nul en même temps, l'équation représenterait un système de 2 droites passant par l'origine et dont l'une est l'axe des x, si $C = 0$.

411. — *Courbes du 2d degré tangentes à l'origine à l'axe des x. Tangentes au 2d point de rencontre avec Oy.*

R. —

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy = 0$$

$$2^{d}\text{ point} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{D}{A} \end{cases}$$

$$y' = \frac{By + 2Cx}{2Ay + Bx + D}$$

et dans le cas particulier :

$$y' = \frac{B}{D}.$$

412. — Équation générale des paraboles qui ont pour diamètre : $y = ax$.

R. —

$$y = ax \pm \sqrt{Kx + l}$$

ou $$(y - ax)^2 - Kx - l = 0.$$

413. — Équation d'une parabole ayant un axe parallèle à la bissectrice de l'angle des axes et tangente en un point donné de l'axe des x :

R. — Soit $x = a$ le point de contact sur l'axe des x.

L'équation sera :

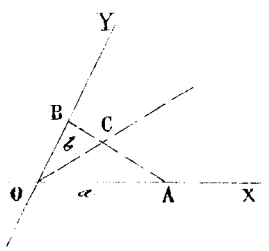
$$Ay^2 + Bxy + Dy + C(x-a)^2 = 0.$$

D'ailleurs le coëfficient d'inclinaison des diamètres de la parabole est $-\frac{B}{2A}$; donc $B = -2A$ et l'on a, en outre $B^2 - 4AC = 0$ d'où $C = A$

Ainsi l'équation devient :

$$y^2 - 2xy + (x-a)^2 + \frac{D}{A}y = 0.$$

414. — Équation générale des courbes du 2^d^ degré tangentes aux axes en 2 points donnés.



R. On doit avoir :

$D^2 - 4AF = 0$ avec $b = -\frac{D}{2A}$

et $E^2 - 4CF = 0$ avec $a = -\frac{E}{2C}$

De là $C = A\frac{b^2}{a^2}$ $D = -2Ab$

$E = -2A\frac{b^2}{a}$ $F = Ab^2$

L'équation demandée est donc :

$$y^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{b^2}{a^2}x^2 - 2by - 2\frac{b^2}{a}x + b^2 = 0$$

Si on veut que la courbe soit une parabole, elle sera complètement déterminée et l'on aura :

$$\frac{B^2}{A^2} = 4\frac{b^2}{a^2}.$$

Le diamètre OC a pour coëfficient angulaire $\frac{b}{a}$. Le coëfficient angulaire de tout diamètre de la parabole étant $-\frac{B}{2A}$, on prendra donc $\frac{B}{A} = -\frac{2b}{a}$ et l'équation sera :

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0$$

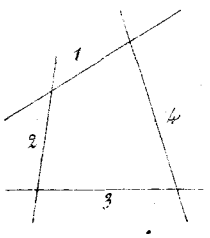
415. Équation générale des courbes du 2d degré qui passent par les intersections de 4 droites données.

R. — Soient $A = 0$ (1)

$B = 0$ (2)

$C = 0$ (3)

$D = 0$ (4)



les équations des droites. L'équation cherchée doit être vérifiée par les 4 systèmes :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

Elle sera donc

$$AC + \lambda BD = 0$$

λ étant un coëfficient arbitraire.

Si BD est un carré parfait, on aura pour $A = 0$ une équation telle que $E^2 = 0$ indiquant, par conséquent, que la courbe a 2 points communs avec la droite (1), confondus en un seul.

De même pour $C = 0$. Donc $AC + \lambda E^2 = 0$ représente les courbes du 2d degré tangentes aux droites $A = 0$ $C = 0$ aux points de rencontre de ces droites avec $E = 0$. L'équation générale du 2d degré étant mise sous

la forme $AC + \lambda E^2 = 0$; si $A = 0$ $C = 0$ sont 2 tangentes, $E = 0$ sera la corde des contacts.

---

416. — A, B, C, étant 3 trinomes du 1er degré en x et y que représente :

$$mA + pB + C^2 = 0 \ ?$$

R. — Si on fait $mA + pB = 0$, il vient $C^2 = 0$. La courbe du 2d degré représentée est donc tangente à la droite :

$$mA + pB = 0,$$

au point d'intersection de cette droite avec $C = 0$.

---

417. — Conditions pour que l'équation focale des courbes du 2d degré :

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = (mx + ny + p)^2$$

représente 2 droites concourantes.

R. — Alors la courbe passe par son centre, et comme ce centre est donné par :

$$\left.\begin{aligned}(x - x') &= (mx + ny + p)m \\ (y - y') &= (mx + ny + p)n\end{aligned}\right\}$$

en éliminant x et y entre ces 2 équations et l'équation proposée, on aura les conditions nécessaires pour que la courbe se réduise à un système de 2 droites concourantes. — On trouve ainsi : $(m^2 + n^2 - 1)(mx + ny + p)^2 = 0$

On ne peut pas poser $m^2 + n^2 - 1 = 0$, car alors la courbe serait du genre Parabole et ne pourrait par conséquent pas se réduire au système de 2 droites.

Il reste donc $my + nx + p = 0$;

Mais alors $x - x' = 0$ $y - y' = 0$; Donc l'équation de condition est :

$$my' + nx' + p = 0.$$

C. —

C. — Propriétés communes aux courbes du 2e degré quand certains coëfficients varient seuls.

418. — Propriétés communes à toutes les courbes représentées par :

$$ax^2 + Kxy + by^2 + cx + dy + f = 0.$$

K étant seul variable. Combien l'équation en λ correspondant aux couples de sécantes communes, a-t-elle de racines réelles? (Voir la théorie des intersections de coniques).

R. — Si on fait $x = 0$ ou $y = 0$ dans l'équation, le terme en K disparaît ; toutes ces courbes rencontrent donc les axes aux mêmes points, réels ou imaginaires, suivant les signes de $d^2 - 4bf$ et de $c^2 - 4af$.

S'ils sont de même signe, l'équation en λ aura ses 3 racines réelles. Si l'un d'eux est nul et l'autre positif ou nul, il y aura 2 racines égales. S'ils sont de signes contraires ou l'un nul et l'autre négatif, 2 racines imaginaires.

---

419. — De quelles propriétés jouissent les courbes représentées par l'équation générale du 2e degré où tous les paramètres sont constants excepté A. Peut-on trouver une valeur de A telle que l'équation puisse représenter 2 droites ?

Comment seront placées les courbes par rapport à ces droites ?

R. — Ces courbes rencontrent l'axe des x aux mêmes points, et sont en ces points tangentes aux mêmes droites. — Les centres sont sur la droite $By + 2Cx + E = 0$, qui est le diamètre conjugué des cordes parallèles à Ox.

Pour que l'équation représente 2 droites, il faut que l'on ait :

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = 0 \qquad (1)$$

L'équation qui fournit une seule valeur de A, finie toutes les fois que $E^2 - 4CF \gtrless 0$, c'est-à-dire que la courbe n'est point tangente à Ox.

L'équation de l'ensemble des tangentes aux points de rencontre avec Ox sera de la forme :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F + \lambda y^2 = 0$$

La condition qui exprime que cette équation représente un système de droites donne pour $A + \lambda$ la valeur que (1) donne pour A. Donc le système de ces tangentes est représenté par l'équation donnée, pour la valeur particulière :

$$A' = \frac{BDE - CD^2 - FB^2}{E^2 - 4CF}.$$

D. – Calcul des éléments des courbes du 2e degré.

420. – Équation de l'ensemble des axes d'une courbe du 2e degré.

R. – Soient a et b les coordonnées du centre. On sait que l'angle α de l'un des axes avec l'ancien axe des x, est donné par

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{B}{A-C}.$$

L'équation demandée est :

$$[y-b-\operatorname{tg}\alpha(x-a)][y-b+\cot\alpha(x-a)] = 0$$

ou :
$$(y-b)^2+(y-b)(x-a)(\cot\alpha-\operatorname{tg}\alpha)-(x-a)^2 = 0$$

Et l'on a :
$$\cot\alpha-\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha = -2\,\frac{A-C}{B}.$$

Autrement : Les coefficients angulaires des axes sont donnés par

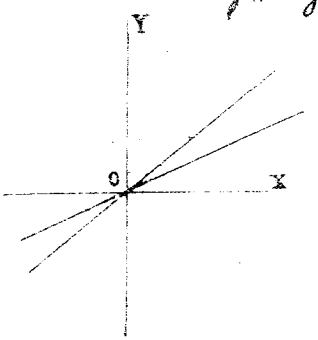
$$Bm^2 + 2(C-A)m - B = 0$$

Et l'on a
$$m = \frac{y-b}{x-a}$$

Ce qui donne la même équation.

---

421. – $2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$. Équation du système des bissectrices.



R. – L'équation représente les 2 droites

$$y = x$$

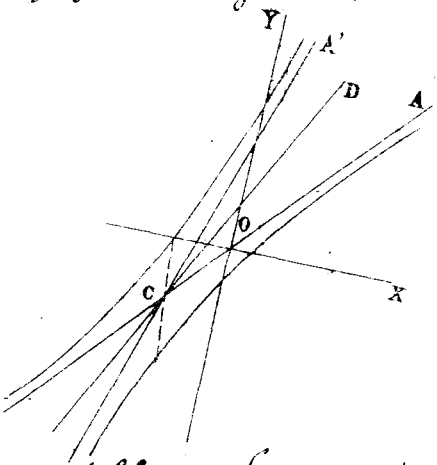
et
$$y = \frac{2}{3}x$$

Équation du système des bissectrices :

$$\frac{(y-x)^2}{2} = \frac{(3y-2x)^2}{13}$$

---

422. — $y = 2x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Trouver le diamètre conjugué de $y = 2x + 1$.



R. — Asymptotes

$$y = 2x + 1 \pm (x + 1)$$

Les cordes conjuguées de $y = 2x + 1$ sont parallèles aux y ; donc le diamètre conjugué demandé, qui passe d'ailleurs au centre, sera

$$x + 1 = 0.$$

---

423. — Lieu représenté par $x^2 + \frac{16}{17}xy + y^2 = \frac{225}{17}$. Axes ; direction et longueur.

R. — $B^2 - 4AC = \left(\frac{16}{17}\right)^2 - 4 < 0$. C'est une ellipse rapportée à son centre.

La direction des axes étant donnée par

$$Bm^2 + 2(C - A)m - B = 0$$

on aura ici $m^2 - 1 = 0$. $m = \pm 1$

L'équation de l'ensemble des axes sera $y^2 - x^2$.

Les longueurs des demi-axes sont données, en général, par $(B^2 - 4AC)R^4 - 4F(A + C)R^2 - 4F^2 = 0$

Dans le cas actuel $-\frac{225}{17^2}R^4 + 2 \cdot \frac{225}{17}R^2 - \frac{225^2}{17^2} = 0$

Ou $R^4 - 34R^2 + 225 = 0$

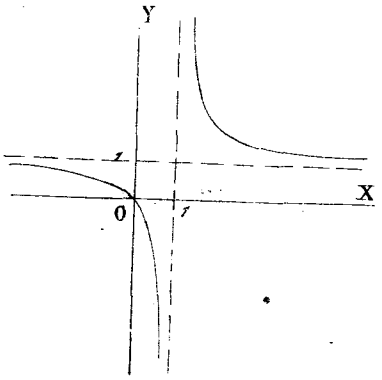
D'où $R^2 = 17 \pm 8 = \begin{cases} 25 \\ 9 \end{cases}$ $R = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$

On pourrait avoir les demi-longueurs en faisant $y = \pm x$ dans l'équation de la courbe, en multipliant l'abscisse trouvée par $\sqrt{2}$.

---

424. — $x + y = xy$. — Axe transverse.

R. — Asymptotes : $x = 1$ et $y = 1$



Les axes sont donc parallèles aux droites

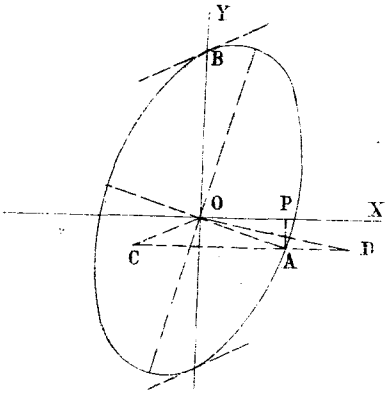
$$y = \pm x$$

et comme le centre est sur $y = x$, cette droite est l'axe transverse.

Donc $x + y = 0$ est tangente à l'origine et la longueur de l'axe transverse est $2\sqrt{2}$.

---

425. — $3y^2 - 2xy + 5x^2 - 1 = 0$ (Coordonnées rectangulaires) Trouver la longueur du diamètre des cordes parallèles à l'axe des y. Déterminer les axes en grandeur et en direction.



R. — C'est une ellipse. — Le diamètre des cordes parallèles à Oy est $y = \frac{x}{3}$. Les coordonnées de A sont :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{3}{14}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{42}} \end{cases}$$

$$OA^2 = \frac{5}{21} \qquad OB^2 = \frac{1}{3}$$

D'ailleurs $\quad \cot BOA = \frac{1}{3}$ donc $\sin BOA = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Et $\quad a^2 + b^2 = \frac{4}{7} \qquad ab = \frac{1}{\sqrt{14}}$

De là on tirera $\quad a = \frac{\sqrt{4+\sqrt{14}} + \sqrt{4-\sqrt{14}}}{2\sqrt{7}}$

$$b = \frac{\sqrt{4+\sqrt{14}} - \sqrt{4-\sqrt{14}}}{2\sqrt{7}}$$

Quant aux directions, si on mène AC perpendi. à Oy et égal à OB et AD, de même, le grand axe est bissecteur de l'angle COD.

Equation de OC et OD

$$y = \frac{\sqrt{14} - 3}{5} x$$

$$y = -\frac{\sqrt{14} + 3}{5} x$$

Equation de la bissectrice

$$\frac{5y + (3-\sqrt{14})x}{25 + (3-\sqrt{14})^2} = \frac{5y + (3+\sqrt{14})x}{25 + (3+\sqrt{14})^2}$$

E. — Simplification de l'équation du 2e degré.

426. — Prouver que quand on change de coordonnées, la quantité $B^2 - 4AC$ ne change pas de signe.

R. — Soient
$$x = a + mx' + ny'$$
$$y = b + m'x' + n'y'$$
les formules de transformation. Nous aurons :
$$B'^2 - 4A'C' = \left[2Am'n' + B(nm' + mn') + 2Cmn\right]^2$$
$$- 4(An'^2 + Bnn' + Cn^2)(Am'^2 + Bmm' + Cm^2)$$
ou, développant et réduisant
$$B'^2 - 4A'C' = (B^2 - 4AC)(mn' - nm')^2$$
ce qui démontre l'énoncé.

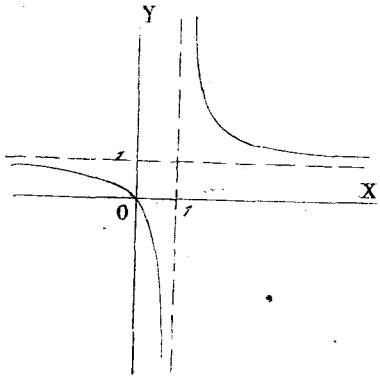
427. — Simplifier l'équation
$$y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{17}{16}x^2 - 4y + 4x - 6 = 0$$

R. — C'est une ellipse. — Pour faire évanouir les termes du 1er degré, portons l'origine au centre, dont les coordonnées sont :
$$\begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{13}{8} \end{cases}$$
l'équation devient $y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{17}{16}x^2 - \frac{49}{4} = 0$

Pour faire évanouir le rectangle, nous aurons :
$$\operatorname{Tg} 2\alpha = -8 \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = 49^\circ, 4'$$
et l'équation devient $20,53\, y^2 + 12,47\, x^2 = 196.$

428. — Simplifier $xy - x^2 - y - 1 = 0$

R. — Hyperbole. — Coordonnées du centre $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$



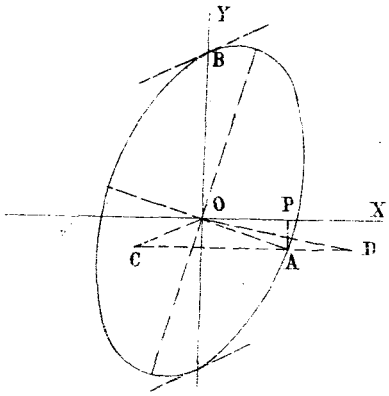
Les axes sont donc parallèles aux droites

$$y = \pm x$$

et comme le centre est sur $y = x$, cette droite est l'axe transverse.

Donc $x + y = 0$ est tangente à l'origine et la longueur de l'axe transverse est $2\sqrt{2}$.

425. — $3y^2 - 2xy + 5x^2 - 1 = 0$ (Coordonnées rectangulaires) Trouver la longueur du diamètre des cordes parallèles à l'axe des y. Déterminer les axes en grandeur et en direction.



R. — C'est une ellipse. — Le diamètre des cordes parallèles à Oy est $y = \frac{x}{3}$. Les coordonnées de A sont :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{3}{14}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{42}} \end{cases}$$

$$OA^2 = \frac{5}{21} \qquad OB^2 = \frac{1}{3}$$

D'ailleurs $\quad \text{Cot } BOA = \frac{1}{3}$ donc $\sin BOA = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Et $\quad a^2 + b^2 = \frac{4}{7} \qquad ab = \frac{1}{\sqrt{14}}$

De là on tirera $\quad a = \frac{\sqrt{4+\sqrt{14}} + \sqrt{4-\sqrt{14}}}{2\sqrt{7}}$

$$b = \frac{\sqrt{4+\sqrt{14}} - \sqrt{4-\sqrt{14}}}{2\sqrt{7}}$$

Quant aux directions, si on mène AC perpendi. à Oy et égal à OB et AD, de même, le grand axe est bissecteur de l'angle COD.

Equation de OC et OD

$$y = \frac{\sqrt{14} - 3}{5} x$$

$$y = -\frac{\sqrt{14} + 3}{5} x$$

Équation de la bissectrice

$$\frac{5y + (3-\sqrt{14})x}{25 + (3-\sqrt{14})^2} = \frac{5y + (3+\sqrt{14})x}{25 + (3+\sqrt{14})^2}$$

E. — Simplification de l'équation du 2e degré.

426. — Prouver que quand on change de coordonnées, la quantité $B^2 - 4AC$ ne change pas de signe.

R. — Soient
$$x = a + mx' + ny'$$
$$y = b + m'x' + n'y'$$
les formules de transformation. Nous aurons :
$$B'^2 - 4A'C' = [2Am'n' + B(nm' + mn') + 2Cmn]^2$$
$$- 4(An'^2 + Bnn' + Cn^2)(Am'^2 + Bmm' + Cm^2)$$
ou, développant et réduisant
$$B'^2 - 4A'C' = (B^2 - 4AC)(mn' - nm')^2$$
ce qui démontre l'énoncé.

427. — Simplifier l'équation
$$y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{17}{16}x^2 - 4y + 4x - 6 = 0$$

R. — C'est une ellipse. — Pour faire évanouir les termes du 1er degré, portons l'origine au centre, dont les coordonnées sont :
$$\begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{13}{8} \end{cases}$$
l'équation devient $y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{17}{16}x^2 - \frac{49}{4} = 0$

Pour faire évanouir le rectangle, nous aurons :
$$\operatorname{Tg} 2\alpha = -8 \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = 49^\circ, 4'$$
et l'équation devient $20{,}53\, y^2 + 12{,}47\, x^2 = 196$.

428. — Simplifier $xy - x^2 - y - 1 = 0$

R. — Hyperbole. — Coordonnées du centre $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Equation privée de termes du 1er degré $xy - x^2 - 2 = 0$

Evanouissement du rectangle $\operatorname{Tg} 2\alpha = -1$

$\alpha = 67°, 30'$. Equation aux axes : $0,207\, y^2 - 1,207\, x^2 = 2$

429. — Simplifier $y^2 - 2xy + x^2 + x = 0$

R. — Parabole. — Pour faire disparaître le rectangle, posons $\operatorname{Tg} 2\alpha = \infty$, d'où $\alpha = 45°$

En la nouvelle équation

$$2y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, x = 0$$

Portant ensuite l'origine au point $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{16} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases}$

on réduit l'équation à $4y^2 + x\sqrt{2} = 0$.

430. — $y + x^2 + y^2 = 2$.

R. — Ellipse. Centre $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Rapportant au centre, on a :

$$F = \frac{Db + Ea}{2} + F = -\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4}$$

L'équation simplifiée est donc

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

F. — Propriétés générales.

431. Th. Si on a 2 lignes concentriques du 2e ordre, la somme des carrés de 2 diamètres conjugués quelconques de la première, divisés respectivement par les carrés des deux diamètres de la seconde, comprise sur les directions des 2 diamètres conjugués, est constante.

R. — Soient $(A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha)\, r^2 = 1$.

$$(A' \cos^2 \alpha + B' \sin \alpha \cos \alpha + C' \sin^2 \alpha)\, r^2 = 1$$

les équations des 2 courbes, l'axe polaire étant l'un des axes de la 1re. La somme en question est pour les axes

$$S = \frac{A'}{A} + \frac{C'}{C}$$

Pour 2 diamètres faisant des angles α et α' avec l'axe polaire

$$S' = \frac{A'\cos^2\alpha + B'\sin\alpha\cos\alpha + C'\sin^2\alpha}{C\sin^2\alpha + A\cos^2\alpha} + \frac{A'\cos^2\alpha' + B'\sin\alpha'\cos\alpha' + C'\sin^2\alpha'}{C\sin^2\alpha' + A\cos^2\alpha'}$$

Les 2 diamètres étant conjugués dans la 1re courbe, on a :

$$\operatorname{tg}\alpha' = -\frac{A}{C\operatorname{tg}\alpha}$$

Donc

$$\sin\alpha' = \frac{\pm A\cos\alpha}{\sqrt{A^2\cos^2\alpha + C^2\sin^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha' = \frac{\mp C\sin\alpha}{\sqrt{A^2\cos^2\alpha + C^2\sin^2\alpha}}$$

En $S' = \dfrac{A'\cos^2\alpha + B'\sin\alpha\cos\alpha + C'\sin^2\alpha}{C\sin^2\alpha + A\cos^2\alpha} + \dfrac{A'C^2\sin^2\alpha - B'AC\sin\alpha\cos\alpha + CA^2\cos^2\alpha}{AC(C\sin^2\alpha + A\cos^2\alpha)}$

$$= \frac{CA'}{AC} + \frac{AC'}{AC} = \frac{A'}{A} + \frac{C'}{C} \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Remarque. — Si on suppose la 2de courbe un cercle, $A' = C'$ et $B' = 0$; donc la somme des carrés de 2 diamètres conjugués égale la somme des carrés des axes (Th. d'Apollonius).

432. — *Ayant tiré une sécante par 2 points A et B d'une ligne du 2d ordre, on mène une suite de parallèles coupant la sécante : le rectangle des 2 segments de chacune des cordes est au rectangle des segments correspondants de la sécante dans un rapport constant.* — (Voir le théorème suivant).

R. — Prenons AB pour axe des x, l'origine au milieu de AB et l'axe des y parallèle aux sécantes.

Equation de la courbe :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + F = 0$$

Equation de l'une des sécantes : $x = a$

Les ordonnées des points communs sont données par l'équation

$$Ay^2 + (Ba + D)y + Ca^2 + F = 0$$

Les racines étant de signes contraires, le produit des segments est, en valeur absolue :

$$-\frac{Ca^2 + F}{A}$$

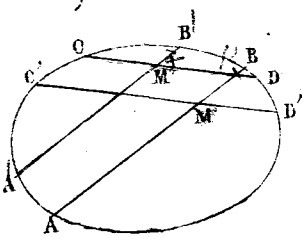
L'autre part le produit des segments de AB est, aussi en valeur absolue :

$$\left(\sqrt{-\frac{F}{C}}-a\right)\left(\sqrt{-\frac{F}{C}}+a\right)=-\frac{Ca^2+F}{C}$$

Donc le rapport demandé est $\frac{C}{A}$. C. q. f. d.

Dans le cercle $C = A$, les produits sont égaux.

433. — Th. de Newton. — AB, A'B' étant 2 cordes parallèles inscrites dans une conique, CD, C'D' 2 autres cordes parallèles, M et M' les points d'intersection de AB avec CD et de A'B' avec C'D'.



On a $\frac{AM \times MB}{CM \times MD} = \frac{A'M' \times M'B'}{C'M' \times M'D'}$

R. — Prenons AB, CD pour axes; et soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

l'équation de la courbe. AM et MB sont les racines de l'équation

$$Ay^2+Dy+F=0$$

CM et MD sont les racines de :

$$Cx^2+Ex+F=0$$

Donc :

$$\frac{AM \times MB}{CM \times MD}=\frac{C}{A}$$

Si on transporte l'origine en M', les axes restant parallèles à eux-mêmes les termes du 2d degré ne changent pas ; or ce n'est que de leurs coefficients que dépend le rapport $\frac{AM \times MB}{CM \times MD}$. Donc ce rapport est le même pour tous les systèmes de cordes parallèles à AB, CD, que le point M soit d'ailleurs intérieur ou extérieur à la courbe.

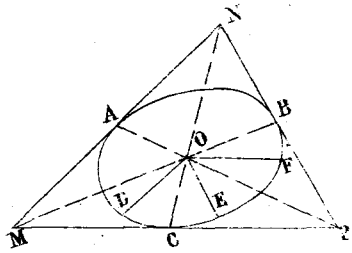
434. Th. — Les tangentes à une conique issues d'un même point sont proportionnelles aux rayons menés par le centre parallèlement à leurs directions.

R. — Le rapport constant donné par le théorème de Newton subsiste à la limite, entre les carrés des longueurs des tangentes. Si on suppose le point de rencontre des sécantes

au centre, les 2 segments deviennent égaux ; le rapport correspondant est donc celui des carrés des rayons parallèles aux tangentes. D'où le théorème énoncé.

435. — Th. — Dans tout triangle circonscrit à une conique, les points de contact déterminent sur les côtés des segments tels que le produit de 3 d'entre eux non consécutifs est égal au produit des 3 autres.

R. — Soient MNP un triangle circonscrit, A, B, C, les points de contact de ses côtés et de la conique ; menons les rayons OD, OE, OF parallèles aux tangentes. Nous aurons par un théorème connu :



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OF}}$$

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}$$

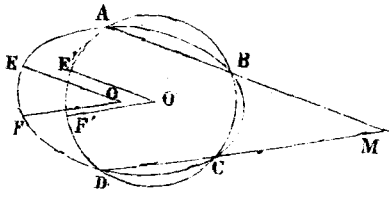
$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}}$$

D'où, multipliant membre à membre,

$$\frac{\overline{AM} \times \overline{BN} \times \overline{CP}}{\overline{CM} \times \overline{AN} \times \overline{BP}} = 1 \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Corollaire. — Les droites AP, NC, BM sont concourantes, d'après la théorie des transversales.

436. — Lorsqu'un cercle coupe une conique en 4 points, les bissectrices des angles formés par les cordes communes aux 2 courbes sont parallèles aux axes.



R. — Soient ABM, DCM les cordes communes ; OE, OF, les parallèles à ces cordes menées par le centre de la conique ; O'E', O'F les parallèles menées par le centre du cercle. Nous aurons par

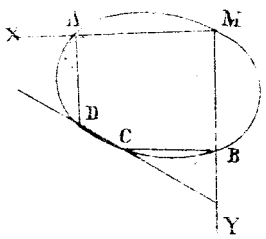
le théorème de Newton :

$$\frac{MB \times MA}{MC \times MD} = \frac{OE^2}{OF^2} = \frac{O'E'^2}{O'F'^2}$$

Donc $OE = OF$. Mais 2 diamètres égaux sont symétriques par rapport aux axes ; donc ceux-ci sont parallèles aux bissectrices des AMC et de son adjacent. C.q.f.d.

Corollaire. — Si par 2 points fixes A, B d'une conique, on fait passer différents cercles, les droites qui joignent les 2 autres points communs aux 2 courbes sont parallèles entre elles et font avec les axes les mêmes angles que AB.

437. — *Si par un point M d'une conique on mène 2 cordes quelconques MA, MB, par A et B, les droites AD, BC respectivement parallèles à MB, MA, la droite CD sera parallèle à la tangente en M.*



R. — Soient pris MA et MB pour axes. L'équation de la courbe sera :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0 ;$$

le coëfficient angulaire de la tangente à l'origine $-\frac{E}{D}$; et d'ailleurs

$$MA = -\frac{E}{C} \qquad MB = -\frac{D}{A}$$

Équation de AD : $x = -\frac{E}{C}$

Équation de BC : $y = -\frac{D}{A}$

Coordonnées de D : $x = -\frac{E}{C}$ $\quad y = \frac{BE - CD}{AC}$

Coordonnées de C : $y = -\frac{D}{A}$ $\quad x = \frac{BD - AE}{AC}$

Coefficient angulaire de CD :

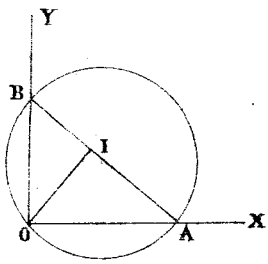
$$m = \frac{\frac{BE - CD}{AC} + \frac{D}{A}}{-\frac{E}{C} - \frac{BD - AE}{AC}} = -\frac{BE}{BD} = -\frac{E}{D} \quad \text{C.q.f.d.}$$

438. — *Par un point d'une courbe du 2e degré, on mène un système de droites rectangulaires. — La corde*

qui joint les points d'intersection passe par un point fixe de la normale.

R. — Remarque. — Le point fixe est sur la normale. La tangente et la normale forment un système de cordes rectangulaires, dans lequel l'hypoténuse se confond avec un des côtés.

1° Prenons pour axes les 2 droites de l'un des systèmes. La courbe aura pour équation



$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0$$

et on aura :

$$\text{pour A} \begin{cases} y = 0 \\ x = -\dfrac{E}{C} \end{cases} \quad \text{et pour B} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{D}{A} \end{cases}$$

La droite BA aura donc pour équation

$$\frac{x}{-\frac{E}{C}} + \frac{y}{-\frac{D}{A}} = 1.$$

D'ailleurs la normale en O à la courbe est représentée par $y = \frac{D}{E}x$. Le point d'intersection I sera donc tel que

$$\begin{cases} x = -\dfrac{E}{A+C} \\ y = -\dfrac{D}{A+C} \end{cases} \quad \text{et } OI^2 = \frac{D^2 + E^2}{(A+C)^2}$$

Quand on changera d'axes rectangulaires, il faudra poser

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

et on sait que $A' + C' = A + C$.

D'ailleurs
$$D' = D\cos\alpha - E\sin\alpha$$
$$E' = D\sin\alpha + E\cos\alpha$$

Donc $D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$, et par suite OI est constant. C.q.f.d.

2° Cette propriété est un cas particulier d'une propriété de certaines courbes du 3e degré. — L'origine étant supposée un point double et la courbe tangente aux axes en ce point, l'équation sera :

$$(1) \quad ax^3 + bx^2y + cy^2x + dy^3 + xy = 0$$

Coupons par la droite $y = mx + n$ (2). Les droites (3) $y = tx$ qui vont de l'origine aux points de rencontre de (2) avec la courbe, ont leurs coefficients angulaires donnés par l'équation $dnt^3 + (cn+1)t^2 + (bn-m)t + an = 0$, obtenue en éliminant y et x entre les équations (1), (2) et (3). Pour que 2 de ces droites soient rectangulaires, il faut que le produit des t correspondants soit -1; or le produit des 3 racines est $-\frac{a}{d}$; la 3e sera donc $\frac{a}{d}$, et on aura:

$$dn\left(\frac{a}{d}\right)^3 + (cn+1)\left(\frac{a}{d}\right)^2 + (bn-m)\frac{a}{d} + an = 0.$$

Cette relation étant du 1er degré, il s'ensuit que pour chaque valeur de m, il n'y aura qu'une seule valeur de n telle que 2 des droites soient à angle droit. — De plus, quand on a entre m et n une relation du 1er degré:

$$\alpha m + \beta n = \gamma$$

la droite $y = mx + n$ passe par le point fixe $\begin{cases} x = \frac{\alpha}{\beta} \\ y = \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}$

Ce point dans le cas qui nous occupe est tel que

$$\frac{y}{x} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a}{d},$$

il est donc sur la courbe du 3e degré.

Si nous considérons maintenant l'ensemble d'une courbe du 2d degré et d'une de ses normales comme formant une courbe du 3e degré dans les conditions supposées, il s'ensuit, que si dans la conique on inscrit un angle droit, l'hypoténuse du triangle rectangle formé passera par un point fixe de la courbe du 3e degré; et comme ce point fixe ne peut être sur la conique, il se trouvera donc sur la normale. C.q.f.d.

G. Problèmes.

439. — Exprimer qu'une droite est diamètre, — asymptote d'une courbe du 2d degré.

R. — 1° diamètre.

Equation de la droite $y = ax + b$.

Equation d'un diamètre: $By + 2Cx + E + m(2Ay + Bx + D) = 0$

Identifiant, il vient :

$$a = -\frac{2C + Bm}{2Am + B} \qquad b = -\frac{E + Dm}{2Am + B}$$

Et par suite

$$m = -\frac{2C + Ba}{2Aa + B} \qquad b = -\frac{(2AE - BD)a + BE - 2CD}{B^2 - 4AC}$$

2° Asymptote. — On doit avoir :

$$Aa^2 + Ba + C = 0 \quad \text{et} \quad b = -\frac{Da + E}{2Aa + B}$$

On

$$a = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad b = \frac{-(BD - 2AE) \pm D\sqrt{B^2 - 4AC}}{\mp 2A\sqrt{B^2 - 4AC}}$$

---

440. — Équation d'une sécante dont l'origine soit le milieu.

R. — Soit $y = mx$. — L'équation aux abscisses des points d'intersection

$$(Am^2 + Bm + C)x^2 + (Dm + E)x + F = 0$$

doit avoir ses racines égales et de signes contraires.

Donc $$Dm + E = 0$$

441. — $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ étant les équations des 3 côtés d'un triangle, a, b, c des constantes ; — démontrer que 1° $\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0$ représente une courbe du 2e degré, passant par les sommets du triangle ; 2° $\frac{A}{a} + \frac{B}{b} = 0$ représente la tangente au point C ; 3° les sommets du triangle circonscrit formé par les 3 tangentes en A, B, C sont joints à ces points par des droites concourantes ; 4° Les points d'intersection des côtés du triangle inscrit avec les côtés homologues du triangle circonscrit, sont en ligne droite.

R. 1° L'équation peut s'écrire :

$aBC + bAC + cAB = 0$; elle est donc du 2e degré ; elle est vérifiée

pour $\begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$

donc la courbe passe aux 3 sommets. Il faudrait se donner 2 conditions, par exemple les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ pour déterminer

la courbe.

2°. — L'équation $\frac{A}{a} + \frac{B}{b} = 0$ représente une droite qui passe au point C; on peut l'écrire $CAb + CBa$; retranchant de l'équation de la courbe, on a $AB = 0$ équation qui ne donne que le point C : donc la droite est tangente en C.

3°. Les équations de 2 des tangentes étant

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} = 0 \qquad \frac{A}{a} + \frac{C}{c} = 0$$

et les équations du point opposé $\begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$. L'équation d'une droite passant au point de rencontre des tangentes est

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \lambda\left(\frac{A}{a} + \frac{C}{c}\right) = 0,$$

comme elle doit passer au point $\begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$, on aura $\lambda + 1 = 0$ et l'équation se réduit à

$$\frac{B}{b} - \frac{C}{c} = 0$$

On aura de même

$$\frac{A}{a} - \frac{B}{b} = 0 \qquad \frac{A}{a} - \frac{C}{c} = 0.$$

L'une de ces équations étant la conséquence des 2 autres, les 3 droites sont concourantes.

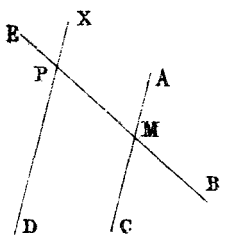
4° Les points $\begin{cases} \frac{A}{a} + \frac{B}{b} = 0 \\ C = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{A}{a} + \frac{C}{c} = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 0 \\ A = 0 \end{cases}$

sont tous trois sur la droite $\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 0$. C.q.f.d

---

442. — Trouver le centre d'une conique dont on donne 5 points.

R. — Soient A, B, C, D, E les 5 points. Joignons AC, BE qui se coupent en M; puis menons DX parallèle à AC, qui rencontre BE en P et la courbe en X. Le point X sera déterminé, en vertu du théorème de Newton, par la relation



$$\frac{PX \times PD}{PE \times PB} = \frac{MA \times MC}{ME \times MB}$$

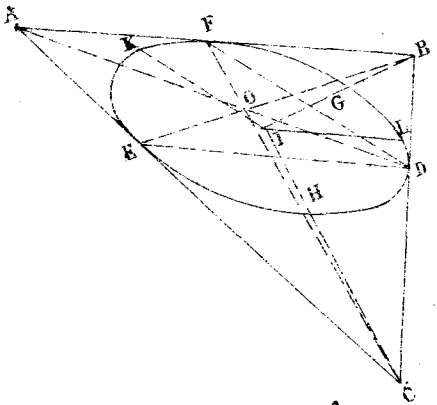
Les milieux des cordes parallèles AC; DX donneront un

diamètre. On pourra de même en déterminer un autre, – d'où le centre.

---

443. – Construire une conique, connaissant 3 tangentes et deux points de contact.

R. – D'après une propriété connue dans un triangle ABC circonscrit à une conique, les droites, qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent en un même point.



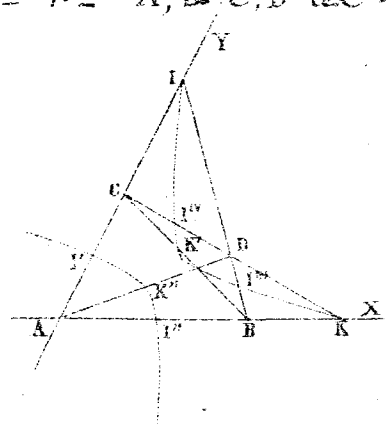
On peut donc trouver immédiatement le 3e point de contact. Joignant DE et DF, on prendra les milieux G et H de ces droites, et les diamètres BG, CH donneront le centre I de la courbe. – On mènera IK parallèle à DF; la moyenne proportionnelle entre KF et BF, fournira la longueur IL du demi diamètre conjugué de IF, et on pourra alors construire les axes en grandeur et en direction.

H. – Lieux géométriques.

444. – Equation générale des courbes du 2e degré qui passent par 4 points donnés.

Lieu des centres de ces courbes.

R. – 1°. – A, B, C, D les 4 points.



Equation :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0$$

On doit avoir :

$$Cx + E = 0 \qquad (1)$$

$$Ay' + D = 0 \qquad (2)$$

$$Ay''^2 + Bx''y'' + Cx''^2 + Dy'' + Ex'' = 0 \qquad (3)$$

L'équation sera donc :

$$Ay^2 + \frac{Ay''(y'-y'') + Cx''(x'-x'')}{x''y''}xy + Cx^2 - Ay'y - Cx'x = 0.$$

Pour le centre, on aura :

$$2Ay + Bx - Ay' = 0 \qquad (4)$$
$$By + 2Cx - Cx' = 0 \qquad (5)$$

Éliminant A, B, C, D, E entre (1), (2), (3), (4), (5), ce qui est possible, parce que les équations sont homogènes, il vient pour le lieu des centres :

$$x'(x''-x')y(y'-2y)+x''y''(y'-2y)(x'-2x)+y''(y''-y')x(x'-2x)=0$$

C'est une courbe du 2e degré.

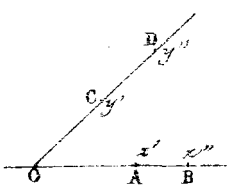
Les points O, I, K font évidemment partie du lieu.

Faisant $y=0$ et $x=0$, on trouve les points I' et I'' milieux de AC et de AB ; on conclut que I''' et I'' font également partie du lieu ; et de même K' et K'' milieux de BC et de AD. On a tracé en pointillé la forme du lieu dans le cas de la figure.

2° Si $A=0$ $B=0$ $C=0$ $D=0$ les équations des droites AB, CD, AD, CB, l'équation demandée sera :

$$AB + \lambda CD = 0$$

3°. Si on prend pour axes un des systèmes de 2 droites qui passent par les 4 points, l'équation de toute courbe du 2e degré qui passera par ces 4 points sera :



$$xy + \lambda\left(\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}-1\right)\left(\frac{x}{x''}+\frac{y}{y''}-1\right)=0$$

Et le lieu des centres sera :

$$\left(\frac{y}{y'}-\frac{x}{x'}\right)\left(\frac{x}{x''}+\frac{y}{y''}-1\right)+\left(\frac{y}{y''}-\frac{x}{x''}\right)\left(\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}-1\right)=0$$

L'équation peut s'écrire ainsi :

$$\frac{2y^2}{y'y''}-\frac{y'+y''}{y'y''}y-\frac{2x^2}{x'x''}+\frac{x'+x''}{x'x''}x=0$$

$B^2-4AC=\frac{16}{x'x''y'y''}$. Ellipse, quand de 4 quantités 3 sont de même signe ce qui exige que le quadrilatère ne soit pas convexe.

Hyperbole quand elles sont toutes les 4 de même signe, ou que 2 d'entre-elles sont >0, et les 2 autres

< 0 ; ce qui correspond au quadrilatère convexe.

Dans ce cas, les 2 directions asymptotiques donnent 2 centres à l'infini.

Par 4 points on peut donc toujours faire passer deux paraboles.

---

445. — Lieu des centres des courbes du 2e degré, tangentes à 4 droites données

R. — Soient $x = 0$ $y = 0$ $y = ax + b$ $y = a'x + b'$ les équations des 4 droites

et $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$ celle de la courbe. — Les conditions de tangence sont :

$$D^2 - 4AF = 0 \qquad E^2 - 4CF = 0$$

$$(2Aab + Bb + Da + E)^2 = 4(Aa^2 + Ba + C)(Ab^2 + Db + F)$$

$$(2Aa'b' + Bb' + \ldots\ldots)^2 = 4(Aa'^2 + \ldots\ldots)(Ab'^2 + \ldots\ldots)$$

Les 2 dernières se réduisent, en vertu des premières, à :

$$(B^2 - 4AC)b^2 + 2(2AE - BD)ab + 2(BE - 2CD)b + 2(DE - 2BF)a = 0$$

$$(B^2 - 4AC)b'^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Les coordonnées du centre étant :

$$x = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} \qquad y = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$$

Les deux dernières équations deviennent :

$$(B^2 - 4AC)(b^2 + 2abx - 2by) = 2(2BF - DE)a$$

$$(B^2 - 4AC)(b'^2 + 2a'b'x - 2b'y) = 2(2BF - DE)a'$$

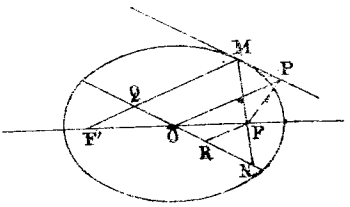
Divisant membre à membre, on a l'équation du lieu qui est donc une droite.

V. — Ellipse.

A. — Propriétés générales.

446. — Le diamètre parallèle à la tangente au point M de l'ellipse, rencontre le rayon vecteur MF de ce point

en un point N tel que MN = a



R. — 1° Le triangle MQN est isocèle : donc MN = MQ. Si on projette F en P sur la tangente, on voit que QM = OP ; or OP = a : donc MN = a. C.q.f.d.

2° Menons FR parallèle à F'M ; nous aurons :

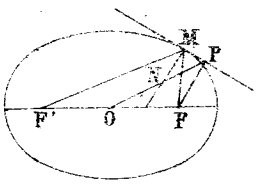
$$FN = FR = F'Q$$

Donc $$2\,MN = MN + MQ = FM + F'M = 2a$$

et $$MN = a \qquad \text{C.q.f.d.}$$

---

447. — Soient MP la tangente, MN la normale au point M d'une ellipse, P la projection du foyer F sur la tangente. Si on joint OP, on a : NP = MF



R. — En effet, on sait que OP est parallèle à F'M : donc les angles MPN et PMF sont égaux, donc les triangles rectangles auxquels ils appartiennent le sont aussi, et par suite : MF = NP.

Remarque. — Le théorème est vrai pour l'hyperbole.

---

448. — Le produit des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse sur les tangentes est constant.

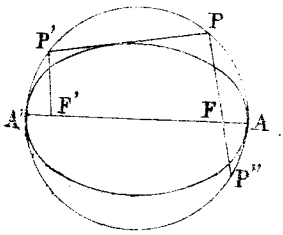
R. — 1° Equation d'une tangente :

$$y - mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = 0$$

Produit des distances des foyers :

$$pp' = \frac{-mc - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{mc - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{1+m^2}} = b^2$$

2° — On sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes est le cercle décrit



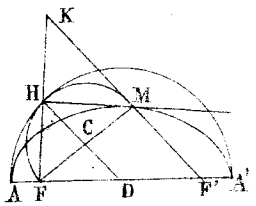
sur le grand axe comme diamètre. Si on prolonge FP jusqu'en P'' sur la circonférence, on aura, par symétrie, $FP'' = F'P'$;

Donc $pp' = FP \times FP''$ et par la propriété des sécantes dans le cercle

$$pp' = FA \times FA' = (a-c)(a+c) = b^2$$

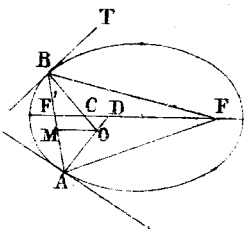
449. — *Sur le rayon vecteur mené du foyer à un point de l'ellipse comme diamètre, on décrit une circonférence. Cette circonférence est tangente à celle qui a le grand axe pour diamètre.*

R. — On peut écrire les équations des deux circonférences et chercher leur intersection; les racines de l'équation qu'on obtiendra devront être égales; mais en opérant ainsi, on arrive à une équation du 4e degré. On résout plus facilement cette équation par la géométrie.



Si je mène la tangente en M à l'ellipse, elle coupe la circonférence décrite sur FM en un point H; je joins HF, et l'angle MHF est droit, comme inscrit dans une demi-circonférence; donc H est le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur la tangente, et par suite, il se trouve sur la circonférence AA'. Donc, déjà les deux circonférences ont un point commun; je dis de plus qu'elles n'en ont qu'un. Pour le prouver, il suffit de faire voir qu'en joignant CH et DH ces deux rayons coïncident. Car HD est parallèle à F'MK; et C étant le milieu de FM et H le milieu de FK, HC est aussi parallèle à MK: donc les deux rayons coïncident et les circonférences sont tangentes. C. q. f. d.

450. — *Si par un foyer F' on mène une corde AB, et que par le point de rencontre O des normales en A et B*



on mène une parallèle au grand axe, cette droite passe au milieu de AB.

R. — Soient D, C les points de rencontre des normales avec l'axe; joignons AF, BF. Nous aurons par les triangles semblables :

$$\frac{BM}{MO} = \frac{BF'}{F'C} \qquad \frac{AM}{MO} = \frac{AF'}{F'D}$$

et par la propriété de la bissectrice

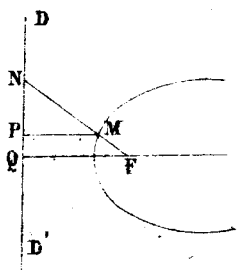
$$\frac{BF'}{F'C} = \frac{BF}{CF} = \frac{BF'+BF}{F'C+CF} = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{AF'}{F'D} = \frac{AF}{DF} = \frac{AF'+AF}{F'D+DF} = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c}$$

Donc $\frac{BM}{MO} = \frac{AM}{MO}$ D'où $BM = AM$. C. q. f. d.

---

451. — Par le foyer F de l'ellipse, on mène la transversale FMN qui rencontre la courbe en M et la directrice en N.



Montrer que $\frac{1}{FM} - \frac{1}{FN} = \text{Const.}$

R. — En effet :

$$\frac{1}{FM} - \frac{1}{FN} = \frac{MN}{FM \cdot FN}.$$

Or $\frac{MN}{FN} = \frac{PM}{FQ}$

Donc $\frac{MN}{FM \cdot FN} = \frac{PM}{FM} \cdot \frac{1}{FQ} = \text{Const.}$ C. q. f. d.

On peut le vérifier en prenant les coordonnées polaires — F étant le pôle, l'équation de l'ellipse sera

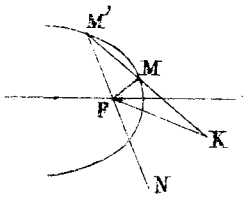
$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega} = \frac{b^2}{a - c \cos \omega}.$$

l'équation de la directrice

$$\rho_1 = -\frac{b^2}{c \cos \omega}$$

En l'on voit que $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{a}{b^2}$ C.q.f.d.

452. — Th. — La bissectrice de l'angle extérieur MFN d'un triangle MFM', formé par 2 rayons vecteurs de l'ellipse, rencontre la corde MM' sur la directrice.



R. — En effet par la propriété de la bissectrice,

On a : $\frac{KM}{KM'} = \frac{FM}{FM'}$

Si K' est le point de rencontre de MM' avec la directrice,

On aura : $\frac{K'M}{K'M'} = \frac{p}{p'}$

p et p' étant la distance de M, M' à la directrice.

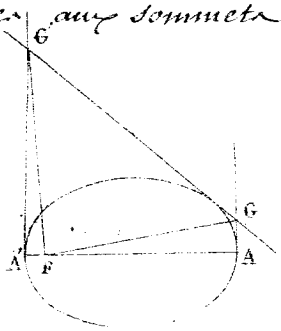
Or $\frac{p}{p'} = \frac{FM}{FM'}$; donc K' se confond avec K. — C.q.f.d.

Remarque. — Quand M et M' se confondent, la sécante devient tangente, FK devient perpendiculaire à M'F.

453. — La perpendiculaire menée par le foyer à un diamètre de l'ellipse rencontre la directrice voisine au même point que le diamètre conjugué.

R. — En effet, le diamètre qui passe au point de concours de deux tangentes, est conjugué de la corde de contact de ces tangentes, et l'on sait que la corde de contact des tangentes issues d'un point de la directrice passe au foyer voisin, et est perpendiculaire à la droite qui joint ce point au foyer.

454. — Th. Toutes les tangentes de l'ellipse coupent les tangentes aux sommets en 2 points G, G', tels que le produit AG × A'G' est égal à b^2, et que la portion GG' est vue du foyer sous un angle droit.



R. — 1°. Equation de la tangente

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Donc $$AG = ma + \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$A'G' = -ma + \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

Et $$AG \times A'G' = a^2m^2+b^2-a^2m^2 = b^2. \qquad \text{C.q.f.d.}$$

2° Coëfficients angulaires de GF et de G'F

$$K = \frac{ma+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{a-c}$$

$$K' = \frac{ma-\sqrt{a^2m^2+b^2}}{a+c}$$

Produit $$KK' = \frac{-b^2}{b^2} = -1 \qquad \text{C.q.f.d.}$$

455. — *La portion comprise sur un axe d'une conique par la tangente et la normale en un point, égale le produit des rayons vecteurs du point, divisé par la distance du point à l'autre axe.*

R. — Dans l'ellipse, la longueur du grand axe, somme de la sous-tangente et de la sous-normale, est :

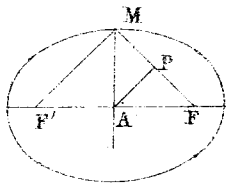
$$\frac{a^2}{x} - \frac{c^2x}{a^2} = \frac{a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}}{x} = \frac{\left(a+\frac{cx}{a}\right)\left(a-\frac{cx}{a}\right)}{x} \qquad \text{C.q.f.d.}$$

Remarque. — Dans la parabole cette somme est $2x+p$ elle est donc double du rayon vecteur du point.

456. — Th. — *La projection de la normale à l'ellipse sur le rayon vecteur est constante.* (N. V. B, 5)

R. — On sait que : $$MA = \frac{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}{a^2}$$

et $$\operatorname{tg} AMP = \frac{cy}{b^2}$$



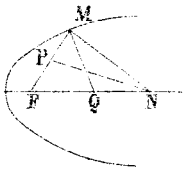
Donc $$MP^2 = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^2} \cdot \frac{b^4}{c^2y^2+b^4}$$

$$= \frac{a^2y^2+b^2(b^2-y^2)}{a^2} \cdot \frac{b^4}{c^2y^2+b^4}$$

$$= \frac{b^4}{a^2}.$$

$$MP = \frac{b^2}{a} \qquad \text{C.q.f.d.}$$

Remarque. — Quand l'ellipse tend vers la parabole, on sait que, à la limite, $\frac{b^2}{a} = p$. — Le théorème subsiste, et on peut démontrer ainsi que dans la parabole, la sous-normale est égale au demi-paramètre.



Car les triangles MQN, MPN sont égaux, et puisque $MP = p$ donc aussi $QN = p$

457. — Th. — La normale à l'ellipse est au demi diamètre parallèle à la tangente correspondante, dans le rapport des axes.

R. — Soient x, y les coordonnées du pied de la normale.

Sa longueur sera $n = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$

celle du demi-diamètre parallèle à la tangente est

$$d = \sqrt{\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \frac{1}{ab}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$

Donc $\frac{n}{d} = \frac{b}{a}$ C. q. f. d.

458. — Le produit des segments interceptés sur une normale à l'ellipse entre son pied et les points où elle rencontre le diamètre, qui lui est perpendiculaire, et l'un des axes, est égal au carré de la moitié de l'autre axe.

R. — La longueur de la normale en (x, y) est, comme on sait :

$$n = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$

la distance du centre à la tangente en (x, y)

est $\delta = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}$

Donc $\delta n = b^2$ C. q. f. d.

459. — La somme des carrés des inverses de 2 demi diamètres rectangulaires est constante.

R. — On a : $r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}$

Donc : $\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}{a^2 b^2}$

Et pour le rayon perpendiculaire

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}{a^2 b^2}$$

Donc $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{m^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

a et b sont, en effet, 2 rayons rectangulaires.

---

460. — Soit ABC un triangle inscrit dans une ellipse; d'un point O de la courbe on mène les droites OM, ON, OP respectivement conjuguées des côtés AB, BC, AC, et rencontrant ces côtés aux points M, N, P : démontrer que ces 3 points sont en ligne droite.

R. — On sait que si d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les 3 côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite. — Projetant le tout sur un plan on obtient le théorème à démontrer.

---

461. — Th. — La somme des carrés des projections de 2 diamètres conjugués sur une droite située dans le plan de l'ellipse, égale la somme des carrés des projections des axes.

R. — On sait que si x, y sont les coordonnées de l'extrémité d'un diamètre, celles de l'extrémité du conjugué seront

$$x'' = -\frac{ay'}{b} \qquad y'' = \frac{bx'}{a}.$$

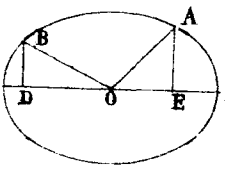
Les projections des diamètres sur la droite $my + x = 0$ sont égales aux distances des points (x', y') et (x'', y'') à la droite perpendiculaire $y - mx = 0$. La somme des carrés des projections est donc :

$$\frac{(y-mx)^2 + \left(\frac{bx}{a} + m\frac{ay}{b}\right)^2}{1+m^2} = \frac{(a^2y^2 + b^2x^2)(a^2m^2+b^2)}{1+m^2} = \frac{a^2m^2}{1+m^2} + \frac{b^2}{1+m^2}$$

---

462. — Th. — Si des extrémités A, B de deux diamètres conjugués de l'ellipse, on abaisse des perpendiculaires AE, BD sur le grand axe, on a

$$\frac{AE}{OD} = \frac{b}{a}$$



R. — Soient x, y les coordonnées de A; x', y' celles de B; la relation entre les coëfficients angulaires des diamètres conjugués

donne :
$$\frac{y'}{x'} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$
ce qui peut s'écrire
$$\frac{a y'}{b x} = -\frac{b x'}{a y}$$
en élevant au carré
$$\frac{a^2 y'^2}{b^2 x^2} = \frac{b^2 x'^2}{a^2 y^2} = \frac{a^2 y'^2 + b^2 x'^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2} = 1$$
Donc
$$\frac{y^2}{x'^2} = \frac{b^2}{a^2}$$
Et
$$\frac{AE}{OD} = \frac{b}{a} \qquad \text{C. q. f. d.}$$

463. — *Théorème d'Apollonius.*

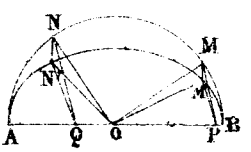
R. a. Soient x', y' les coordonnées de l'extrémité du diamètre $2a'$; pour le diamètre conjugué, on sait que l'on aura
$$x''^2 = \frac{a^2 y'^2}{b^2} \qquad y''^2 = \frac{b^2 x'^2}{a^2}$$
Par suite
$$a'^2 + b'^2 = x'^2 + y'^2 + \frac{a^2 y'^2}{b^2} + \frac{b^2 x'^2}{a^2} = \frac{b^2 x'^2 + a^2 y'^2}{b^2} + \frac{a^2 y'^2 + b^2 x'^2}{a^2} = a^2 + b^2$$

La distance du point x' y' au diamètre conjugué
$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} x \quad \text{est} \quad \frac{y' + \frac{b^2 x'^2}{a^2 y'}}{\sqrt{1 + \frac{b^4 x'^2}{a^4 y'^2}}}$$

L'aire du parallélogramme dont cette distance est la hauteur et b', la base sera donc :
$$b' \frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}} = b' \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 b^2 y''^2 + a^2 b^2 x''^2}} = ab.$$

R. b. — *Démonstration géométrique.*

Soit AB le grand axe d'une ellipse, que nous regardons comme projection du cercle ANMB. —



Deux diamètres conjugués OM', ON' de l'ellipse sont les projections de 2 diamètres rectangulaires OM, ON du cercle.

1. — Nous aurons :

$$OM^2 + OM'^2 = OP^2 + PM'^2 + OQ^2 + QN'^2$$

Et $\quad OQ = MP \quad$ donc $\quad OP^2 + OQ^2 = a^2$

D'autre part, θ étant l'angle des plans des 2 courbes

$$PM' = PM \cos\theta, \qquad QN' = QN \cos\theta$$

D'où $\quad PM'^2 + QN'^2 = (PM^2 + QN^2)\cos^2\theta$

et comme $QN = OP$, il s'ensuit $PM'^2 + QN'^2 = a^2 \cos^2\theta = b^2$.

Par suite $\quad OM'^2 + ON'^2 = a^2 + b^2$

2. — La projection d'une aire plane S sur un plan avec lequel elle fait l'angle θ, étant $S \cos\theta$, la projection du carré construit sur OM sera :

$$a^2 \cos\theta = a.a \cos\theta = ab'.$$

Or cette projection est précisément le parallélogramme construit sur OM' et ON'. Ce qui démontre le 2e Théorème.

---

465. — On a entre le demi-diamètre et son angle avec la tangente la relation :

$$r^4 - (a^2 + b^2)r^2 + \frac{a^2 b^2}{\sin^2 V} = 0.$$

Cette relation ne change pas, quand on y change V en 180 − V, c'est-à-dire quand on considère la direction conjuguée.

Pour une valeur donnée de V, on obtient donc les carrés des demi-diamètres conjugués faisant l'angle V. Si a'^2 et b'^2 sont les racines, on aura par les relations entre les coefficients et les racines

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \qquad a'^2 b'^2 = \frac{a^2 b^2}{\sin^2 V} \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Remarque. — Cette démonstration peut s'étendre à l'hyperbole.

---

466. — Th. — Si par un point pris dans le plan d'une ellipse on mène des perpendiculaires aux diamètres conjugués égaux, et que l'on construise le parallélogramme dont ces perpendiculaires sont 2 côtés, la diagonale qui

passe au point donné est perpendiculaire à la polaire de ce point.

R. — Équation de l'une des perpendiculaires :

$$y - y' = -\frac{a}{b}(x - x')$$

Coordonnées de son pied :

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}(ax' + by') \quad , \qquad y = \frac{b}{a^2 + b^2}(ax' + by')$$

Donc le pied de l'autre aura pour coordonnées :

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}(ax' - by') \quad , \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}(ax' - by')$$

Les coordonnées du point milieu de la diagonale qui joint ces 2 points seront donc :

$$x = \frac{a^2 x'}{a^2 + b^2} \qquad\qquad y = \frac{b^2 y'}{a^2 + b^2}$$

et le coëfficient angulaire de la droite qui joint ce point au point donné, étant $\frac{a^2 y'}{b^2 x'}$,

elle est perpendiculaire à la polaire du point (x', y') qui a pour équation :

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2 \qquad \text{C.q.f.d.}$$

Remarque. — Lorsque le point x', y' est sur la courbe, la polaire devient la tangente ; de là un tracé pour cette droite.

---

467. — Mener à l'ellipse des tangentes issues du point extérieur (α, β).

R. — L'équation angulaire de la tangente à l'ellipse est :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

On aura pour déterminer m, l'équation :

$$\beta = m\alpha \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

D'où :

$$(a^2 - \alpha^2) m^2 + 2\alpha\beta m + b^2 - \beta^2 = 0$$

$$m = \frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2 b^2}}{a^2 - \alpha^2}$$

On voit que m n'est réel, qu'autant que

$$\alpha^2\beta^2 + b^2 a^2 - a^2 b^2 > 0$$

c'est-à-dire qu'on ne peut mener 2 tangentes réelles à l'ellipse, que par un point extérieur.

B. — Problèmes.

468. — Trouver l'équation d'une ellipse, connaissant le centre, les longueurs et les directions des axes.

R. — Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation aux axes.

Changeons de direction d'abord, il faut faire

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha \\ y = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

Le signe de α est changé, parce qu'on procède en sens inverse de la voie ordinaire.

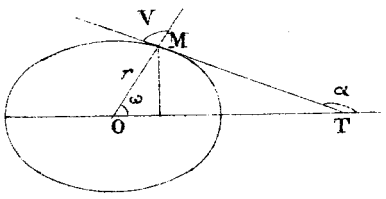
Changeons d'origine ensuite, on fera, d'après la même remarque,

$$x' = x'' - x_1 \quad , \qquad y' = y'' - y_1$$

x_1 et y_1 sont les coordonnées du centre. — Et on aura pour l'équation cherchée, les accents supprimés :

$$a^2\left[(y-y_1)\cos\alpha - (x-x_1)\sin\alpha\right]^2 + b^2\left[(y-y_1)\sin\alpha + (x-x_1)\cos\alpha\right]^2 = a^2b^2$$

469. — Équation de l'ellipse en fonction du rayon issu du centre et de l'angle, qu'il fait avec la tangente.



R. — $$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$V = \alpha - \omega, \quad \operatorname{tg} V = \frac{-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = -\frac{a^2b^2}{c^2xy} \quad (2)$$

D'ailleurs :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (3)$$

(1) et (3) donnent :

$$y^2 = \frac{b^2(a^2-r^2)}{c^2}, \qquad x^2 = \frac{a^2(r^2-b^2)}{c^2}$$

Substituant dans (2) après avoir élevé au carré, il vient :

$$(a^2-r^2)(r^2-b^2) - \frac{a^2b^2}{\operatorname{tg}^2 V} = 0$$

ou

$$r^4 - (a^2+b^2)r^2 + \frac{a^2b^2}{\sin^2 V} = 0.$$

Équation demandée.

Cette équation peut servir à trouver pour quel rayon, la tangente fait un angle donné.

Elle peut servir de plus à démontrer les théorèmes d'Apollonius comme ci-après.

470. — Deux ellipses concentriques ont leurs axes proportionnels. Faire voir que les rayons qui font le même angle avec les axes, sont dans le même rapport.

R. — 1° Soient ρ et ρ' les rayons correspondants à un angle θ. On aura :

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \qquad \rho'^2 = \frac{a'^2 b'^2}{a'^2 \sin^2\theta + b'^2 \cos^2\theta}$$

D'où :

$$\frac{\rho^2}{\rho'^2} = \frac{a^2}{a'^2} \cdot \frac{b^2}{b'^2} \cdot \frac{a'^2 \sin^2\theta + b'^2 \cos^2\theta}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}$$

Or :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = K$$

Donc : $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{a^2 \sin^2\theta}{a'^2 \sin^2\theta} = \frac{b^2 \cos^2\theta}{b'^2 \cos^2\theta} = \frac{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}{a'^2 \cos^2\theta + b'^2 \cos^2\theta} = K^2$

Donc $\qquad \frac{\rho^2}{\rho'^2} = K^2 \qquad$ C. q. f. d.

2°. — Les axes étant proportionnels, les courbes sont semblables.

Donc $\qquad \frac{\rho}{\rho'} = K$

471. — Trouver la relation entre m et n, pour que la droite $y = mx + n$ soit vue du centre de l'ellipse sous un angle droit.

R. — Pour l'un des points de rencontre, on a :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y = mx + n$$

Soit $y = tx$, l'équation de la droite qui va du centre à ce point. — On aura, en éliminant x et y

$$a^2(n^2 - b^2)t^2 + 2a^2 b^2 mt + b^2(n^2 - a^2 m^2) = 0$$

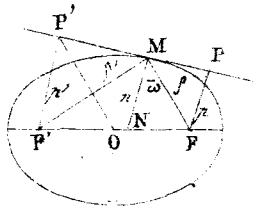
Pour que les droites $y = tx$ soient rectangulaires on doit avoir $t't'' = -1$.

D'où :

$$n = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{1 + m^2}$$

472. — Trouver, en fonction des rayons vecteurs, les perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente à l'ellipse, l'angle de la normale, avec le rayon vecteur, et la longueur de la normale.

R. — 1° Les triangles MFP, MF'P' sont semblables : donc



$$\frac{p}{p'} = \frac{\delta}{\delta'}$$

D'ailleurs on sait que $pp' = b^2$

Donc $$p = b\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}}$$

$$p' = b\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}$$

2° $p = \delta \cos\omega$: donc $\cos\omega = \frac{p}{\delta} = \frac{b}{\sqrt{\delta\delta'}}$

3° Les triangles semblables OF'F' et MNF donnent :

$$\frac{n}{\delta} = \frac{\delta}{a} \quad \text{d'où} \quad n = \frac{b}{a}\sqrt{\delta\delta'}$$

Remarque. — On peut conclure de là :

$$n \cos\omega = \frac{b^2}{a}$$

Donc la projection de la normale sur le rayon vecteur est égale au demi-paramètre.

---

473. — Calculer l'angle des 2 tangentes menées d'un point donné à une ellipse.

R. — Équation d'une tangente

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point donné ; m', m'' les 2 valeurs de m ; φ l'angle cherché. — On a

$$\operatorname{Tg.}\varphi = \frac{m' - m''}{1 + m'm''}$$

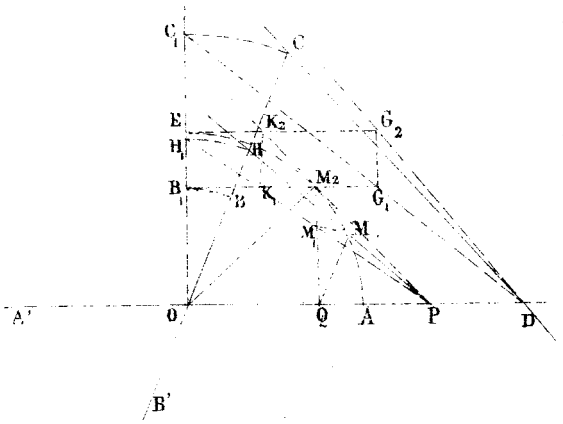
Or $$(x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1^2 - b^2 = 0$$

D'où $$m' + m'' = \frac{2\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2}}{x_1^2 - a^2}$$

$$m'm'' = \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2}$$

Et par suite $$\operatorname{Tg}\varphi = \frac{2\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2}}{x_1^2 + y_1^2 - a^2 - b^2}$$

474. — *Une ellipse étant donnée par 2 diamètres conjugués, mener sans la courbe, une tangente parallèle à une direction donnée.*

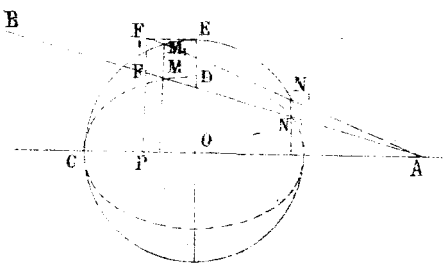


R. — Soient AA', BB' les 2 diamètres conjugués donnés ; CD le point où elle rencontre le diamètre BB' ; menons OC_1 perpendiculaire à OA et $OC_1 = OC$; C_1D sera parallèle à une tangente à l'ellipse dont les axes seraient OA et OB_1 ; dilatant les ordonnées de C_1D dans le rapport $\frac{OA}{OB}$, on a la droite DG_2 parallèle à une tangente au cercle de rayon OA. Le rayon perpendiculaire à OG_2 rencontre le cercle en M_2 et en un autre point symétrique. La tangente au cercle M_2P détermine le point P de la tangente cherchée. Pour avoir le point de contact il suffit de contracter l'ordonnée M_2Q dans le rapport $\frac{OB}{OA}$, ce qui donne M_1, puis de décrire le cercle M_1M du centre Q, jusqu'à la parallèle QM menée à OB.

Comme vérification, MP doit être parallèle à CD et doit passer au point H obtenu en ramenant sur OB par un arc de cercle le point H, de rencontre de OB, avec PM_1.

---

475. — *Intersection d'une droite et d'une ellipse donnée par des axes.*



R. Soient OC, OD les demi axes de l'ellipse ; AB la droite. Dilatons l'ellipse pour en faire la circonférence CE ; dilatons les ordonnées de la droite dans le même rapport. Pour cela menons DF et EF parallèles

à OC, FP perpendiculaire à OC; AF_1 sera la droite dilatée. Elle rencontre le cercle aux points M_1, N_1 qui, ramenés sur la droite AB, donnent les points M et N d'intersection avec l'ellipse.

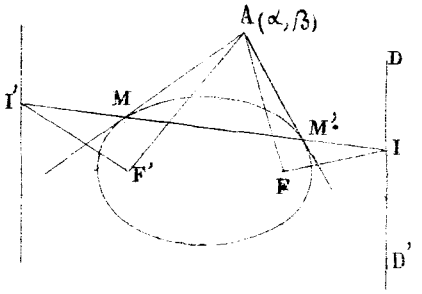
---

476. — Soient AM, AM' 2 tangentes à l'ellipse; I le point de rencontre de la corde de contact avec la directrice, FI est perpendiculaire à AF.

En effet, l'équation de MM' est :

$$a^2 \beta y + b^2 \alpha x = a^2 b^2$$

Donc les coordonnées de I sont : $\begin{cases} x = \dfrac{a^2}{c} \\ y = \dfrac{b^2(c-\alpha)}{c\beta} \end{cases}$



Les coëfficients angulaires de AF et de FI sont respectivement :

$$\frac{\beta}{\alpha - c} \quad \text{et} \quad \frac{c-\alpha}{\beta}$$

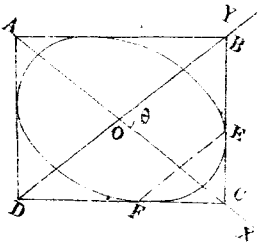
C. q. f. d.

Cela posé si on veut avoir les points de rencontre de MM' avec l'ellipse, on construira FA et F'A qui se coupent en A et on mènera les tangentes issues de A, qui couperont MM' aux points cherchés.

---

477. — Rectangle maximum et rectangle minimum circonscrits à l'ellipse.

R. — Les diagonales d'un rectangle circonscrit forment un système de diamètres conjugués : je prends ces diagonales pour axes de coordonnées ; soient a' et b' les longueurs des demi-diamètres, θ leur angle. La surface du rectangle est égale à 2 OB . OC . Sin θ



Or, soient x' y' les coordonnées

du point E, on a les relations connues :

$$OC = \frac{a'^2}{x'}$$

$$OB = \frac{b'^2}{y'} ;$$

De sorte que la surface est égale à :

$$2 \sin \theta \, \frac{a'^2 b'^2}{x' y'} .$$

Soit F le point de contact de CD ; ce point a pour coordonnées x' et $-y'$, car EF est la corde de contact des tangentes menées par le point C et est par conséquent parallèle à BD. Le coefficient angulaire de CD est donc $\frac{b'^2 x'}{a'^2 y'}$; or, CD est perpendiculaire sur BC ; on a donc d'après la relation connue.

$$a' = \frac{-1 - a \cos \theta}{a + \cos \theta}$$

$$\frac{b'^2 x'}{a'^2 y'} = \frac{-1 + \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'} \cos \theta}{\cos \theta - \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'}} = \frac{b'^2 x' \cos \theta - a'^2 y'}{a'^2 y' \cos \theta - b'^2 x'}$$

ce qui donne

$$b'^4 x'^2 = a'^4 y'^2$$

D'ailleurs le point x', y' est sur la courbe ; donc

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2$$

De ces 2 équations on déduit pour x' et y' les valeurs suivantes :

$$x' = \frac{a'^2}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

$$y' = \frac{b'^2}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Donc la surface a pour expression :

$$2 \sin \theta \, (a'^2 + b'^2) = 2 \sin \theta \, (a'^2 + b'^2)$$

Cette expression sera maxima quand $\theta = 90°$, et alors le point B est le point de rencontre du petit axe de l'ellipse, avec le cercle principal. Le rectangle maximum a donc pour surface

$$2 \, (a^2 + b^2).$$

Pour trouver le rectangle minimum, remarquons que

l'angle θ étant un angle obtus, son sinus sera minimum quand cet angle aura la plus grande valeur. Or l'angle maximum de deux diamètres conjugués est celui que font entre eux les deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse. En désignant par α et α' les angles de ces deux diamètres avec le grand axe, on a :

$$\alpha' - \alpha = \theta, \quad tg\,\alpha' = -\frac{b}{a}, \quad tg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$tg\,\theta = \frac{tg\,\alpha' - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha'\,tg\,\alpha} = \frac{-\frac{2b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = -\frac{2ab}{c^2}.$$

On en déduit :

$$\sin\theta = \frac{\frac{2ab}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{4a^2b^2}{c^4}}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Le rectangle minimum circonscrit a donc pour surface

$$\underline{4ab}.$$

478. — Trouver la condition pour qu'une droite $y = mx + n$ soit normale à l'ellipse.

R. — J'identifie cette équation avec celle de la normale :

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x')$$

Ce qui donne :

$$m = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}$$

$$n = y' - \frac{a^2 y'}{b^2}$$

Avec la condition :

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$$

Éliminant x', y' entre ces trois équations, j'aurai la condition cherchée.

On a : $$x' = -\frac{c^2 y'}{b^2}$$

D'où $$y' = -\frac{b^2 n}{c^2}$$

Et par suite $$x' = -\frac{a^2 n}{c^2 m}$$

Substituant, il vient :

$$\frac{a^2 b^4 n^2}{c^4} + \frac{b^2 a^4 n^2}{c^4 m^2} = a^2 b^2$$

$$b^2 n^2 m^2 + a^2 n^2 = c^4 m^2.$$

$$n^2 = \frac{c^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2}$$

$$n = \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}.$$

Donc, l'équation de la normale est :

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$$

---

479. — *Mener une normale à l'ellipse par un point extérieur*

R. — Soient x, y, les coordonnées du point donné. L'équation de la normale est :

$$(y - mx)^2 (a^2 + b^2 m^2) = c^4 m^2.$$

On a ainsi une équation du 4e degré pour trouver m. Cherchons la condition pour qu'il y ait deux racines égales. La dérivée par rapport à m est :

$$-x(y - mx)(a^2 + b^2 m^2) + b^2 m (y - mx)^2 = c^4 m.$$

On peut exprimer qu'il y a un plus grand commun diviseur entre la fonction et sa dérivée, mais on peut aussi opérer autrement, en éliminant m entre l'équation dérivée et la proposée. Je multiplie la 2e équation par m, et je la retranche de la proposée, il vient :

$$(y - mx)^2 (a^2 + b^2 m^2) + mx(y - mx)(a^2 + b^2 m^2) - b^2 m^2 (y - mx)^2 = 0$$

Ou $$a^2 (y - mx)^2 + mx(y - mx)(a^2 + b^2 m^2) = 0$$

Le facteur $y - mx$ n'est pas nul, parce que la droite qui joint le point donné au centre, a pour coefficient angulaire $\frac{y}{x}$; or, cette droite n'est pas normale, on peut donc supprimer ce facteur, et il reste :

$$a^2 y - a^2 mx + a^2 mx + b^2 m^3 x = 0$$

D'où $$m^3 = -\frac{a^2 y}{b^2 x}$$

$$m = -\frac{a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}}.$$

Je substitue cette valeur de m dans l'équation donnée et il vient :

$$\left(y + \frac{a^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}\, x^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} \right)^2 \left(a^2 + \frac{b^2\, a^{\frac{4}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}\, x^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{c^4\, a^{\frac{4}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}\, x^{\frac{2}{3}}}$$

$$y^{\frac{1}{3}} \left(\frac{b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} \right) a^{\frac{4}{3}} \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{c^4\, a^{\frac{4}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}\, x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\left(b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{2}{3}} \right)^3 = c^4$$

$$b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

Telle est l'équation du lieu, par lequel on ne peut mener que trois normales à l'Ellipse.

Si l'on prend le coefficient angulaire de la tangente, on a :

$$I = \frac{-a^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{3}}}$$

Et l'on voit que les tangentes à la courbe sont les normales à l'ellipse.

---

480. — Dans une ellipse, on mène différentes normales et l'on demande celle pour laquelle la distance entre les deux points, où elle coupe la courbe, est un minimum.

R. — L'équation d'une normale est :

$$y = m x + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$$

Et celle de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Remplaçant y par sa valeur, on aura une équation, qui donnera les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe.

$$(a^2 m^2 + b^2)\, x^2 + \frac{2 a^2 m^2 c^2 x}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} + \frac{a^2 c^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2} - a^2 b^2 = 0$$

Les deux racines étant les abscisses des deux points d'intersection, il faut écrire la longueur de la droite,

$$d^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2 ;$$

on voit qu'on n'a besoin que de la différence des racines. Or, on a

$$(x - x')^2 = \frac{4 \left\{ \frac{a^4 m^4 c^4 - a^4 m^4 c^4 - a^2 b^2 c^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2} + a^2 b^2 (a^2 m^2 + b^2) \right\}}{(a^2 m^2 + b^2)^2}$$

$$(x-x') = 4\,\frac{-a^2b^2c^4m^2 + a^6b^2m^2 + a^4b^4m^4 + a^4b^4 + a^2b^6m^2}{(a^2+b^2m^2)(a^2m^2+b^2)^2}$$

$$= 4\,\frac{a^2b^2m^2(a^4+b^4-c^4) + a^4b^4(m^4+1)}{a^2+b^2m^2}\cdot\frac{1}{(a^2m^2+b^2)^2}$$

$$= 4\,\frac{2a^4b^4m^2 + a^4b^4(m^4+1)}{(a^2+b^2m^2)(a^2m^2+b^2)^2} = \frac{4a^4b^4(m^2+1)^2}{(a^2+b^2m^2)(a^2m^2+b^2)^2}$$

D'ailleurs, y' et x' étant les coordonnées d'un des points de rencontre, x et y celles de l'autre, on a :

$$y = mx + \frac{c^2m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}\,,\quad y' = mx' + \frac{c^2m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}$$

D'où
$$y-y' = m(x-x')$$
$$(y-y')^2 = m^2(x-x')^2 = \frac{4a^4b^4m^2(m^2+1)^2}{(a^2+b^2m^2)(a^2m^2+b^2)^2}$$

Et alors
$$d^2 = \frac{4a^4b^4(m^2+1)^3}{(a^2+b^2m^2)(a^2m^2+b^2)^2}$$

Il faut trouver la valeur de m qui rend cette expression un minimum, pour cela, j'égale à 0 le numérateur de la dérivée.

$$6m(m^2+1)^2(a^2+b^2m^2)(a^2m^2+b^2)^2 - \left\{2b^2m(a^2m^2+b^2)^2 + 4a^2m(a^2m^2+b^2)(a^2+b^2m^2)\right\}(m^2+1)^3 = 0$$

Cette équation est vérifiée pour $m=0$ et pour

$$3(a^2+b^2m^2)(a^2m^2+b^2) - \left\{b^2(a^2m^2+b^2) + 2a^2(a^2+b^2m^2)\right\}(m^2+1) = 0$$

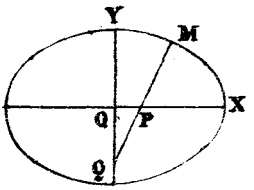
D'où
$$m^2 = \frac{2a^2+b^2}{c^2-b^2}$$

Le numérateur est toujours positif ; pour que m soit réel, c'est-à-dire pour qu'il y ait un minimum correspondant à cette valeur, il faut que l'on ait $c > b$, et dans ce cas, il y a un minimum correspondant à

$$m = \sqrt{\frac{b^2+2a^2}{c^2-b^2}}$$

Quand, au contraire $c < b$, la dérivée ne change de signe, que pour $m=0$, ce qui donne le grand axe ; elle s'annule encore pour $m=\infty$, ce qui donne le petit axe.

481. Mener dans l'ellipse la normale pour laquelle la portion IQ comprise entre les axes est maximum.



R. —

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = \frac{c^4 x'^2}{a^4} + \frac{c^4 y'^2}{b^4}$$

$$= \frac{c^4}{a^4 b^2}\left(a^4 - c^2 x'^2\right)$$

Le maximum a lieu quand $x' = 0$, et alors :

$$PQ = \frac{c^2}{b}$$

---

482. — Trouver dans l'ellipse la normale dont la distance au centre est maximum.

R. — Expression de la distance :

$$\delta = \frac{c^2 xy}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}$$

Élevant au carré, et remplaçant y^2 en fonction de x^2, on a, en égalant la dérivée à zéro, l'équation

$$c^2 x^4 - 2a^4 x^2 + a^6 = 0$$

D'où $$x^2 = \frac{a^3}{a \pm b}$$

Comme x^2 est au maximum égal à a^2, on ne peut admettre que la valeur $\frac{a^3}{a+b}$, qui donne $y^2 = \frac{b^3}{a+b}$ et $\delta = a - b$.

Autrement. — La distance cherchée est le rayon issu du centre normal à la courbe, enveloppe des normales, c'est donc le minimum de ce rayon. On a :

$$r = \frac{c^{\frac{2}{3}}}{(a\cos\theta)^{\frac{2}{3}} + (b\sin\theta)^{\frac{2}{3}}}$$

La dérivée est nulle quand

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Ce qui donne, toutes réductions faites,

$$r = \underline{a - b}.$$

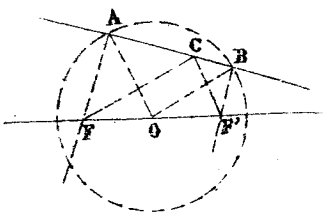
483. — Construire une ellipse, connaissant un foyer et 3 tangentes.

R. — Les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes sont sur le cercle, décrit, sur le grand axe comme diamètre.

Le centre de ce cercle qu'on peut trouver, est celui de l'ellipse ; la droite qui le joint au foyer donne le grand axe, &c.

---

484. — *Construire une ellipse, connaissant le centre, une tangente, le point de contact et la longueur du grand axe.* —



R. — Du centre O avec un rayon égal au demi grand axe, décrivons un cercle ; les perpendiculaires à la tangente aux points A et B, où elle coupe ce cercle, passent aux foyers. Joignons OA, OB et par le point de contact C, menons des parallèles à ces droites. Ces parallèles passent également aux foyers, ainsi déterminés. Le reste s'ensuit.

---

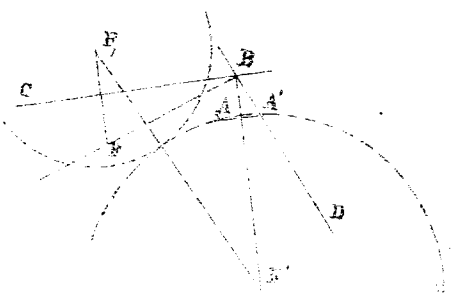
485. — *Construire une ellipse, connaissant le foyer, un sommet et une tangente.*

R. — La droite qui joint le sommet au foyer donne la direction du grand axe.

On projettera le foyer sur la tangente, et on joindra la projection au sommet ; la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite rencontre l'axe au centre.

---

486. — *Construire une ellipse connaissant deux tangentes, un foyer et un point.*

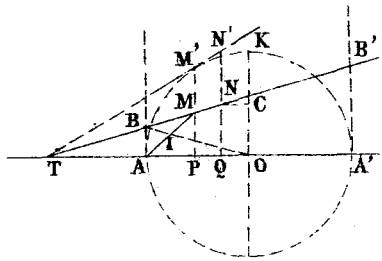


R. — Soient F le foyer, A le point, BC, BD les 2 tangentes, menons FB ; la droite BF', faisant avec BD un angle F'BD égal à CBF, passe au second foyer F'. — La distance de F' au point F, symétrique de F par rapport à la tangente, est

égale à la somme FA + AF'. Si donc on décrit de F_1 comme centre, une circonférence ayant FA pour rayon, F' sera le centre d'un cercle tangent à cette circonférence, et passant au point A et par un symétrique A', par rapport à BF'; FF' est l'axe; $F_1F' = 2a$ &c.

---

487. — *Construire une ellipse, connaissant un sommet et la direction du grand axe, une tangente et le point de contact.*



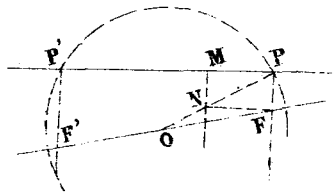
R. — On peut tracer la tangente au sommet AB. On joindra le point de rencontre B' des 2 tangentes au milieu I de la corde AM; et on trouvera le centre O; prenant OA' = OA, on aura le 2e sommet du grand axe. Soit A'B' la tangente en A'.

Le petit axe sera : $OC = \sqrt{AB \times A'B'}$ d'après un théorème connu.

Ou encore on décrira le cercle sur AA' comme diamètre, on prendra sur ce cercle le point M' sur l'ordonnée de M; puis sur TM' le point N' d'ordonnée a, en menant l'ordonnée N'N, on aura NQ = b.

---

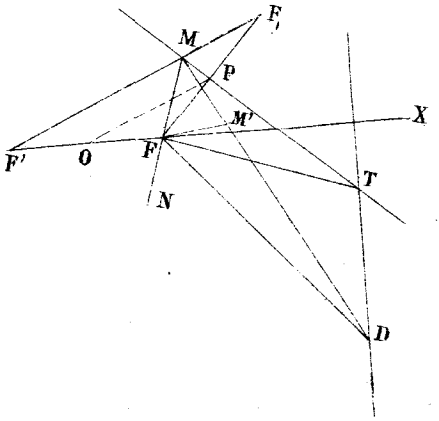
488. — *Construire une ellipse, connaissant le centre, un point M, la tangente en M et la longueur du grand axe.*



R. — Du centre de l'ellipse, avec un rayon égal au demi-grand axe, décrivons une circonférence qui coupe la tangente en P et P'. Les perpendiculaires aux tangentes en ces points passent aux foyers. — Par un théorème connu, si F est le foyer et MN la normale, les triangles MNP, MFP sont égaux : Donc F s'obtiendra, en menant par N une parallèle à la tangente.

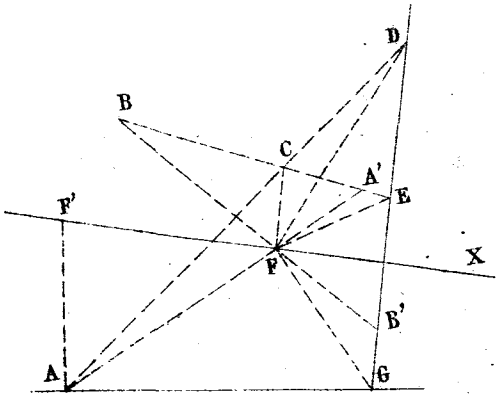
---

489. — Construire une ellipse connaissant un foyer, deux points et la tangente en l'un d'eux.



R. — Soient F le foyer, M, M' les 2 points; MT la tangente. — FT perpendiculaire à MF donne un point T de la directrice; FD bissectrice de l'angle M'FN donne un autre point D de la directrice. Cette droite connue, on aura l'axe focal en menant Fx perpendiculaire à DT. — Prenant le symétrique F_1 de F par rapport à MT, on joindra MF_1, qui donnera le 2e foyer F'; de là le centre O et $OP = a$.

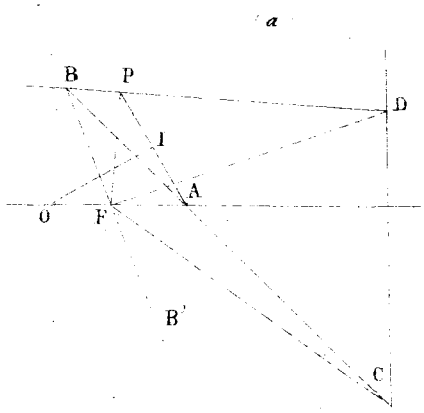
490. — Construire une ellipse connaissant un foyer et 3 points.



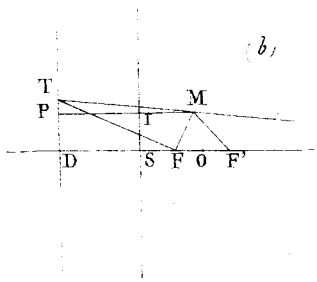
R. — Soient A, B, C les 3 points, F le foyer. Menons AFA', BFB', CF. Les bissectrices des angles CFA', CFB' rencontrent les cordes AC, BC en 2 points D et E de la directrice. La perpendiculaire Fx à la directrice fait connaître la direction du grand axe. — La perpendiculaire FG à AF rencontre la directrice en un point G, qui appartient à la tangente en A. — De la tangente on déduira la position du 2e foyer, d'où le centre, &c.

491. Construire une ellipse, connaissant un sommet, un foyer et un point.

R. — a. — Soient A le sommet, F le foyer, B le point. Menons BFB' et FA.



La bissectrice de l'angle AFB' rencontre BA en un point C de la directrice, ainsi connue.
La perpendiculaire FD à FB rencontre la directrice en un point D de la tangente en B. Projetons F en P sur la tangente, joignons PA, et élevons IO perpendiculaire sur le milieu de PA. O sera le centre.



b.— S le sommet, F le foyer, M le point.
SI la tangente au sommet, PD la directrice. Posons :

$SM = m$ $\qquad$ $MF = n$

$MI = p$ $\qquad$ $SD = PI = z$

Nous aurons :

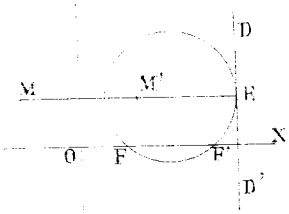
$$\frac{z}{m} = \frac{z+p}{n} = \frac{p}{n-m}$$

D'où $$z = \frac{mp}{n-m}.$$

La directrice connue, on mènera FT perpendiculaire sur FM, jusqu'à la directrice : TM sera la tangente en M ; on obtiendra ensuite facilement le 2e foyer F', le centre O, et on pourra tracer la courbe.

---

492. — Construire une ellipse, connaissant une directrice, le centre et un point.



R. — Soient O le centre, M le point, DD' la directrice. La perpendiculaire Ox et la parallèle Oy à la directrice, donnent la direction des axes. Prenons M' symétrique de M, par rapport à Oy ; puis prolongeons

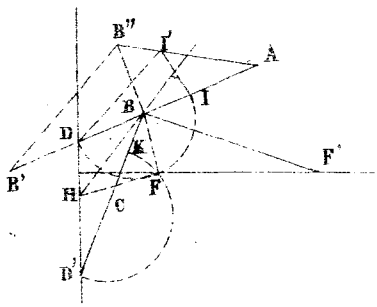
MM' jusqu'à la directrice en E en construisant G tel que

$$\frac{MG}{M'G} = \frac{ME}{M'E}$$

Le cercle décrit sur GE comme diamètre coupe Ox en 2 points F et F_1, qui sont les foyers de deux ellipses répondant à la question.

---

493. — *Construire une ellipse, connaissant une directrice et 3 points.*



R. — Soient DD' la directrice, A, B, C les 3 points. Menons AB et BC jusqu'à la directrice; puis déterminons sur ces droites les points I et K, tels que

$$\frac{IA}{IB} = \frac{DA}{DB}$$

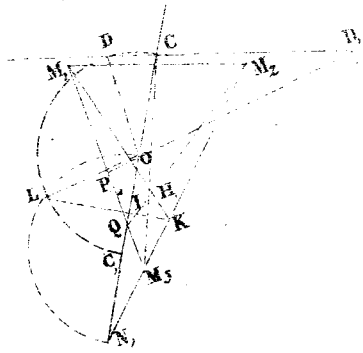
$$\frac{KB}{KC} = \frac{D'B}{D'C}$$

Pour cela prenons :

DB' = DB, menons AB'' quelconque, B'B'' quelconque, puis DI' parallèle à B'B'' et I'I parallèle à B''B. On a ainsi I. De même K. — Le foyer est au point de rencontre des demi-circonférences décrites sur DI et D'K comme diamètres; on sait en effet que FD est bissectrice de l'angle formé par FB avec FA prolongé. — Menons ensuite FH perpendiculaire à FB; HB sera tangente à l'ellipse en B et nous aurons facilement le second foyer.

---

494. — *Construire une ellipse, connaissant le centre et 3 points.*



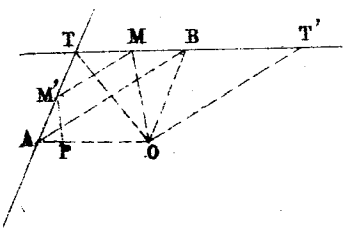
R. — Soient O le centre, M_1, M_2, M_3 les 3 points. — Menons ON conjugué de M_1M_2 jusqu'en N_1; construisons NM_3, QM_2, d'où M_1H polaire de N_1 par rapport aux droites M_1M_2, M_1M_3. Le point K est un point de la polaire

de N_1 par rapport à l'ellipse ; cette polaire est donc KI, parallèle à $M_1 M_2$. Si C_1 est l'extrémité du diamètre ON, on a, d'après une propriété connue de la tangente $\overline{OC_1}^2 = OI \times ON_1$; on peut donc déterminer C_1 en C.

Cela fait, on joindra O au milieu P de $M_1 M_3$, on mènera OD parallèle à $M_1 M_3$; les 2 droites ainsi obtenues coupent la tangente en C aux points D et D_1. La moyenne proportionnelle entre DC et D_1C, est la longueur du demi-diamètre conjugué de OC. On a alors à construire les axes d'une ellipse, dont on connaît 2 diamètres conjugués, en grandeur et en direction.

---

495. — *Construire une ellipse, connaissant le centre, 2 tangentes et le point de contact de l'une d'elles.*



R. — Soient O le centre, MT, AT, les 2 tangentes. — Menons OB, OA parallèles aux 2 tangentes ; AB sera la direction conjuguée de OT : Donc MM' parallèle à AB donne le point de contact M' de AT.

Menant alors M'P parallèle à OM, on n'aura plus pour avoir la longueur du demi-diamètre conjugué de OM, qu'à construire

$$\delta = \sqrt{\overline{AO} \times \overline{OP}}.$$

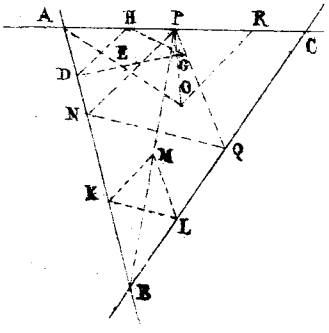
Autrement. — Mener OT' parallèle à AB ; et construire :

$$\delta = \sqrt{\overline{MT} \times \overline{MT'}}.$$

---

496. — *Construire une ellipse, connaissant le centre, et trois tangentes.*

R. — Soient O le centre, AB, BC, AC les 3 tangentes. — Menons OA, une droite arbitraire DE, sur laquelle nous prendrons EG = DE ; puis traçons GH parallèle à OA : DH sera la direction des cordes conjuguées de AO.



Nous aurons, de même, les directions conjuguées de OB et

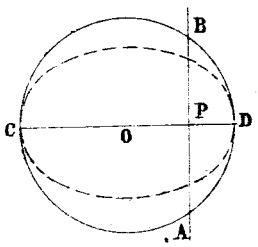
de OC ; et pour avoir les points de contact nous devrons inscrire dans ABC un triangle ayant ses côtés parallèles à 3 droites données. Pour cela nous construirons un triangle KLM, ayant 2 de ses sommets sur 2 des tangentes et ses côtés parallèles aux droites données ; puis nous mènerons BM, qui donnera le point de contact P.

Cela fait, nous mènerons QR parallèle à DH ; le demi-diamètre conjugué de OP sera la moyenne proportionnelle entre AP et PR ; et le problème sera ramené à : Construire une ellipse, connaissant 2 diamètres conjugués, en grandeur et en direction.

C. — Lieux géométriques.

497. — La corde AB du cercle, se déplaçant parallèlement à elle-même, lieu du point M tel que :

$$\frac{AM}{MB} = K$$



R. — $$\frac{Y+y}{Y-y} = K$$

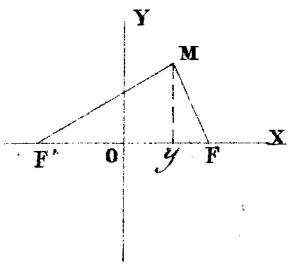
D'où $$\frac{y}{Y} = \frac{K-1}{K+1}$$

Le lieu est une ellipse dont les axes sont :

$$2R \quad \text{et} \quad 2R\,\frac{K-1}{K+1}.$$

---

498. — Lieu des points dont la somme des distances à 2 points fixes est constante :



R. — F, F' les 2 points fixes ;

$$FF' = 2c$$

axe des y perpendiculaire au milieu de FF'.

Équation :

$$\sqrt{y^2+(x+c)^2}+\sqrt{y^2+(x-c)^2}=2a$$

D'où $$y^2+(x+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2+(x-c)^2}+y^2+(x-c)^2$$

ou $$-cx+a^2 = a\sqrt{y^2+(x-c)^2}$$

Élevant au carré :

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

Faisant $a^2 - c^2 = b^2$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

---

499. — Lieu des centres des ellipses qui ont 2 tangentes communes et les points de contact communs.

R. — C'est la droite qui joint le point de concours des tangentes, au milieu de la corde de contact.

---

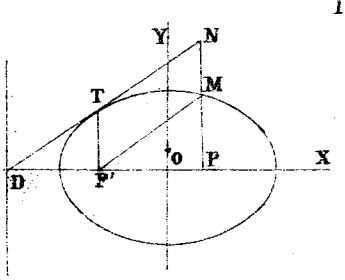
500. — Lieu du second foyer des ellipses, qui ont 2 tangentes communes et un foyer commun.

R. — C'est une droite, passant au point de concours des 2 tangentes en faisant, avec l'une d'elles, un angle égal à celle de l'autre avec la droite, qui joint ce point de concours au foyer fixe.

---

501. — F' étant un foyer de l'ellipse, lieu du point N, ayant même abscisse que le point M de l'ellipse, en tel que

$$FN = F'M$$



R. — On sait que

$$F'M = a + \frac{cx}{a}$$

Le lieu est donc la droite

$$y = a + \frac{cx}{a}$$

qui passe au pied D de la directrice et est tangente à l'ellipse. En effet, si dans l'équation de la tangente, on fait $m = \frac{c}{a}$, elle devient :

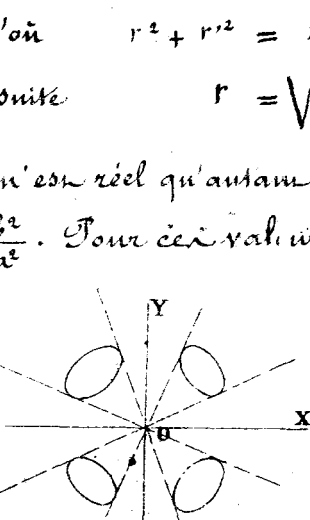
$$y = \frac{c}{a} x + \sqrt{a^2 \frac{c^2}{a^2} + b^2}$$

$$= \frac{c}{a} x + a.$$

Le point de contact T est sur l'ordonnée au foyer ; car on sait, que la corde de contact des tangentes issues d'un point de la directrice, passe au foyer et est perpendiculaire

à la droite qui joint ce point au foyer.

502. — Lieu du foyer d'une ellipse tangente à 2 axes rectangulaires.



R. — Soient $OF = r$ $OF' = r'$

$FOx = F'Oy = \theta$.

On sait que $FP \times F'P' = b^2$;

Donc $rr' \sin 2\theta = 2b^2$.

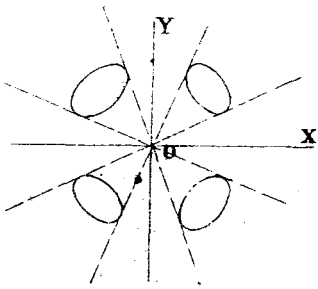
Le triangle OFF' donne :

$$4c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \sin 2\theta = r^2 + r'^2 - 4b^2$$

D'où $r^2 + r'^2 = 4a^2$

Et par suite $$r = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\sin 2\theta}} + \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\sin 2\theta}}$$

r n'est réel qu'autant que $\sin 2\theta$ est compris entre $\frac{b^2}{a^2}$ et $-\frac{b^2}{a^2}$. Pour ces valeurs, $r = a\sqrt{2}$. Dans l'intervalle, si on admet le double signe devant le second radical, on obtient une courbe fermée, symétrique par rapport à la droite $y = x$, qui se reproduit dans chacun des 4 angles.



503. — Lieu des points tels qu'en menant de ces points des tangentes à l'ellipse, l'une d'elles soit perpendiculaire sur la corde des contacts.

R. — x', y' coordonnées des points de contact.
x_1, y_1 coordonnées d'un point du lieu.

Equation d'une tangente : $a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2$ (1)

Equation de la corde des contacts : $a^2 yy_1 + b^2 xx_1 = a^2 b^2$ (2)

Condition de perpendicularité : $\frac{b^4}{a^4} \frac{x_1}{y_1} \frac{x'}{y'} + 1 = 0$ (3)

L'équation (1) donne : $a^2 y_1 y' + b^2 x_1 x' = a^2 b^2$ (4)

L'équation (3) peut s'écrire :

$$a^4 y_1 y' + b^4 x_1 x' = 0 \qquad (5)$$

En de plus, on a :

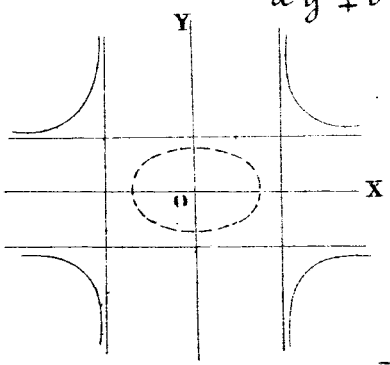
$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \qquad (6)$$

Les équations (4) et (5) donnent :

$$y_1 y' = \frac{b^4}{b^2 - a^2} \qquad x_1 x' = \frac{a^4}{a^2 - b^2}$$

Tirant de là x', y', on a par l'équation (6), pour équation du lieu :

$$a^6 y^2 + b^6 x^2 = c^4 x^2 y^2 \qquad (7)$$



Ou en coordonnées polaires :

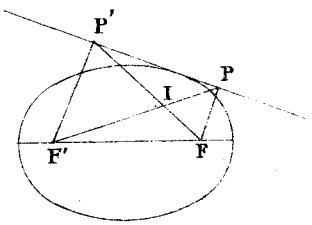
$$\rho^2 = \frac{a^6 \sin^2\theta + b^6 \cos^2\theta}{c^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}$$

C'est une courbe à centre et à 4 branches infinies, dont les asymptotes sont :

$$x = \pm \frac{a^3}{c^2} \quad , \quad y = \pm \frac{b^3}{c^2}.$$

---

504. — On mène, des foyers d'une ellipse, des perpendiculaires FP, F'P' sur les tangentes. Lieu du point I de rencontre des diagonales du trapèze FPF'P'.



R.

Coordonnées de P $\begin{cases} x = \dfrac{a^2(x'+c)}{a^2 + c x'} \\ y = \dfrac{a^2 y'}{a^2 + c x'} \end{cases}$

Coordonnées de P' $\begin{cases} x = \dfrac{a^2(x'-c)}{a^2 - c x'} \\ y = \dfrac{a^2 y'}{a^2 - c x'} \end{cases}$

Equation de FP' et de F'P :

$$\left[(a^2 + c^2)x' - 2ca^2\right] y - a^2 y'(x - c) = 0$$

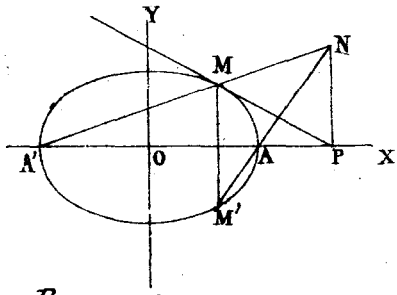
$$\left[(a^2 + c^2)x' + 2ca^2\right] y - a^2 y'(x + c) = 0$$

De là : $y' = 2y \qquad x' = \dfrac{2a^2 x}{a^2 + c^2}$

Et pour le lieu : $\dfrac{x^2}{\left(\frac{a^2+c^2}{2a}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1$

C'est une ellipse concentrique à l'ellipse donné.

505. — On mène une corde MM', perpendiculaire au grand axe d'une ellipse. Les droites AM', A'M se coupent en N. On projette N en P sur le grand axe. Montrer que MP est la tangente en M et trouver le lieu du point N quand M varie.



R. — Soient (x', y') les coordonnées de M. Les équations de AM' et de A'M seront :

$$y = \frac{y'}{a - x'}(x - a) \qquad y = \frac{y'}{a + x'}(x + a)$$

L'abscisse du point de rencontre est donc $x = \frac{a^2}{x'}$, ce qui montre que MP est tangente en M. — Le lieu de N obtenu en éliminant x', y' entre les équations de deux droites et celle de l'ellipse, est

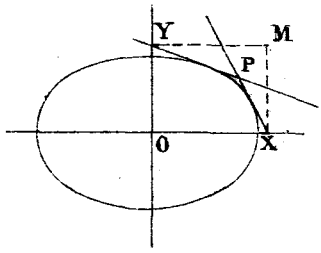
$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

C'est donc l'hyperbole construite sur les mêmes axes que l'ellipse.

---

506. — On mène à l'ellipse 2 tangentes faisant avec les axes des angles PXO = PYO.

Lieu du point M qui a OX pour abscisse et OY pour ordonnée.



R. — Équation de PX

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

Équation de PY

$$x = my + \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

De là, pour le lieu $\begin{cases} x = -\frac{1}{m}\sqrt{a^2 m^2 + b^2} \\ y = -\frac{1}{m}\sqrt{b^2 m^2 + a^2} \end{cases}$

Éliminant m, on a l'équation

$$\frac{b^2}{x^2 - a^2} = \frac{a^2}{y^2 - b^2}$$

ou

$$b^2 y^2 - a^2 x^2 + a^4 - b^4 = 0$$

C'est une hyperbole qui a pour asymptotes les droites $y = \pm \frac{a}{b} x$, ou les symétriques des diagonales du rectangle des axes, par rapport aux bissectrices des angles des axes.

Remarque. — 1. — Si la courbe donnée était une hyperbole, le lieu serait une ellipse.

2. — La courbe ne représente le lieu en question, qu'à droite du point $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$.

---

507. — *Lieu du point obtenu en prolongeant la normale à l'ellipse d'une longueur égale à elle-même.*

R. — Soient x_1, y_1 les coordonnées du pied de la normale, x, y celles du point du lieu correspondant. — Nous aurons

$$y = -y_1 \qquad\qquad x + x_1 = \frac{2c^2 x_1}{a^2}$$

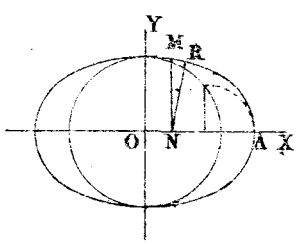
Éliminant x_1, y_1, entre ces 2 équations et celle de l'ellipse, il vient pour le lieu :

$$y^2 + \frac{a^2 b^2}{(2c^2 - a^2)^2} x^2 = b^2$$

C'est une ellipse concentrique à l'ellipse donnée, et dont les axes sont b et $\pm \frac{a^2 - 2b^2}{a}$, suivant que $a^2 \gtrless 2b^2$.

---

508. — NR, *étant une normale à l'ellipse, on mène* NM *perpendiculaire à* Ox *et égal à* NR. *Lieu de* M.



R. — On sait que :

$$x = \frac{c^2 \alpha}{a^2}$$

$$NR^2 = \frac{a^2 \beta^2 + b^4 \alpha^2}{a^2} = y^2$$

Éliminant α et β entre ces 2 équations et

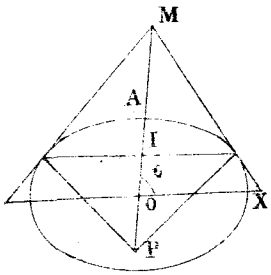
$$a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 = a^2 b^2$$

Il vient pour le lieu : $\qquad c^2 y^2 + b^2 x^2 = b^2 c^2$.

C'est une ellipse concentrique à la proposée et ayant les mêmes droites pour axes. Les foyers de la proposée sont les sommets du lieu. — Cette ellipse ne convient, du reste,

que jusqu'au point Q tel que $PQ = PA =$ la normale au sommet $= \frac{b^2}{a}$; d'où $OP = \frac{c^2}{a}$.

509. — Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à l'ellipse.



R. — Les 2 normales rectangulaires, qui se coupent en P correspondent à 2 tangentes rectangulaires, qui se rencontrent en M sur le cercle

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

La droite MP, qui passe au milieu I de la corde de contact, passe aussi au centre de l'ellipse.

Soit $OP = r$. Nous aurons $r + OM = 2(r + OI)$.

D'où
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} - 2OI$$

On sait d'ailleurs, que A étant le point de l'ellipse sur OM ; on a

$$OI = \frac{OA^2}{OM}.$$

Et en appelant θ l'angle MOx,

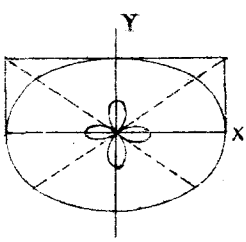
$$OA^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + tg^2 \theta)}{a^2 tg^2 \theta + b^2}$$

L'équation du lieu sera donc

$$r = \frac{c^2 (b^2 - a^2 tg^2 \theta)}{(a^2 tg^2 \theta + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Le maximum de r a lieu pour $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$r = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



La courbe est concentrique à l'ellipse.

Les tangentes à l'origine sont les diagonales du rectangle des axes.

510. — Deux ellipses ont un axe commun, on mène les normales pour la même abscisse; lieu des points de rencontre.

R. — Équation des normales :

$$by\cos\varphi - ax\sin\varphi + (a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$b'y\cos\varphi - ax\sin\varphi + (a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

φ étant l'angle de la normale avec l'axe des x.

De là $\quad y = (b+b')\sin\varphi \qquad ax = (a^2+bb')\cos\varphi$

Et pour le lieu $\quad \dfrac{y^2}{(b+b')^2} + \dfrac{a^2x^2}{(a^2+bb')^2} = 1$

C'est une ellipse concentrique aux 2 ellipses données.

511. — On a une suite d'ellipses ayant un axe commun. Par un point pris sur l'autre, on mène les normales à ces ellipses. Lieu des pieds de ces normales.

R. — L'équation d'une normale est :

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$$

comme elle passe au point $\begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \end{cases}$, on aura

$$\beta - y' = -\frac{a^2y'}{b^2}$$

D'ailleurs $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$

Donc $\quad b^2 = \dfrac{a^2y'}{y'-\beta} = -\dfrac{a^2y^2}{x^2-a^2}$

Le lieu se compose de la droite $y = 0$ et du cercle

$$x^2 + y^2 - \beta y - a^2 = 0$$

dont le centre a pour coordonnées $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\beta}{2} \end{cases}$ et qui passe aux sommets de l'axe fixe.

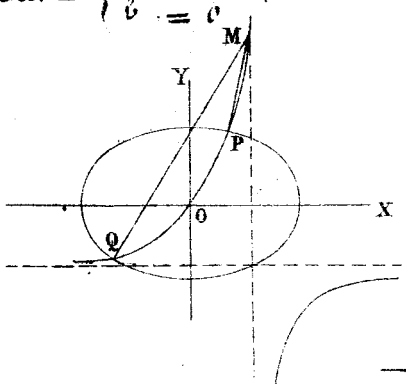
512. — Lieu des pieds des normales, qu'on peut mener d'un point à une série d'ellipses concentriques, semblables et semblablement placées.

R. — Équation d'une normale menée à l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x') \qquad (1)$$

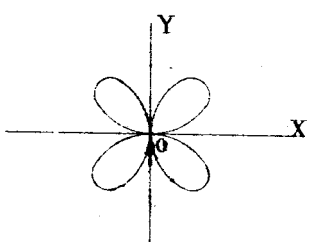
Le lieu cherché est représenté par cette équation, si l'on y regarde x', y' comme les coordonnées courantes en x, y comme les coordonnées du point donné. En effet, pour toutes les ellipses données, le rapport $\frac{a}{b}$ qui seul entre dans (1), est constant. Le lieu est donc une hyperbole rapportée à des parallèles à ses asymptotes. Elle passe au centre commun des ellipses, ce qui correspond au cas $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, et elle passe au point donné, comme



il arrive toutes les fois, qu'un lieu est obtenu par une série de droites issues d'un point fixe. Ici ce point est imaginaire, car on peut faire passer une des ellipses au point donné. MP, MQ seront les normales à l'ellipse tracée.

513. — *Lieu de la projection de l'extrémité d'un diamètre de l'ellipse sur son conjugué.*

R. — Soient θ, θ_1 les angles de 2 diamètres conjugués avec l'axe des x, r la longueur du 2e diamètre, dont je projette l'extrémité sur le premier, ρ le rayon polaire de la projection.



J'aurai : $\rho = r \cos(\theta_1 - \theta)$

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta_1 + b^2 \cos^2 \theta_1}$$

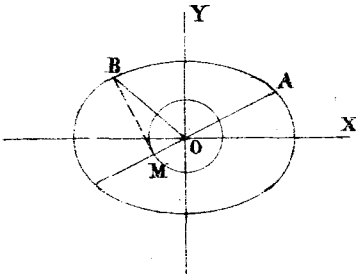
$$\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\theta_1 = -\frac{b^2}{a^2}$$

D'où éliminant r et θ_1

$$\rho = \pm \frac{c^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}}$$

C'est une courbe à 4 boucles tangentes aux axes.

514. — De l'extrémité d'un diamètre de l'ellipse, on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre conjugué, que l'on prend égale à la longueur de ce diamètre conjugué. Lieu des points ainsi obtenus.



R. — Soient x', y' les coordonnées de A. Celles de B, extrémité du diamètre conjugué, seront :

$$x'' = -\frac{a y'}{b'} \quad , \quad y'' = \frac{b x'}{a}$$

L'équation de BM sera :

$$y - y'' = -\frac{x'}{y'}(x - x'')$$

D'ailleurs $BM^2 = (y-y'')^2 + (x-x'')^2 = (x-x'')^2 \frac{x'^2+y'^2}{y'^2}$

Et on doit avoir $BM = OA = \sqrt{x'^2+y'^2}$

Par suite $x - x'' = \pm y'$ $\qquad y - y'' = \mp x'$

On $x = \frac{b \pm a}{b} y'$ $\qquad y = \frac{b \pm a}{a} x'$

Le lieu sera donc représenté par

$$x^2 + y^2 = (a \pm b)^2$$

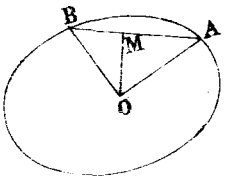
Il se compose de 2 cercles concentriques à l'ellipse donné.

---

515. — Lieu des projections du centre d'une ellipse sur les cordes vues du centre sous un angle droit.

R. —

$$OM^2 = \frac{OA^2 . OB^2}{AB^2} = \frac{OA^2 . OB^2}{OA^2 + OB^2} = \frac{1}{\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$



d'après un théorème connu

Le lieu est donc un cercle concentrique à l'ellipse et de rayon

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

---

516. — Étant donnée une ellipse $My^2 + Nx^2 + P = 0$ et

un cercle $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ dont le centre est constant et le rayon variable, on demande le lieu du point milieu de la corde commune.

R. — Soient (x', y'), (x'', y'') les points communs. Nous avons :

$$2x = x'+x'' \qquad 2y = y'+y'' \qquad My'^2+Nx'^2+P=0 \qquad My''^2+Nx''^2+P=0$$

$$(x'-a)^2+(y'-b)^2=r^2 \qquad (x''-a)^2+(y''-b)^2=r^2$$

De là, par soustraction $M(y'-y'')y+N(x'-x'')x=0$

$$(y'-y'')(y-b)+(x'-x'')(x-a)=0$$

Puis par division $\dfrac{My}{y-b}=\dfrac{Nx}{x-a}$

Le lieu est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes et ont pour équations :

$$y=-\frac{bN}{M-N} \qquad x=\frac{aM}{M-N}.$$

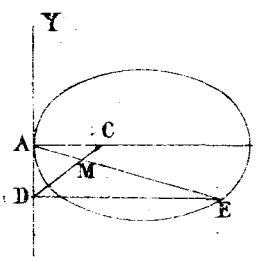
La courbe passe au centre de l'ellipse. Quand $M=N$, le lieu se réduit à la droite $y=\frac{b}{a}x$, droite qui joint les centres.

---

517. — Par un point C pris sur l'axe d'une ellipse on mène une sécante CD, qui rencontre Ay en D; par le point D, on mène l'horizontale DE; on joint AE, et l'on demande le lieu des points M.

R. — Je prends pour axes la droite Ay et l'axe de l'ellipse; en posant $AC=d$, l'équation d'une sécante menée par le point C est :

$$y=m(x-d)$$



Je cherche l'intersection de cette sécante avec Ay, en je fais $x=0$, ce qui me donne :

$$y=-md$$

c'est l'équation de l'horizontale menée par le point D; cherchant son intersection avec la courbe :

$$a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2$$

Nous aurons $\quad a^2m^2d^2 = 2ab^2x - b^2x^2$

D'où $\quad x = a\,\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - m^2d^2}}{b}$

Maintenant je mène la droite AE, qui a pour équation :

$$y = \frac{-mbdx}{a\left(b \pm \sqrt{b^2 - m^2d^2}\right)}$$

$$ay\left(b \pm \sqrt{b^2 - m^2d^2}\right) = -mbdx$$

$$a^2y^2(b^2 - m^2d^2) = m^2b^2d^2x^2 + a^2b^2y^2 + 2ambdxy$$

$$md^2(a^2y^2 + b^2x^2) - 2ab^2dxy = 0$$

Dans cette équation, je substitue pour m sa valeur tirée de l'équation $y = m(x - d)$ et j'aurai l'équation du lieu.

Je supprime la solution étrangère $y = 0$, et il vient :

$$d(a^2y^2 + b^2x^2) = (d - x)\,2ab^2x$$

$$a^2dy^2 + (2a + d)b^2x^2 - 2ab^2dx = 0$$

En supposant d positif, cette équation est celle d'une ellipse qui passe à l'origine, et qui est tout entière située dans l'intérieur de l'ellipse primitive; ainsi qu'il est facile de le voir, en calculant les longueurs des axes.

Cherchons ce qué devient le lieu quand $d < 0$; soit $d = -d'$. L'équation s'écrit :

$$-a^2d'y^2 + (2a - d')b^2x^2 + 2ab^2d'x = 0$$

Si donc $\quad 2a < d'$ on a une ellipse.

$\quad\quad\quad 2a > d'$ " " une hyperbole.

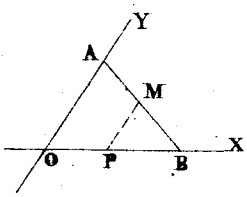
$\quad\quad\quad 2a = d'$ " " une Parabole.

VI. — Hyperbole.

VI. — Hyperbole

A. — Propriétés générales.

518. — *La courbe telle, que la portion de tangente comprise entre deux droites fixes est divisée en parties égales au point de contact, est une hyperbole, dont les droites fixes sont les asymptotes.*



R. — Prenons les 2 droites fixes pour axes. L'équation de la tangente est

$$Y - y = y'(X - x)$$

Donc $PB = -\frac{y}{y'}$

D'après l'énoncé

$$-\frac{y}{y'} = x$$

Ou $-\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$.

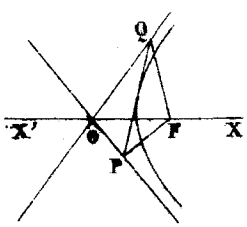
Remontant aux fonctions primitives

$$l\,y = -l\,x + C$$

Ou $l\,xy = C$

Ou encore $xy = \underline{K}$ c. q. f. d.

519. — *Les droites qui joignent le foyer aux points de rencontre d'une tangente avec les asymptotes, forment un angle constant.*



R. — Equation de la tangente:

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2.$$

Coordonnées de P et de Q:

$$\begin{cases} x = \frac{a^2b}{xy' + bx'} \\ y = \frac{-ab^2}{ay' + bx'} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{-a^2b}{ay' - bx'} \\ y = \frac{-ab^2}{ay' - bx'} \end{cases}$$

Coëfficients angulaires de PF

en de QF:

$$\frac{-ab^2}{a^2b-c(ay'+bx')} \qquad \frac{ab^2}{a^2b+c(ay'-bx')}$$

Tangente de l'angle PFQ:

$$\operatorname{Tg}\varphi = 2ab^3\,\frac{cx'-a^2}{b^2(cx'-a^2)^2-c^2a^2y'^2-a^2b^4}$$

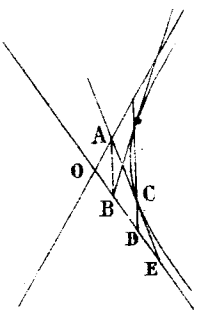
Remplaçant y'^2 par $\frac{b^2}{a^2}(x'^2-a^2)$, en supprimant haut et bas le facteur $2ab^2(cx'-a^2)$, il reste

$$\operatorname{Tg}\varphi = -\frac{b}{a}$$

Donc $\qquad \varphi = QOx'$.

---

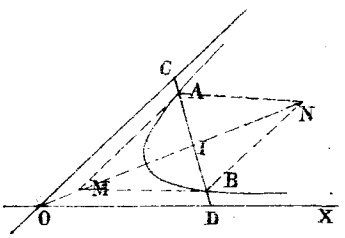
520. — *Le point de rencontre d'une asymptote de l'hyperbole avec la corde de contact de 2 tangentes, est au milieu des points de rencontre de cette asymptote avec les 2 tangentes.*



R. — La droite AB qui joint les points de rencontre des 2 tangentes avec les asymptotes, est parallèle à la corde de contact. C étant le milieu de AE, D sera donc aussi le milieu de BE. C.q.f.d.

---

521. — *Si sur une corde de l'hyperbole comme diagonale, on construit un parallélogramme ayant des côtés parallèles aux asymptotes, la seconde diagonale passe au centre.*



R. — Soit AB la corde donnée. Prolongeons-la jusqu'aux asymptotes en C et D; I étant le milieu de AB, on a aussi IC = ID; donc, si on mène BM, AM parallèles aux asymptotes, le point de rencontre sera sur la droite OI; de même de AN et BN. Donc la 2de diagonale MN passe en O. C.q.f.d.

---

522. — Une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent à angle droit.

R. — Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2$$

les équations des 2 courbes, avec la condition

$$a^2 - b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Les points d'intersection ont pour coordonnées

$$x = \pm \frac{aa'}{c} \qquad y = \pm \frac{bb'}{c}.$$

La tangente à l'ellipse au point $\begin{cases} x = \frac{aa'}{c} \\ y = \frac{bb'}{c} \end{cases}$ a pour coefficient angulaire $-\frac{ba'}{ab'}$; et la tangente à l'hyperbole $\frac{ab'}{ba'}$ c. q. f. d.

---

523. — Deux hyperboles ont mêmes asymptotes. Une sécante passant au centre O rencontre la 1re en A, la 2de en B.

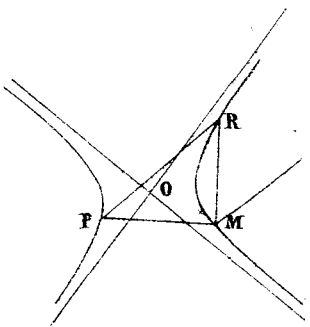
Démontrer que $\frac{OA}{OB} = K$.

R. — Voir Ellipse.

---

524. — Si dans une hyperbole équilatère, on inscrit un triangle rectangle, l'hypoténuse est parallèle à la normale menée au sommet de l'angle droit.

R. — On sait que le sommet de l'angle droit ne changeant pas, l'hypoténuse passe par un point fixe situé sur la normale. — Or, si on mène les côtés de l'angle droit parallèles aux asymptotes, l'hypoténuse se trouve tout entière rejetée à l'infini ; le point fixe y est donc aussi, et par conséquent, dans les cas ordinaires, l'hypoténuse sera parallèle à la normale. De là, un procédé pour mener la normale, et par suite la tangente en un point de la courbe supposée tracée.



525. — Les 3 hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se coupent sur la courbe.

R. — Soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les 3 sommets. On a :

$$x'y' = m^2 \qquad x''y'' = m^2 \qquad x'''y''' = m^2$$

La hauteur menée du point (x''', y''') a pour équation

$$y - y''' = -\frac{x'' - x'}{y'' - y'}(x - x''')$$

L'équation d'une seconde hauteur est :

$$y - y'' = -\frac{x''' - x'}{y''' - y'}(x - x'')$$

Les trois hauteurs se coupant en un même point, il suffit de démontrer, que les deux que nous considérons se coupent sur l'hyperbole. Or, on a :

$$x'\,y' = x''\,y''$$

D'où
$$\frac{x' - x''}{x''} = \frac{y'' - y'}{y'}$$
$$\frac{x' - x''}{y'' - y'} = \frac{x''}{y'}$$

L'équation de la première hauteur peut donc s'écrire :

$$y - y''' = \frac{x''}{y'}(x - x''')$$

et celle de la seconde : $\quad y - y'' = \frac{x'''}{y'}(x - x'')$

Retranchant membre à membre, il vient : $y'' - y''' = \frac{x''' x''}{y'} x$

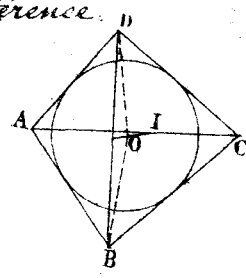
D'où $\quad x = \frac{y'(y'' - y''')}{x''' - x''} = \frac{y' y''}{x'''}$

Par analogie $\quad y = \frac{x' x''}{y'''}$

Multipliant, il vient :

$$xy = \frac{x' x'' y' y''}{x''' y'''} = m^2.$$

526. — La droite qui joint les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une circonférence, passe par le centre de cette circonférence.



R. — Les tangentes menées d'un point à une circonférence, étant égales entre elles, on aura :

$$CD - AD = BC - AB.$$

Donc les points B et D sont sur une hyperbole dont les foyers sont A et C. — O étant le centre du cercle, les droites BO, DO, bissectrices des angles des rayons vecteurs, seront les tangentes à l'hyperbole en B et D, et BD la corde de contact. Le milieu I de la ligne des foyers est le centre de l'hyperbole; et on sait que le diamètre IO passe au milieu de la corde de contact. Le théorème est donc démontré.

B. — Problèmes.

527. — Droites qui ne coupent l'hyperbole qu'en un point.

R. — $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'équation de l'hyperbole.

$y = mx + n$ celle de la droite.

L'équation aux abcisses des points d'intersection est:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) + \ldots\ldots = 0$$

Pour qu'elle n'ait qu'une solution, il faut que $m^2 = \frac{b^2}{a^2}$, ou que la droite soit parallèle à l'une des asymptotes.

---

528. — Etant donnée l'équation $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0$, rapporter la courbe à ses asymptotes.

R. — Il faut annuler les coëfficients de y^2 et de x^2 ...

Formule de transformation

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha'$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'$$

Il faudra donc que l'on ait:

$$A \sin^2\alpha + B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos^2\alpha = 0$$

$$A \sin^2\alpha' + B \sin\alpha' \cos\alpha' + C \cos^2\alpha' = 0$$

$tg\,\alpha$ et $tg\,\alpha'$ seront les racines de l'équation:

$$A\, tg^2\alpha + B\, tg\,\alpha + C = 0.$$

L'équation de la courbe devient $B'xy + F = 0$

avec $B' = \cos\alpha \cos\alpha' (2A\, tg\,\alpha\, tg\,\alpha' - B(tg\,\alpha + tg\,\alpha') + 2C)$

Or, $tg\,\alpha + tg\,\alpha' = -\frac{B}{A}$ $\qquad tg\,\alpha\, tg\,\alpha' = \frac{C}{A}$

$$\cos\alpha\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\alpha')}} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha+tg^2\alpha'+tg^2\alpha\, tg^2\alpha'}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(tg\alpha+tg\alpha')^2-2tg\alpha\, tg\alpha'-tg^2\alpha\, tg^2\alpha'}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}-\frac{2C}{A}+\frac{C^2}{A^2}}}$$

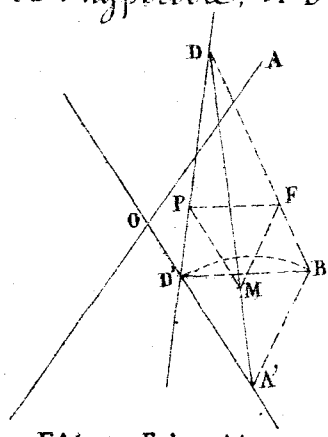
$$= \frac{A}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

L'équation devient donc :

$$\frac{B^2-4AC}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}\,xy + F = 0.$$

529. — Construire les points de rencontre d'une droite et d'une hyperbole non tracée.

R. — Soient OA, OA' les asymptotes, DD' la directrice, F le foyer de l'hyperbole, A'D la droite donnée. Du point A' commun à cette droite et à l'une des asymptotes, comme centre, avec un rayon égal à la distance A'D' de ce point à la directrice, comptée sur l'asymptote, décrivons un arc de cercle. Cet arc coupe en B la droite DF, qui joint le foyer au point de rencontre de A'B avec la directrice. Menons BA, et par F la parallèle FM à BA. M est un point de l'hyperbole ; en effet, d'après la construction effectuée, FM est égal à la parallèle MP à l'assymptote arrêtée à la directrice.



530. — Equation des hyperboles qui ont une directrice et une asymptote communes.

R. — Prenons la directrice pour axe des y. L'équation de l'hyperbole sera :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = n^2x^2$$

Supposons que l'origine soit à la rencontre des 2 droites données ; l'équation de l'hyperbole sera $y = Kx$. Les coefficients angulaires des asymptotes sont donnés par :

$$1 - n^2 + e^2 = 0$$

Donc $$1 - n^2 = K^2$$

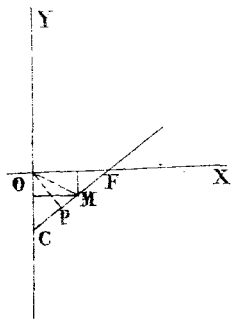
les ordonnées à l'origine par

$$d = \frac{\alpha + \beta e}{e} \quad \text{donc} \quad \alpha + \beta K = 0$$

et l'équation demandée sera :

$$(x + \beta K)^2 + (y - \beta)^2 = (1 - K^2)\, x^2$$

531. — Équation des hyperboles qui ont une asymptote et un foyer communs.



R. — Prenons l'asymptote pour axe des y et la perpendiculaire OF pour axe des x. Soit $OF = b$; la directrice passant par O, l'équation de l'hyperbole sera

$$(x - b)^2 + y^2 = (my + nx)^2.$$

L'axe des y étant asymptote, le terme en y^2 doit être nul ; donc $1 - m^2 = 0$ et l'équation se réduit à $$(x - b)^2 = nx\,(nx + 2y)$$

532. — Trouver les propriétés communes aux courbes représentées par l'équation :

$$x^2(1 - \lambda^2) + 2\lambda xy + 2\lambda y - 2\lambda^2 x - \lambda^2 = 0.$$

R. — Ce sont des hyperboles. Pour les étudier, identifions l'équation avec

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (my + nx + p)^2$$

Nous aurons :

(1) $1 - m^2 = 0$ et K étant un facteur indéterminé

(2) $-\lambda = Kmn$

(3) $1 - \lambda^2 = K(1 - n^2)$

(4) $-\lambda = K(\beta + mp)$

(5) $\lambda^2 = K(\alpha + np)$

(6) $\lambda^2 = K(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)$

Les équations (1), (2) et (3) donnent

$$1 - K^2 n^2 = K(1 - n^2), \qquad \text{d'où} \quad \begin{cases} K' = 1 \\ K'' = -\frac{1}{n^2} \end{cases}$$

1° Si on fait $K = K'$ les équations deviennent :

$$\lambda = \frac{1}{n} \qquad \beta + p = n \qquad \alpha + np + 1 = 0 \qquad \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 1$$

D'où éliminant m et n $(\alpha+1)^2(\alpha^2+\beta^2) = 0$ et par suite

$$\alpha = -1 \qquad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

La 1re hypothèse donne $np = 0$. Si $n = 0$, on a $p = -\beta$ et $p = \sqrt{\beta^2 - 1}$, ce qui est impossible ; si $p = 0$, il vient $n = \beta \pm 1$ et l'équation proposée, qui devient :

$$(x+1)^2 + (y \mp 1)^2 = (y \pm x)^2$$

représente 2 hyperboles ayant leurs foyers symétriques par rapport à l'axe des x. — La 2de hypothèse donne $p = n$, $np = -1$, ce qui est impossible.

2° Si on fait $K = K'$, alors $\lambda = -n$ $\quad n = \beta + p \quad n^2 = \alpha + np$ $n^2 = p^2 - \alpha^2 - \beta^2$;

D'où $\alpha = n\beta$ $\qquad$ et $\alpha^2 + 2n\beta = 0$

D'où $n = 0$ $\qquad$ ou $\beta = 0$

Ou enfin $\alpha = -2$. $\quad n = 0$ donne $\lambda = 0$, et l'équation proposée se réduit à

$$x^2 = 0 ; \qquad \beta = 0 \text{ donne } \alpha = 0, \text{ et } n = p = -\lambda.$$

Dans ce cas, les hyperboles ont pour foyer commun l'origine, et les directrices rencontrent l'axe des y, au point $x = -1$.

$\alpha = -2$ laisse β indéterminé, et donne $n = -\frac{2}{\beta}$ $\quad p = -\frac{\beta^2 + 2}{\beta}$

Les hyperboles correspondantes ont un foyer sur la droite $x = -2$.

Enfin, quelque soit λ, toutes les courbes représentées par l'équation donnée ont pour asymptote la droite $x = -1$, et par suite, le centre est sur cette droite.

---

533. — Trouver les propriétés communes aux hyperboles représentées par l'équation :

$$2xy = 2cy - 2cx + c^2$$

quand on fait varier c. Trouver le lieu des intersections des directrices et des asymptotes.

R. — Nous supposerons toujours les axes rectangulaires. Il est facile de voir que toutes les courbes représentées par l'équation sont des hyperboles équilatères et par conséquent semblables. En effet, l'équation résolue par rapport à y est

$$y = -c - \frac{c^2}{2(x-1)}$$

et les asymptotes ont pour équations :

$$y = -c \qquad x = c$$

elles sont donc rectangulaires.

Cherchons les axes de ces hyperboles : l'équation d'un diamètre correspondant à des cordes, dont le coëfficient angulaire est a, est :

$$2y + 2c + 2a(x-c) = 0$$
$$y = -ax + c(a-1)$$

Exprimant que ce diamètre est perpendiculaire aux cordes, nous aurons :

$$-a^2 = -1 \qquad a = \pm 1$$

Les équations des axes sont donc :

$$y = -x \qquad y = x - 2c$$

Or l'équation $y = -x$ est indépendante de c ; donc toutes les hyperboles ont pour axe transverse commun, la bissectrice du supplément de l'angle des axes.

Cherchons maintenant les foyers de ces courbes ; soient α et β les coordonnées d'un foyer : l'équation de la courbe peut être mise sous la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (my + nx + p)^2$$

Et l'on sait que l'équation

$$my + nx + p = 0$$

représente précisément la directrice. Identifiant les deux équations des courbes, nous aurons.

$$m^2 = 1$$
$$n^2 = 1$$
$$mn = \frac{pn+\alpha}{c} = -\frac{pm+\beta}{c} = \frac{\alpha^2+\beta-p^2}{c^2}$$

Les deux premières conditions donnent :

$$m = \pm 1$$
$$n = \pm 1$$

Or, il est facile de voir qu'en prenant pour m et n le même signe, on arrive pour α et β à des valeurs imaginaires ; soient donc $m = +1$, $n = -1$. Les trois dernières équations deviennent

$$-p+\alpha = -c$$
$$-p-\beta = -c$$
$$\alpha^2+\beta^2-p^2 = -c^2$$

Je retranche les deux premières :

$$\alpha+\beta = 0$$
$$\alpha = -\beta.$$

En outre $\qquad p = c+\alpha$

Substituant dans la troisième, il vient :

$$\alpha^2 - 2c\alpha = 0$$

D'où $\qquad \alpha = 0 \qquad\qquad \alpha = 2c$

Donc $\qquad \beta = 0 \qquad\qquad \beta = -2c$

Ces résultats montrent que le point $\alpha = 0$, $\beta = 0$, c'est-à-dire l'origine des coordonnées, est un foyer commun à toutes les hyperboles représentées par l'équation.

α étant connu, on en déduit pour p les valeurs correspondantes

$$p = c$$
$$p = 3c$$

De sorte que les directrices ont pour équations :

$$y = x - c$$
$$y = x - 3c$$

Cherchons le lieu des intersections de ces directrices avec les asymptotes

$$x = c$$
$$y = -c$$

Je considère la première directrice. L'équation du lieu cherché s'obtient en éliminant entre, l'équation d'une asymptote et l'équation de la directrice; on obtient ainsi

$$x = 0$$

$$y = 0$$

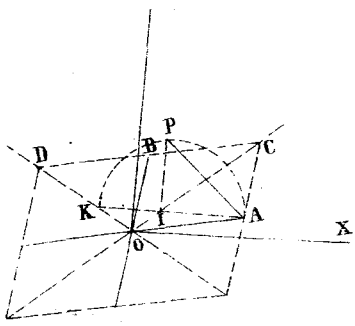
Ainsi le lieu cherché, pour la première directrice, se compose de deux axes de coordonnées. Si l'on fait le même calcul pour la seconde, on obtient les deux droites :

$$y = -2x$$

$$y = -\frac{x}{2}$$

De sorte que le lieu cherché se compose de quatre droites.

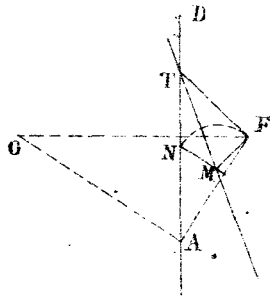
534. — *Étant donnés 2 diamètres conjugués de l'hyperbole, construire la grandeur et la direction des axes.*



R. — Les diagonales OC, OD du parallélogramme construit sur les diamètres conjugués sont les asymptotes; les bissectrices Ox, Oy des angles des asymptotes sont les directions des axes.

La grandeur de l'axe Ox, par exemple, s'obtient, d'après un théorème connu, en menant AIK parallèle à Ox et construisant AP moyenne proportionnelle entre AI et AK.

535. — *Construire une hyperbole, connaissant une directrice, une tangente et un foyer.*

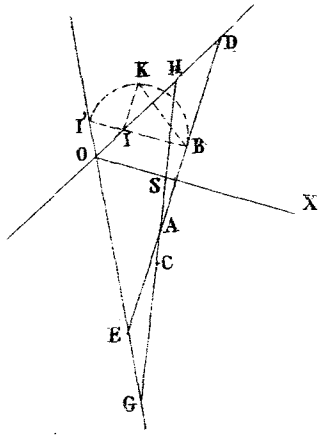


R. — Soient DA la directrice, MT la tangente, F le foyer. Joignons F au point T de rencontre de la directrice et de la tangente; la perpendiculaire FM détermine le point de contact M de la tangente. L'arc de cercle

décrit de M comme centre avec ME comme rayon, rencontre la directrice en N ; MN est parallèle à l'asymptote. La perpendiculaire FA à MN rencontre la directrice au point A, qui appartient à l'asymptote. Cette droite se trouve donc déterminée, d'où le centre, &c.

---

536. — *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote et 3 points.*



R. — Soient OD l'asymptote donnée, A, B, C les 3 points. Menons AB et AC et prenons

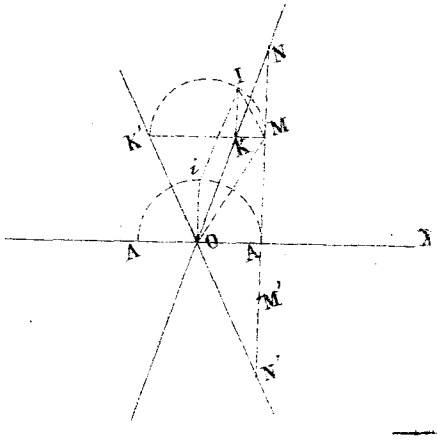
AE = BD

et CG = AH

GE sera la seconde asymptote. De là, le centre O, l'axe transverse Ox. Tirant BII' parallèle à Ox, la moyenne proportionnelle BK entre BI et BI' est la demi longueur de l'axe transverse. &c.

---

537. — *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, le centre et 2 points.*



R. — Soient O le centre, OK l'asymptote, M et M' les 2 points. Joindre MM' et prendre M'N' = MN : N' sera un point de la 2e asymptote. La bissectrice Ox de l'angle des asymptotes est l'axe transverse. — On mènera MKK' parallèle à Ox, et IM moyenne proportionnelle entre MK et MK' sera la longueur du demi axe transverse.

---

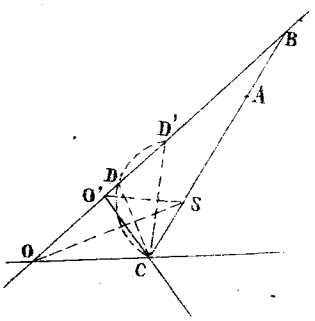
538. — *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, une tangente et un foyer.*

R. — Projeter le foyer sur l'asymptote et sur la tangente et

joindre les projections ; la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite ainsi obtenue rencontre l'asymptote au centre.

---

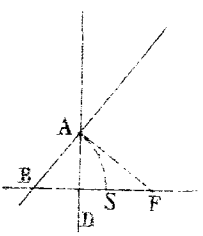
539. — *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, un sommet et un point.*



R. — Soient OB l'asymptote, S le sommet, A le point. Menons AS et prenons SC = AB; C sera un point de l'autre asymptote. La circonférence décrite du point S comme centre avec SC pour rayon, rencontre l'asymptote donnée en 2 points D et D'. Les perpendiculaires SO, SO' aux droites CD, CD' sont les axes transverses de 2 hyperboles, satisfaisant à la question.

---

540. — *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, une directrice et la longueur de l'axe transverse.*



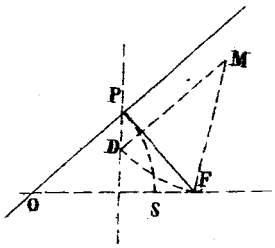
R. — Soient AB l'asymptote, AD, la directrice. Prenons sur l'asymptote, à partir du point A commun, AB égal au demi-axe transverse; B sera le centre de l'hyperbole; la perpendiculaire BF à la directrice est l'axe transverse; prenant BS = BA, on aura le sommet S; la perpendiculaire à l'asymptote en A donne le foyer F, &c.

---

541. — *Construire une hyperbole connaissant une asymptote, un foyer et un point.*

R. — Soient OP l'asymptote, F le foyer, M le point.

Le pied P de la perpendiculaire abaissée du foyer sur l'asymptote est un point de la directrice. Le point de

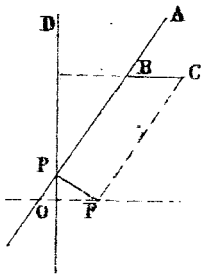


rencontre D de la parallèle à l'asymptote, menée par le point M et de l'arc de cercle décrit de M comme centre avec MF pour rayon, — est un autre point de la directrice. Connaissant la directrice PD, on mènera la perpendiculaire FO, qui est l'axe transverse, et on aura le centre O; le sommet S s'obtiendra en décrivant du point O, comme centre un arc de cercle avec OP pour rayon.

542. — *Construire une hyperbole, connaissant une directrice, 2 points et la direction d'une asymptote.*

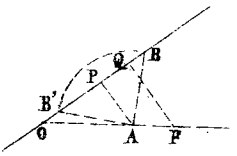
R. — Mener par chacun des 2 points une parallèle à l'asymptote jusqu'à la directrice, puis de ce point comme centre avec un rayon égal à la longueur de cette parallèle, décrire un arc de cercle. Ces 2 arcs se coupent au foyer. La perpendiculaire menée du foyer sur l'asymptote rencontre la directrice en un point de l'asymptote et on a, alors, immédiatement les axes.

543. — *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, une directrice et l'excentricité.*



R. — La perpendiculaire à l'asymptote au point de rencontre de cette droite et de la directrice, passe au foyer. Si on mène une perpendiculaire à la directrice et qu'on prenne sur cette perpendiculaire à partir de l'asymptote, BC égal à la demi excentricité, la parallèle à l'asymptote, menée par le point C, passe également au foyer, ainsi déterminé.

544. — *Construire une hyperbole, connaissant un sommet, une asymptote et l'excentricité.*



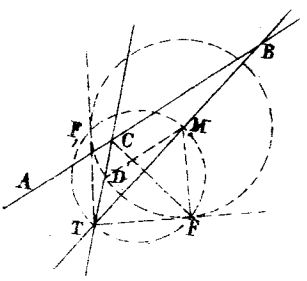
R. — Soient A le sommet, OQ l'asymptote, F le foyer; menons AP et FQ perpendiculaires à l'asymptote; nous aurons, par les triangles semblables

$$\frac{AP}{b} = \frac{a}{c}$$

D'où $b = c \times AP$. — Ayant déterminé b, on décrira du point A comme centre, avec b pour rayon un arc de cercle, qui coupe l'asymptote en B et B'. AB et AB' sont les tangentes au sommet de 2 hyperboles répondant à la question. — Les autres éléments s'ensuivent.

---

545. — Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, une directrice et une tangente.



R. — Soient AB l'asymptote, DT la directrice, BT la tangente. Si M est le point de contact de la tangente, et F le foyer, et qu'on mène MD parallèle à l'asymptote, on sait que MF = MD. — D'autre part, on sait aussi que MF est perpendiculaire à TF. Donc la droite TF est tangente au cercle décrit au point M comme centre avec MD pour rayon. — Si on suppose ces cercles construits pour tous les points M de la droite BT, le rayon étant proportionnel à MT, tous ces cercles seront tangents à 2 droites issues du point T. La construction de l'un de ces cercles fournira ces 2 droites TF, TF,. La perpendiculaire à l'asymptote au point C de rencontre avec la directrice, vient couper TF au point F, ainsi déterminé.

C.

C. — Lieux géométriques.

546. — Hyperbole conjuguée.

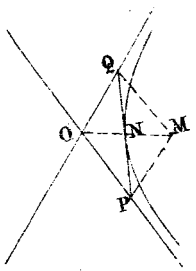
R. — C'est le lieu des extrémités des diamètres imaginaires. La droite $y = mx$ coupe l'hyperbole aux 2 points

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}$$

Quand $m^2 > \frac{b^2}{a^2}$, ce qui correspond aux diamètres imaginaires, prenons $x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 m^2 - b^2}$. Le lieu correspondant aura pour équation $a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2$. Cette équation s'obtient en changeant a^2 et b^2 de signe dans l'équation de l'hyperbole. L'hyperbole qu'elle représente a les mêmes asymptotes que la première; l'axe réel est devenu imaginaire et réciproquement.

---

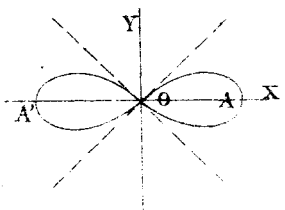
547. — Par les points de rencontre d'une tangente à l'hyperbole avec les asymptotes, on mène des parallèles aux asymptotes. Lieu du point M de rencontre de ces droites.



R. — Le point de contact N étant le milieu de PQ, la droite OM, 2de diagonale du parallélogramme OPMQ, passe en N, et l'on a : $OM = 2\,ON$. Donc le lieu est une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée et semblablement placée.

---

548. — Lieu des projections du centre d'une hyperbole sur les tangentes.



R. — Équation des tangentes :

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 - b^2}.$$

Distance du centre :

$$\rho = \frac{\sqrt{a^2 m^2 - b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$$

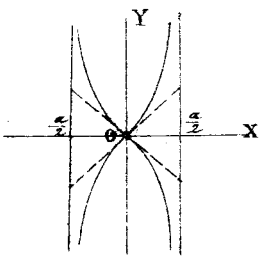
D'ailleurs $\operatorname{Tg}\omega = -\frac{1}{m}$. L'équation du lieu est donc

$$\rho = \frac{\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{tg}^2\omega}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega}} = \sqrt{a^2\cos^2\omega - b^2\sin^2\omega}$$

La courbe passe aux sommets réels A, A' pour $\sin\omega = 0$, à l'origine pour $\operatorname{Tg}\omega = \pm\frac{a}{b}$. Les tangentes horizontales correspondent au maximum de $\rho\sin\omega$, c'est-à-dire à

$$\sin\omega = \frac{\pm a}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

549. — Aux deux points de rencontre d'une normale à l'hyperbole équilatère avec la courbe, on mène des tangentes; lieu du point de rencontre de ces tangentes.



R. — Soit (x', y') un point du lieu. La corde de contact des tangentes sera

$$xx' + yy' + a^2 = 0$$

Pour qu'elle soit normale, le point de contact doit être tel que l'on ait

$$y^2 - x^2 + a^2 = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{y}{x} = \frac{x'}{y'}$$

D'où $\quad y = -\frac{a^2}{2y'} \qquad x = \frac{a^2}{2x'}$

Et, pour le lieu :

$$4x^2y^2 + a^2x^2 - a^2y^2 = 0.$$

550. — Lieu des centres des hyperboles représentées par

$$y^2 - 2xy - x^2 - 4ay + 2ax - 1 = 0$$

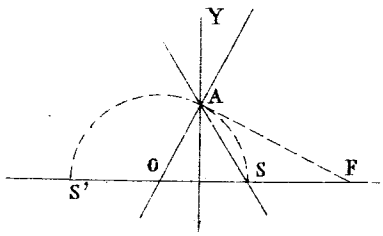
R. — Équations du centre $\quad y - x - 2a = 0$

$$-y - x + a = 0$$

Éliminant a, on a pour le lieu la droite

$$y + 3x = 0.$$

551. — *Lieu des sommets des hyperboles qui ont une asymptote et une directrice fixes.*



R. — Soient OA l'asymptote, AY la directrice ; la perpendiculaire AF à l'asymptote est le lieu des foyers des hyperboles en question. — Si on mène une droite OF perpendiculaire à la directrice, et qu'on prenne $OS = OS' = OA$; S et S' seront les sommets de l'hyperbole dont F est le foyer. On peut voir que $\frac{OA}{OF}$ est constant, il en est donc de même de $\frac{OS}{OF}$ ou de $\frac{OS'}{OF}$; donc le lieu est l'ensemble des deux droites AS et AS'.

Autrement. — En prenant pour axes OA et AF, on a, pour l'équation de l'une des hyperboles :

$$2nxy + x^2(1-n^2) - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$$

Le sommet se trouve sur la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice $y = \frac{-1}{n}(x-\alpha)$. Éliminant α, on a pour le lieu : $ny^2 + 2xy - nx^2 = 0$. Ce sont donc 2 droites passant par l'origine.

---

552. — *Lieu des centres des hyperboles tangentes à 2 droites données et dont les asymptotes sont parallèles à 2 droites données.*

R. — Prenons l'origine au point de rencontre des tangentes et les axes parallèles aux asymptotes. L'équation de la courbe sera :

$$(x - x_1)(y - y_1) = K ;$$

x_1 et y_1 sont les coordonnées du centre. Exprimant que la droite $y = mx$ est tangente, on a la condition :

$$(y_1 - mx_1)^2 + 4mK = 0$$

ou

$$x_1^2 m^2 + 2(2K - x_1 y_1)m + y_1^2 = 0$$

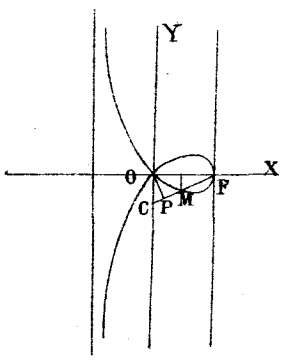
D'où $$m'm'' = \frac{y_1^2}{x_1^2}.$$

Le lieu, quand il existe, c'est-à-dire quand m' et m'' sont de même signe, se compose donc de 2 droites passant par l'origine.

Dans le cas contraire, il n'y a que la solution $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$;

les tangentes données se confondent avec les asymptotes, et la courbe a pour équation $xy = K$.

553. — Lieu des sommets des hyperboles qui ont une asymptote et un foyer communs.



R. — 1° L'axe focal, étant perpendiculaire à la directrice, a pour équation :

$$y = \frac{1}{n}(x - b).$$

Les sommets, placés à l'intersection de cet axe avec la courbe, seront donc sur le lieu

$$(x-b)^2 + y^2 = \left(y + \frac{x-b}{y}\right)^2$$

On $$y = \pm x\sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$$

2°. — Pour avoir un point du lieu, menons par F une droite CF et prenons CM = CO. Soit OFC = φ ; on aura :

$$y = (x-b)\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad x = OP = b\sin\varphi$$

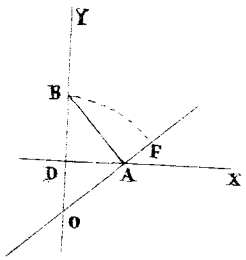
Éliminant φ, $$y = \pm x\sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$$

554. — Trouver le lieu des foyers des hyperboles, qui ont un sommet commun et une asymptote commune.

Remarque. — Si on prend pour axe des y l'asymptote et pour axe des x la perpendiculaire abaissée du sommet, l'équation du lieu s'obtiendra, en changeant dans celle du lieu précédent, b en x et x en b, ce qui donne :

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x-b}{x+b}}$$

R. — *1re Solution.* — Cherchons l'équation du lieu en coordonnées polaires. Je prends le sommet donné pour pôle, et pour axe polaire, la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur l'asymptote donnée. Pour construire un point du lieu, (2) je mène par le point A une droite AO, que je considère comme l'axe de l'une des hyperboles satisfaisant aux conditions données. Au point A j'élève sur AO une perpendiculaire AB, jusqu'à la rencontre de l'asymptote, et prenant OF = OB, j'ai le foyer de la courbe.



Soient $FAx = \omega$, $AF = \rho$ et $AD = a$; on a :

$$\rho = FO - AO = OB - OA$$

Or $ABO = \omega$ comme complémentaire de l'angle O, qui, lui-même est complémentaire de l'angle ω; donc

$$OB = \frac{OA}{\sin\omega}$$

Et comme $$OA = \frac{a}{\cos\omega}$$

Il s'ensuit : $$\rho = \frac{a}{\cos\omega} \cdot \frac{1 - \sin\omega}{\sin\omega}$$

Telle est l'équation du lieu cherché.

2e Solution. — Prenons pour axe des y l'asymptote commune et pour axe des x la perpendiculaire abaissée du sommet sur cette droite; soient α et β les coordonnées de l'un des points du lieu. L'équation de l'hyperbole correspondante peut s'écrire

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (my + nx + p)^2$$

m, n, p étant des coëfficients indéterminés, j'écris que l'axe des y est asymptote, ce qui me donne

$$m^2 = 1 \qquad (1)$$
$$\beta + mp = 0 \qquad (2)$$

Soit a l'abscisse du sommet donné; ce point est sur

la courbe ; donc

$$(a-\alpha)^2+\beta^2=(na+p)^2 \qquad (3)$$

De plus, il est sur l'axe, donc

$$-\beta=\frac{m}{n}(a-\alpha) \qquad (4)$$

Nous avons ainsi quatre équations de condition entre les quantités m, n, p ; éliminant ces trois inconnues, on aura, entre les coordonnées α et β d'un foyer, une relation qui sera vraie, quelle que soit l'hyperbole que l'on considère, et qui, par conséquent, sera l'équation du lieu.

L'équation (1) donne :

$$m=\pm 1$$

et l'on voit facilement, que l'on a la même courbe quel que soit le signe que l'on donne à m ; on a, par suite,

$$p=-\beta$$

$$n=-\frac{a-\alpha}{\beta}$$

Substituant dans l'équation (3), on a le lieu.

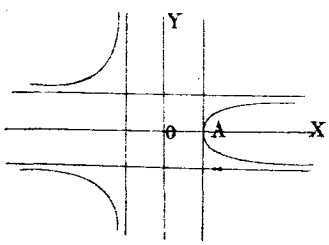
$$(a-\alpha)^2+\beta^2=\left[-\frac{a(a-\alpha)}{\beta}-\beta\right]^2$$

Transportons l'origine au point $x=a$, nous avons (1)

$$x^2+y^2=\left(\frac{ax}{y}-y\right)^2$$

$$y^2(y^2+x^2)=a^2x^2+y^4-2a^2xy^2$$

$$y^2(x+2a)=a^2x$$



Ou enfin

$$y^2=\frac{a^2x}{x+2a}.$$

Sous cette forme, on voit que la courbe passe à l'origine et à ce point, la tangente est verticale ; x croissant, y croît, et pour $x=\infty$, on a

$$y^2=a^2$$

Donc les 2 droites $y=\pm a$ sont asymptotes.

Du côté des x négatifs, y est imaginaire quand x décroît de 0 à $-2a$; pour $x = 2a$: $y = \infty$; donc $x = -2a$ est une asymptote; puis x décroissant, y décroît aussi, et pour $x = -\infty$, $y^2 = a^2$, donc les 2 mêmes droites sont asymptotes du côté des x négatifs.

---

555. — *Une hyperbole équilatère est-elle déterminée par un foyer et un point?*

Trouver l'équation générale des hyperboles qui ont un foyer et un point commun. Lieu des sommets de ces hyperboles.

R. — 1° Un foyer représente deux conditions; un point en donne une, et l'angle droit des asymptotes en constitue une 4e; reste un paramètre indéterminé.

2° Le foyer pris pour origine et l'axe des x, passant au point fixe, l'équation des hyperboles sera

$$x^2 + y^2 = (my + nx + p)^2$$

Elles passent au point $\begin{cases} y = 0 \\ x = \alpha \end{cases}$ et les coëfficients de x^2 et de y^2 doivent être égaux et de signes contraires;

Donc $$\alpha^2 = (n\alpha + p)^2$$

et $$1 - m^2 = n^2 - 1.$$

L'équation devient donc

$$x^2 + y^2 = \left[y\sqrt{2-n^2} + nx + \alpha(1-n)\right]^2 \qquad (1)$$

3° Le centre de la courbe a pour équations

$$x = n\left(y\sqrt{2-n^2} + nx + \alpha(1-n)\right)$$

$$y = \sqrt{2-n^2}\left(y\sqrt{2-n^2} + nx + \alpha(1-n)\right)$$

L'axe transverse, qui passe au foyer, a donc pour équation:

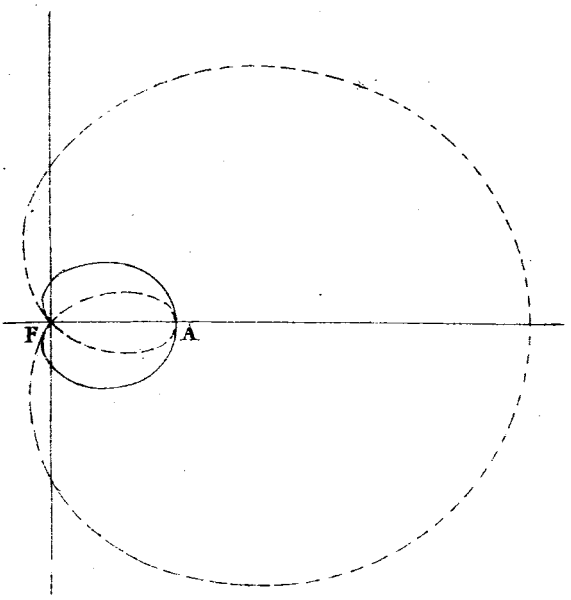
$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2-n^2}}{n} \qquad (2)$$

Éliminant n entre (1) et (2), il vient pour le lieu des sommets:

$$x^2+y^2=\left[(y^2+x^2+\alpha x)\frac{\pm\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\pm\alpha\right]^2$$

Transformant en coordonnées polaires, on trouve les 2 courbes :

$$\rho=\alpha(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}\cos\omega) \qquad \rho=\alpha(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}\cos\omega).$$

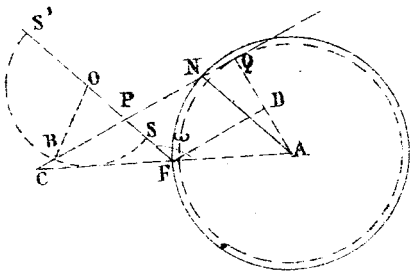


Le rapport des rayons vecteurs de ces 2 courbes est constant, elles sont donc semblables.

Elles ont la forme indiquée ici.

On peut établir autrement l'équation du lieu. — Pour l'hyperbole équilatère, la directrice est également distante du centre et du foyer; on sait d'ailleurs, qu'en menant par un point de l'hyperbole une parallèle à l'asymptote jusqu'à la directrice, la longueur ainsi obtenue, est égale au rayon vecteur.

D'après cela, si on trace le cercle, dont le centre est A et le rayon $AF=\alpha$; une droite NQ, faisant un angle de 45° avec le rayon AN, sera la directrice de l'une des hyperboles, le symétrique O de F par rapport à NQ sera le centre; prenant $PB=PF$ et $OS=OS'=OB$, S et S' seront les sommets, points



du lieu. — A la condition de faire un angle de 45° avec AN, on peut substituer pour NQ celle d'être tangente à la circonférence de rayon $AQ=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. On aura :

$$\rho=2FP-OB=FP\,(2-\sqrt{2})$$

Or $$\rho = 2\,FP + OB = FP\,(2+\sqrt{2})$$

D'ailleurs $$FP = QD = AQ - AD = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \alpha \cos\omega$$

D'où, pour les équations :

$$\rho = \alpha\,(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}\cos\omega) \qquad \rho = \alpha\,(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}\cos\omega)$$

Ces courbes sont des limaçons de Pascal.

---

356. — Une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes ; on mène une tangente en un point quelconque de l'hyperbole, puis par les points de rencontre de cette tangente avec l'ellipse, on mène deux tangentes à l'ellipse ; elles se rencontrent en un point dont on demande le lieu.

R. — L'équation de la tangente à l'hyperbole est :

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

D'après l'énoncé cette tangente est la corde de contact des tangentes à l'ellipse, menées par le point $x'y'$; donc elle a aussi pour équation

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2$$

Identifiant les deux équations, nous aurons :

$$m = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$$

$$a^2 m^2 - b^2 = \frac{b^4}{y'^2}$$

Éliminant m entre ces deux équations, on aura le lieu cherché

$$\frac{b^4}{y^2} = \frac{a^2 b^4 x^2}{a^4 y^2} - b^2$$

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

Donc le lieu cherché est l'hyperbole proposée.

On peut faire le même problème, en supposant les axes des deux courbes différents.

Soient x', y' les coordonnées d'un point du lieu, α et β les axes de l'hyperbole ; la tangente à cette courbe a pour équations :

$$y = mx + \sqrt{\alpha^2 m^2 - \beta^2}$$

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2$$

Identifiant, on aura :

$$\alpha^2 m^2 - \beta^2 = \frac{b^4}{y'^2}$$

$$m^2 = \frac{b^4 x'^2}{a^4 y'^2}$$

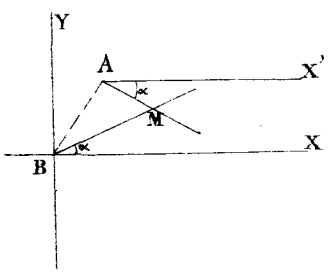
Éliminant m, on aura pour le lieu cherché :

$$\beta^2 a^4 y'^2 - \alpha^2 b^4 x'^2 = -a^4 b^4$$

Cette équation représente une hyperbole dont les axes sont $\frac{b^2}{\beta}$ et $\frac{a^2}{\alpha}$, c'est-à-dire, que les axes de l'ellipse sont des moyennes proportionnelles, entre les axes de l'hyperbole donnée et ceux du lieu.

---

557. — Par 2 points A et B donnés sur des droites parallèles, Ax' et Bx, on mène des droites, faisant avec les deux premières des angles égaux. Lieu du point M de rencontre de ces droites.



R. — Je prends Bx pour axe des x, et pour axe des y, une perpendiculaire.
Soient a et b les coordonnées de A ; l'équation de Ax' est

$$y = b$$

En appelant α l'angle variable, l'équation de BM est

$$y = x \operatorname{tg} \alpha$$

Et celle de AM :

$$y - b = -(x - a) \operatorname{tg} \alpha$$

Éliminant α entre ces deux équations, on aura le lieu cherché.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$xy - bx = -xy + ay$$

$$2xy - bx - ay = 0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole, rapportée à des axes

parallèles à ses asymptotes : les coordonnées du centre sont $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$; donc, il se trouve au milieu O de la droite AB ; donc l'équation de la courbe, rapportée à ses asymptotes est :

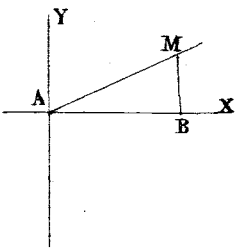
$$xy = \frac{ab}{4}$$

On voit, par là, que si l'on donne une hyperbole équilatère et qu'on mène les cordes supplémentaires, correspondant à un même diamètre, ces lignes font avec les asymptotes des angles égaux.

---

558. — Trouver le lieu des points M tels, qu'en les joignant à deux points donnés A et B, l'angle

$$MAB = \frac{1}{2} MBA.$$



R. — Je prends pour origine le point A ; soit AB = 2a ; on a :

$$180 - MBx = 2MAx$$

D'où $\operatorname{tg} MBx = -\frac{2 \operatorname{tg} MAx}{1 - \operatorname{tg}^2 MAx}$

ou $\frac{y}{x-2a} = \frac{-\frac{2y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{2xy}{x^2-y^2}$

$$x^2y - y^3 = -2x^2y + 4axy$$

Supprimant la solution $y=0$, on a pour le lieu cherché

$$y^2 - 3x^2 - 4ax = 0$$

Equation qui représente une hyperbole rapportée à son axe et à son sommet. Complétant les carrés, il vient.

$$-y^2 + 3\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}a^2$$

Le centre a pour abscisse $\frac{2}{3}a$; rapportant la courbe à ce centre, elle devient :

$$-y^2 + 3x^2 = \frac{4}{3}a^2$$

Pour $y = 0$, on a

$$x^2 = \frac{4a^2}{9}$$

$$x = \pm \frac{2a}{3}$$

Pour $x = 0$ $\qquad b^2 = \frac{4a^2}{3}$

Or $\qquad c^2 = a^2 + b^2 = \frac{16a^2}{9}$

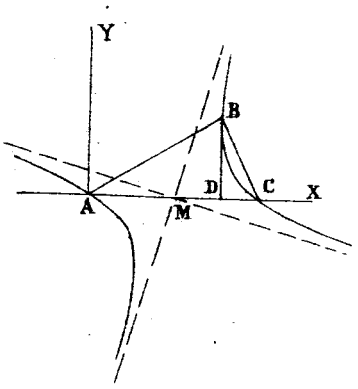
$$c = \frac{4a}{3}$$

Le point B est un foyer.

On a $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$; donc les asymptotes ont pour équations

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

559. — Lieu des sommets des triangles qui ont même base et dans lesquels la différence des angles à la base est constante.



R. — $AC = a$, la base constante, $A - C = \alpha$, la différence constante. On aura :

$$y = x \operatorname{tg} A = (a - x) \operatorname{tg} C = (a - x)\frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg}\alpha}$$

Le lieu aura donc pour équation

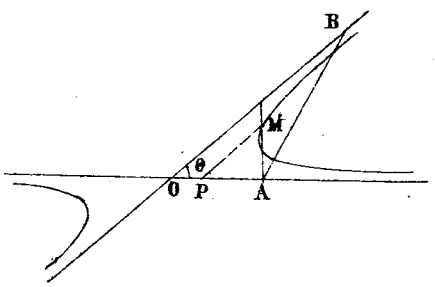
$$y = (a - x)\frac{\frac{y}{x} - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \frac{y}{x}\operatorname{tg}\alpha}$$

Ou $\qquad y^2 \operatorname{tg}\alpha + 2xy - x^2 \operatorname{tg}\alpha - ay + ax \operatorname{tg}\alpha = 0$

C'est une hyperbole équilatère, passant aux points A et C, ayant pour centre $\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{a}{2} \end{cases}$, ou le milieu M de AC, et pour asymptotes les droites :

$$y = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad \text{et} \quad y = -\operatorname{Cot} \tfrac{1}{2}\alpha\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

560. — Étant données 2 droites fixes et une droite mobile, telle que le triangle formé soit de surface constante, trouver le lieu des centres de gravité de ces triangles.



R. — M étant un point du lieu on aura

$$x = \frac{1}{3}\,OA \qquad y = \frac{1}{3}\,OB.$$

On doit avoir : $\frac{1}{2}\, OA \,.\, OB \sin\theta = K^2$

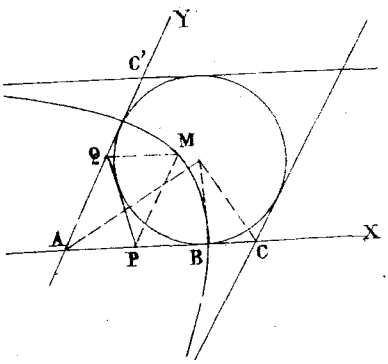
Le lieu aura donc pour équation :

$$\frac{2xy\sin\theta}{2} = K^2$$

C'est une hyperbole, ayant les droites fixes pour asymptotes.

---

561. — Entre 2 tangentes fixes AY, AX à une circonférence, on inscrit une tangente PQ ; par P et Q, on mène des parallèles à AX, AY. Lieu du point M de rencontre de ces droites.



R. — Soit $AB = b$, B étant le point de contact. On a pour M :

$$x + y + PQ = 2b$$

$$PQ = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos 2\alpha}$$

Les radicaux chassés, on a pour le lieu

$$xy\cos^2\alpha - b(x+y) + b^2 = 0$$

C'est une hyperbole rapportée à des parallèles à ses asymptotes.

Les asymptotes sont les droites

$$x = \frac{b}{\cos^2\alpha} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{b}{\cos^2\alpha}$$

Si ω est le centre du cercle, et ωC la diagonale du losange circonscrit ACA'C', on aura

$$AC = \frac{A\omega}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos^2\alpha}.$$

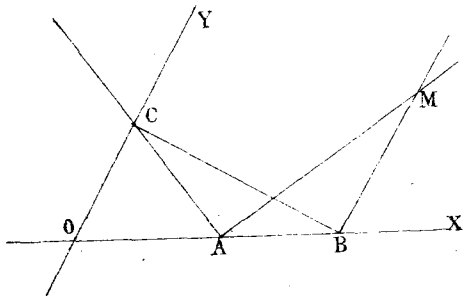
Les asymptotes sont donc les tangentes au cercle parallèles aux axes. — L'hyperbole passe aux points B et B'.

Le centre ω est sur l'hyperbole, quand

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \qquad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

562. — Par 2 points fixes A et B de Ox, on mène des droites AC, BC, qui se coupent sur Oy, et les perpendiculaires

AM, BM à ces droites, lieu de M, quand C varie.



R. — Le lieu passera aux points A et B, comme on peut le voir en supposant AC ou BC perpendiculaire à Ox. — Si on suppose C à l'infini, AM et BM sont tous deux perpendiculaires à Oy; il y aura donc une branche ayant cette direction à l'infini; si C vient en O, AM et BM deviennent perpendiculaires à Ox; autre branche infinie.

Equation du lieu :

Soit $OA = a$ $\quad OB = a'$ $\quad OC = b$ $\quad XOY = \theta$

Equation de OA

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Coëfficient angulaire de AM :

$$-\frac{1 - \frac{b}{a}\cos\theta}{-\frac{b}{a} + \cos\theta} = \frac{b\cos\theta - a}{a\cos\theta - b}$$

Équation de AM: $\quad y = \frac{b\cos\theta - a}{a\cos\theta - b}(x - a)$

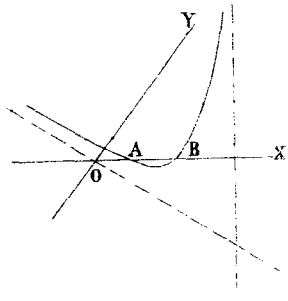
On aura celle de BM, en changeant a en a'.

Égalant les valeurs de b tirées des 2 équations, on aura pour le lieu

$$a\,\frac{y\cos\theta + x - a}{(x-a)\cos\theta + y} = a'\,\frac{y\cos\theta + x - a'}{(x-a')\cos\theta + y}$$

Ou $y^2\cos\theta + xy(1+\cos^2\theta) + x^2\cos\theta - (a+a')y - (a+a')x\cos\theta + aa'\cos\theta = 0$

On a $\quad B^2 - 4AC = (1 - \cos^2\theta)^2$



C'est donc une hyperbole, dont les asymptotes sont

$$y = -x\cos\theta$$

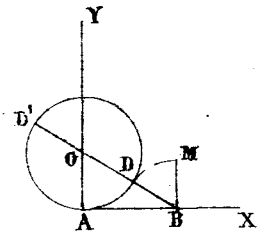
perpendiculaire à Oy, passant à l'origine, et

$$y = -\frac{x}{\cos\theta} + \frac{a+a'}{\cos\theta},$$

perpendiculaire à Ox.

On peut vérifier, que $y = 0$ donne $x = a$ et $x = \alpha$.

563. — Étant donné une circonférence de rayon R, on mène une tangente AB et des sécantes OB passant par le centre; on élève en B une perpendiculaire à la tangente, et l'on prend BM = BD; on demande le lieu du point M.



R. — Je prends pour axes la tangente AB et le diamètre mené au point A; l'équation du cercle est:

$$(y - R)^2 + x^2 = R^2.$$

Celle de la sécante est

$$y - R = mx$$

Je cherche les coordonnées du point D, puis celles du point B et j'écris MB = BD.

J'ai
$$x'^2 (m^2+1) = R^2$$
$$x' = \pm \frac{R\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$$
$$y' = R\left(1 \pm \frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}\right)$$

De plus
$$AB = -\frac{R}{m}$$

On a donc:
$$y^2 = R^2\left[1 \pm \frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}\right]^2 + R^2\left[\frac{1}{m} \pm \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}\right]^2$$
$$y^2 = R^2\left\{\left[\frac{m^2+1 \pm m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}\right]^2 + \left[\frac{m^2+1 \pm m\sqrt{m^2+1}}{m(m^2+1)}\right]^2\right\}$$
$$y^2 = R^2\left[\frac{1+m^2 \pm m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}\right]^2 \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$$
$$y^2 = R^2 \frac{[m^2+1 \pm m\sqrt{m^2+1}]^2}{m^2(m^2+1)^2}$$
$$y^2 = R^2\left\{\frac{2m^2+1 \pm 2m\sqrt{m^2+1}}{m^2}\right\}$$

Je remplace m par $-\frac{R}{x}$, ce qui donne:

$$y^2 = R^2\left\{\frac{\frac{2R^2}{x^2}+1 \mp \frac{2R}{x}\sqrt{\frac{R^2+x^2}{x^2}}}{\frac{R^2}{x^2}}\right\}$$

$$y^2 = 2R^2 + x^2 \mp 2R\sqrt{R^2 + x^2}$$

$$y^2 - x^2 - 2R^2 = \mp 2R\sqrt{R^2 + x^2}$$

$$(y^2 - x^2 - 2R^2)^2 = 4R^4 + 4R^2 x^2$$

$$(y^2 - x^2)^2 - 4R^2 y^2 = 0$$

$$(y^2 - x^2 + 2Ry)(y^2 - x^2 - 2Ry) = 0$$

Ce qui donne les deux hyperboles :

$$y^2 - x^2 - 2Ry = 0$$

$$y^2 - x^2 + 2Ry = 0$$

Ce sont des hyperboles équilatères ayant pour asymptotes : la première, les droites

$$y = x + R$$

$$y = -x + R$$

Et la seconde, les droites

$$y = x - R$$

$$y = -x - R$$

La première courbe correspond aux points tels que D', et la seconde aux points D.

---

564. — Lieu des centres des cercles tangents à une droite donnée, et interceptant sur une seconde droite donnée des cordes de longueur constante.

R. — Soit Ox la 1re droite, et prenons pour Oy une perpendiculaire élevée au point de rencontre avec la seconde. — Soit $y = ax$, l'équation de celle-ci ; et

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

celle du cercle. — Nous devons avoir $\beta = R$; donc l'équation du cercle se réduit à

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - 2\beta y = 0$$

Les abscisses des points de rencontre de la droite et du cercle sont données par :

$$(x-\alpha)^2 + a^2x^2 - 2\beta a x = 0 \qquad (A)$$

Soient (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des 2 points d'intersection.

$$y' - y'' = a(x' - x'')$$

Or, on doit avoir

$$(x'-x'')^2 + a^2(x'-x'')^2 = 4d^2$$

On $$(x'-x'')^2(a^2+1) = 4d^2 \qquad (B)$$

Il suffit donc de calculer $x'-x''$; je développe l'équation (A), et j'ai

$$x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x + \alpha^2 x^2 - 2\beta a x = 0$$

$$x^2(a^2+1) - 2x(a\beta + \alpha) + \alpha^2 = 0$$

Or, on sait que la différence des racines d'une équation du second degré est égale à deux fois le radical ; substituant donc dans l'équation (B), il vient :

$$4\left\{\left(\frac{a\beta+\alpha}{a^2+1}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{a^2+1}\right\}(a^2+1) = 4d^2$$

ou, en simplifiant, en remplaçant α par x et β par y :

$$(ax+y)^2 = (d^2+x^2)(a^2+1)$$

Equation qui représente une hyperbole. Les asymptotes sont :

$$ax + y = \pm x\sqrt{a^2+1}$$

$$y = x\left\{-\frac{1}{a} \pm \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right\}$$

Or, on sait que l'on a

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} - \frac{1}{a}$$

donc les asymptotes sont les bissectrices des angles des droites.

Si au lieu de $\beta = +R$, on prend $\beta = -R$, les asymptotes deviennent

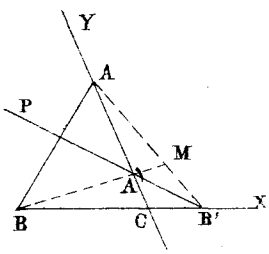
$$y = x\left(\frac{1}{a} \pm \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)$$

l'une des asymptotes fait un angle $\pi - \frac{\alpha}{2}$ avec Ox ; l'autre lui est perpendiculaire.

---

505. — Etant donné un triangle ABC et un point P, on mène, par le point P, une décante qui coupe les côtés AB et BC

respectivement aux points A' et B'; enfin on joint AB' et BA' qui se coupent en M; on demande le lieu du point M, quand la sécante PA'B' tourne autour du point P.



R. — Je prends pour axes de coordonnées les côtés AC et BC du triangle, soient $AC = b$, $BC = a$, et soient x', y', les coordonnées du point P; je mène une sécante quelconque PB'; désignons par β l'ordonnée A'C et par α l'abscisse CB'. Les 3 points P, A', B', étant en ligne droite, on doit avoir:

$$\frac{y'-\beta}{x'} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Ou
$$\alpha(y'-\beta)+\beta x' = 0$$

Les droites AB' et BA' ont respectivement pour équations:

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{\alpha} = 1$$
$$\frac{y}{\beta} + \frac{x}{a} = 1$$

Cela posé, si l'on donne à α et à β une suite de valeurs satisfaisant à la première condition, et qu'on porte ces valeurs dans les deux dernières équations, en y considérant x et y comme étant les mêmes, on aura une suite de points qui appartiendront au lieu cherché. Si donc, de ces trois équations on déduit entre x et y une relation indépendante de α et de β, ce sera l'équation du lieu cherché.

La première équation donne:

$$\alpha = \frac{bx}{b-y}$$

Et la seconde
$$\beta = \frac{ay}{a-x}$$

Substituant dans l'équation de condition, il vient:

$$\frac{bx}{b-y}\left\{y' - \frac{ay}{a-x}\right\} + x'\frac{ay}{a-x} = 0$$

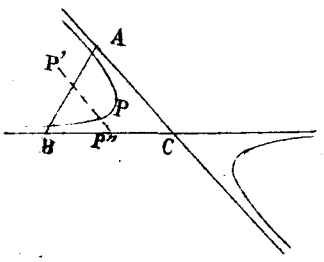
Ou
$$bx\left[y'(a-x)-ay\right]+ayx'(b-y) = 0$$
$$by'x^2 + ax'y^2 + abxy - abxy' - abyx' = 0$$

Telle est l'équation du lieu cherché. C'est une courbe du second degré passant par les 3 sommets du triangle donné. La quantité $B^2 - 4AC$ est :

$$a^2 b^2 - 4ab\,x'y'$$

Pour que la courbe soit une parabole, il faut que cette quantité soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait :

$$x'y' = \frac{ab}{4}.$$



ce qui exprime que le point donné doit être sur l'hyperbole

$$xy = \frac{ab}{4}$$

qui a pour asymptotes les deux axes coordonnés. Pour tout point P' pris dans l'intérieur de cette courbe, l'y est plus grand, que l'y correspondant du point P ; donc la quantité $ab - 4x'y'$ est < 0, et le lieu obtenu pour ces points P', est une ellipse. Si le point est à l'extérieur de l'hyperbole, en P'', $ab - 4x'y' > 0$, et par suite, le lieu, pour ces points P'', est une hyperbole.

Enfin, le lieu sera un cercle, si l'on a la condition :

$$x'y' = \cos(180^\circ - C)$$

Ce qui exige, que le point donné soit sur une autre hyperbole concentrique à la précédente.

VII.

VII. — Parabole.

A. — Propriétés générales.

566. — Normale. — Cercle qui passe par les pieds des normales relatives à un point.

R. — Soit x_1, y_1 un point extérieur à la parabole.

x, y le pied de l'une des normales menées par ce point. — On a

$$y_1 - y = -\frac{y}{p}(x_1 - x) \qquad (1)$$

Et

$$y^2 = 2px \qquad (2)$$

Multipliant les 2 membres de (1) par y, on a

$$y^2 - y_1 y + 2x^2 - 2xx_1 = 0 \qquad (3)$$

Ajoutant (2) avec (3), il vient :

$$2y^2 - y_1 y + 2x^2 - 2x(x_1 + p) = 0$$

Ou

$$\left(y - \frac{y_1}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{x_1 + p}{2}\right)^2 = \frac{y_1^2}{16} + \frac{(x_1 + p)^2}{4}$$

Equation d'un cercle, qui passe à l'origine et dont les intersections avec la parabole, donnent les pieds des normales.

567. — Normale. — 1° Lieu des points d'où on ne peut mener que deux normales ;

2° Ce lieu est tangent aux normales ;

3° Il est l'enveloppe des normales.

R. — 1° L'équation d'une normale est :

$$m^3 - \frac{x-p}{p}\, m + \frac{2y}{p} = 0$$

Pour qu'elle ait 2 racines égales, il faut que

$$\frac{y^2}{p^2} - \frac{8}{27p^3}(x-p)^3 = 0$$

2° L'équation de la tangente à cette courbe est

$$y - y' = \frac{\frac{8}{3p}(x'-p)^2}{2y'}(x - x')$$

On $$y - y' = \frac{4(x'-p)^2}{9py'}(x - x')$$

On a, de plus $$y'^2 = \frac{8}{27p}(x'-p)^3$$

J'identifie l'équation de la tangente avec celle d'une droite

$$y = mx + n$$

Ce qui donne $$m = \frac{4(x'-p)^2}{9py'}$$

$$m^2 = \frac{16(x'-p)^4}{81p^2\,y'^2} = \frac{16(x'-p)^4\,27p}{81p^2.8(x'-p)^3} = \frac{2(x'-p)}{3p}$$

D'où $$x' = p + \frac{3pm^2}{2}$$

Or, la droite passe par le point x', y', ce qui donne

$$y' = \frac{9p^2m^4}{9pm} = pm^3$$

Et alors $$n = pm^3 - pm - \frac{3pm^3}{2} = -pm - \frac{pm^3}{2}$$

Or, c'est précisément la condition pour que la droite $y = mx + n$ soit normale à la parabole.

2° La courbe $\frac{y^2}{p^2} - \frac{8}{27p^3}(x-p)^3 = 0$ est le lieu des points de rencontre de deux normales consécutives.

L'équation d'une normale menée par un point $x'\,y'$ est

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$$

Je considère un point infiniment voisin $y' + K$, $x' + h$;
L'équation de la normale en ce point est

$$y - y' - K = -\frac{y'+K}{p}(x - x' - h)$$

On $$K = (x - x')\frac{K}{p} - h\,\frac{y'+K}{p}$$

D'où l'on tire $$\frac{K}{h} = \frac{x-x'}{p}.\frac{K}{h} - \frac{y'+K}{p}$$

$$\lim \frac{K}{h} = \frac{p}{y'} = \frac{x-x'}{p}.\frac{p}{y'} - \frac{y'}{p}$$

$$x - x' = \frac{p^2 + y'^2}{p} = \frac{p^2 + 2px'}{p} = p + 2x'$$

$$x = p + 3x'$$

Or $$y - y' = -\frac{y'}{p^2}(p^2 + y'^2)$$

Donc $$y = \frac{-y'^3}{p^2}$$

avec la condition $y'^2 = 2px'$

et comme $x' = \frac{x-p}{3}$

$$y' = (-p^2 y)^{\frac{1}{3}}$$

il s'ensuit $(p^2 y)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} p (x-p)$

$$p^4 y^2 = \frac{8}{27} p^3 (x-p)^3$$

$$y^2 - \frac{8}{27p}(x-p)^3 = 0.$$

---

568. — *Mener des Normales à la Parabole par le point extérieur* (α, β).

R. — La parabole étant rapportée à son axe et à la tangente au sommet, les équations du problème sont :

$$y^2 = 2px$$

$$\beta - y = -\frac{y}{p}(\alpha - x)$$

Les points où les normales rencontrent la parabole seront fournis par l'intersection de la parabole proposée avec l'hyperbole :

$$xy + (p-\alpha)y - p\beta = 0$$

Cette hyperbole a ses asymptotes parallèles aux axes. Son centre est fourni par $\begin{cases} x + p - \alpha = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Cette hyperbole aura généralement 3 points d'intersection avec la parabole.

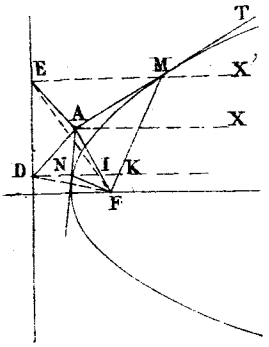
Ces points d'intersection peuvent se réduire à 2 ou même à 1.

---

569. — *La circonférence circonscrite au triangle formé par 3 tangentes à la parabole passe au foyer.*

R. — Lemme. — α. Si d'un point A on mène 2 tangentes à la parabole, l'angle MAX de l'une d'elles avec l'axe est égal à l'angle NAF de l'autre avec le rayon vecteur FA.

En effet, A et E, étant les points symétriques de F par rapport aux 2 tangentes, les droites AD, AE



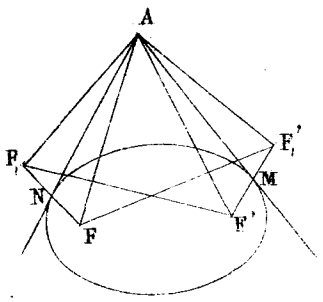
sont égales ; comme égales toutes deux à AF ; les droites DN, EM sont parallèles à l'axe, donc les angles AEM, ADN sont égaux comme compléments d'angles égaux. Prolongeons DN en IK ; nous aurons :

$$ADN = AIK - 2NAF$$

$$AEM = AFK = AIK - IKF = AIK - EMF = AIK - 2MAX$$

Mais nous savons que ADN = AEM ; donc NAF = MAX, c. q. f. d.

β. — Les 2 tangentes à l'ellipse AM, AN font avec les rayons vecteurs FA, F'A des angles égaux. En effet, si on prend les symétriques F_1, F'_1 des foyers par rapport aux tangentes, les triangles AF_1F', AFF'_1, sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux ; donc les angles F_1AF' et FAF'_1 sont égaux ; supprimant la partie commune FAF', il reste

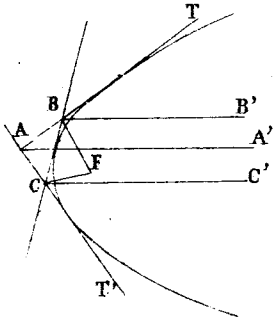


$$FAF_1 = F'AF'_1$$

en divisant par 2

$$FAN = F'AM$$

Si l'on passe à la parabole, AF' devient la parallèle de l'axe et on retrouve le lemme énoncé.



Cela posé, soient 3 tangentes AB, AC, BC. Il faut prouver, que le quadrilatère ABCF est inscriptible.

Menons AA', BB', CC' parallèles à l'axe ; nous aurons

$$BAC = TBB' + T'CC',$$

ou, d'après le lemme :

$$BAC = CBF + BCF$$

Donc $$BAC = 180^\circ - BFC.$$ C. q. f. d.

b. — On sait que le lieu des points, tels que les pieds des perpendiculaires menées de chacun d'eux sur les 3 côtés d'un triangle soient en ligne droite, est la circonférence circonscrite à ce triangle. Le foyer, jouissant de cette propriété par rapport aux tangentes, sera donc sur la circonférence circonscrite au triangle, formé par les 3 tangentes. C. q. f. d.

c. — Il faut montrer, que $ABF + ACF = 180^\circ$. Soient

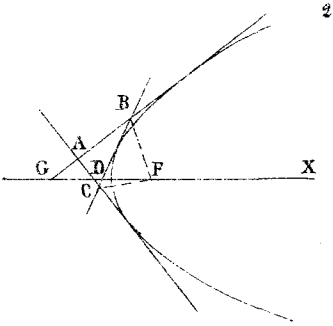
$$y = mx + \frac{p}{2m} \qquad y = m'x + \frac{p}{2m'}$$

les équations des tangentes AB et BC. Les coordonnées de B seront :

$$x = \frac{p}{2mm'} \qquad y = \frac{p(m+m')}{2mm'}$$

Donc le coefficient angulaire de BF est

$$\mu = \frac{\frac{p(m+m')}{2mm'}}{\frac{p}{2mm'} - \frac{p}{2}} = \frac{m+m'}{1-mm'}$$



De là résulte

$$BFx = BDx + BGx;$$

et comme d'ailleurs

$$BFx = ABF + BGx,$$

il vient

$$ABF = BDx$$

Par analogie, on conclut

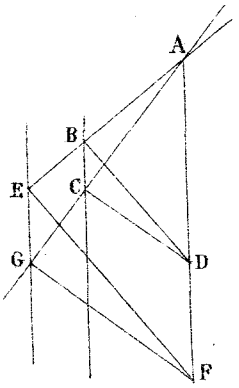
$$ACF = CDF$$

Or BDx et CDF sont supplémentaires ; donc il en est de même de ABF et de ACF. C. q. f. d.

---

370. — Si on coupe 2 tangentes à la parabole par une perpendiculaire à l'axe, qu'aux points B et C où elle les rencontre on élève des perpendiculaires à ces tangentes, la droite AD, qui joint le point D de concours de ces perpendiculaires au point A de concours des tangentes, passe au foyer.

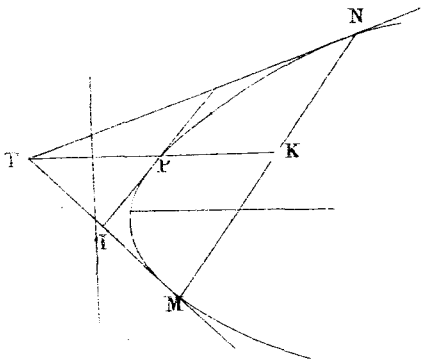
R. — Soit BG la tangente au sommet ; les perpendiculaires



aux tangentes menées par les points E et G se rencontrent au foyer ; mais, en vertu de la similitude, leur point de concours est sur la droite AD.

Donc le théorème se trouve démontré.

571. — Par un point M de la parabole on mène la tangente MT et la normale MN, qui coupe la courbe en N, la tangente en N rencontre MT en T ; le point I de rencontre de MT avec la directrice est le milieu de MT.



R. — TK diamètre conjugué de MN, rencontre la courbe en P milieu de TK. La tangente en P est parallèle à MN, donc elle est perpendiculaire à MT. Or, le lieu des sommets des angles droits circonscrits est la directrice ; le point de rencontre de la tangente en P avec MT est donc en I. Mais P étant le milieu de TK, I sera le milieu de TM. C. q. f. d.

Autrement. — L'équation de la normale étant

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x'),$$

celle de l'ensemble des tangentes sera de la forme :

$$y^2 - 2px + \lambda\left[y - y' + \frac{y'}{p}(x - x')\right]^2 = 0$$

Le centre T de cette courbe sera donné par les équations

$$y + \lambda\left[y - y' + \frac{y'}{p}(x - x')\right] = 0$$

$$-p + \lambda\left[y - y' + \frac{y'}{p}(x - x')\right]\frac{y'}{p} = 0$$

D'où (1) $$\frac{y}{p} + \frac{p}{y'} = 0$$

Cette équation exprime que la tangente en P est

parallèle à la normale en M.) — Le point de rencontre du diamètre (1) avec la tangente en M

$$yy' = p(x + x')$$

a son abscisse donnée par

$$-p^2 = p(x + x')$$

D'où $\frac{x + x'}{2} = -\frac{p}{2}$ C.q.f.d.

572. — Les paraboles $y^2 = 2px$ $y^2 = 2p'x$ sont homothétiques.

R. — En effet, une droite $y = mx$ menée par l'origine coupe les deux courbes en des points, dont les abscisses sont :

$$x = \frac{2p}{m^2} \qquad x_1 = \frac{2p'}{m^2}$$

Le rapport de ces abscisses, égal au rapport des rayons vecteurs est $\frac{p}{p'}$; il est donc constant. C.q.f.d.

Corollaire. — Deux paraboles quelconques du 2e degré sont semblables.

B. — Problèmes.

573. — La parabole, étant considérée comme la limite d'une série d'ellipses, ayant un sommet et un foyer constants et dont le grand axe augmente indéfiniment, que devient alors le cercle $x^2 + y^2 = a^2$?

R. — Rapportée au sommet fixe, l'équation du cercle devient

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

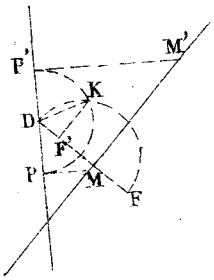
Ou

$$\frac{x^2 + y^2}{2a} - x = 0$$

Faisant a infini, elle donne $x = 0$, équation de la tangente au sommet de la parabole.

574. — Construire les points de rencontre d'une droite et d'une parabole non tracée.

R. — Sur la droite MM', il s'agit de trouver un point également distant du foyer F et de la directrice PP'. Ce sera le centre d'un cercle, passant par F et tangent à PP'. Pour le construire, menons FD perpendiculaire à MM'; soit F' le symétrique de F par rapport à cette droite, la circonférence passe par F'.



Construisons DK moyen proportionnel entre DF' et DF et prenons DP = DP' = DK. P et P' seront les points de contact des circonférences cherchées, dont les centres seront sur les perpendiculaires PM, P'M' à la directrice.

575. — L'équation d'une normale à la parabole est

$$y = m(x-p) - \frac{pm^3}{2}$$

On demande de mener, par un point x, y, deux normales qui soient à angle droit.

R. — J'ordonne l'équation précédente par rapport à m

$$m^3 - \frac{2m}{p}(x-p) + \frac{2y}{p} = 0$$

Soient m', m'', m''' ses trois racines, que nous supposerons réelles, c'est-à-dire que le point est extérieur à la courbe $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$; le produit des deux racines $m'm'' = -1$; Or, $m'm''m''' = -\frac{2y}{p}$; donc $m''' = \frac{2y}{p}$; donc $\frac{2y}{p}$ doit être racine de l'équation; et réciproquement, si cette condition est satisfaite, il y aura deux normales à angle droit, car on aura $m'm'' = -1$. Écrivons donc que $\frac{2y}{p}$ est racine, il vient :

$$\frac{8y^3}{p^3} - \frac{4y}{p^2}(x-p) + \frac{2y}{p} = 0$$

ou

$$4y^2 = 2px + 3p^2$$

Donc le lieu des points par lesquels on peut mener trois normales, dont deux soient à angle droit est une parabole

de même axe que la 1re, et dont le sommet est sur l'axe des x, à une distance $x = \frac{3p}{2}$. En la rapportant à ce sommet, l'équation devient :

$$y^2 = \frac{p}{2} x$$

Cette parabole est tangente à la courbe $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$. En effet, l'équation aux abscisses des points communs est du 3e degré ; elle a donc, au moins, une racine réelle, et comme la parabole ne peut passer dans l'espace d'où on ne peut mener qu'une normale, elle est nécessairement tangente.

---

576. — *Dans une parabole, on mène différentes normales, et l'on demande celle pour laquelle la distance entre les deux points, où elle coupe la courbe, est un minimum.*

R. — L'équation d'une normale est

$$y = m(x-p) - \frac{pm^3}{2}$$

et le point où elle est normale a pour coordonnées

$$y' = -pm \qquad x' = \frac{pm^3}{2}$$

Si nous cherchons l'autre point d'intersection de cette normale avec la courbe, nous aurons l'équation :

$$my^2 - 2py - 2mp^2 - p^2m^3 = 0$$

il faut calculer y'' ; or, évidemment, cette équation a pour racines y' et y'', ordonnées des deux points où la droite coupe la parabole ; on a donc :

$$y' + y'' = \frac{2p}{m}$$

et comme $y' = -pm$, il s'ensuit

$$y'' = \frac{2p}{m} + pm$$

d'ailleurs le point $x''\,y''$ est sur la courbe ; donc

$$x'' = \frac{y''^2}{2p} = \frac{\left(\frac{2p}{m} + pm\right)^2}{2p} = p\left(\frac{2}{m^2} + \frac{m^2}{2} + 2\right)$$

Écrivons maintenant l'expression de la distance entre les deux points $x'\,y'$, $x''\,y''$:

$$\delta^2 = \left(\frac{2p}{m} + 2pm\right)^2 + 4p^2\left(\frac{1}{m^2}+1\right)^2$$
$$= 4p^2\left\{\left(\frac{1}{m}+m\right)^2 + \left(\frac{1}{m^2}+1\right)^2\right\} = 4p^2\frac{(m^2+1)^2}{m^2}\left(1+\frac{1}{m^2}\right)$$
$$= \frac{4p^2(m^2+1)^3}{m^4}$$

Etudions les variations de cette fonction, quand m reçoit toutes les valeurs possibles; pour $m=0$, $\delta=\infty$, et, en effet, la normale au sommet n'est autre chose que l'axe. Pour $m=\infty$, le numérateur est infini, le dénominateur aussi. Or, en négligeant le facteur $4p^2$, on peut écrire $\frac{\frac{1}{m^4}}{\frac{1}{(m^2+1)^3}}$, et pour $m=\infty$, l'expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Prenons le rapport des dérivées:

$$\frac{-\frac{4m^3}{m^8}}{-\frac{6m(m^2+1)^2}{(m^2+1)^6}} = \frac{4m^3(m^2+1)^6}{m^8 . 6m . (m^2+1)^2} = \frac{2(m^2+1)^6}{3m^6(m^2+1)^2}$$

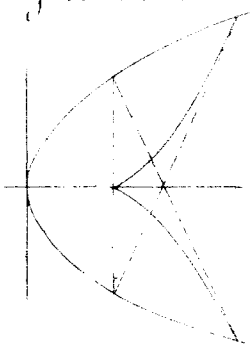
pour $m=\infty$, cette expression est infinie, car le numérateur est d'un degré supérieur au dénominateur. Ainsi, la distance, infinie pour $m=0$, est encore infinie pour $m=\infty$. Pour voir comment elle varie, prenons la dérivée: on a:

$$\delta = \frac{2p(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}{m^2}$$

La dérivée est, en faisant abstraction du facteur constant $2p$:

$$\frac{3(m^2+1)^{\frac{1}{2}}m^2 - 2m(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}{m^4} = \frac{3m^2-2(m^2+1)}{m^4}$$
$$= \frac{m^2-2}{m^4}$$

Pour $m=0$, cette dérivée est infinie, mais avec le signe $-$; donc la fonction décroît jusqu'à ce que la dérivée devienne positive, et à partir de cette valeur qui rend positive la dérivée, la fonction va en croissant; donc elle a passé par un minimum. Si l'on égale à 0 la dérivée, on a:



$$m^2 = 2$$
$$m = \pm\sqrt{2}$$

ce qui fait 2 droites symétriques par rapport à l'axe des x. Si l'on cherche les valeurs de x et de y, qui correspondent à cette valeur de m, on trouve:

$$y' = \pm p\sqrt{2} \qquad x' = p$$

c'est-à-dire le point qui a pour abscisse le sommet de la parabole cubique; si l'on cherche de même x'' et y'', on trouve :

$$x'' = 4p \qquad y'' = \pm 2p\sqrt{2}$$

ce point est sur la parabole $y^2 = 2px$; il est de plus sur la courbe $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$; il est donc au point d'intersection de ces deux courbes.

---

577. — Construire une parabole, connaissant le foyer et 2 tangentes.

R. — Les projections du foyer sur les tangentes donnent la tangente au sommet. Le reste s'en déduit.

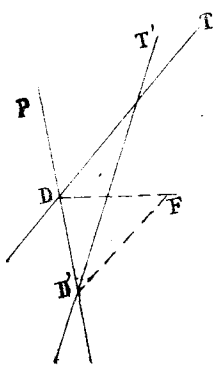
---

578. — Construire une parabole, connaissant le foyer, une tangente et la direction de l'axe.

R. — La projection du foyer sur la tangente fait connaître un point de la tangente au sommet; menant par ce point une perpendiculaire à la direction de l'axe, on a cette tangente. Le reste s'en déduit.

---

579. — Construire une parabole, connaissant la directrice et 2 tangentes.



R. — Soient DT, D'T' les 2 tangentes, DD' la directrice. Les droites DF et D'F telles que

$$FDT = PDT$$

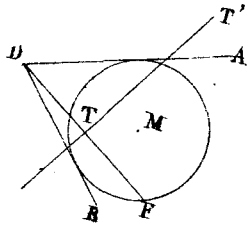
et $$FD'T' = PD'T'$$

déterminent le foyer.

---

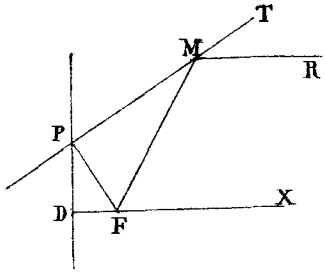
580. — Construire une parabole, connaissant un point, une tangente et le foyer.

R. — Soient M le point, TT' la tangente, F le foyer. Du point M comme centre, avec MF pour rayon,



décrivons une circonférence; prenons le symétrique D de F par rapport à TT'. Les tangentes menées de D à la circonférence sont les directrices de deux paraboles répondant à la question.

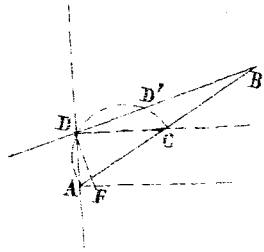
581. — Construire une parabole, connaissant le foyer, une tangente et son point de contact.



R. — Soient MT la tangente, M le point de contact, F le foyer.

La droite MR faisant l'angle TMR égal à FMP donne la direction de l'axe. La projection P du foyer sur la tangente, donne un point de la tangente au sommet, qui est la perpendiculaire PD à MR.

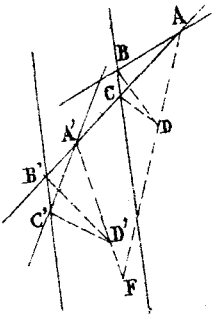
582. — Construire une parabole, connaissant une tangente, son point de contact et le sommet.



R. — Soient A le sommet, BD la tangente en B son point de contact. Menons AB; prenons le milieu C de cette droite; décrivons une demi-circonférence sur AC comme diamètre; les points D et D' où elle rencontre la tangente appartiennent aux tangentes au sommet de deux paraboles satisfaisant à la question.

583. — Construire une parabole, connaissant 3 tangentes et la direction des diamètres.

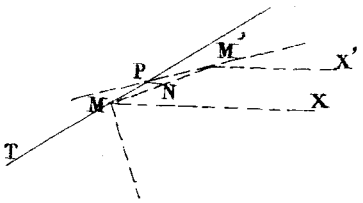
R. — Mener 2 droites BC, B'C' perpendiculaires à la



direction des diamètres ; aux points de rencontre de chacune de ces droites avec deux des tangentes, mener les perpendiculaires aux tangentes, qui se coupent en D D' ; les droites A D, A' D' se coupent au foyer F, par un théorème connu. — La projection du foyer sur l'une des tangentes détermine la tangente au sommet.

---

584. — Construire une parabole, connaissant 2 points, la tangente en l'un d'eux et la direction de l'axe.



R. — Soient MP la tangente donnée, M, M' les 2 points, MX la direction de l'axe. Faisant FMT = PMX, on a une droite sur laquelle est le foyer. — Menant MM', puis par le milieu N, la parallèle NP à l'axe, on a la tangente PM' au point M', ce qui fait connaître une seconde droite M'F, contenant aussi le foyer.

---

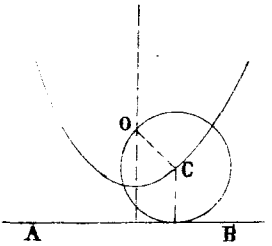
585. Construire une parabole, connaissant 4 tangentes.

R. — Les circonférences circonscrites à 2 des triangles formés par les tangentes passent au foyer. Les pieds de 2 perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes donnent la tangente au sommet &c.

C. — Lieux géométriques.

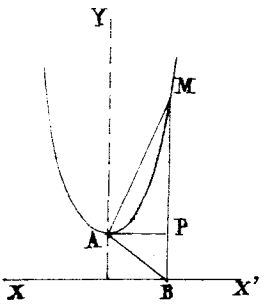
586. — Lieu des centres des cercles tangents à une droite fixe et passant par un point fixe.

R. — Le centre du cercle, étant également distant



du point fixe O et de la droite AB, le lieu est la parabole; donc O est le foyer et AB la directrice.

587. — A et XX' étant fixes, on fait tourner autour de A l'angle droit BAM; on mène BM perpendiculaire sur XX'. Lieu de M.



R. — Si on mène AP perpendiculaire sur BM, on a

$$AP^2 = MP \times BP$$

Donc le lieu est une parabole, dont A est le sommet et AY l'axe.

588. — Lieu des sommets des angles droits, circonscrits à la parabole.

R. — Equations des 2 tangentes

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

$$y = -\frac{1}{m}x - \frac{pm}{2}.$$

Ajoutant membre à membre, il vient pour le lieu $x = -\frac{p}{2}$. C'est la directrice.

589. — Lieu des sommets des angles constants circonscrits à la parabole.

R. — L'équation d'une tangente étant $y = mx + \frac{p}{2m}$ et α l'angle constant donné, on doit avoir:

$$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{m' - m''}{1 + m'm''} = \frac{2\frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{2x}}{1 + \frac{p}{2x}} = 2\frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{p + 2x}$$

On chassant les radicaux et ordonnant

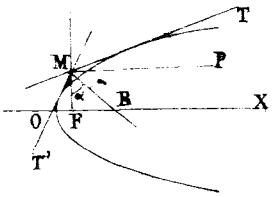
$$y^2 - x^2 \operatorname{Tg}^2\alpha - px(2 + \operatorname{Tg}^2\alpha) - \frac{p^2}{4}\operatorname{Tg}^2\alpha = 0$$

C'est une hyperbole dont l'axe transverse est l'axe de

la parabole. L'équation ne changeant pas quand Tg. α change de signe, l'une des branches de la courbe correspond à l'angle α, l'autre à son supplément.

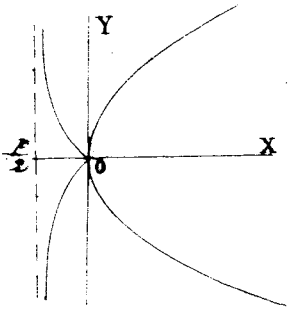
Remarque. — Si l'on divise par $Tg^2\alpha$, puis qu'on fasse $Tg\,\alpha$ infini, il vient $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$: c'est la directrice.

590. — Lieu des points tels, qu'en menant par l'un d'eux deux tangentes à la parabole, la bissectrice de l'angle de ces tangentes fasse avec l'axe de la courbe un angle constant.



R. — On sait que MT et MT', étant 2 tangentes, MP une parallèle à Ox et F le foyer, l'angle FMP est égal à l'angle FMT', la bissectrice MB de l'angle T'MT sera donc aussi celle de PMF ; donc MFB est un triangle isocèle et MF fait avec Ox l'angle 2α ; le lieu se compose donc de cette droite MF et de sa symétrique par rapport à Ox.

591. — Lieu des projections du sommet d'une parabole sur les tangentes.



R. — Equation d'une tangente

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

Equation de la perpendiculaire menée du sommet :

$$y = -\frac{1}{m}x$$

Equation du lieu :

$$y = -\frac{x^2}{y} - \frac{py}{2x}$$

Ou $$y^2 = -\frac{2x^3}{2x+p}$$

y n'est réel, que quand x varie entre $-\frac{p}{2}$ et 0.

592. — Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires,

abaissées du foyer d'une parabole sur les normales à cette courbe.

R. — Equation d'une normale :

$$y = m(x-p) - \frac{p.m^3}{2}$$

Equation de la perpendiculaire abaissée du foyer :

$$y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

Eliminant m., il vient pour le lieu :

$$y = \frac{\left(\frac{p}{2}-x\right)(x-p)}{y} - \frac{p}{2}\,\frac{\left(\frac{p}{2}-x\right)^3}{y^3}$$

Ce qui peut s'écrire

$$y = -\frac{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}{y} + \frac{p}{2}\,\frac{x-\frac{p}{2}}{y}\left[1 + \frac{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}{y^2}\right]$$

Ou

$$\left[y^2 + \left(x-\frac{p}{2}\right)^2\right]\left[y^2 - \frac{p}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)\right] = 0.$$

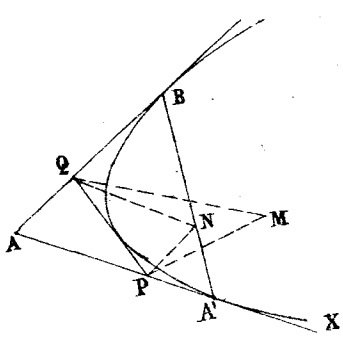
Supprimant le facteur $y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$, qui donne le foyer (point par lequel passe un système de droites donnant le lieu), il reste

$$y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

équation d'une parabole, dont le sommet est au foyer de la proposée, et dont le paramètre est le quart de celui de la proposée.

---

593. — Entre deux tangentes fixes, on mène à une parabole une tangente mobile PQ. Par les points P et Q on mène des parallèles à 2 directions fixes ; lieu du point M de rencontre de ces droites.



R. — On sait, que les points P et Q sont tels,

que si l'on a $AP = X = Ka$

On aura $AQ = Y = (1-K)b$

Donc $\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1$ (1), et par conséquent, le lieu des sommets N des parallélogrammes construits sur AP et AQ,

est la corde de contact AB des tangentes fixes.

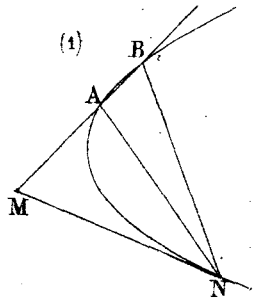
Si on mène PM, QN parallèles à des directions quelconques, — les équations de ces droites seront

$$y = m(x - X) \qquad \text{et} \qquad y - Y = nx.$$

Éliminant X et Y au moyen de l'équation (1), on trouve pour le lieu une droite.

---

594. — AN, BN étant 2 normales à la parabole, qui se coupent sur la courbe en N, on mène la corde AB et la tangente en N; lieu du point M d'intersection de ces deux lignes.



R. — 1° Pour les normales issues de N, on a :

$$y = m(x - p) - p\frac{m^3}{2}$$

Divisant par $m + \frac{y}{p}$, pour éliminer la normale en N, il restera :

$$m^2 - \frac{y}{p}m + 2 = 0$$

NA et NB forment un système dont l'équation est, par conséquent

$$(Y - y)^2 - \frac{y}{p}(X - x)(Y - y) + 2(X - x)^2 = 0$$

et le système des 2 droites AB et MN est représenté par

$$(Y - y)^2 - \frac{y}{p}(X - x)(Y - y) + 2(X - x)^2 + \lambda(Y^2 - 2pX) = 0 \qquad (\alpha)$$

D'ailleurs MN a pour équation $Yy = p(X + x)$

Remplaçant Y par sa valeur dans α, en écrivant que l'équation en X est identique, on déduit

$$1 + \lambda = -\frac{y^2}{p^2} = -\frac{2x}{p}$$

M est le centre de la courbe (α) donné par les équations :

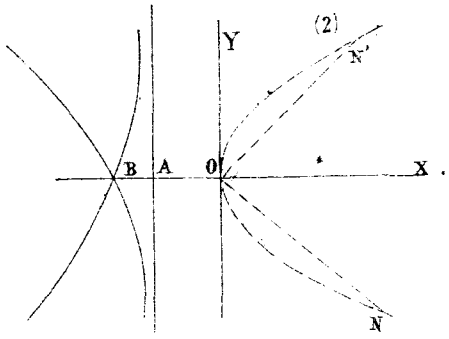
$$\begin{cases} 2(Y - y) - \frac{y}{p}(X - x) + 2\lambda Y = 0 \\ -\frac{y}{p}(Y - y) + 4(X - x) - 2p\lambda = 0 \end{cases}$$

En remplaçant λ par $-\frac{2x}{p} - 1$

$$(\beta)\quad \begin{cases} 4xY + yX - (x-2p)\,y = 0 \\ yY - 4pX - 2(p+x)\,p = 0 \end{cases}$$

Éliminant x et y entre (β) et $y^2 = 2px$, on aura pour l'équation du lieu :

$$Y^2 = -2p\,\frac{(X+p)^2}{3X+2p}$$



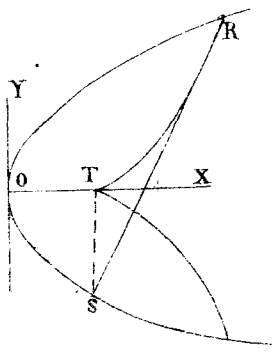
Remarquez. — Les normales ne sont réelles que jusqu'à l'intersection de la parabole avec le lieu des points d'où on peut mener 2 normales. Les autres points de la courbe ci-jointe proviennent de normales imaginaires, et donnant lieu à des droites AB réelles, qui ne rencontrent pas la parabole.

La droite AB (*Fig. 1*) a pour équation, d'après les équations écrites $xY + y(X+p) = 0$.

Elle passe constamment par le point $\begin{cases} Y = 0 \\ X = -p \end{cases}$, et son coëfficient angulaire est $-\frac{y}{x}$.

D'où cette définition du lieu : intersection de la tangente en N avec la droite, menée par le point fixe A (*Fig. 2*) parallèlement à ON', symétrique de ON.

Les normales deviennent réelles, quand la droite menée par A est tangente à la parabole. La sous-tangente étant double de l'abscisse, le point de contact de cette tangente aura pour abscisse p. C'est précisément l'abscisse du point de rebroussement du lieu des points d'où on peut mener 2 normales, lieu qui est, comme on sait, l'enveloppe des normales. On peut voir que si au point R d'intersection de ce lieu avec la parabole, on mène la tangente à cette enveloppe, cette tangente, qui est normale à la parabole, coupe la parabole au point S



dont l'abscisse $= p$.

On a donc ainsi vérifié que le 1er point, qui donne des normales réelles est le même dans les deux méthodes indiquées.

2°. — α, β les coordonnées de A (fig. 1) Le coëfficient angulaire de AN est $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$; mais cette droite est normale en A, donc $-\frac{\beta}{p} = \frac{y-\beta}{x-\alpha}$. D'ailleurs $\beta^2 = 2p\alpha$ et $y^2 = 2px$; — tirant de là α et x et substituant, il vient, en supprimant la solution $y = \beta$: $-\frac{\beta}{p} = \frac{2p}{y+\beta}$ ou $\beta^2 + y\beta + 2p^2 = 0$

Cette équation a pour racines les ordonnées de A et de B, qui satisfont aussi à $\beta^2 = 2p\alpha$.

Retranchant membre à membre, il vient $y\beta + 2p\alpha + 2p^2 = 0$ pour l'équation de AB. D'ailleurs la tangente en N a pour équation $y\beta = p(\alpha + x)$ et, de plus, $y^2 = 2px$. Éliminant x et y entre ces 3 équations, il vient pour le lieu

$$\beta^2 = -\frac{2p(\alpha+p)^2}{3\alpha+2p}.$$

595. — *Une parabole se meut en restant tangente à deux axes rectangulaires. Lieu décrit par un point lié à la courbe.*

R. — Soient $y = mx + \frac{p}{2m}$ $\quad y = -\frac{1}{m}x - \frac{mp}{2}$ les équations des tangentes, la parabole étant supposée fixe; — α, β les coordonnées du point donné, par rapport aux axes de la parabole. Les coordonnées par rapport aux tangentes seront:

$$x = \frac{\beta - m\alpha - \frac{p}{2m}}{\sqrt{1+m^2}} \qquad y = \frac{m\beta + \alpha + \frac{m^2 p}{2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

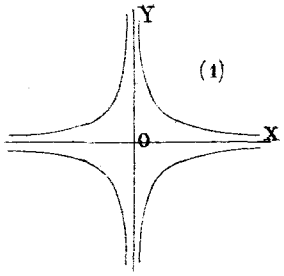
L'élimination de m fournira le lieu.

1. — *Soit le sommet.* — L'élimination donne:

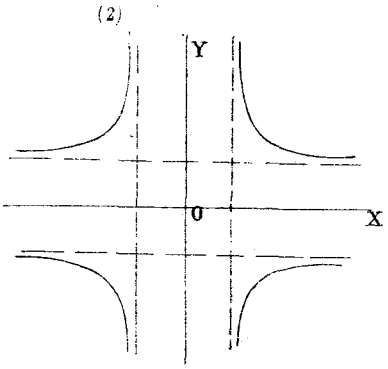
$$y = \frac{p}{2}\,\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}}$$

ou en coordonnées polaires

$$r = \frac{p}{2}\,\frac{tg^{\frac{2}{3}}\theta}{\sin\theta\sqrt{1+tg^{\frac{2}{3}}\theta}}$$



En admettant le double signe devant le radical, la courbe se compose de 4 parties, comprenant chacune deux branches infinies, asymptotiques aux axes et les ayant pour axes de symétrie.



2. — Soit le foyer. — L'équation du lieu est

$$y = \frac{p}{2}\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

On $$y^2 = \frac{p^2 x^2}{4x^2 - p^2}$$

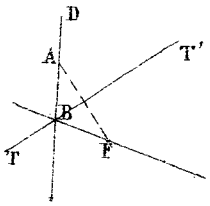
La courbe, symétrique par rapport aux axes, a pour asymptotes les droites

$$x = \pm \frac{p}{2}.$$

Et $$y = \pm \frac{p}{2}$$

---

596. — Lieu des foyers des paraboles qui ont même directrice et une tangente commune.



R. — Un point F du lieu est le symétrique d'un point A de la directrice, par rapport à la tangente fixe.

Le lieu est donc la droite BF symétrique de la directrice par rapport à la tangente.

---

597. — Lieu des foyers des paraboles qui ont la directrice en un point commun.

R. — C'est la circonférence tangente à la directrice et dont le centre est au point donné.

---

598. — Lieu des foyers des paraboles tangentes à 3 droites fixes.

R. — Les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes à la parabole sont en ligne droite. Le lieu demandé est donc la circonférence circonscrite au triangle formé par les 3 tangentes.

---

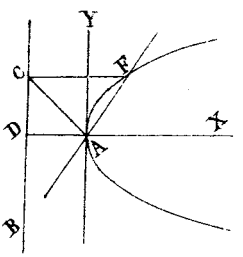
599. — Lieu des sommets des paraboles qui ont un foyer commun et une tangente commune.

R. — C'est la circonférence décrite sur la distance du foyer à la tangente, comme diamètre.

---

600. — On donne une tangente à la parabole et le sommet; trouver le lieu des foyers.

R. — Soit BC la tangente, A le sommet donné; pour obtenir un foyer F, j'abaisse du point A une perpendiculaire sur la tangente, je mène un axe quelconque, j'élève au point A une perpendiculaire AC sur cet axe, et par le point C je mène CF parallèle à AD. Le point F ainsi obtenu est le foyer correspondant à l'axe AF.



Cherchons l'équation du lieu en coordonnées polaires.

Soit A le pôle, AD l'axe polaire; on a :

$AD = a$ $\qquad AF = \rho \qquad$ $FAx = \omega$

$$AC = \frac{a}{\sin \omega}$$

Le triangle AFC donne :

$$AC = \rho \operatorname{Tg} \omega$$

Donc l'équation cherchée est :

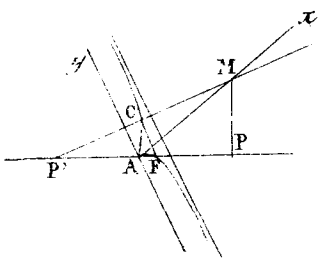
$$\frac{a}{\sin \omega} = \rho \operatorname{Tg} \omega$$

$$\rho = \frac{a \cos \omega}{\sin^2 \omega}$$

On
$$\rho^2 \sin^2 \omega = a\rho \cos \omega$$
ou, en coordonnées rectangulaires
$$y^2 = ax$$
C'est l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

---

601. — On donne un point de la parabole et le sommet ; trouver le lieu des foyers.



R. — Soient A le sommet et M le point donné ; pour avoir un point du lieu, je mène par A une droite quelconque ; j'abaisse MP perpendiculaire sur cette droite, et je prends AP' = AP, la droite MP' est une tangente à la parabole, dont AP est l'axe, puis en A j'élève une perpendiculaire AC sur AP et au point C, je mène CF perpendiculaire sur MP'. Le point F est le foyer de la parabole considérée. Soit AM = a, et Ax l'axe polaire ; AF = ρ et MAF = ω ; le triangle MAP donne :
$$MP = a \sin \omega$$
$$AP = a \cos \omega$$
Donc
$$PP' = 2a \cos \omega$$
$$MP'^2 = a^2 \sin^2 \omega + 4a^2 \cos^2 \omega$$
$$P'C^2 = \frac{a^2 \sin^2 \omega + 4a^2 \cos^2 \omega}{4}$$
Car on a
$$P'F = \rho + a \cos \omega$$
$$P'A \times P'F = P'C^2$$
Donc
$$a^2 \cos^2 \omega + a\rho \cos \omega = \frac{a^2 \sin^2 \omega + 4a^2 \cos^2 \omega}{4}$$
D'où
$$\rho = \frac{a^2 \sin^2 \omega}{4a \cos \omega} = \frac{a \sin \omega \operatorname{tg} \omega}{4}$$
Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires, il vient :

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\dfrac{ay^2}{x^2+y^2}}{\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{ay^2}{4x\sqrt{x^2+y^2}}$$

On
$$ay^2 = 4x\,(x^2+y^2)$$
$$y^2 = \frac{4x^3}{a-4x}$$
$$y = \pm\, 2x\sqrt{\frac{x}{a-4x}}$$

C'est l'équation d'une cissoïde ayant pour asymptote la droite $x = \frac{a}{4}$.

---

602. — Lieu des sommets des paraboles qui ont un point commun et même foyer.

R. a. L'équation d'une de ces paraboles est, en prenant le foyer pour origine, et le point donné sur Ox

$$x^2+y^2 = (my+nx+p)^2 \qquad (1)$$

avec la condition $\qquad m^2+n^2 = 1 \qquad (2)$

L'équation de l'axe sera $\qquad y = \frac{m}{n}x \qquad (3)$.

Le sommet est à l'intersection de (1) et de (3); soit a l'abscisse du point donné. On aura

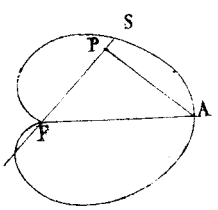
$$a^2 = (na+p)^2 \qquad (4)$$

Éliminant m, n, p entre les 4 équations, il vient pour le lieu :
$$2(x^2+y^2) \pm a\sqrt{x^2+y^2} - ax = 0$$

Ou en coordonnées polaires $\qquad 2r \pm a - a\cos\theta = 0$

D'où $\qquad r = a\cos^2\frac{1}{2}\theta \qquad$ et $\qquad r = -a\sin^2\frac{1}{2}\theta$

On voit que si θ et r satisfont à la 1re équation, $\pi+\theta$ et $-r$ satisfont à la seconde ; elles représentent donc le même lieu. C'est une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{a}{4}$ roulant sur un cercle de rayon égal. Elle est symétrique par rapport à Ox et passe au point donné et au foyer donné.



b. — Le sommet S de la parabole qui aura SF pour axe, sera tel que :

$$AP^2 = 4\,SF \times SP$$

Or : $AP = a \sin\theta$ $\quad SF = r$ $\quad SP = r - a\cos\theta$

Donc le lieu a pour équation

$$a^2 \sin^2\theta = 4r(r - a\cos\theta)$$

Résolvant par rapport à r, il vient encore

$$r = a\,\frac{\cos\theta \pm 1}{2}$$

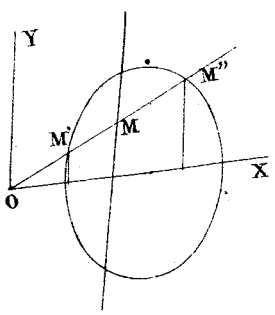
A est lui-même sommet de l'une des paraboles, et F devient sommet, quand la parabole se réduit à la droite FA.

En effet pour $p = 0$, la parabole $y^2 = 2px$ se réduit à $y = 0$.

VIII. — Complément relatif aux Courbes du 2e degré.

A. — Propriétés générales.

603. — Polaires dans les courbes du 2e degré.



R. Définition. — La polaire d'un point par rapport à une courbe est le lieu des points harmoniques conjugués de ce point, par rapport à la courbe.

Soient O le point donné, M un point du lieu. Prenons pour axes le diamètre passant au point O et la parallèle au diamètre conjugué.

Par définition $\quad OM' \times MM'' = M'M \times OM''$

D'où $\quad x'(x'' - x) = (x - x')x''$

Ou $\quad x(x' + x'') = 2x'x''$

Or, l'équation de la courbe est $Ay^2 + Cx^2 + Ex + F = 0$; soit $y = mx$ celle de OM ; x' et x'' seront les racines de l'équation :

$$(Am^2 + C)x^2 + Ex + F = 0$$

On a donc $$\frac{x' + x''}{x'x''} = -\frac{E}{F}$$

Et l'équation du lieu est :

$$Ex + 2F = 0.$$

C'est donc une droite parallèle au diamètre conjugué de celui, qui passe au pôle.

Remarque. — I. — Si la sécante devient tangente, M vient au point de contact ; la polaire est donc la corde de contact des tangentes issues du pôle. Son équation générale est donc

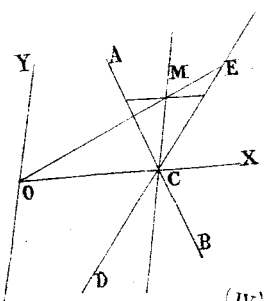
$$(2A\beta + B\alpha + D)y + (B\beta + 2C\alpha + D)x + D\beta + E\alpha + 2F = 0$$

(α, β) étant les coordonnées du pôle. — L'équation ne changeant pas quand on y permute α et x, β et y, on en conclut que, quand le pôle se déplace sur une droite, la polaire passe constamment par le pôle de la droite. — Cela devait être, car dans la division harmonique, A et M sont conjugués.

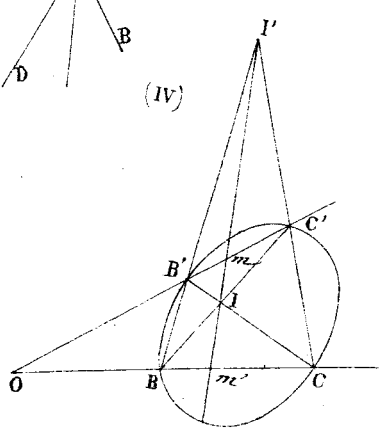
II. — L'équation au foyer étant

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = (my + nx + p)^2$$

la polaire du foyer sera, toutes réductions faites, $my + nx + p = 0$. C'est donc la directrice.



(IV)



III. — Appliquant le théorème général au cas d'un système de 2 droites, on trouve une droite passant par leur point de rencontre, les 4 droites OC, AC, MC, EC forment un faisceau harmonique.

IV. — De là une nouvelle propriété de la polaire. — Menons deux sécantes OBC, OB'C' ; le lieu des points I ou I' est la polaire du point O. En

effet, m m' qui est la polaire de O par rapport aux 2 systèmes BI', CI' et B'C, BC' passe, par conséquent, aux points I et I'.

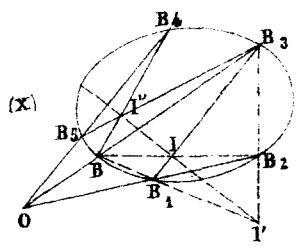
V. — Appliquant cette construction au cas de 2 droites, on retrouve une propriété connue.

VI. — Quand les droites OB, OB' se confondent, les sécantes BB', CC' deviennent tangentes; on peut donc dire encore, que la polaire d'un point O est le lieu des rencontres des tangentes, menées aux points de rencontre des sécantes, passant par O avec la courbe.

VII. — Si le pôle est sur la courbe, la polaire est la tangente en ce point.

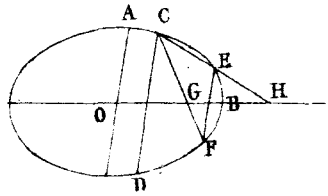
VIII. — Si le pôle est à l'infini, la polaire passe au centre.

IX. — Les réciproques de ces 2 propriétés sont vraies.



X. — Si l'on donne 5 points B, B_1, B_2, B_3, B_4 d'une courbe du 2d degré, on peut par les polaires, en trouver un sixième B_5. — Les systèmes (B B_3, B_1 B_2), (B B_1, B_2 B_3) et (B B_2, B_1 B_3) donnent les points O, I, I'; on joindra B B_4 et II', ce qui déterminera I'', puis les droites O B_4 et B_3 I'' donneront B_5.

604. — Th. Soient OA, OB 2 diamètres conjugués d'une conique; on mène 2 cordes CD, EF parallèles à OA; et on joint CF, CE. — Les points G et H de rencontre de ces droites avec OB sont tels, que OB est moyenne proportionnelle entre OG et OH.



R. — On sait, en effet, par la théorie des polaires, que G est sur la corde de contact

des tangentes issues du point H, et l'on sait qu'on a entre OB, l'abscisse OG du point de contact d'une tangente et la longueur OH, la relation :

$$\underline{OB^2 = OG.OH} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

605. — Si dans $y^2 = 2px + qx^2$, on fait $y = p$, on obtient l'abscisse du foyer.

R. — Pour identifier cette équation avec

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (my + nx + l)^2 \qquad (2)$$

Il faut pour

$$m = 0 \qquad n^2 - 1 = q \qquad \beta = 0 \qquad \alpha + nl = p \qquad -\alpha^2 + l^2 = 0$$

Si l'on fait $x = \alpha$ dans l'équation (2), il vient

$$y^2 = (n\alpha + l)^2$$

Donc $\underline{y^2 = p^2}$. c.q.f.d.

606. — Equation générale des coniques, qui ont une directrice donnée et une excentricité donnée.

R. — Prenons la directrice pour axe des y et les coordonnées rectangulaires. L'équation sera

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = n^2 x^2$$

Le centre ayant pour coordonnées $\begin{cases} y = \beta \\ x = \dfrac{\alpha}{1-n^2} \end{cases}$ sera à une distance du foyer égale à

$$\frac{\alpha}{1-n^2} - \alpha = \frac{n^2\alpha}{1-n^2}.$$

On doit avoir $\dfrac{n^2\alpha}{1-n^2} = c$

L'équation devient donc

$$\underline{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \frac{c}{\alpha + c}\, x^2.$$

607. — Equation d'une conique, ayant pour axe focal l'axe des x et pour foyer l'origine. — Equation des tangentes issues d'un point α, β.

R. — $$x^2+y^2=(nx+l)^2.$$

Equation d'une droite passant au point α, β.

$$y-\beta = m(x-\alpha).$$

Exprimant qu'elle est tangente, on trouve

$$m^2\left[a^2-(an+l)^2\right]-2m\beta\left[\alpha(1-n^2)-ln\right]+\beta^2(1-n^2)-l^2=0$$

D'où $$m=\frac{\beta[\alpha(1-n^2)-ln]\pm l\sqrt{a^2+\beta^2-(an+l)^2}}{a^2-(an+l)^2}$$

Nota. — On peut vérifier que, l'origine étant supposée le foyer de gauche de l'ellipse, on aurait :

$$n=\frac{c}{a} \qquad l=\frac{b^2}{a}$$

D'où $$m=\frac{\beta(a-c)\pm\sqrt{a^2\beta^2+b^2(a-c)^2-a^2b^2}}{(a-c)^2-a^2}$$

Et en portant l'origine au centre

$$m=\frac{\beta a\pm\sqrt{a^2\beta^2+b^2a^2-a^2b^2}}{a^2-a^2}$$

forme connue.

B. — Intersection des courbes du 2e degré.

608. — Courbes homofocales. — Intersection.

R. — Equations : $$x^2+y^2=(my+nx+l)^2$$
$$x^2+y^2=(m'y+n'x+l')^2$$

On a donc tout de suite les systèmes de droites.

$$my+nx+l=\pm(m'y+n'x+l').$$

---

609. — Intersection de 2 courbes dont les équations sont symétriques en x et y.

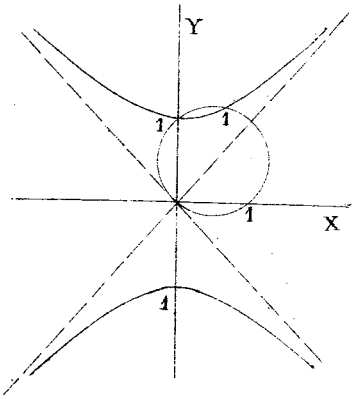
R. — Equations $$a(x^2+y^2)+bxy+c(x+y)+d=0$$
$$a'(x^2+y^2)+b'xy+c'(x+y)+d'=0$$

On prendra pour inconnues xy et $x+y$.

---

610. — Intersection des courbes $x^2+y^2-x-y=0$, $x^2-y^2-xy+1=0$.

R. — Éliminant d'abord y, puis y^2 entre les deux équations, on a



$$y^2 = \frac{-x^3+2x^2+1}{x+1}$$

et $$y = \frac{2x^2-x+1}{x+1}$$

d'où

$$(-x^3+2x^2+1)(x+1) = (2x^2-x+1)^2$$

ou $5x^4-5x^3+3x^2-3x=0$.

Les racines réelles de cette équation sont 0 et 1 et donnent toutes deux $y=1$.

611. — Équation des cordes communes à une circonférence tangente à l'axe des x, à l'origine et à un système de 2 droites issues de l'origine.

R. — $x^2+y^2-2ry=0$ Équation de la circonférence.

$Ay^2+Bxy+Cx^2=0$, Équation de l'ensemble de 2 droites.

$(A+\lambda)y^2+Bxy+(C+\lambda)x^2-2r\lambda y=0$, équation des courbes qui passent par les intersections des 2 premières. — La condition pour qu'elle représente 2 droites se réduit à

$$4r^2\lambda^2(C+\lambda)=0$$

et a pour racine double $\lambda=0$, d'où le système

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=0$$

et pour racine simple $\lambda=-C$, d'où les droites $y=0$ et

$$(A-C)y+Bx+2rC=0$$

612. — Construire les points d'intersection des deux courbes

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$$
$$xy-m^2=0$$

au moyen d'une droite et de l'une des courbes.

R. — L'équation générale du second degré représentant les courbes passant par les points d'intersection des courbes données est :

$$a^2y^2 + b^2x^2 + Rxy - a^2b^2 - Rm^2 = 0.$$

Écrivons que cette équation représente 2 droites qui se coupent ; nous aurons la condition :

$$(R^2 - 4a^2b^2)(a^2b^2 + Rm^2) = 0 \qquad (3)$$

qui donne pour R les trois valeurs :

$$R = -\frac{a^2b^2}{m^2}$$

$$R = \pm 2ab.$$

Nous allons examiner successivement chacune de ces trois solutions.

1° $R = -\frac{a^2b^2}{m^2}$, l'équation (3) devient, avec cette hypothèse :

$$a^2y^2 + b^2x^2 - \frac{a^2b^2}{m^2}xy = 0$$

ou bien : $$b^2\left(x - \frac{a^2y}{2m^2}\right)^2 - \frac{a^2y^2}{4m^4}(a^2b^2 - 4m^4) = 0$$

Cela posé, si $a^2b^2 - 4m^4 > 0$, c'est-à-dire si

$$m^2 < \frac{ab}{2}.$$

l'équation précédente représente deux droites, qui se coupent, et les 2 courbes données se coupent, par suite, en quatre points, qui seront formées par les intersections de l'une d'elles avec les deux droites précédentes.

Si $m^2 = \frac{ab}{2}$, l'équation (4) représente une seule droite

$$y = \frac{b}{a}x.$$

qui passe par les points d'intersection des deux courbes ; donc celles-ci ne se coupent qu'en deux points ; et comme elles sont concentriques, il s'ensuit, qu'elles sont tangentes.

On peut, du reste, facilement vérifier, qu'au point $x' = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y' = \frac{b}{\sqrt{2}}$, d'intersection des deux courbes, elles ont une tangente commune, car la tangente à l'ellipse, au point x'', y'', a pour équation :

$$a^2yy'' + b^2xx'' = a^2b^2$$

et la tangente à l'hyperbole au même point, est :

$$yx' + y'x = ab.$$

substituant pour x et y leurs valeurs $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{2}}$, les deux équations deviennent :

$$ay + bx = ab\sqrt{2}$$

Donc les deux courbes sont bien tangentes.

Enfin, si $m^2 > \frac{ab}{2}$, l'équation (4) représente l'origine des coordonnées, qui n'appartient ni à l'une ni à l'autre des deux courbes, et par conséquent elles ne se coupent pas.

2° $R = 2ab$. L'équation (3) devient :

$$a^2y^2 + b^2x^2 + 2abxy - a^2b^2 - 2abm^2 = 0$$

ou

$$(ax + by)^2 = ab(ab + 2m^2)$$

ce qui fait deux droites parallèles au diamètre $y = \frac{b}{a}x$; cette solution n'indique rien, car dans le cas où les deux courbes ne se coupent pas, ces deux droites existent cependant.

3° $R = -2ab$. L'équation (3) devient :

$$(ay - bx)^2 = ab(ab - 2m^2)$$

On voit par là, que si $m^2 < \frac{ab}{2}$ l'équation représente deux droites parallèles, lesquelles passent par les points d'intersection des deux courbes.

Si $m^2 = \frac{ab}{2}$, l'équation ne représente qu'une droite et les deux courbes sont tangentes.

Enfin, si $m^2 > \frac{ab}{2}$, l'équation ne représente rien, et les deux courbes ne se coupent pas. Nous retrouvons ainsi les mêmes conditions que nous avait donné la première solution, et les deux droites précédentes étant les plus faciles à construire, puisqu'elles sont parallèles au diamètre $y = \frac{b}{a}x$, devront être employées de préférence.

---

613. — Systèmes de sécantes communes à l'ellipse et au lieu des sommets des angles droits circonscrits.

R. — Ce lieu est, comme l'on sait, la circonférence

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

L'équation générale des courbes du 2d degré, passant aux points communs sera

$$x^2(b^2+\lambda)+y^2(a^2+\lambda)=a^2b^2+\lambda(a^2+b^2)$$

La condition pour qu'elle représente un système de droites se réduise à

$$[a^2b^2+\lambda(a^2+b^2)](a^2+\lambda)(b^2+\lambda)=0.$$

Les valeurs $\lambda=-b^2$ $\lambda=-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

donnent les systèmes imaginaires

$$c^2y^2+b^4=0 \qquad a^4y^2+b^4x^2=0.$$

La valeur $\lambda=-a^2$ donne les directrices :

$$x=\pm\frac{a^2}{c},$$

Ces droites rencontrent l'ellipse en le cercle sur le lieu imaginaire $c^2y^2+b^4=0$.

614. — *Intersection de la courbe* $Ay^2+2Bxy+Cx^2+F=0$ *avec le cercle* $x^2+y^2=R^2$.

Droites qui vont de l'origine aux points d'intersection. Réduire ces droites à une seule. — Déduire de là les théorèmes d'Apollonius.

R. — Multiplions dans la 1re équation par R^2, dans la seconde par F et ajoutons, nous aurons :

$$(AR^2+F)y^2+2BR^2xy+(CR^2+F)x^2=0$$

Équation de l'ensemble des droites demandées. Il n'y en a que 2, parce que les 2 courbes ont l'origine pour centre. Les coefficients angulaires sont donnés par

$$(AR^2+F)m^2+2BR^2m+CR^2+F=0$$

Pour qu'ils soient égaux et que les 2 droites se réduisent à une seule, on doit avoir :

$$B^2R^4=(AR^2+F)(CR^2+F)$$

$$(B^2-AC)R^4-F(A+C)R^2-F^2=0 \qquad (\alpha)$$

En ce cas, R est égal à l'un des demi-axes de la

courbe, qui sont les valeurs extrêmes du rayon issu du centre. — L'équation (α) a donc pour racines les carrés des demi-axes.

En supposant les axes primitifs dirigés suivant des diamètres conjugués d'angle θ, l'équation du cercle serait

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = R^2,$$

et on aurait :

$$B = 0 \qquad a'^2 = -\frac{F}{C} \qquad b'^2 = -\frac{F}{A}$$

Or, d'après l'équation α, qui devient

$$ACR^4 + F(A+C)R^2 + F^2\sin^2\theta = 0$$

On aura $a^2 + b^2 = -F\dfrac{A+C}{AC}$ $\qquad a^2b^2 = \dfrac{F^2\sin^2\theta}{AC}$

Or $A + C = -F\dfrac{a'^2 + b'^2}{a'^2 b'^2}$ $\qquad AC = \dfrac{F^2}{a'^2 b'^2}$

Donc $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$ $\qquad a^2b^2 = a'^2b'^2\sin^2\theta.$

C. q. f. d.

6/5. — Mener par un point extérieur (α, β) une normale à l'ellipse.

R. — Les pieds des normales sont à l'intersection de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avec l'hyperbole

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

L'équation en λ pour l'intersection aura ses racines réelles, si on a

$$A = 27a^2b^2c^4\alpha^2\beta^2 - [c^4 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2]^3 < 0 \qquad (c)$$

L'hyperbole passant au centre de l'ellipse, il y a toujours 2 points d'intersection réels ; si la condition (c) est remplie, il y en aura donc 4. — Quand l'équation en λ a une racine double, les courbes sont tangentes ; le lieu des points d'où on peut mener 3 normales est donc $A = 0$. Quand il n'y a qu'une racine réelle, 2 des points sont imaginaires.

Lieu des points d'où partent 3 normales.

En posant $\frac{a^2\alpha^2}{c^4} = r^3$ $\qquad \frac{b^2\beta^2}{c^4} = s^3$

on trouve $\quad (r+s-1)(r^2+s^2-rs+r+s+1) = 0$

Le second facteur peut s'écrire

$$\frac{1}{4}\left[(2r-s+1)^2+3(s+1)^2\right]$$

L'équation se réduit donc à :

$$r+s-1=0$$

Ou

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

616. — Quand 2 coniques ont leurs axes parallèles, il en est de même pour toutes les coniques, qui passent par leurs points d'intersection.

R. — En effet, les équations de 2 coniques étant :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

$$A'y^2+B'xy+\&\ \ldots\ldots\ldots=0$$

et l'équation qui donne les directions des axes :

$$Bm^2+2(C-A)m-B=0$$

On a, par hypothèse $\quad \frac{C-A}{B}=\frac{C'-A'}{B'}$

Or, toute conique passant par les points de rencontre des 2 premières a pour équation :

$$(A+A'\lambda)y^2+\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

et le rapport $\frac{C-A}{B}$ pour cette courbe, sera

$$\frac{C+C'\lambda-(A+A'\lambda)}{B+B'\lambda}=\frac{C-A+\lambda(C'-A')}{B+B'\lambda}=\frac{C-A}{B}=\frac{C'-A'}{B'}$$

C. q. f. d.

Corollaire. — Si l'une des courbes est un cercle, on pourra toujours la regarder comme ayant ses axes parallèles à ceux de l'autre courbe. Donc en ce cas, les droites qui passent aux points de rencontre seront deux à deux symétriques par rapport à des axes parallèles à ceux de la seconde conique.

617. — Les foyers sont des cercles doublement tangents à l'ellipse, qui se réduisent à leurs centres.

R. — L'équation d'un pareil cercle est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda (my + nx + p)^2 = 0$$

avec les conditions

$$\frac{1}{a^2} + \lambda n^2 = \frac{1}{b^2} + \lambda m^2 \quad \text{et} \quad \lambda mn = 0$$

Soit, par exemple $m = 0$

D'où $$\lambda = \frac{c^2}{a^2 b^2 n^2}.$$

L'équation devient donc :

$$\left(x + \frac{c^2 p}{a^2 n}\right)^2 + y^2 = b^2 \frac{a^4 n^2 - c^2 p^2}{a^4 n^2}$$

réduisant le rayon à zéro, on a

$$a^4 n^2 = c^2 p^2 \qquad \text{d'où} \qquad a^2 n = \pm cp$$

et les coordonnées du centre seront $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm c \end{cases}$ c. q. f. d.

---

618. — Équation d'une courbe du 2d degré, doublement tangente à une courbe du 2d degré donnée.

R. — Soit $A = 0$ l'équation de la courbe donnée, et P un trinome de la forme $ax + by + c$. L'équation demandée sera

$$A + \lambda P^2 = 0.$$

En effet, si $P_1 = 0$ est l'équation d'une droite très voisine de la droite $P = 0$, $A + \lambda PP_1 = 0$ représente une courbe du 2d degré passant par les intersections des 2 courbes $A = 0$ et $PP_1 = 0$. Passant à la limite, on voit que $A + \lambda P^2 = 0$ représente des courbes du 2d degré, tangentes à la courbe donnée aux points de rencontre de cette courbe avec la droite $P = 0$.

Je dis qu'elle les représente toutes. — En effet, supposons donnée une courbe doublement tangente, et soit $P = 0$ l'équation de la corde commune. $A + \lambda P = 0$ représente des courbes tangentes à $A = 0$ aux extrémités de cette corde. Si l'on se donne un point de la courbe, elle sera déterminée, car 2 tangentes en leurs points de contact représentent 4 conditions ; le point donné fournit la 5ème

condition nécessaire, en fixe la valeur de λ. C. q. f. d.

---

619. — Équation de l'ensemble des tangentes menées d'un point extérieur à une courbe du 2e degré.

R. — L'ensemble des 2 tangentes forme une courbe du 2e degré doublement tangente à la courbe donnée. Si $f(x,y)=0$ est l'équation de la courbe donnée, et $mx+ny+p=0$ celle de la corde de contact, l'équation demandée sera donc :

$$f(x,y)+\lambda(mx+ny+p)^2=0$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point donné. — On aura

$$f(x_1,y_1)+\lambda(mx_1+ny_1+p)^2=0$$

λ s'élimine, et l'équation définitive est

$$\frac{f(x,y)}{f(x_1,y_1)}=\left(\frac{mx+ny+p}{mx_1+ny_1+p}\right)^2$$

---

620. — Th. — Par un point A dans le plan d'une conique, on mène le diamètre qui y passe, la droite conjuguée et une 3e droite quelconque, rencontrant la courbe en 2 points ; les tangentes menées en ces points coupent la seconde droite en 2 points également distants de A.

R. — Soient pris pour axes les 2 premières droites ; l'équation de la courbe sera :

$$Ay^2+Cx^2+Ex+F=0$$

L'équation de l'ensemble des tangentes menées au point (x_1, y_1) et ayant pour corde de contact $y=mx$ est

$$\frac{Ay^2+Cx^2+Ex+F}{Ay_1^2+Cx_1^2+Ex_1+F}=\left(\frac{y-mx}{y_1-mx_1}\right)^2$$

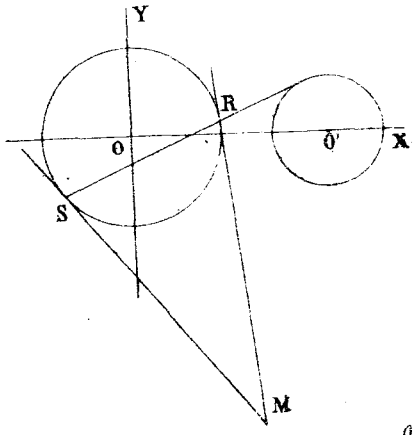
Faisant $x=0$, on a une équation ne renfermant que y^2 ; donc les points de rencontre avec Oy sont également distants de l'origine.

C. q. f. d.

C.

C. — Lieux géométriques.

621. — On donne deux cercles extérieurs : par un point de l'un d'eux, on mène une tangente à ce cercle ; elle coupe le second cercle en un point par lequel on mène deux tangentes ; on demande le lieu des points de rencontre de ces tangentes.



R. — Je prends pour origine le centre de l'un des cercles, et pour axe des x la ligne des centres ; soit $OO' = \alpha$; les équations de ces deux cercles sont

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = R^2$$

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2 + y^2 = R'^2$$

La droite RS étant la corde de contact des tangentes, on a :

$$(3) \qquad yy' + xx' = R^2$$

De cette équation on tire

$$y = \frac{R^2 - xx'}{y'}$$

et substituant dans (2), il vient

$$\left(\frac{R^2 - xx'}{y'}\right)^2 + (x-\alpha)^2 = R'^2$$

ou $R^4 + x^2x'^2 - 2R^2xx' + x^2y'^2 + \alpha^2y'^2 - 2\alpha xy'^2 = R'^2y'^2$

$$x^2(x'^2 + y'^2) - 2x(R^2x' + \alpha y'^2) + R^4 + \alpha^2y'^2 - R'^2y'^2 = 0.$$

Cette équation donne les abscisses des points d'intersection de la corde de contact avec la circonférence R', exprimant que les deux points se confondent, on aura la condition de tangence, laquelle sera une relation entre x' et y', et par conséquent l'équation du lieu cherché. Cette condition est

$$(R^2x' + \alpha y'^2)^2 = \left[y'^2(\alpha^2 - R'^2) + R^4\right](x'^2 + y'^2)$$

$$R^4x'^2 + \alpha^2y'^4 + 2\alpha R^2x'y'^2 = y'^2(\alpha^2 - R'^2)(x'^2 + y'^2) + R^4x'^2 + R^4y'^2$$

$y'^2 = 0$ est une solution étrangère que je supprime, et il reste :

$$\alpha^2 y'^2 + 2R^2\alpha x' = (\alpha^2 - R'^2)(x'^2 + y'^2) + R^4$$

L'équation du lieu est donc

$$x^2(\alpha^2 - R'^2) - R'^2 y^2 - 2R^2\alpha x + R^4 = 0$$

Il n'y a pas de terme du 1er degré en y ; donc l'axe des x est un axe de la courbe. L'équation représente une des trois courbes du second degré, selon les différentes valeurs de α.

1° Soit $\alpha = 0$; on a

$$x^2 R'^2 + y^2 R'^2 = R^4.$$

équation d'une courbe dont le centre est à l'origine et dont le rayon $R^2 = \frac{R^4}{R'^2}$, c'est-à-dire que le rayon du premier cercle est moyen proportionnel entre celui du second cercle et celui du lieu.

2° Soit $\alpha < R^2$; il s'ensuit $\alpha^2 - R'^2 < 0$; dans ce cas, la quantité $B^2 - 4AC$ est $-R'^2(\alpha^2 - R'^2)$; donc le lieu cherché est une ellipse dont les axes sont :

$$y = \frac{R^2}{R'} \qquad x = \frac{R^2}{R' + \alpha}$$

3° Soit $\alpha = R'$. L'équation devient :

$$-y^2 R'^2 - 2R^2 R' x + R^4 = 0$$

et elle représente une parabole qui, rapportée à son sommet, s'écrit :

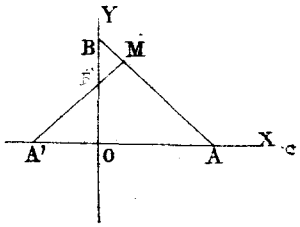
$$y^2 R' = 2R^2 x.$$

4° Soit enfin $\alpha > R'$; il s'ensuit : $\alpha^2 - R'^2 > 0$ et la quantité $B^2 - 4AC$ est positive ; dans ce cas le lieu cherché est une hyperbole.

---

622. — Deux points A, A' étant pris sur Ox, on mène par ces points des droites telles que la somme des aires des triangles AOB, A'OB' soit constante. Lieu du point de rencontre M de ces droites.

R. — Équation des deux droites :



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{-a'} + \frac{y}{b'} = 1$$

Equation de condition :

$$ab + a'b' = m^2$$

Equation du lieu :

$$\frac{ay}{1-\frac{x}{a}} + \frac{a'y}{1+\frac{x}{a'}} = m^2$$

C'est une courbe du 2d degré passant aux points A et A'.

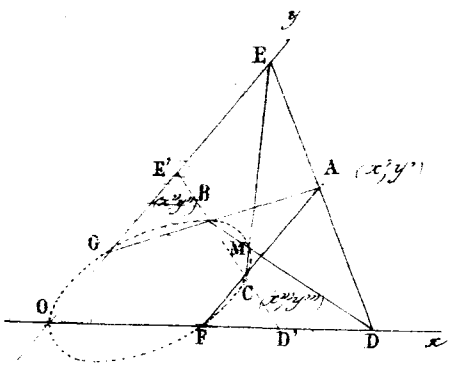
Pour $a = a'$, c'est la parabole $m^2x^2 + 2a^3y - a^2m^2 = 0$ qui a pour axe Oy et dont le sommet est au point $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{m^2}{2a} \end{cases}$

Pour $a \gtrless a'$, on a une hyperbole dont les asymptotes sont $x = \frac{aa'}{a-a'}$ et $y = \frac{m^2}{a^2-a'^2}x + \frac{m^2}{(a^2-a'^2)^2}(a^3+a'^3)$

---

623. — Etant données dans un plan deux droites fixes Ox, Oy et 3 points fixes A, B, C, on suppose un triangle dont les côtés passent constamment par ces 3 points et dont 2 sommets se déplacent sur les droites fixes. Lieu du 3e sommet.

R. — Soient $OD = p$, $OE = q$.



On a $\frac{x'}{p} + \frac{y'}{q} = 1$

Equations de BD et de CE

$$y = \frac{y''}{x''-p}(x-p)$$

$$y - q = \frac{y''' - q}{x'''}x.$$

Eliminant p, q, on a pour le lieu

$$x'(y-y'')(yx''' - xy''') + y'(x''-x)(yx'' - xy'') = (yx'' - xy'')(yx''' - xy''')$$

C'est une courbe du 2d degré, qui passe au point O et aux points B et C.

Elle coupe Oy aux points $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x'y'' - y'x''}{x' - x''} \end{cases}$

celui-ci est le point G où Oy rencontre AB. De même la courbe passe au point F de rencontre de Ox avec AC. — Si on prolonge BC jusqu'en D' et E', on voit que c'est quand D vient en D' ou E en E', que l'on obtient les points B et C; — on obtient O quand D et E se confondent en ce point. Enfin M vient en F quand D s'y trouve.

Remarque. — On peut déduire de là le théorème de l'hexagone de Pascal.

En effet, E, A, D sont les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone inscrit OFCMBG.

Cas particulier. — Les points B et C sont sur Ox et Oy; l'équation se réduit à

$$\frac{y^2}{y'y''} + \frac{xy}{x'y'} + \frac{x^2}{x'x''} - \frac{y}{y'} - \frac{x}{x'} = 0$$

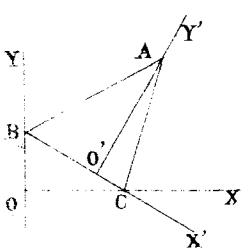
elle représentera deux droites si l'on a:

$$\frac{1}{x'y''} + \frac{1}{x''y'} - \frac{1}{x'y'} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{y''} + \frac{x'}{x''} = 1.$$

c'est-à-dire si le point A est sur la droite BC. Les 2 droites sont la droite ABC et la droite $\frac{y}{y'} + \frac{x}{x'} = 0$ ou la polaire de A, par rapport au système Ox, Oy.

---

624. — Lieu du sommet d'un triangle dont les 2 autres sommets s'appuient sur deux droites rectangulaires.



R. — Soient Ox, Oy, les 2 droites fixes, ABC une position du triangle. Menons AO' perpendiculaire à BC; prenons pour axes O'x' et O'y', et posons

$O'B = \alpha \qquad O'A = h \qquad O'C = \beta$

Les équations de Ox et de Oy dans ce système sont

$y = m(x - \beta) \qquad y = -\frac{1}{m}(x + \alpha)$

Les coordonnées de A dans le système Ox, Oy seront donc

$$x = \frac{h + \frac{a}{m}}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}} \qquad y = \frac{h + m\beta}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Éliminant m, on a pour le lieu

$$(\alpha y - hx)^2 + (\beta x - hy)^2 = (h^2 - \alpha\beta)^2$$

C'est une ellipse rapportée à son centre.

Si $h = 0$, l'équation devient

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2;$$

C'est une propriété connue.

Si $h^2 = \alpha\beta$, c'est-à-dire, si le triangle est rectangle en A, le lieu est la droite

$$y = x\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

625. — Lieu des points d'où la somme des tangentes menées à 2 cercles donnés est constante.

R. — Soient $x^2 + y^2 = r^2$ $\qquad (x-a)^2 + y^2 = r'^2$ les équations des 2 cercles. On doit avoir :

$$\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2 - r'^2} = b$$

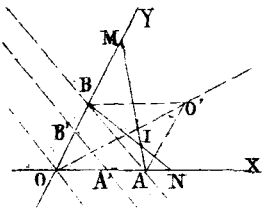
Chassant les radicaux, on trouve :

$$b^2 y^2 + x^2 (b^2 - 4a^2) + 4ax(a^2 + r^2 - r'^2 - b^2) = 4r^2(a^2 - r'^2) + (a^2 - r^2 - r'^2 - b^2)^2$$

Ellipse, parabole ou hyperbole, suivant le signe de $b^2 - 4a^2$.

626. — Par 2 points fixes AB pris sur les côtés d'un angle xoy, on mène des droites AM, BN telles que :

$$\frac{OA}{ON} + \frac{OB}{OM} = K.$$



Lieu du point I de rencontre

R. — Équations de AM et de BN

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{m} = 1 \\ \frac{x}{n} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

Tirant de là m et n et les mettant dans l'équation de condition donnée, on a pour le lieu

$$\frac{\frac{a}{x}}{1+\frac{y}{b}} + \frac{\frac{b}{y}}{1-\frac{x}{a}} = K$$

Ou $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + K\,\frac{xy}{ab} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

C'est une courbe du 2e degré passant par l'origine, — ellipse quand $K^2 < 4$, parabole quand $K^2 = 4$, hyperbole quand $K^2 > 4$. — Pour $K = 2$, l'équation représente une parabole réduite aux deux droites parallèles :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\,;$$

c'est-à-dire BA et la parallèle menée par O.

Le lieu des centres de ces courbes se compose des 2 droites

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0 \quad (OO') \qquad \text{et} \qquad \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} = 1 \quad (B'A')$$

---

627. — *Lieu des foyers des courbes du 2e degré passant par 2 points donnés et ayant pour directrice une droite donnée.*

R. — a. — Prenons la droite donnée pour axe des y. L'équation de l'une des courbes sera

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = n^2 x^2$$

Si (a, b) (a', b') sont les coordonnées des points donnés, on aura donc :

$$(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 = n^2 a^2$$

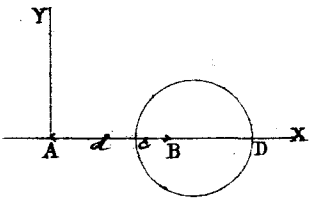
$$(a'-\alpha)^2 + (b'-\beta)^2 = n^2 a'^2$$

L'équation du lieu sera donc

$$\frac{(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2}{(a'-\alpha)^2 + (b'-\beta)^2} = \frac{a^2}{a'^2}$$

Le lieu est un cercle.

b. — Le rapport des distances d'un point du lieu aux 2 points fixes, est égal au rapport constant des distances de ces 2 points à la directrice. Le lieu demandé est donc

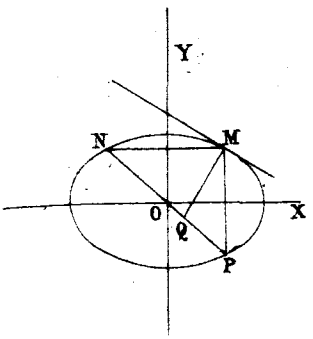


le même que celui des points dont le rapport des distances aux deux points fixes est égal à un rapport donné. — Si on prend sur la droite AB qui joint les points fixes, les 2 points C et D qui jouissent de cette propriété, on sait que le lieu est la circonférence décrite sur CD comme diamètre.

Si on appelle m le rapport donné, l'équation de cette circonférence est

$$y^2 + \left(x - \frac{d}{1-m^2}\right)^2 = \frac{m^2 d^2}{(1-m^2)^2}.$$

628. — On sait que l'hypoténuse d'un triangle rectangle inscrit dans une courbe du 2e degré, et dont le sommet ne bouge pas, passe par un point fixe.



Lieu de ce point quand le sommet se déplace sur la courbe.

R. — Ellipse. — Choisissons les côtés de l'angle droit parallèles aux axes; l'hypoténuse NQ passera par le centre O, et aura pour équation :

$$y = -\frac{y_1}{x_1} x$$

D'ailleurs la normale MQ a pour équation

$$y - y_1 = \frac{a^2 y}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

Et l'on a $\quad a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2.$

Éliminant x_1 et y_1 entre ces 3 équations et posant $r = \frac{a^2+b^2}{c^2}$.

Il vient pour le lieu demandé :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = 1$$

C'est une ellipse semblable et concentrique à la proposée.

Hyperbole. — Changeant b en $-b$, on a :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{r}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = 1,$$

hyperbole concentrique à la 1re, avec $r = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$.

Parabole. — L'ellipse rapportée à son sommet de gauche

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donne, en faisant a et b infinis et $\frac{b^2}{a} = p$, la parabole $y^2 = 2px$.

Le lieu a pour équation modifiée :

$$\frac{(x-a)^2}{\left(\frac{a}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{r}\right)^2} = 1$$

Ou

$$y^2 = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left(1 - r^2 + \frac{2x}{\frac{a}{r^2}} - \frac{x^2}{\frac{a^2}{r^2}}\right)$$

A la limite, $r = 1$ et

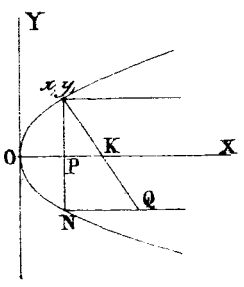
$$\frac{b^2}{r^2}(1 - r^2) = \frac{-4\frac{b^4}{a^2}}{1 + 2\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}} \text{ devient } -4p^2$$

donc le lieu a pour équation

$$y = -4p^2 + 2px = 2p(x - 2p).$$

Parabole égale et parallèle à la première.

Si l'on veut chercher directement cette équation, on verra que, si l'on mène l'un des côtés de l'angle droit parallèle à l'axe, l'hypoténuse lui sera aussi parallèle et aura pour équation :



$$y = -y_1$$

Éliminant x_1, y_1 entre cette équation, celle de la normale

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

et celle de la courbe

$$y_1^2 = 2px$$

On a l'équation du lieu : $y^2 = 2p(x - 2p)$.

Autrement. — La sous-normale PK étant égale à p, on aura :

$$NQ = 2p;$$

Donc, les coordonnées de Q sont :

$$y = -y_1 \qquad x = x_1 + 2p$$

et comme $y_1^2 = 2px$, on en conclut $y^2 = 2p(x - 2p)$.

629. — Lieu des points de rencontre de la courbe

$$y^2 - 2Bxy + Cx^2 + B = 0,$$

où B est variable, avec son diamètre $y = Bx$.

R. — Les coordonnées d'un point du lieu sont

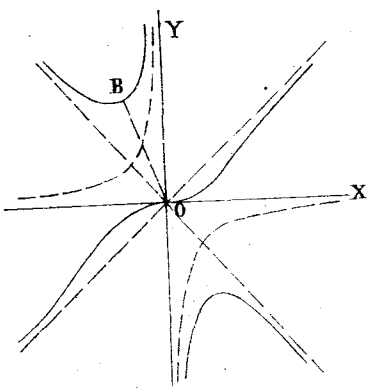
$$x = \pm\sqrt{\frac{B}{B^2 - C}} \qquad y = Bx.$$

Éliminant B, il vient $xy^2 - Cx^3 + y = 0$

Soit $C = 1$, la courbe a pour diamètre l'hyperbole $xy = -\frac{1}{2}$. On a d'ailleurs $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x^4}}{2x}$

Pour $x = 0$, l'une des valeurs de y est infinie, l'autre prend la forme $\frac{0}{0}$ et se réduit à 0 quand on prend le rapport des dérivées. — L'origine est centre et point d'inflexion; d'ailleurs la dérivée seconde $\frac{-2x^4 + \sqrt{1 + 4x^4} - 1}{2x^2\sqrt{1 + 4x^4}}$ n'est nulle, que pour $x = 0$. — Les asymptotes sont les droites $y = \pm x$.

Pour $C = 0$, l'équation représente l'axe des x et l'hyperbole $xy = -1$.



En coordonnées polaires, l'équation est

$$r^2 = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}$$

r est réel pour les pour les valeurs de θ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, et entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Il est inutile d'aller plus loin.

Les rayons vecteurs infinis sont eux-mêmes les asymptotes.

La valeur minime de r est :

$$OB = \sqrt{\frac{2\sqrt{1+\sqrt{5}}}{(1-\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}}$$

en correspond à $\quad \operatorname{tg}.\theta = \sqrt{2+\sqrt{5}}$

630. — Lieu des points de contact des tangentes menées du point $(x = -\alpha,\ y = 0)$ aux courbes représentées par $y^2 = 2px + nx^2$, en prenant : 1° p constant et n variable ; 2° p variable et n constant.

R. — L'équation d'une droite issue du point donné est :

$$y = K(x+\alpha)$$

Condition de tangence :

$$(K^2\alpha - p)^2 = K^2\alpha^2(K^2 - n) \quad \text{ou} \quad K^2 = \frac{p^2}{\alpha(2p - n\alpha)}.$$

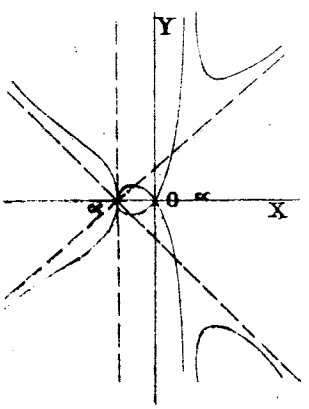
1° Éliminant K et n, il vient pour le lieu, toutes réductions faites :

$$y = \pm\sqrt{\frac{px(x+\alpha)}{\alpha}}$$

C'est une hyperbole, si $p > 0$; l'axe des x, si $p = 0$ et une ellipse si $p < 0$.

α étant supposé positif. — Le centre de la courbe est au point $\begin{cases} x = -\frac{\alpha}{2} \\ y = 0 \end{cases}$, et elle passe au point fixe et à l'origine.

2° Éliminant K et p, on a pour le lieu :



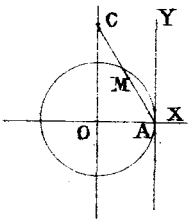
$$y = \pm x\sqrt{\frac{n(x+\alpha)}{x-\alpha}}$$

$n < 0$; Ellipse ; le lieu est entre les droites $x = -\alpha$ et $x = \alpha$; il a celle-ci pour asymptotes ;

$n = 0$. Parabole ; le lieu se compose de l'axe des x et de la droite $x = \alpha$,

$n > 0$; Hyperbole ; le lieu est extérieur aux droites $x^2 - \alpha^2 = 0$ et a 2 asymptotes inclinées $y = \pm(x+\alpha)\sqrt{n}$.

631. — Par le point A d'un cercle, on mène la droite AC, jusqu'au diamètre perpendiculaire à OA. On prend CM = AB. Lieu de M.



R. Équation du cercle :

$$x^2 + y^2 + 2ax = 0$$

Équation de la droite :

$$y = mx$$

Abscisse de B

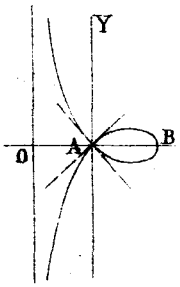
$$x = -\frac{2a}{1+m^2}$$

Pour M on aura donc : $x = -a + \frac{2a}{1+m^2} = a\,\frac{1-m^2}{1+m^2}$

D'où pour le lieu

$$x = a\,\frac{-y^2+x^2}{y^2+x^2}$$

ou $y^2 = x^2\,\frac{a-x}{a+x}$



On reconnaît l'équation du lieu des sommets des hyperboles qui auraient Ay pour asymptote et pour foyer le point B tel que AB = a.

---

632. — Même lieu que le précédent, le cercle étant remplacé par une ellipse, dont A serait le sommet de droite R. — Soient 2a le grand axe, 2b le petit axe de l'ellipse. Il suffit, dans l'équation de la question précédente, de remplacer y par $\frac{a}{b}y$, ce qui donne

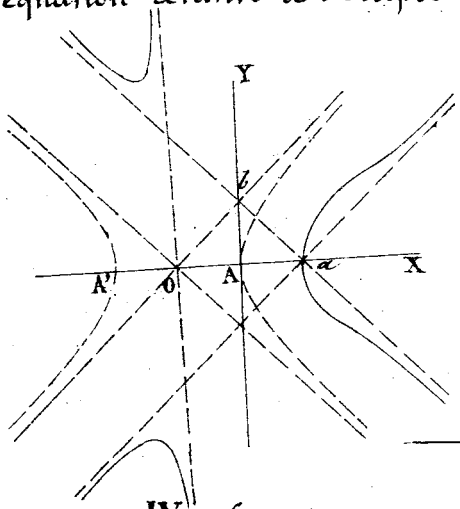
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2\,\frac{a-x}{a+x}$$

La courbe a le même rapport, avec celle du numéro précédent, que le cercle avec l'ellipse.

---

633. — Même lieu que les précédents, pour l'hyperbole.

R. — L'équation s'obtiendra en changeant b^2 en $-b^2$ dans l'équation relative à l'ellipse. Elle sera donc



$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \frac{x-a}{x+a}$$

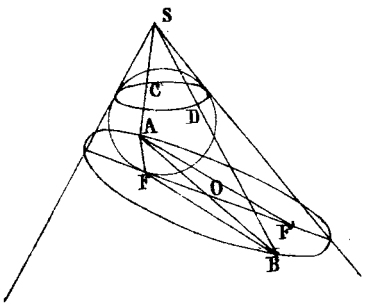
Cette courbe a pour asymptotes les droites

$$x = -a \quad \text{et} \quad y = \pm \frac{b}{a}(x-a)$$

Elle ne rencontre ces 2 dernières, qu'au point $x = a$. En ce point la tangente est parallèle à Oy.

IX. Sections coniques et cylindriques.

634. — Th. Si un cône de révolution passe par une ellipse, la somme des génératrices qui aboutissent aux extrémités d'un même diamètre est constante.
(Concours pour l'admission à l'école normale, 1849)



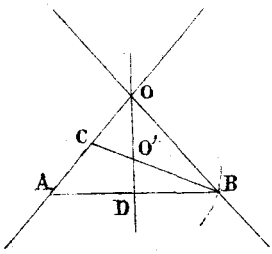
R. — Soit AB un diamètre de l'ellipse. Traçons la sphère inscrite au cône et tangente au plan de l'ellipse. On voit que le point de contact est l'un des foyers F. Cela posé C et D étant les points de contact de la sphère avec les génératrices SA, SB, la somme SC + SD est constante, et on a:

$$AC = AF$$
$$BD = BF = AF'$$

Donc $SA + SB = 2SC + AF + AF' = \text{Const.}$
C. q. f. d.

635. — Placer une ellipse, dont les axes sont 8 et 6 sur un cône dont les génératrices font un angle de 30° avec l'axe. — Déterminer le cône tangent aux plans, qui coupent le

premier, suivant des ellipses égales à l'ellipse donnée.



R. — Soit fait l'angle $OAB = 60°$, en prenant $AC = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$; du point C comme centre, avec 8 pour rayon, décrivons un arc de cercle, qui vient déterminer le point B; au milieu de AB élevons la perpendiculaire DO, et nous aurons le centre O d'un cône dont OA et OB sont 2 génératrices opposées, faisant entre elles un angle de 60°, et que le plan perpendiculaire à celui de la figure, mené par CB, coupe suivant une ellipse, égale à l'ellipse donnée. — Le cône tangent aux plans qui jouissent de cette propriété, a son sommet en O'; l'angle x de la génératrice avec l'axe est tel que

$$\frac{\cos x}{\sin 60°} = \frac{AC}{CB}$$

D'où

$$\cos x = \frac{\sqrt{21}}{8}$$

la distance OO' s'évaluera en remarquant que

$$OO' = OD - O'D = AD\,(\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} x)$$

$$AD = \frac{1}{2} AB \qquad AD = AC\,\frac{\sin ACB}{\sin CBA}$$

$$AC = 2\sqrt{7} \qquad ACB = 60° + 90° - x = 150° - x$$

$$\sin ACB = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{21}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{43}}{8}$$

$$\sin CBA = \cos x = \frac{\sqrt{21}}{8}$$

D'où

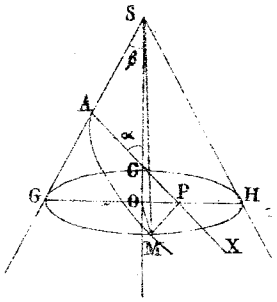
$$AD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7}\,\frac{\sqrt{7} + \sqrt{43}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{7}\,(\sqrt{7} + \sqrt{43})$$

$$OO' = \frac{1}{2}\sqrt{7}\,(\sqrt{7} + \sqrt{43})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{43}{21}}\right).$$

---

636. — *Transformée de la section plane du cône droit à base circulaire.*

R. — Soit GSH la section du cône par un plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant PAM, OMH le cercle



d'intersection du cône par un plan perpendiculaire à l'axe mené par le point M de la section ; C le point de rencontre de l'axe du cône avec l'axe Ax de la section.

Posons $SC = h$; $COM = u$; $SM = \rho$. Les triangles MOP et COP donnent

$$OP = -\rho \sin\beta \cos u = (\rho \cos\beta - h) \operatorname{tg} \alpha$$

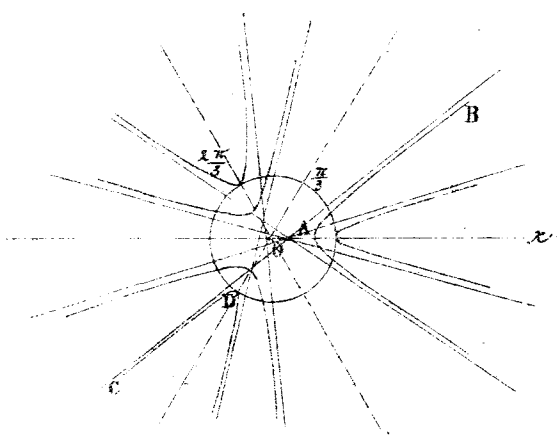
En développant le cône, ρ ne change pas ; SM vient faire avec SA un angle $\omega = u \frac{r}{\rho} = u \sin\beta$. L'équation de la transformée est donc

$$\rho = \frac{h \operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta \cos\left(\frac{\omega}{\sin\beta}\right) + \cos\beta \operatorname{tg}\alpha}$$

C'est une courbe fermée quand, en valeur absolue, on a $\frac{\cos\beta \operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta} > 1$ ou, puisqu'il ne s'agit que d'arcs inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, $\alpha > \beta$. Alors le plan coupe toutes les génératrices d'une même nappe, et on a une ellipse pour section.

Prenons pour exemple $\rho = \frac{1}{2\cos 3\omega + 1}$, ce qui revient à

$\sin\beta = \frac{1}{3}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{\sqrt{2}}$ $\qquad h = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

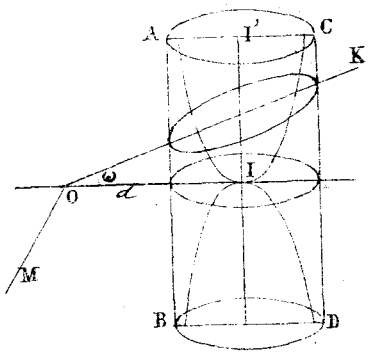


La courbe a 3 axes de symétrie, $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$. ω variant de 0 à $\frac{\pi}{3}$, on obtient les branches AB et CD, asymptotiques à une droite inclinée à $\frac{2\pi}{9}$ et située à une distance $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ du pôle. Le reste s'obtient par

symétrie.

Le développement de la section hyperbolique du cône ne donne que le tiers de la courbe ici figurée. Le cône doit être considéré comme formé d'une infinité de nappes superposées, dont chacune vient donner une transformée. Quand il y a un rapport constant entre le rayon et l'apothème, ou quand $\sin\beta$ est commensurable, ces diverses courbes se superposent après un certain temps.

637. — Par une droite OM située dans le plan d'une section droite d'un cylindre droit à base circulaire, on mène des plans sécants. Lieu des foyers des sections.



R. — Soit OM perpendiculaire au plan des 2 génératrices AB, CD. On voit sans peine que l'équation sera :

$$\rho = \frac{d}{\cos\theta} + \frac{r}{\cos\theta} \pm \sqrt{\frac{r^2}{\cos^2\theta} - r^2}$$

$$= \frac{d+r}{\cos\theta} \pm r\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

$\rho = \frac{d+r}{\cos\theta}$ représente la droite II'. La courbe a pour asymptotes les droites AB, CD.

X. — Construction de courbes en coordonnées rectilignes.

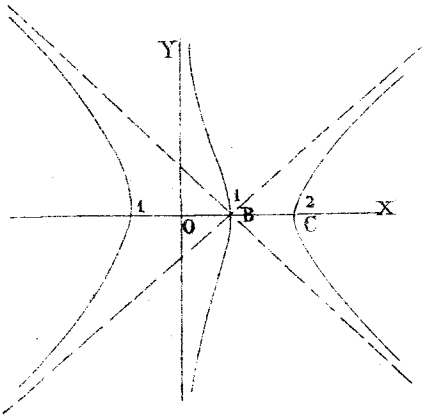
A. Courbes algébriques.

1° Courbes du 3e degré. — (Pour la classification des courbes du 3e degré, voir Lucas, Études Anal. sur les courbes planes, Appendice.)

a. Hyperboles redondantes (à une droite médiane).

638.

638. — $y^2 x - x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$



R. —

$$y = \pm \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{x}}$$

Asymptotes :

$$x = 0$$

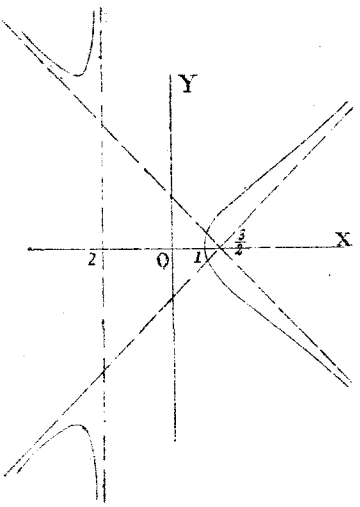
et $$y = \pm (x-1)$$

Coefficient angulaire de la tangente :

$$y' = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2 y}.$$

---

639. — $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x^2+1)}{x+2}}$



R. — Asymptotes :

$$x = -2$$

et $$y = \pm \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Tangente verticale au point :

$$y = 0$$

$$x = 1$$

En effet

$$\lim \frac{y}{x-1} = \infty$$

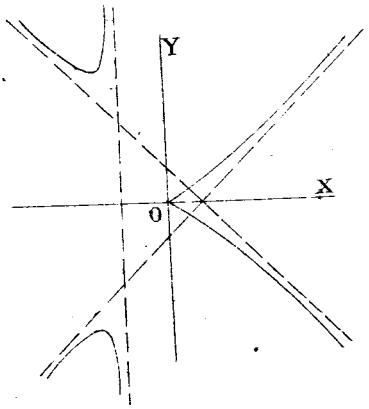
pour ces valeurs des variables.

---

640. — $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$

R. — Asymptotes : $x = -1$. De plus pour x infini, $\lim \frac{y}{x} = \pm 1$ et $y \mp x = \pm x \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right)$

$$= \frac{\mp \frac{x}{x+1}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}$$



D'où $\lim (y - x) = \mp \frac{1}{2}$,

et pour les asymptotes :

$$y = \pm \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

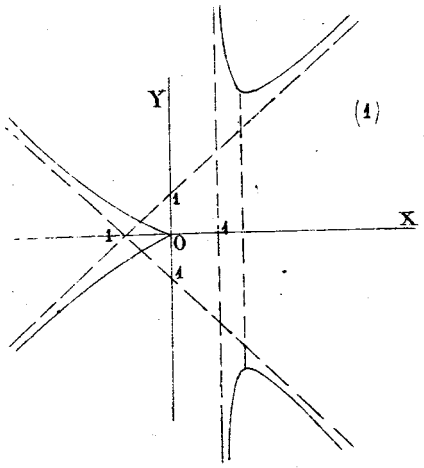
Tangentes horizontales :

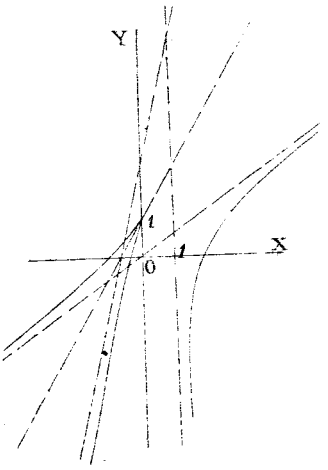
au point $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$

et au point $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2,598\ldots. \end{cases}$

---

641. — $y = 2x + 1 \pm \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.





R. — Construire au préalable la courbe $Y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. (1)

qui a pour asymptotes les droites : $\begin{cases} x = 1, \\ y = \pm (x + 1). \end{cases}$

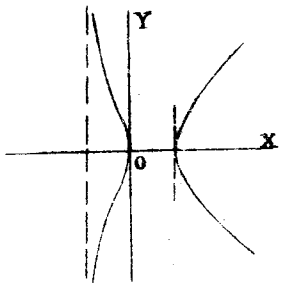
On trouvera facilement que la courbe donnée a la forme (2).

---

b. Famille parabolique.

α. — Hyperboles paraboliques. (sans droite médiane).

642. — $y^2 = \frac{x^2 - x}{x + 1}$.



R. — y est réel quand x varie entre -1 et 0 ou entre 1 et $+\infty$. Asymptote unique :

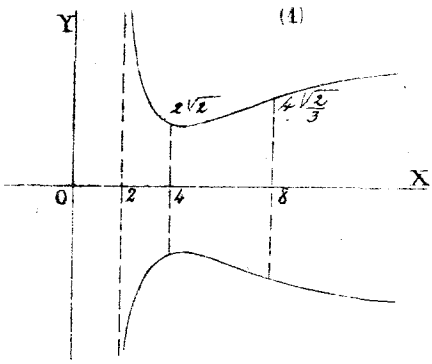
$$x = -1$$

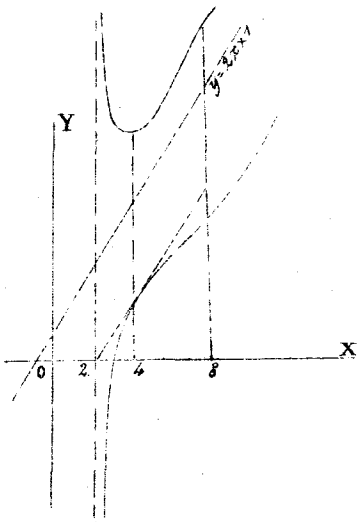
La dérivée y' s'annule pour

$$x = -1 \pm \sqrt{2},$$

ce qui ne correspond à aucune partie réelle de la courbe.

643. — $y = 2x + 1 \pm \sqrt{\dfrac{x^2}{x-2}}$





R. — (1). Courbe : $y = \pm \sqrt{\dfrac{x^2}{x-2}}$.

Asymptote : $x = 2$. Il n'y en a pas d'autre.

Tangentes horizontales $\begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 2\sqrt{2} = \pm 2,828. \end{cases}$

Points d'inflexion : $\begin{cases} x = 8 \\ y = \pm \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \pm 4\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \pm 3,264. \end{cases}$

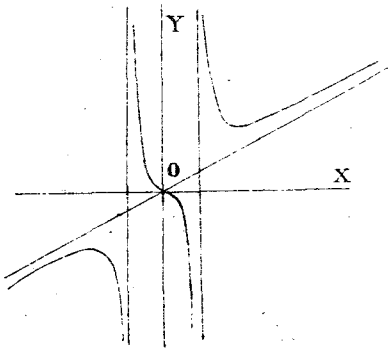
(2) Courbe proposée, obtenue en portant les coordonnées de (1) à partir du diamètre

$$y = 2x + 1.$$

B. Hyperbolisme de conique.

Hyperbolisme d'hyperbole, sans droite médiane.

644. — $y = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$.



R. — L'origine est centre.

Asymptotes :

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et $y = \frac{1}{2} x$.

Tangente à l'origine : l'axe des x.

Tangentes horizontales :

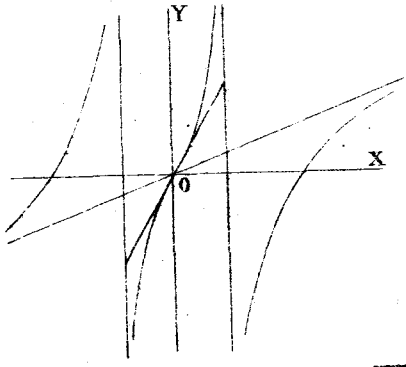
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

---

645. — $y = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1}$.



R. Asymptotes :

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

et $y = \frac{1}{3} x$.

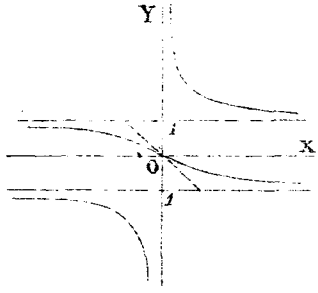
Tangente à l'origine :

$$y = 3x.$$

L'origine est le centre.

---

646. — $x + y = xy^2$.



R. — $x = \frac{y}{y^2 - 1}$

Asymptotes :

$x = 0$ et $y = \pm 1$.

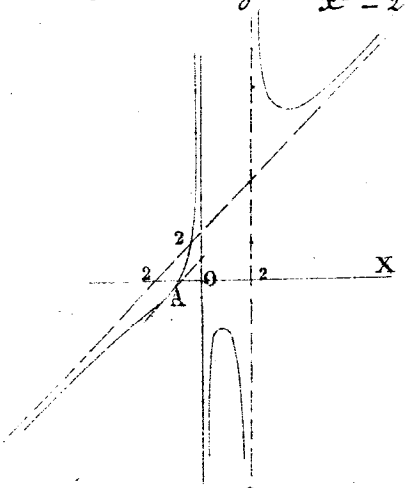
Tangente à l'origine :

$$\lim \frac{x}{y} = -1$$

L'origine est centre.

---

647. — $y = \dfrac{x^3+1}{x^2-2x}$.



R. Asymptotes :

$x = 0$ $\qquad$ $x = 2$

et $\qquad y = x + 2$

Tangente en A, inclinée à 45°.

Point de rencontre avec l'asymptote :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

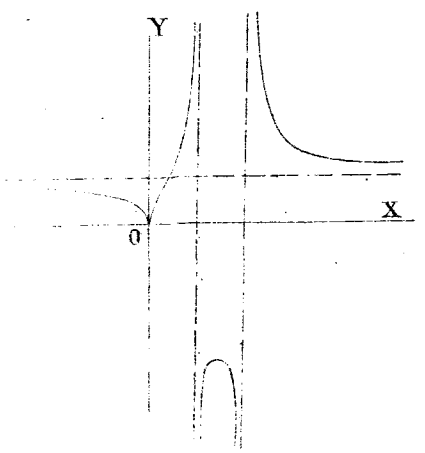
Tangentes horizontales. Les abscisses sont données par l'équation :

$$x^4 - 4x^3 - 2x + 2 = 0$$

Il y a une racine entre 0 et 1 et une autre entre 4 et 5. Ce sont les seules réelles.

---

648. — $y = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$.



R. — Asymptotes :

$x = 1$

$x = 2$

$y = 1$.

à l'origine,

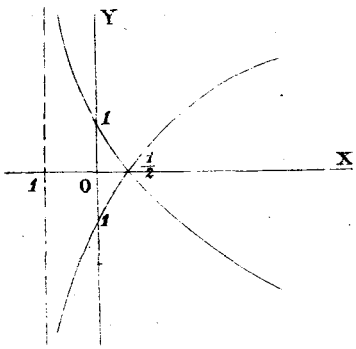
$$\lim \frac{y}{x} = \infty.$$

Tangentes horizontales :

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = -\dfrac{16}{5}. \end{cases}$$

---

649. — $y = \pm \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$.



R. — Asymptote unique :

$$x = -1.$$

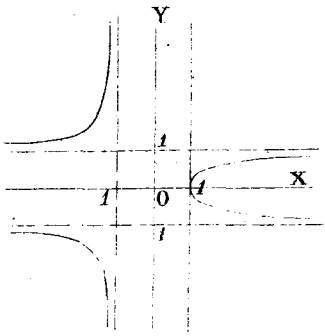
L'autre branche est parabolique.

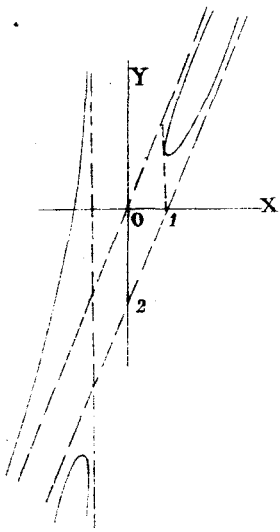
Tangente au point sur Ox :

$$\lim \frac{y}{x-\frac{1}{2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm 1,63\ldots$$

---

650. — $y = 2x - 1 \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.





R. — (1) $y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Asymptotes : $x = -1$ et $y = \pm 1$

(2). Courbe demandée.

Les asymptotes horizontales deviennent :

$$y = 2x \quad \text{et} \quad y = 2x - 2$$

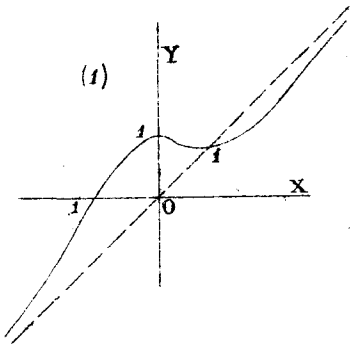
Tangentes horizontales $\begin{cases} x = +\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ y = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ y = -1 \end{cases}$

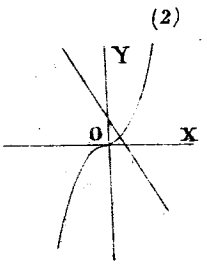
Pour chercher les asymptotes directement, sans passer par la courbe (1), on est obligé de recourir à l'équation :

$$\frac{d^2}{2} f''_m(1,c) + d\, f'_{m-1}(1,c) + f_{m-2}(1,c) = 0,$$

parce que l'équation $f_m(1,c) = 0$ a deux racines égales à 2.

651. — $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.





R. — Asymptote

$y = x$

Point de rencontre avec l'asymptote:

$x = 1$

Points où la tangente est horizontale:

$$y' = \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

De là le point $x = 0$ et les racines de $x^3 + 3x - 2 = 0$

Or la droite $y + 3x - 2$ rencontre $y = x^3$ en un point entre $x = 0$ et $x = \frac{2}{3}$.

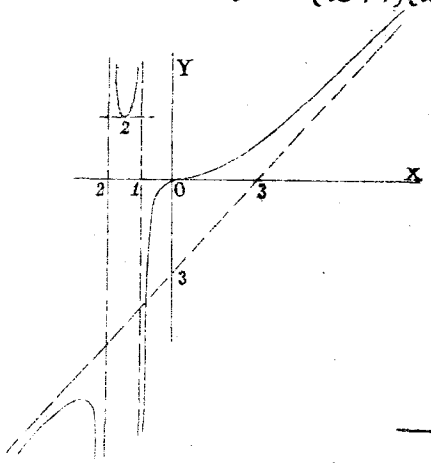
Il y a une racine réelle.

Points où la tangente est parallèle à l'asymptote:

$$x^4 + 3x^2 - 2x = (x^2+1)^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

D'où $\quad x = 1 \pm \sqrt{2} \qquad y = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$.

652. — $y = \dfrac{x^3}{(x+1)(x+2)}$



R. — Asymptotes:

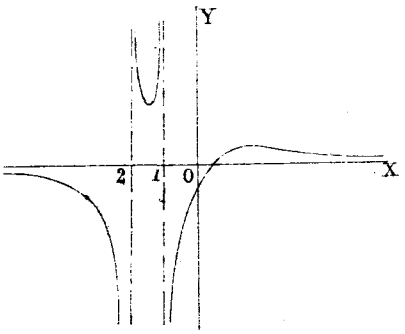
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Point d'inflexion à l'origine.

Tangentes horizontales:

$x = -3 \pm \sqrt{3} \qquad y = 2x$.

653. — $y = \frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}$



R. — Asymptotes

$x+1=0$, $x+2=0$ et $y=0$

Tangentes horizontales :

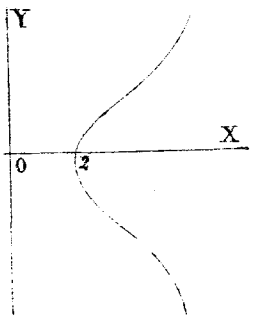
Équation : $x^2 - x - \frac{7}{2} = 0$

D'où $\begin{cases} x' = \frac{1+\sqrt{15}}{2} = 2,44\ldots \\ y' = 2(4-\sqrt{15}) = 0,26\ldots \end{cases}$

et $\begin{cases} x'' = \frac{1-\sqrt{15}}{2} = -1,44\ldots \\ y'' = 2(4+\sqrt{15}) = 14,74\ldots \end{cases}$

---

654. — $y^2 = (x-1)^2(x-2)$.

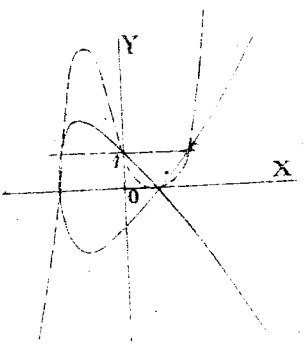


R. — Outre la courbe, il y a un point isolé :

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

---

655. — $y = \pm\sqrt{x^3 - 3x + 2}$.



R. — $y = \pm(x-1)\sqrt{x+2}$.

(Pour les racines de x^3-3x+2, voir les Probl. sur la Th. des Équat.)

La courbe pointillée représente x^3-3x+2. La courbe pleine $\pm\sqrt{x^3-3x+2}$. Elles se coupent sur la droite $y=1$.

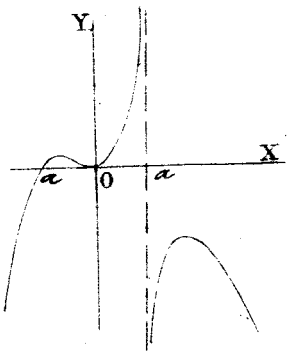
Tangente horizontale $x=-1$

Tangente au point multiple :

$\frac{y}{x-1} = \pm\sqrt{3}$.

Tridents.

656. — $y = x^2 \frac{a+x}{a-x}$.



R. — Asymptote unique :

$$x = a$$

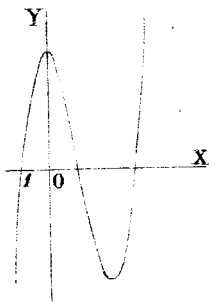
Tangentes horizontales :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \\ y = -\frac{a}{2}(11 \pm 5\sqrt{5}) \end{cases}$$

Parabole cubique.

657. — $y = x^3 - 4x^2 + 5$.



R. — Tangentes horizontales :

$$x = 0$$

$$x = \frac{8}{3}.$$

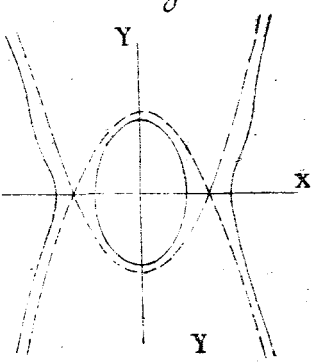
$y = 0$ donne

$$x = -1$$

et $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2° Courbes du 4e degré.

658. — $y = \pm\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}$.



R. — $y = \pm\sqrt{(x^2-1)(x^2-2)}$

Courbe ayant l'origine pour centre. Elle coupe l'axe des x aux points :

$x = \pm 1$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt{2}$.

Entre $x^2 = 1$ et $x^2 = 2$, y est

imaginaire. — Tangente horizontale pour $x = 0$. Il n'y a pas d'asymptotes rectilignes ; mais pour $x = \infty$

$$\lim \frac{y}{x} = \infty$$

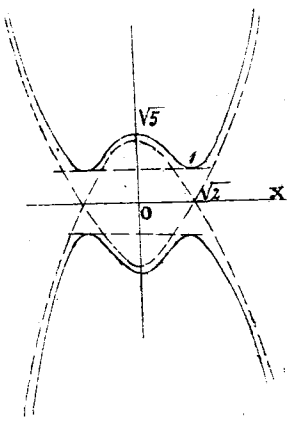
Les paraboles $y = x^2 - \frac{3}{2}$ et $y = -x^2 + \frac{3}{2}$ sont asymptotiques à la courbe.

Aux points A, B, C, D, la tangente est parallèle à l'axe des y. En effet, par exemple, au point C ;

pour $x = 1$ $\lim \frac{y}{x-1} = \infty$

Points d'inflexion : $x = \pm 1,6$.

659. — $y = \pm\sqrt{x^4 - 4x^2 + 5}$.



R. — $y = \pm\sqrt{(x^2-2)^2+1}$.

Pas de rencontres avec Ox, minimums correspondants à $x = \pm\sqrt{2}$; maximum pour $x = 0$.

Les paraboles :

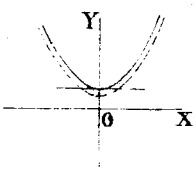
$$y = \pm(x^2 - 2)$$

sont asymptotiques.

660. — $y = \sqrt{-x^4 + 2x^2 - 3}$.

R. — $x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2-1)^2 + 2$. La quantité sous le radical est donc toujours négative ; il n'y a pas de courbe.

661. — $y = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 5}$.



R. — $y = \sqrt{(x^2+2)^2+1}$;

x variant de $-\infty$ à $+\infty$, y varie de ∞ pour revenir à ∞, il passe par un minimum correspondant à $x = 0$.

Asymptote rectiligne parallèle

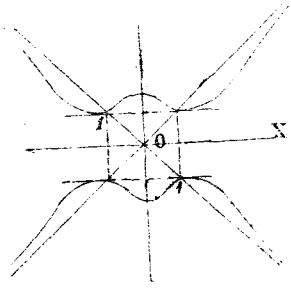
avec y, rejetée à l'infini.

Asymptote parabolique :

$$y = x^2 + 2.$$

662. — $$y = \pm \sqrt[4]{x^4 - 2x^2 + 2}.$$

R. — $y = \pm \sqrt[4]{(x^2-1)^2 + 1}$.



Courbe ayant l'origine pour centre.

Tangentes horizontales :

$$x = 0$$

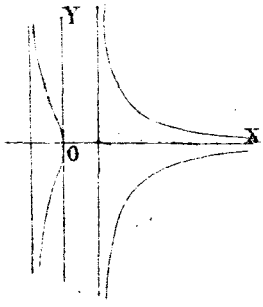
en $$x = \pm 1$$

Asymptotes :

$$y = \pm x.$$

663. — $$y = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}.$$

R. — y est réel entre $x = -1$ et $x = 0$, et entre $x = 1$ et $x = \infty$.



Pour $x = 0$ $\lim \frac{y}{x} = 0$

Point d'inflexion : $y^2(x^2-1) = x$

$$2yy'(x^2-1) + 2xy^2 = 1$$

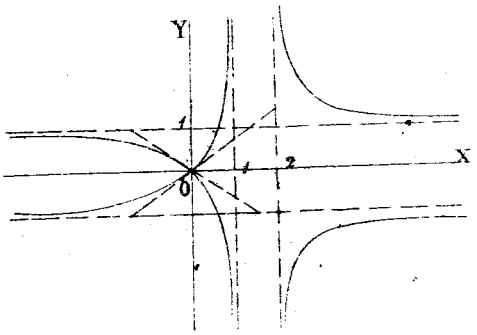
$$2y'^2(x^2-1) + 2yy''(x^2-1) + 2y^2 + 8xyy' = 0$$

Annulant y'' en remplaçant y' et y en fonction de x, on aura finalement :

$$3x^4 + 10x^2 - 1 = 0$$

D'où $$x = -\sqrt{\frac{-5 + 2\sqrt{7}}{3}}$$

664. — $$y = \frac{\pm x}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}.$$



R. — Asymptotes :

$x = 1$,

$x = 2$,

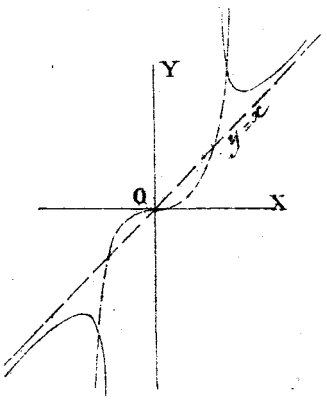
et $y = 1$.

Tangentes à l'origine :

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} x.$$

---

665. — $$xy^3 - y^4 - x^2 - y^2 = 1.$$



R. $x = \frac{1}{2} y^3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^6 - 4(y^4 + y^2 + 1)}$

La parabole $x = \frac{1}{2} y^3$ est un diamètre.

Asymptotes : $y = x$.

Point de rencontre de la courbe et de son diamètre :

$$y^6 - 4(y^4 + y^2 + 1) = 0$$

Posant $z = y^2$, on trouve une racine voisine de 5, donc y voisin de $\pm 2,5$. C'est la seule racine réelle de l'équation en z ; car l'équation dérivée n'a qu'une racine positive :

$$\frac{4 + 2\sqrt{7}}{3}.$$

---

666. — $$y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x^4}{(x-1)(x-2)}}.$$

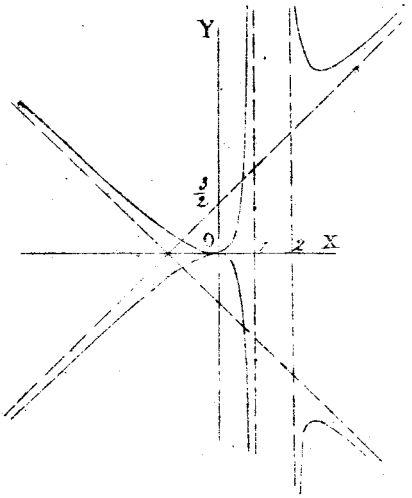
R. — Construire d'abord la courbe :

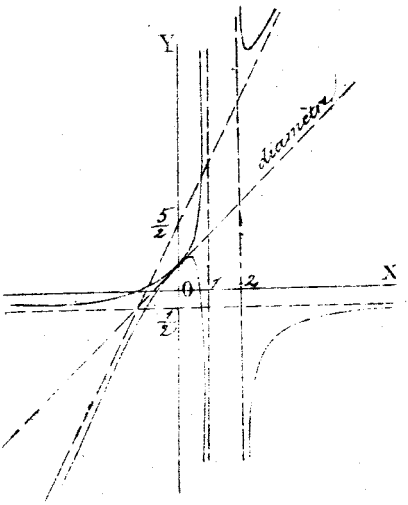
$$y = \pm \sqrt{\frac{x^4}{(x-1)(x-2)}} \text{ figurée en } (1),$$

qui a pour asymptotes :

$x = 1$ $\quad$ $x = 2$ $\quad$ et $y = \pm\left(x + \frac{3}{2}\right)$

en porter ensuite les ordonnées à partir du diamètre

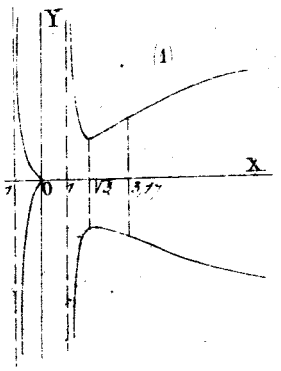


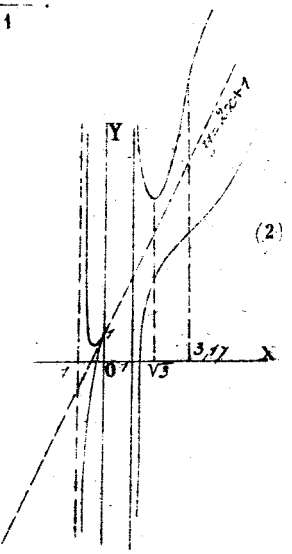


$y = x + 1$; on obtient ainsi la courbe (2), dont les asymptotes sont, par conséquent

$x = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}$ ou $y = 2x + \frac{5}{2}$

667. — $y = 2x + 1 \pm \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 1}}$.





R. — (1) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 1}}$

Asymptotes : $x = \pm 1$. Il n'y en a pas d'autres.

Tangentes horizontales ... $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}} \end{cases}$

et
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

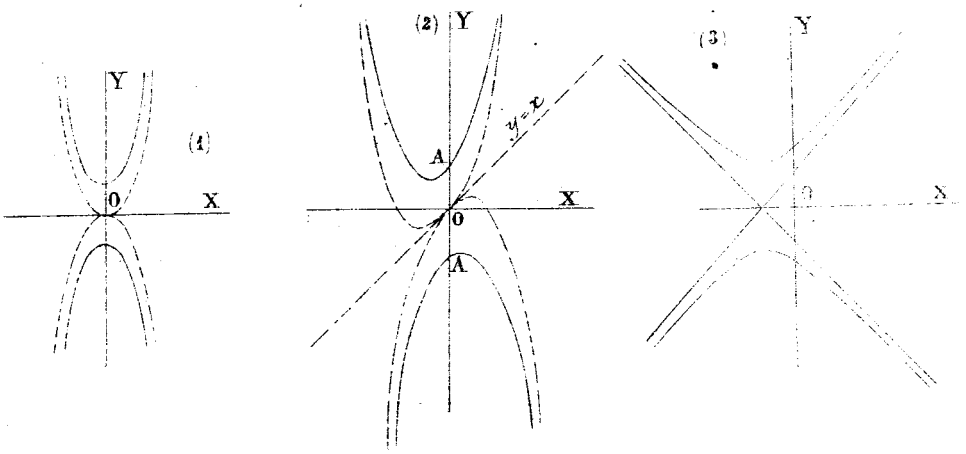
Point d'inflexion ...
$$\begin{cases} x = \sqrt{5+\sqrt{28}} = 3,17\ldots \\ y = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{28}}{4+\sqrt{28}}\sqrt{5+\sqrt{28}}} = 1,76\ldots \end{cases}$$

Coefficient angulaire de la tangente au point d'inflexion: environ 0,24.

(2) Courbe demandée, obtenue en portant les ordonnées de (1) à partir du diamètre

$$y = \underline{2x} + 1.$$

668. — $y = \pm\sqrt{x \pm \sqrt{x^4+1}}$



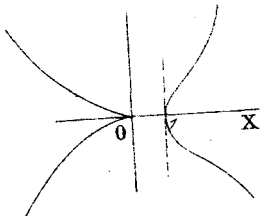
R. — (1) $y = \pm\sqrt{x^4+1}$. Cette courbe est asymptotique aux paraboles $y = \pm x^2$.

(2) $y = x \pm \sqrt{x^4+1}$. Les paraboles asymptotiques deviennent : $y = x \pm x^2$

Les tangentes en A et A' sont parallèles à $y = x$.

(3) Courbe demandée. Les asymptotes sont les droites $y = \pm\left(x + \frac{1}{2}\right)$, obtenues soit directement, soit en extrayant la racine de $x + x^2$, après avoir complété le carré.

669. — $y^2 = x^4 - x^3$.



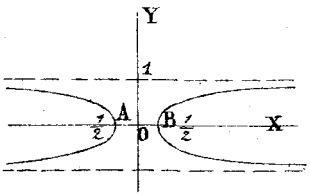
R. — $y^2 = x^3(x-1)$. Symétrie par rapport à Ox. — L'origine est un point de rebroussement $\lim \frac{y}{x} = 0$. Au point $\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ la tangente est parallèle à Oy, car $\frac{y}{x-1}$ augmente indéfiniment. Il n'y a pas d'asymptotes : la courbe tend à devenir parallèle à Oy à l'infini. — Point d'inflexion. L'équation obtenue en égalant la dérivée seconde à zéro est :

$$32x^2 - 48x + 15 = 0.$$

Elle a une racine entre 0 et 1, qui ne peut convenir, l'autre est un peu supérieure à 1.

---

670. — $4y^2 + \frac{1}{x^2} = 4$.



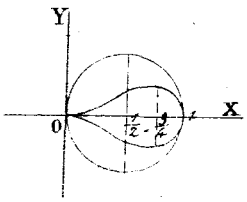
R. — Ox et Oy sont axes de symétrie.
Asymptotes : $y = \pm 1$
Tangentes en A et B : verticales.
En effet, pour A, par exemple :

$$\frac{y^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x-1}{4(2x+1)x^2}$$

Donc, pour $x = -\frac{1}{2}$: $\frac{y}{2x+1}$ augmente indéfiniment.

---

671. — $y^2 = x^3 - x^4$.



R. — $y^2 = x^3(1-x)$.

Tangentes horizontales :

$$3x^2 - 4x^3 = 0.$$

D'où $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{\sqrt{27}}{16} \end{cases}$

Point d'inflexion. Équation dérivée seconde :

$$2y'^2 + 2yy'' = 6x - 12x^2$$

Faisant $y'' = 0$ et remplaçant y'^2 par $\frac{x(3-4x)^2}{2(1-x)}$

Il vient $\quad 8x^2 - 12x + 3 = 0$

D'où $\quad x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$

La racine admissible est : $\frac{3-\sqrt{3}}{4} = 0,317$.

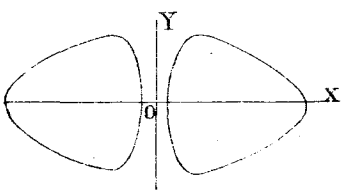
Aire. — Si l'on fait $x = \frac{1}{2} + \alpha$, puis $x = \frac{1}{2} - \alpha$, on a pour l'ordonnée :

D'une part : $\quad y_1 = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}$

D'autre part : $\quad y_2 = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}$

La somme de ces ordonnées est $\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}$, elle est donc égale à l'ordonnée maximum du cercle $y^2 = x - x^2$. L'aire totale est donc la moitié de l'aire de ce cercle, ou égale à $\frac{\pi}{2}$.

672. — $\quad x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} = 4$.



R. — L'origine est centre, et les axes, axes de symétrie.

$$y^2 = \frac{-x^4 + 4x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x^2 - 2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} - x^2)}{x^2}$$

Pour que y soit réel il faut que x^2 soit entre :

$$2 - \sqrt{3} = 0,268$$

et $\quad 2 + \sqrt{3} = 3,732$.

Quand x est égal à une de ces valeurs limites $y = 0$ et la tangente est verticale.

Point maximum : $\quad 2yy' = \frac{-2x^4 + 2}{x^3}$

Donc pour $y' = 0 \qquad x = \pm 1$

D'où $\quad y = \pm\sqrt{2}$

673. — $\quad y^4 + x^4 - 2ay^3 - 2bx^2y = 0$.

R. — Coupons par la droite $y = mx$. Nous aurons :

$$x = \frac{2m(am^2+b)}{m^4+1} \qquad y = \frac{2m^2(am^2+b)}{m^4+1}$$

et pour le coefficient angulaire de la tangente

$$I = \frac{y'_m}{x'_m} = \frac{2m(2am^2+b-bm^4)}{3am^2+b-m^4(am^2+3b)}$$

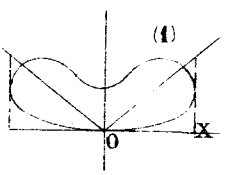
Pour $m = 0$, on a $x = 0$, $y = 0$, et le coefficient angulaire est nul : donc la courbe est tangente à l'origine à l'axe des x. m croissant, x croît et y aussi. Il en est de même de I, qui devient infini quand on a :

$$m^4(am^2+3b) - 3am^2 - b = 0$$

Posons $$m^2 = z$$

l'équation devient : $az^3 + 3bz^2 - 3az - b = 0$

1° Supposons d'abord $b > a$. 0 substitué dans l'équation donne le signe $-$, et 1 donne le signe $+$; donc l'équation en z, et par suite l'équation en m a une racine comprise entre 0 et 1. A ce point, la tangente est verticale ; et m continuant à croître, x décroît, tandis que y croît toujours. Pour $m = 1$, on a :



$$y = x = a + b$$

$$I = \frac{2a}{a-b}.$$

Or $a < b$, donc I est négatif et la tangente fait un angle obtus avec l'axe des x.

m croissant à partir de 1, x décroît, et y atteint un maximum quand on a :

$$bm^4 - 2am^2 - b = 0.$$

ce qui a lieu pour une valeur de m, qu'on peut facilement calculer.

A partir de ce point, x et y vont en décroissant, et pour $m = \infty$, on a $x = 0$ et $y = 2a$; en ce point, la tangente est horizontale. La courbe est d'ailleurs symétrique par rapport à l'axe des y, puisque x n'entre dans

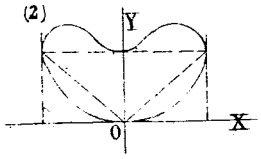
l'équation qu'à des puissances paires.

2° Supposons maintenant $b = a$. Dans ce cas, on a :

$$x = \frac{2am(m^2+1)}{m^4+1}$$

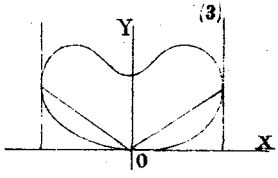
$$y = \frac{2am^2(m^2+1)}{m^4+1}$$

$$I = \frac{2am(2m^2-m^4+1)}{a\{3m^2-m^4(m^2+3)+1\}}$$



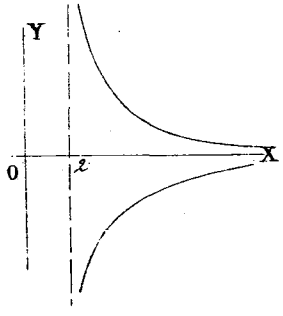
La forme générale de la courbe n'est pas changée ; seulement le point où la tangente est verticale, est précisément celui où la courbe coupe la bissectrice de l'angle des axes ; et pour m infini, on a $y = 2a$, c'est-à-dire la même valeur que pour le point où la tangente est verticale.

3° Supposons enfin $a > b$. Au point pour lequel $m = 1$, la tangente fait un angle aigu avec l'axe Ox, et le point où la tangente est verticale est à droite du premier.



3° Courbes du 5e degré.

674. — $$y^2 = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}.$$



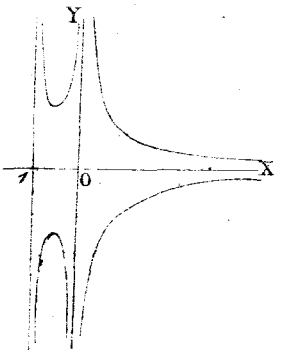
R. — L'axe des x est un axe de symétrie ;
y ne devient réel que pour $x > 2$.

Asymptotes :

$$x = 2$$

et $$y = 0.$$

675. — $$y^2 = \frac{1}{x^2 + x^3}.$$



R. — $y = \frac{1}{x^2(1+x)}$.

Asymptotes :

$x = 0$

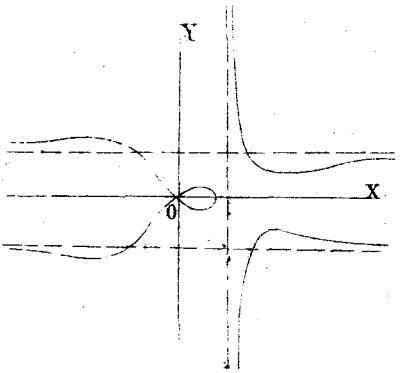
et $x = -1$.

Tangentes horizontales :

$x = -\frac{2}{3}$

$y = \pm \frac{\sqrt{27}}{2}$

676. — $y^2 = \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 4}$.



R. — Entre $x = 1$ et $x = \sqrt[3]{4}$, y est imaginaire.

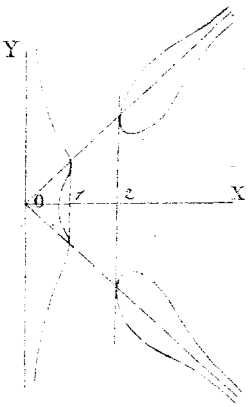
Les asymptotes sont :

$x = \sqrt[3]{4}$

et $y = \pm 1$.

La courbe coupe ses asymptotes pour : $x = \pm 2$.

677. — $y^2 = x^2 \pm \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x}}$.



R. — Les valeurs de $x < 0$ et celles qui sont entre 1 et 2, sont inadmissibles.

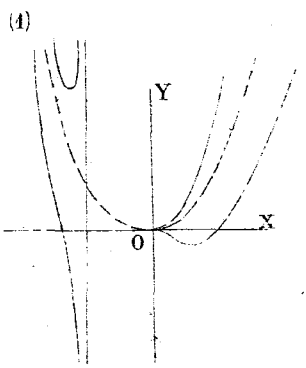
Asymptotes :

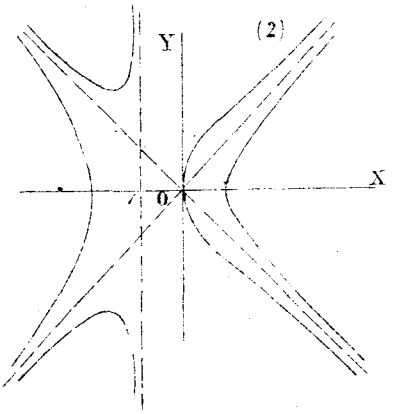
$y = \pm x$.

La courbe les coupe pour $x = 1$ et $x = 2$.

Elle rencontre Ox quand on a $x^5 - x^3 + 3x - 2 = 0$, équation qui a une racine comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.

678. — $$y^2 = x^2 \pm \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}.$$





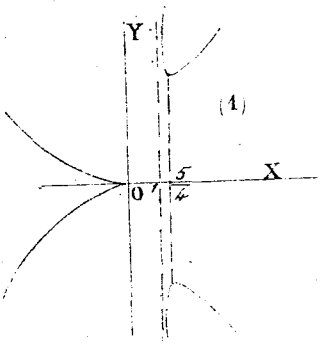
R. — En se reportant à la courbe $y = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$, on verra que

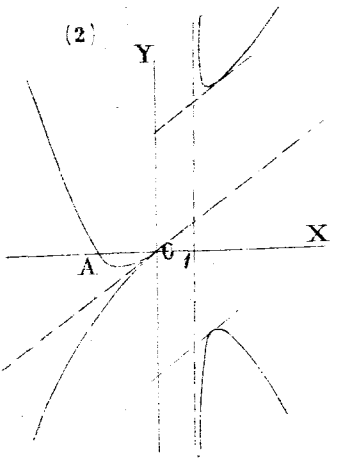
$$y = x^2 \pm \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$$

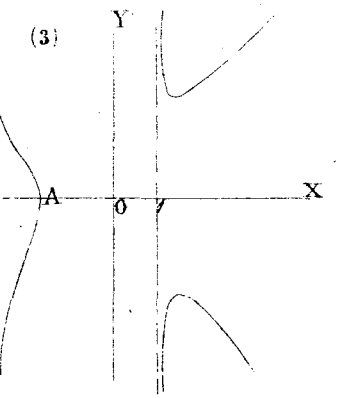
représente une courbe telle que (1), ayant pour diamètre la parabole $y = x^2$ et pour seule asymptote rectiligne la droite $x = -1$. — Les ordonnées positives de cette courbe mènent à la courbe (2), qui est demandée, et qui a 2 asymptotes obliques $y = \pm x$.

---

679. — $$y = \sqrt{x \pm \sqrt{\frac{x^5}{x-1}}}.$$







R. — (1) $$y = \sqrt{\frac{x^5}{x-1}}.$$

Asymptote unique $x - 1 = 0$

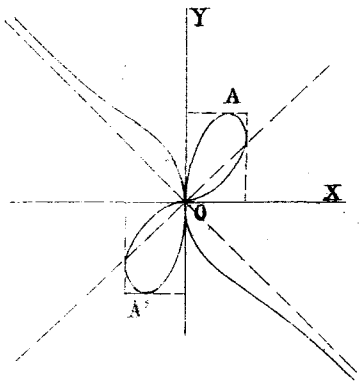
Tangentes horizontales $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = \frac{5}{4} = 1,25 \\ y = \frac{25}{16}\sqrt{5} = 3,49. \end{cases}$

(2) $y = x \pm \sqrt{\frac{x^5}{x-1}}$. Rencontre (A) avec Ox. L'abscisse est la racine réelle de $x^3 - x - 1 = 0$, racine qui est 1,327, comme on l'a vu dans les questions d'algèbre.

(3) Courbe demandée.

---

680. — $y^5 + 4x^5 + 3x^4 y - 3a^2 x^2 y = 0$



R. — Posant $y = tx$, il vient :

$$x^2 = \frac{3a^2 t}{t^5 + 3t + 4}$$

$$y^2 = \frac{3a^2 t^3}{t^5 + 3t + 4}.$$

Remarque. — Le dénominateur s'annule pour $t = -1$, et c'est sa seule racine réelle, car le quotient par $t + 1$ est

$$t(t-1)(t^2+1) + 4,$$

quantité essentiellement positive.

Pour $t = 0$ et pour $t = \infty$, x et y s'annulent, ce qui donne une courbe fermée, tangente aux axes, et comme l'origine est centre, on a la double boucle de la figure. Pour $t = 1$, $x = y = a\sqrt{\frac{3}{8}}$ et y' est infini. — La tangente horizontale correspond au point donné par l'équation

$$y' = \frac{t(-t^5 + 3t + 2)}{2(1 - t^4)} = 0$$

Or, le numérateur étant divisible par $t + 1$

$$y' = \frac{t[-t(t-1)(t^2+1) + 2]}{2(1-t)(1+t^2)}$$

Le numérateur s'annule pour $t = 0$ et pour les racines de

$$t(t-1)(t^2+1) - 2 = 0$$

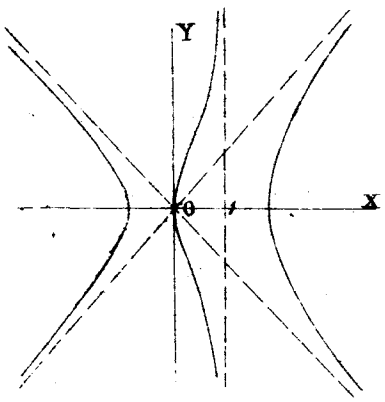
Comme il est facile de le voir, il y a une racine entre

1 en $+\infty$; c'est celle qui convient aux points A, A'. — Il y en a une 2e négative, mais comprise entre 0 et -1, et dans cet intervalle, x et y sont imaginaires.

t variant de -1 à $-\infty$, x et y varient de ∞ à 0, ce qui donne 2 branches infinies asymptotiques à la droite $y = -x$.

4e Courbes du 6e degré.

681. — $(y^2 - x^2)^2 (x-1)^2 - x^2 = 0$.



R. — L'équation se décompose en 2 :

$$y^2 = x^2 + \frac{x}{x-1}$$

$$y^2 = x^2 - \frac{x}{x-1}$$

La courbe a pour asymptotes les droites

$x = 1$ et $y = \pm x$

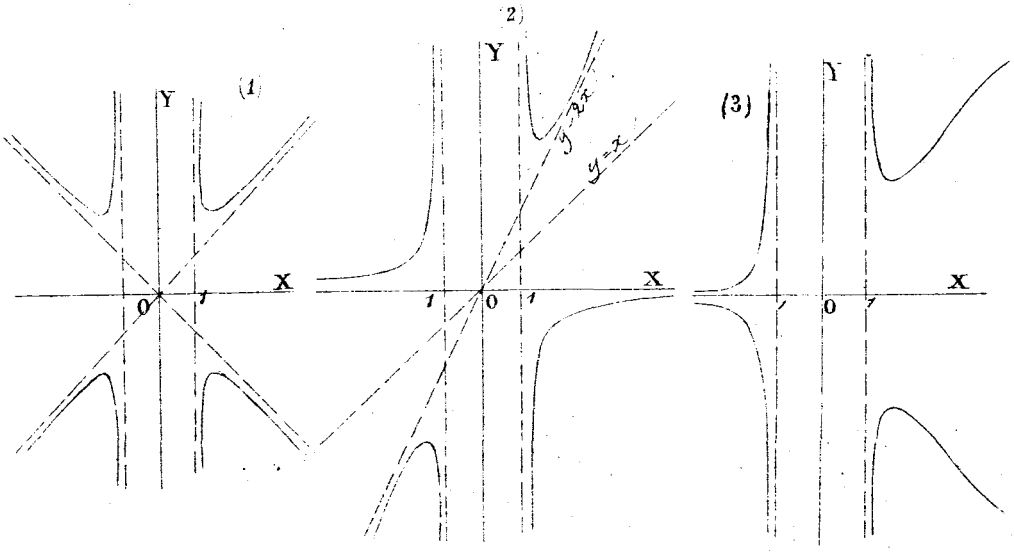
Première branche. — Imaginaire, quand x varie de 0 à 1. Elle passe par l'origine, et y a pour tangente Oy. Elle ne coupe son asymptote qu'à l'origine. Le point horizontal est donné par une équation du 3e degré, qui n'a qu'une racine réelle, comprise entre 0 et ∞.

Seconde branche. — y est imaginaire entre la 1re valeur de x qui l'annule et qui est $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, et 0, puis encore entre 1 et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; aux points où $y = 0$, la tangente est parallèle à Oy. La courbe ne rencontre ses asymptotes qu'à l'origine.

---

682. — $y = \sqrt{x \pm \sqrt{\frac{x^4}{x^2-1}}}$.

R. — (1) $y = \pm \sqrt{\frac{x^4}{x^2-1}}$. Asymptotes $x = \pm 1$ et $y = \pm x$.



Tangentes horizontales $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm 2 \end{cases}$

(2) $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^4}{x^2-1}}$. Asymptotes : $x = \pm 1$, $y = 0$ et $y = 2x$.

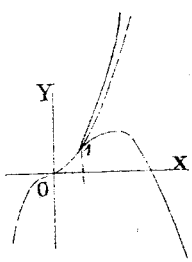
Les tangentes horizontales deviennent des tangentes parallèles à $y = x$.

(3) Courbe demandée. Asymptotes : $x = \pm 1$ et $y = 0$;

La branche infinie sans asymptote rectiligne tend à devenir parallèle à Ox.

5° Courbe du 7e degré.

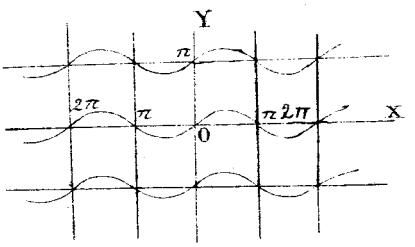
683. — $y = x^3 \pm (x-1)^{\frac{7}{2}}$



R. — La courbe a pour diamètre la parabole cubique $y = x^3$. Posons $Y = (x-1)^{\frac{7}{2}}$. Y est réel quand $x > 1$. Il n'y a pas d'asymptotes. — La courbe rencontre Ox entre $x = 4$ et $x = 5$. Pour $x = 1$, on a $\lim \dfrac{Y}{x-1} = 0$; donc la courbe est tangente à son diamètre.

B. Courbes transcendantes.

684 — $\sin y = \frac{1}{2} \sin x$.



R. L'origine est centre. Si on change x en $2K\pi + x$, y garde la même valeur; donc la courbe a une infinité de centres sur des parallèles aux axes.

Le maximum de $\sin y$ a lieu en même temps que celui de $\sin x$; donc il est égal à $\frac{1}{2}$, et y varie entre $K\pi - \frac{\pi}{6}$ et $K\pi + \frac{\pi}{6}$.

---

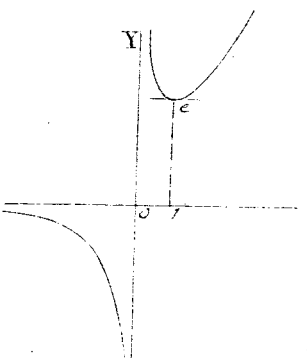
685. — $\cos y = \sin x$.

R. —
$$\cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$y = 2K\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Le lieu se compose d'une série de droites inclinées à 45° et à 135° sur les axes.

---

686. — $y = \frac{e^x}{x}$.



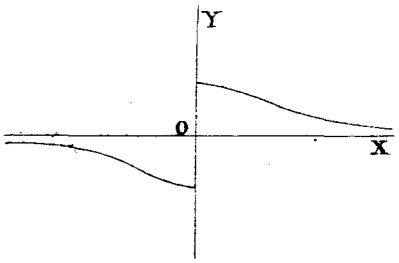
R. — Pour $x = 0$, $y = \infty$; x variant de 0 à 1, y décroît; la dérivée $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ est négative; pour $x = 1$, elle s'annule, y passe par un minimum égal à e; x augmentant indéfiniment, il en est de même pour y.

x variant de 0 à $-\infty$, y varie de $-\infty$ à 0 d'une manière continue.

Il n'y a pas d'autre

asymptote que les axes.

687. — $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$.



R. — L'origine est centre; l'équation ne change pas quand x et y changent de signe.

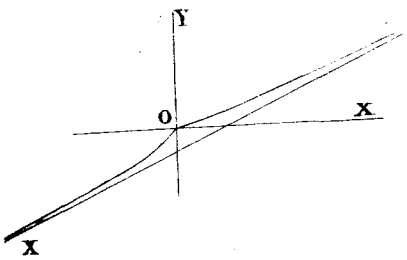
Pour $x = 0$, y prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Le rapport des dérivées fait voir que sa vraie valeur est 1. x croissant, y reste toujours inférieur à 1; pour $x =$ l'infini, $y = 0$: l'axe des x est asymptote.

Du côté négatif, une branche symétrique.

Pour $x = 0$, la dérivée s'annule; la tangente est horizontale; on le voit facilement en prenant :

$$\lim \frac{y-1}{x} \text{ pour } x = 0.$$

688. — $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.



R. — Pour $x = 0$, $y = 0$ et en même temps $\lim \frac{y}{x} = 0$; donc l'axe des x est tangent. x croissant de 0 à ∞, y de même. Quand x croît indéfiniment,

$\lim \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ et $\lim\left(y - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{4}$;

l'asymptote est donc :

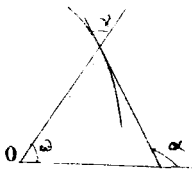
$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Pour les valeurs négatives, $\lim \frac{y}{x} = 1$; donc la bissectrice de l'angle des axes est tangente à l'origine. On a une branche infinie ayant la même asymptote que la précédente.

XI. Coordonnées polaires.

A. Questions diverses.

689. — Trouver l'équation : $\varphi(x, y) = 0$, trouver l'angle de la tangente avec le rayon vecteur issu de l'origine des coordonnées.



R. — L'angle cherché est :

$$V = \alpha - \omega$$

Donc $\quad \operatorname{tg} V = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\omega}$

D'ailleurs $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$

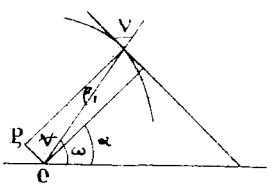
Donc $\quad \operatorname{tg} V = \dfrac{-\varphi'_x - \varphi'_y \operatorname{tg}\omega}{\varphi'_y - \varphi'_x \operatorname{tg}\omega}$

Remarque. — Cette expression est égale à $\dfrac{\rho}{\rho'}$. Car, en prenant les dérivées dans l'équation $\varphi(x, y) = 0$, en regardant x et y comme des fonctions de ρ et de ω, on a :

$$\varphi'_x \times (\rho' \cos\omega - \rho \sin\omega) + \varphi'_y \times (\rho' \sin\omega + \rho \cos\omega) = 0$$

Donc $$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\varphi'_x \cos\omega + \varphi'_y \sin\omega}{\varphi'_x \sin\omega - \varphi'_y \cos\omega} = \frac{\varphi'_x + \varphi'_y \operatorname{tg}\omega}{\varphi'_x \operatorname{tg}\omega - \varphi'_y}.$$

690. — Équations de la tangente.



R. — Équation d'une droite

$$\rho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)}$$

On a pour la tangente

$$p = \rho_1 \sin V$$

$$\alpha = \omega_1 - \left(\frac{\pi}{2} - V\right)$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho_1}{\rho'_1}$$

Substituant, on a, tous calculs faits :

$$\rho = \frac{\rho_1^2}{\rho_1 \cos(\omega_1 - \omega) + \rho'_1 \sin(\omega_1 - \omega)}$$

691. — Equation de la normale.

$$p = \rho_1 \cos V$$

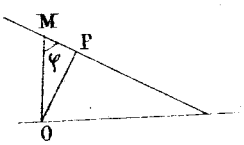
$$\alpha = V + \omega_1$$

D'où $$\rho = \frac{\rho_1 \rho_1'}{\rho_1' \cos(\omega_1 - \omega) + \rho_1 \sin(\omega_1 - \omega)}.$$

On peut voir que, pour $\omega = \omega_1$, les 2 équations donnent $\rho = \rho_1$.

---

692. — Equation polaire d'une droite passant par le point (ρ_1, ω_1) en faisant l'angle φ avec le rayon polaire passant par ce point.



R. — $$\rho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)}$$

$$p = \rho_1 \sin \varphi$$

$$\alpha = \omega_1 + \varphi - \frac{\pi}{2}$$

Donc $$\rho = \frac{\rho_1 \sin \varphi}{\sin(\omega_1 + \varphi - \omega)}.$$

---

693. — Trouver directement l'angle de la tangente avec le rayon polaire.

R. — L'équation de la droite, qui passe au point (ρ_1, ω_1) en fait avec le rayon vecteur correspondant l'angle φ est, comme on sait :

$$\rho = \frac{\rho_1 \sin \varphi}{\sin(\omega_1 + \varphi - \omega)}$$

L'équation de la courbe étant $f(\rho, \omega) = 0$, les points d'intersection seront donnés par

$$f\left(\frac{\rho_1 \sin \varphi}{\sin(\omega_1 + \varphi - \omega)}, \omega\right) = 0$$

Si on veut qu'un second point se confonde avec le 1er, cette équation doit avoir pour $\omega = \omega_1$, une racine double qui sera racine simple de la dérivée.

La dérivée $$f'_\rho \rho'_\omega + f'_\omega = 0$$ donne :

$$f'_\rho \frac{\rho_1 \sin \varphi \cos(\varphi - \omega + \omega_1)}{\sin^2(\varphi - \omega + \omega_1)} + f'_\omega = 0$$

ou, faisant $\omega = \omega_1$ $$f'_{\rho_1} \frac{\rho_1}{\operatorname{tg} \varphi} + f'_{\omega_1} = 0$$

D'où
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\rho_1}{-\dfrac{\rho'_{\omega_1}}{\rho'_{\rho_1}}} = \frac{\rho_1}{\rho'_1}$$

694. — Équation de la droite qui joint les points (ρ_1, ω_1) et (ρ_2, ω_2).

R. — L'équation de la droite étant
$$\rho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)}$$

On doit avoir
$$\rho_1 = \frac{p}{\cos(\omega_1 - \alpha)} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{p}{\cos(\omega_2 - \alpha)}.$$

De là
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho_2 \cos\omega_2 - \rho_1 \cos\omega_1}{-\rho_2 \sin\omega_2 + \rho_1 \sin\omega_1}$$

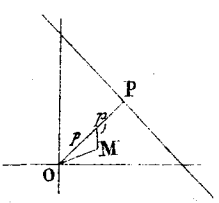
et
$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin(\omega_1 - \omega_2)}{\rho_1 \sin(\omega_1 - \omega) - \rho_2 \sin(\omega_2 - \omega)}$$

695. — Étant donnée l'équation $\varphi(\rho, \omega) = 0$, trouver directement l'équation de la tangente.

R. — L'équation de la droite, qui passe aux points (ρ_1, ω_1) et (ρ_2, ω_2), étant :
$$\rho = \rho_1 \rho_2 \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2)}{\rho_1 \sin(\omega_1 - \omega) - \rho_2 \sin(\omega_2 - \omega)}$$

Si l'on y fait $\omega_2 = \omega_1$, $\rho_2 = \rho_1$, le coefficient de $\rho_1 \rho_2$ prend la forme $\frac{0}{0}$, prenant les dérivées par rapport à ω_2, puis faisant $\omega_2 = \omega_1$, $\rho_2 = \rho_1$, il vient pour la tangente
$$\rho = \frac{\rho_1^2}{\rho_1 \cos(\omega_1 - \omega) + \rho'_1 \sin(\omega_1 - \omega)}$$
formule connue.

696. — Dans l'équation d'une droite $\rho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)}$, on change ρ en $\frac{1}{\rho}$; que représente la nouvelle équation ?



R. — Soit $OP = p$, la perpendiculaire à la droite, faisant avec Ox l'angle α, et $OP_1 = \frac{1}{p}$. La projection OM de OP_1 sur la droite

qui fait avec Ox l'angle ω sera :

$$OP_1 \cos(\omega - \alpha) = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{p} = \frac{1}{\rho}.$$

M est donc un point du nouveau lieu, qui est, par suite le cercle décrit sur OP, comme diamètre.

697. — *Relation entre trois rayons vecteurs dans l'ellipse faisant entre eux des angles de 120°.*

R. — $$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}, \quad \rho_1 = \frac{p}{1 - e\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right)}, \quad \rho_2 = \frac{p}{1 - e\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \omega\right)}$$

On sait, par la Trigonométrie que :

$$\cos\omega + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \omega\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \omega\right) = 0$$

Donc $$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{3}{p}, \text{ somme constante.}$$

698. — *Th.* — *On donne une ellipse et une parabole homofocales, dont les directrices sont de part et d'autre du foyer commun. Prouver que, si l'on joint ce foyer aux extrémités d'un diamètre de l'ellipse, la somme des quotients obtenus, en divisant les rayons vecteurs de l'ellipse, par ceux de la parabole, est constante.*

R. — Pour l'ellipse : $$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta} = a + ex$$

D'où $$\cos\theta = \frac{c + x}{a + ex}$$

D'où pour la parabole :

$$\rho' = \frac{p'}{1 + \cos\theta} = \frac{p'(a + ex)}{a + c + (e + 1)x}.$$

Changeant x en $-x$, on a :

$$\rho_1 = a - ex$$

$$\rho_1' = \frac{p'(a - ex)}{a + c - (e + 1)x}$$

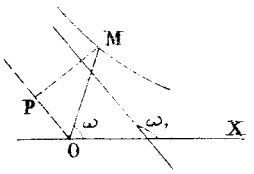
D'où $$\frac{\rho}{\rho'} + \frac{\rho_1}{\rho_1'} = \frac{2(a + c)}{p'}$$

c. q. f. d.

B.

B. Construction de Courbes

699. — $\rho = \dfrac{a}{b\cos\omega + c\sin\omega}$ représente une droite.



R. — En effet, la distance MP d'un point d'une courbe à la parallèle à l'asymptote menée par le pôle, est égale à

$$\rho \sin(\omega_1 - \omega)$$

Dans le cas actuel

$$MP = \frac{a\sin(\omega_1-\omega)}{b\cos\omega + c\sin\omega} = \frac{a(\sin\omega_1\cos\omega - \cos\omega_1\sin\omega)}{b\cos\omega + c\sin\omega}$$

Et ω_1 est donné par

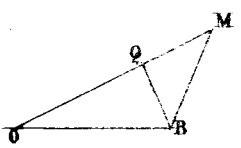
$$b\cos\omega_1 + c\sin\omega_1 = 0$$

en sorte que $$MP = a.$$

La distance d'un point de la ligne donnée à la droite OP, étant constante, cette ligne est droite. — C.q.f.d.

Exemple: $\rho = \dfrac{1}{\sin\omega + \cos\omega}$, $\rho = \dfrac{1}{\cos\omega}$.

700. — $\rho = a\sin\omega + b\cos\omega$.



R. — Soit OB = b, en projetant B en Q sur le rayon vecteur nous aurons :

$$OQ = b\cos\omega;$$

Prenons aussi

$$QM = a\sin\omega.$$

La tangente de l'angle QMB sera:

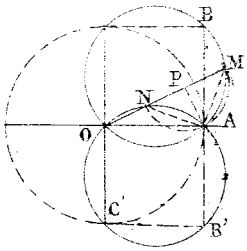
$$\frac{QB}{QM} = \frac{b\sin\omega}{a\sin\omega} = \frac{b}{a}.$$

La courbe est donc le segment capable de l'angle, dont la tangente est $\frac{b}{a}$ décrit sur b.

---

701. — $\rho^2 - \rho\sqrt{2}\cos\omega + \cos^2\omega - \frac{1}{2} = 0.$

R. — $$\rho = \frac{\sqrt{2}\cos\omega \pm \sqrt{-2\cos^2\omega + 2}}{2} = \frac{\cos\omega \pm \sin\omega}{\sqrt{2}}$$



Soit tracé le cercle de rayon $OA = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot OM$ étant un rayon quelconque, menons AP perpendiculaire sur OM, en prenons $PM = PN = PA$.

M et N seront deux points du lieu.

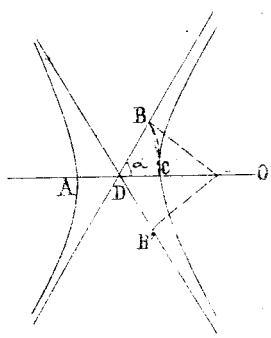
Pour M : $\rho = OP + PA = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega + \sin\omega)$

Pour N : $\rho = OP - PA = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega - \sin\omega)$.

Or, on voit que l'angle $OMA = 45^\circ$ et l'angle $ONA = 135^\circ$; donc le lieu se compose des 2 circonférences circonscrites aux carrés ABCO, AB'C'O.

---

702. — Construire $\rho = \frac{1}{\cos\alpha - \cos\omega}$.



R. — $\rho = \dfrac{\frac{1}{\cos\alpha}}{1 - \frac{1}{\cos\alpha}\cos\omega}$

L'équation rentre dans la forme $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$ avec $e > 1$; donc elle représente une hyperbole dont le pôle est l'un des foyers, et l'axe polaire, l'axe transverse.

Construisons directement d'après l'équation, on verra que, pour les asymptotes

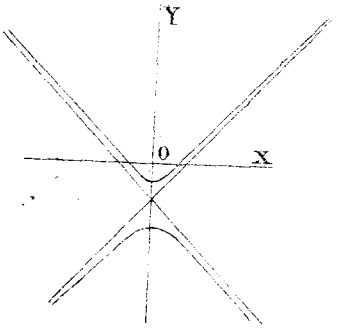
$$OB = OB' = \frac{1}{\sin\alpha};$$

que d'ailleurs : $AD = DC = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ donc $DC = DB$, propriété connue de l'hyperbole.

---

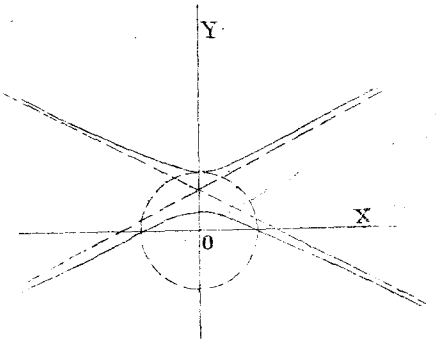
703. — $\rho = \frac{1}{\sin\alpha - \sin\omega}$.

R



R. — Changeant ω en $\frac{\pi}{2}+\omega$, on rentre dans la question précédente.

704. — $$\rho = \frac{1}{2\sin\omega - 1}.$$



R. — Hyperbole rapportée au foyer en $\bar{a}$ une perpendiculaire à l'axe transverse.

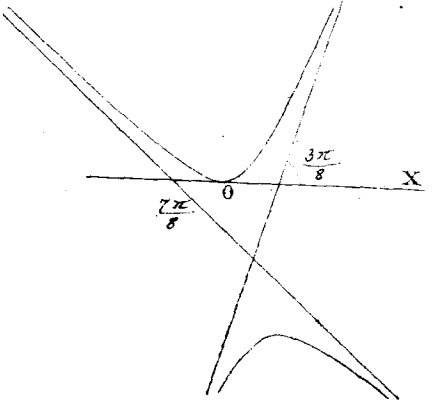
Asymptotes correspondant à $\begin{cases} \omega = 30^\circ \\ \omega = 150^\circ. \end{cases}$

Distance à l'origine :

$$\frac{\rho^2}{\rho_1} = -\frac{1}{2\cos\omega}$$

en valeur absolue $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

705. — $$\rho = \frac{\sin\omega}{\sin 2\omega + \cos 2\omega}.$$



R. — Courbe du 2e degré ; hyperbole, parce que le dénominateur s'annule en changeant de signe.

La courbe passe au pôle pour $\omega = K\pi$ et a pour tangente en ce point l'axe polaire.

Asymptote. — Branche infinie correspondant à

$$\operatorname{tg} 2\omega = -1$$
$$\omega = (4K-1)\frac{\pi}{8}.$$

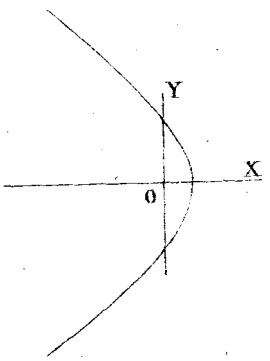
$$\omega' = \frac{3\pi}{8}$$

$$\omega'' = \frac{7\pi}{8}.$$

Distance des asymptotes au pôle :

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}.$$

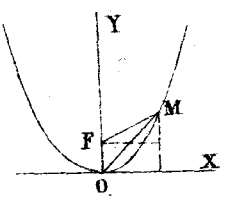
706. — $\rho = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}$.



R. — $\rho = \dfrac{2}{1 + \cos\omega}$

Parabole du 2e degré, dont le foyer est le pôle, l'axe polaire, l'axe et le paramètre égal à 2.

707. — $\rho = \dfrac{\sin\omega}{\cos^2\omega}$.



R. — En coordonnées rectilignes $x = y$. Parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. — Son foyer est tel que $OF = \frac{1}{4}$. — Pour le prendre pour pôle, et une parallèle à OX pour axe polaire, il faut poser :

$$\rho \sin\omega = \frac{1}{4} + \rho' \sin\omega'$$

$$\rho \cos\omega = \rho' \cos\omega'$$

Donc l'équation devient :

$$\rho'^2 \cos^2\omega' = \frac{1}{4} + \rho' \sin\omega'$$

D'où on tire : $\rho' = \dfrac{\sin\omega' \pm 1}{2\cos^2\omega'}$.

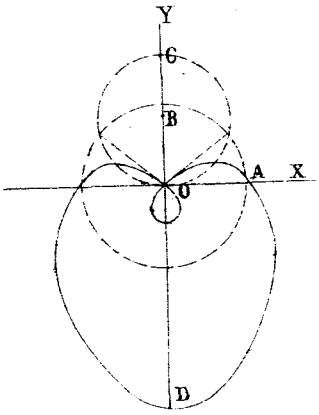
Ce qui fait :

$$\rho' = \frac{1}{2(1-\sin\omega')} \quad \text{et} \quad \rho' = -\frac{1}{2(1+\sin\omega')}$$

Équations rentrant l'une dans l'autre, si l'on fait varier ω' de 0 à 2π, et qu'on admette pour ρ' des valeurs négatives.

---

708. — $\rho = \sin\alpha - \sin\omega$.



R. — $\rho = \sin\alpha$ représente le cercle OAB ; $\rho = \sin\omega$ représente le cercle OC. Faisant la différence des rayons vecteurs de ces 2 courbes, on a la courbe OAD, donnée par :

$$\rho = \sin\alpha - \sin\omega$$

Tangente horizontale

$$V = \pi - \omega$$

$$\operatorname{tg} V = -\operatorname{tg}\omega$$

Or : $\operatorname{tg} V = \dfrac{\sin\alpha - \sin\omega}{-\cos\omega}$.

Donc on doit avoir :

$$\sin\alpha - \sin\omega = \sin\omega$$

$$\sin\omega = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

et alors

$$\rho = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

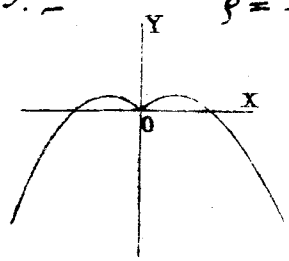
Autrement. — $y = \rho\sin\omega$ doit être maximum ; or, la somme des facteurs ρ et $\sin\omega$ est constante, ils doivent donc être égaux :

d'où

$$\sin\omega = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

---

709. — $\rho = \dfrac{1-\sin\omega}{1+\sin\omega}$.

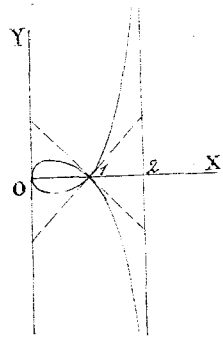


R. — L'axe Oy est un axe de symétrie.

Il n'y a pas d'asymptote.

---

710. — $\rho = \dfrac{\cos\omega}{1+\sin\omega}$.



R. — Asymptote pour :

$1+\sin\omega = 0$ ou $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$

obtenue en cherchant :

$\lim \rho \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\omega\right) = \lim\left(-\rho\cos\omega\right) =$

$\lim \dfrac{-\cos^2\omega}{1+\sin\omega} = \lim(\sin\omega - 1) = -2.$

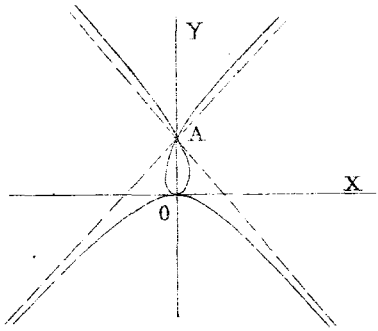
Tangente horizontale $\operatorname{Tg}.\omega = -\cos\omega$,

d'où $\sin\omega = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque. — S'il on prend Oy' pour axe polaire, l'équation devient :

$$\rho = \frac{\cos\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega} = \operatorname{Cot.}\frac{1}{2}\omega.$$

711. — $\rho = \dfrac{\sin\omega}{\cos\alpha - \cos\omega}$.



R. — Pour $\pi-\omega$ et $\pi+\omega$, ρ a des valeurs égales et de signes contraires. Oy est donc axe de symétrie.

Asymptote pour $\omega = \alpha$.

Distance à l'origine :

$$d = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{\sin^2\omega}{\cos\alpha\cos\omega - 1};$$

et pour $\omega = \alpha$, $d = -1$.

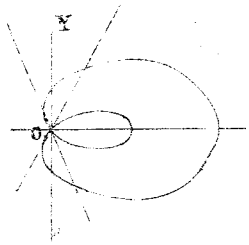
OA est donc égal à $\dfrac{1}{\cos\alpha}$. Or pour $\omega = \dfrac{\pi}{2}$, $\rho = \dfrac{\pi}{2}$, donc la courbe coupe l'asymptote en ce point.

712. — $\rho = 1 + 3\cos\omega$

R. — Ox est axe de symétrie car $f(\omega) = f(-\omega)$.

Tangente à l'origine : $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$;

Tangentes horizontales : $\operatorname{Tg} V = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{1+3\cos\omega}{-3\sin\omega}$.



Il faut que $V = \pi - \omega$

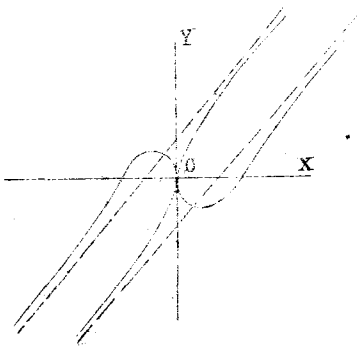
D'où $\cos\omega + 3\cos^2\omega = 3\sin^2\omega$

$$6\cos^2\omega + \cos\omega - 3 = 0$$

$$\cos\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{12}.$$

---

713. — $\rho = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\omega}$



R. — Le pôle est centre; ρ a les mêmes valeurs pour ω et $\pi + \omega$. Branches infinies pour $\operatorname{tg}\omega = 1$:

$$\omega = K\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Distance de l'asymptote au pôle:

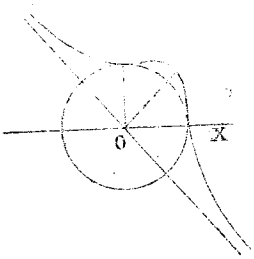
$$\frac{\rho^2}{\rho'} = \cos^2\omega,$$

ce qui donne $\frac{1}{2}$.

Pour $\omega = K\pi + \frac{\pi}{2}$, la courbe passe au pôle, elle y a donc Oy pour tangente.

---

714. — $\rho = \dfrac{1 + \sin\omega\cos\omega}{\sin\omega + \cos\omega}.$



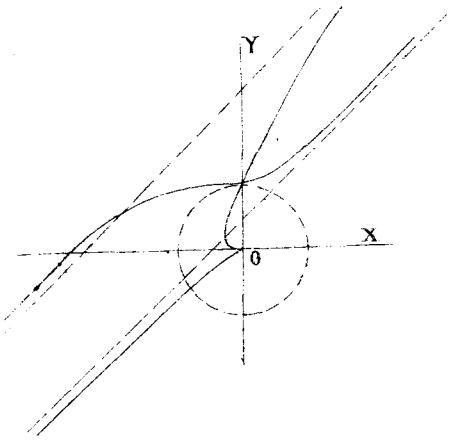
R. — ρ ne change pas, quand on change ω en $\frac{\pi}{2} - \omega$; la droite $\omega = \frac{\pi}{4}$ est donc axe de symétrie.

Asymptote à la distance $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ du pôle.

---

715. — $\rho = \dfrac{1 - \cos\omega}{\sin\omega - \cos\omega}.$

R. — $\omega = 0$, $\rho = 0$; ω croissant de 0 à $\frac{\pi}{4}$, ρ est constamment négatif en croît en valeur absolue de 0 à ∞.



Pour déterminer l'asymptote,

$$\frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{(1-\cos\omega)^2}{\sin\omega + \cos\omega - 1}$$

ce qui donne ; pour $\omega = \frac{\pi}{4}$ la distance $\frac{3-2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}$ de l'asymptote à l'origine.

ω variant de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, ρ décroît de l'infini positif à 1.

ω croissant de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{5\pi}{4}$, ρ varie de 1 à $+\infty$. On a une nouvelle asymptote à une distance de de l'origine égale à $-\frac{3+2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}$.

ω variant de $\frac{5\pi}{4}$ à 2π, ρ varie de $-\infty$ à 0.

La tangente à l'origine est l'axe polaire. Le point sur Oy correspond à un minimum du rayon vecteur.

716. — $\rho^2 = a\sin\omega + b\cos\omega + c$.

R. — Posant $\frac{b}{a} = \cot\alpha$, il vient

$$\rho = c \pm \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega-\alpha).$$

Prenant pour axe polaire, la droite $\omega = \alpha$, on aura :

$$\rho = c \pm \sqrt{a^2+b^2}\cos\omega$$

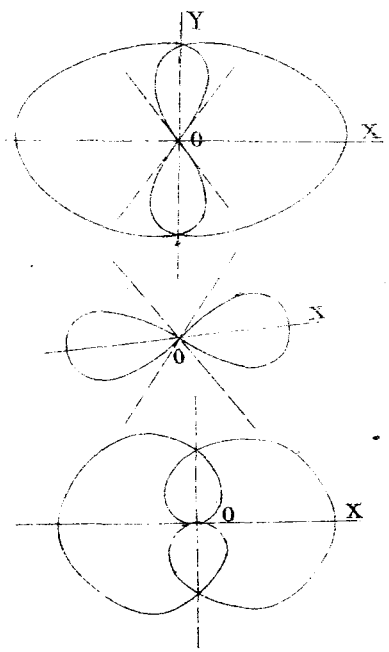
Soit d'abord $a^2+b^2 = d^2 > c^2$; en prenant c et d positifs. — L'axe polaire est un axe de symétrie, et le pôle est centre. La courbe passe par l'origine pour :

$$\cos\omega = -\frac{c}{d}.$$

(1)

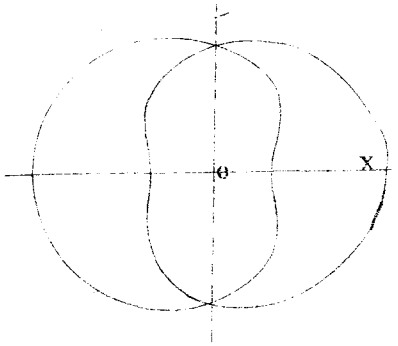
(2)

(3)



Si d est négatif, on a la même courbe ; si c est négatif, les valeurs réelles de ρ correspondent encore aux valeurs de ω comprises entre 0 et $\arccos\left(-\frac{c}{d}\right)$, on a la forme (2).

(4)



Soit maintenant $a^2 + b^2 = c^2$. Si $c < 0$ la courbe se réduit au pôle ; si $c > 0$, les boucles intérieures sont tangentes à Ox (3).

Enfin, je suppose $a^2 + b^2 < c^2$ Si $c < 0$, il n'y a pas de courbe.
Si $c > 0$, on a la forme (4).

---

717. — $\rho = f(\cos m\omega)$ et $\rho = f(\sin m\omega)$. Axes.

R. — Soit d'abord $\rho = f(\cos m\omega)$ en faisant m entier.

Les valeurs $\omega = \frac{K\pi}{m} + \omega_1$

et $\omega = \frac{K\pi}{m} - \omega_1$

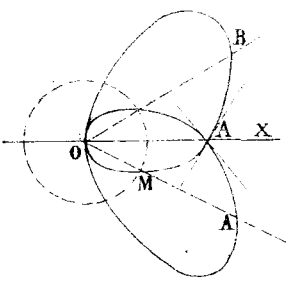
donnent la même valeur pour ρ ; donc la droite $\omega = \frac{K\pi}{m}$ est un axe de symétrie. Il y en a m.

Si m est fractionnaire, soit $m = \frac{p}{q}$. Les droites $\omega = \frac{Kq}{p}$ sont des axes ; elles sont en nombre p.

De même pour $f(\sin m\omega)$.

---

718. — $\rho = \sin 2\omega + 2\cos\omega$.

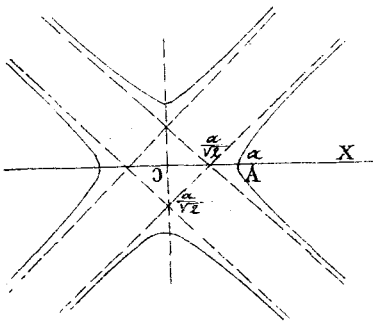


R. — Quand on change ω en $\pi - \omega$, ρ change de signe seulement ; l'axe polaire est donc axe de symétrie, il suffit de construire la branche OMABO, de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Le rayon maximum OB correspond à $\omega = \frac{\pi}{6}$

---

719. — $\rho = \frac{a}{\cos 2\omega}$.

R.



R. — Asymptotes correspondantes à $\omega = (2K+1)\frac{\pi}{4}$.

Distance de l'origine à l'asymptote $\frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{a}{2\sin 2\omega} = \pm\frac{a}{2}$.

Tangente

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\cot 2\omega}{2}.$$

Donc en A la tangente est perpendiculaire à Ox.

Il y a 4 axes de symétrie.

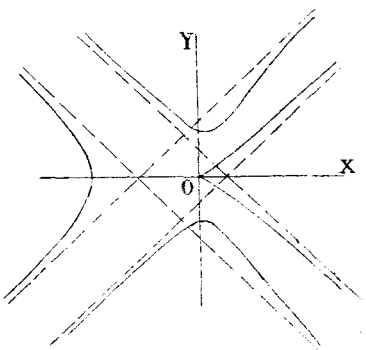
Si l'on tourne l'axe de 45° l'équation devient :

$$\rho = \frac{a}{\sin 2\omega}.$$

et en coordonnées rectilignes :

$$4x^2y^2 = a^2(x^2+y^2).$$

720. — $\rho = a\,\frac{1-\cos\omega}{\cos 2\omega}$.



R. — ρ ne change pas quand on change ω en $-\omega$; Ox est donc axe de symétrie.

Branches infinies :

pour $\omega = \frac{\pi}{4}$ et $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

Asymptotes :

$$\frac{\rho^2}{\rho'} = a\,\frac{(1-\cos\omega)^2}{\sin\omega\,(2\cos^2\omega - 4\cos\omega + 1)}$$

Pour $\omega = \frac{\pi}{4}$ la distance à l'origine est :

$$-\frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$:

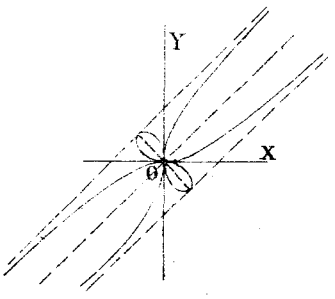
$$\frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ces dernières coupent Oy à une distance de l'origine

$$= a\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = a\,\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

La courbe le coupe à la distance a ; elle rencontre donc l'asymptote comme on l'a montré sur la figure.

721. — $\rho = \frac{\sin 2\omega}{1 - \operatorname{tg}\omega}$.



R. — ρ ne change pas quand ω se change en $\pi - \omega$; le pôle est donc centre.

Asymptotes correspondant à $\omega = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$:

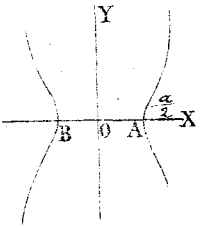
$$\frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{\sin^2 2\omega \cos\omega}{2\cos 2\omega(\cos\omega - \sin\omega) + 2\sin\omega}.$$

Pour $\omega = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$: $\frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{1}{2}$.

722. — $\rho = \frac{a}{1 + \cos 2\omega}$.

R. — On peut écrire $\rho = \frac{a}{2\cos^2\omega}$.

ρ ne change pas quand on change ω en $-\omega$ ou en $\pi - \omega$; les axes sont donc des axes de symétrie et l'origine est centre.



$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1 + \cos 2\omega}{2\sin 2\omega}.$$

Les tangentes en A et B sont donc parallèles à Oy

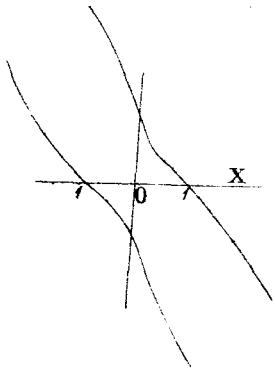
$$\frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{a}{2\sin 2\omega}.$$

Les points à l'infini s'obtiennent pour $1 + \cos 2\omega = 0$, et alors $\sin 2\omega = 0$; donc les asymptotes sont rejetées à l'infini.

723. — $\rho = \frac{1}{1 + \sin 2\omega}$.

R. — Le pôle est centre, car ρ ne change pas, quand on change ω en $\pi + \omega$.

Les bissectrices des angles des axes sont des axes de symétrie, car ρ ne change pas, quand on remplace ω par $\frac{\pi}{2} - \omega$ ou par $\frac{3\pi}{2} - \omega$.



Rayon vecteur minimum :

$$\rho' = \frac{-2\cos 2\omega}{(1+\sin 2\omega)^2}.$$

Il faut donc $\cos 2\omega = 0$, avec $1 + \sin 2\omega > 0$; ce qui donne :

$$\omega = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{5\pi}{4}.$$

Point à l'infini :

$$1 + \sin 2\omega = 0$$

$$\omega = \frac{3\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{7\pi}{4}.$$

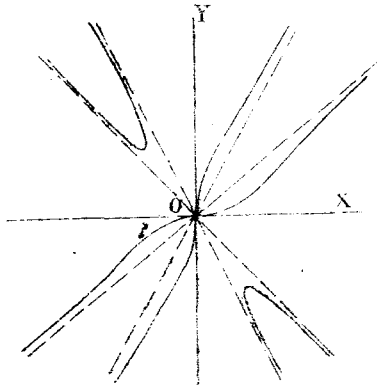
$$\frac{\rho^2}{\rho'} = -\frac{1}{2\cos 2\omega}.$$

L'asymptote est rejetée à l'infini.

La branche, en effet, est parabolique. ρ passe par l'infini sans changer de signe.

---

724. — $$\rho^2 = \frac{\sin 2\omega}{1 - \frac{3}{2}\sin^2 2\omega}.$$



R. — L'origine est centre ; ρ est réel, quand $\sin 2\omega$ et $1 - \frac{3}{2}\sin^2 2\omega$ sont de même signe ; si donc il est réel pour $\omega = \omega'$, il sera imaginaire pour $\omega = -\omega'$

ρ ne change pas quand ω change en $\frac{\pi}{2} - \omega$ ou en $\frac{3\pi}{2} - \omega$. Les droites $\omega = \frac{\pi}{4}$ et $\omega = \frac{3\pi}{4}$ sont donc des axes.

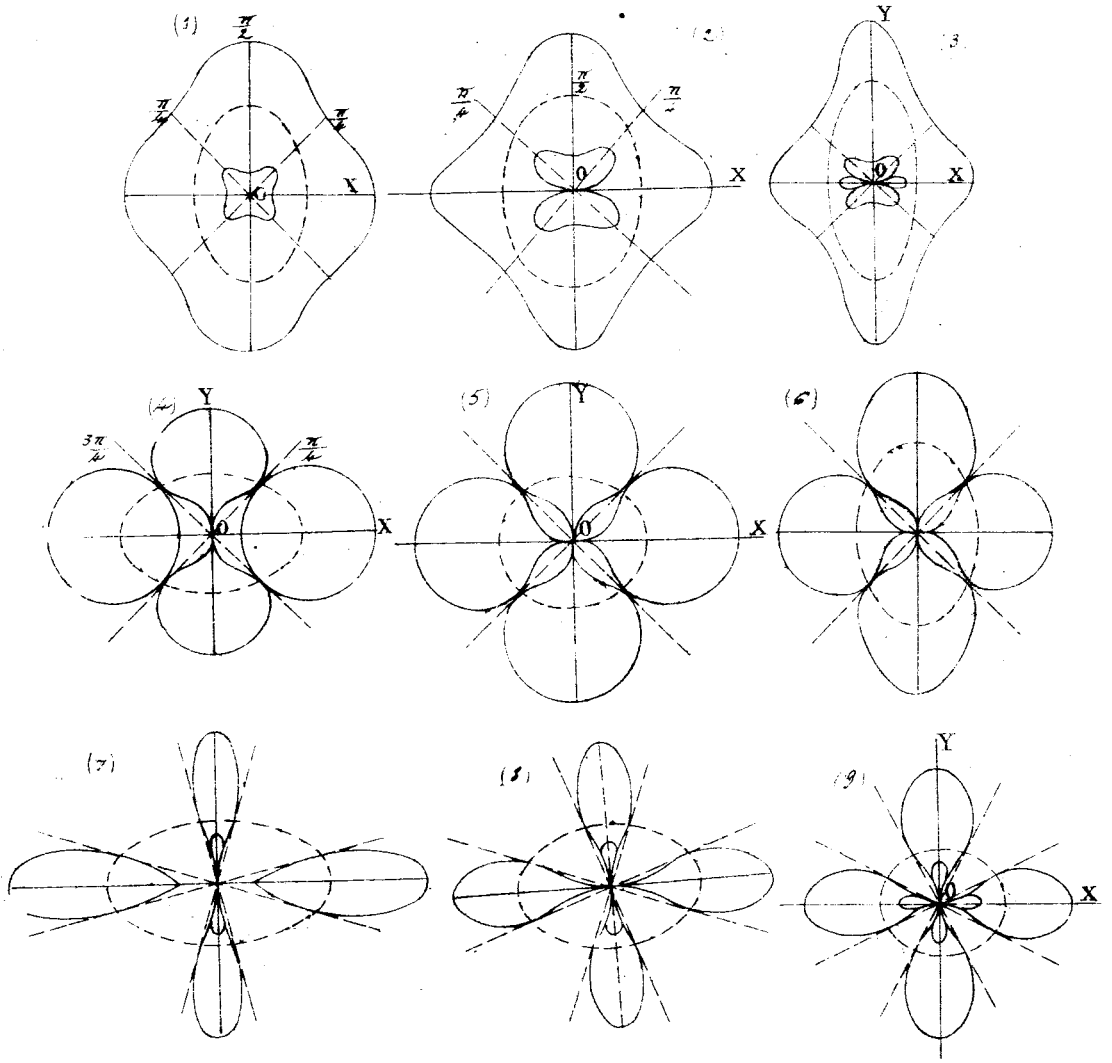
Les asymptotes sont les rayons infinis eux-mêmes.

Le minimum OA correspond à cause de la symétrie, à

$$\omega = \frac{3\pi}{4}, \quad \text{ce qui donne} \quad \rho^2 = 2.$$

---

725. — $$\rho = \frac{1}{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega} \pm \sqrt{1 - a^2 \sin^2 2\omega}.$$

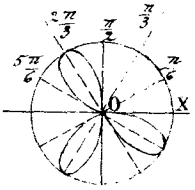


R. — Les 9 figures tracées correspondent aux cas suivants :

$$a^2 < 1 \begin{cases} b^2 < 1 & (1) \\ b^2 = 1 & (2) \\ b^2 > 1 & (3) \end{cases} \qquad a^2 = 1 \begin{cases} b^2 < 1 & (4) \\ b^2 = 1 & (5) \\ b^2 > 1 & (6) \end{cases} \qquad a^2 > 1 \begin{cases} b^2 < 1 & (7) \\ b^2 = 1 & (8) \\ b^2 > 1 & (9) \end{cases}$$

Dans les 3 dernières, la courbe est imaginaire entre les tangentes aux points où la courbe coupe son diamètre. Ce diamètre, que l'on a figuré partout en pointillé, est une ellipse.

726. — $\rho = \cos 3\omega$.



R. — Les axes sont les droites :

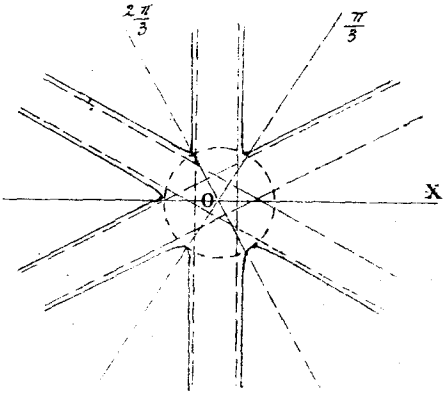
$\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{3}$

$\omega = \frac{2\pi}{3}$.

Il suffit de construire AO pour avoir le reste.

---

727. — $\rho^2 = \frac{1}{\cos^2 3\omega}$.



R. — 3 axes de symétrie :

$\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

L'origine est centre.

Minimum correspondant à

$\cos^2 3\omega = 1$ ou $\omega = \frac{K\pi}{3}$.

Points à l'infini pour

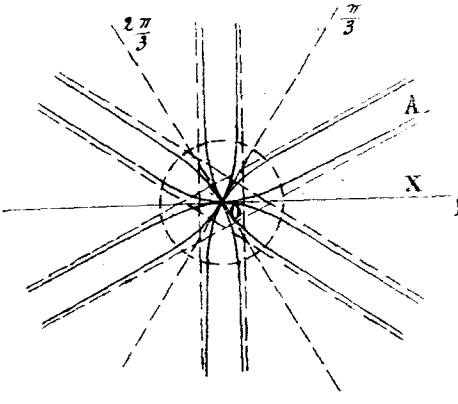
$\cos 3\omega_1 = 0$ ou $\omega_1 = (2K+1)\frac{\pi}{6}$.

Distance des asymptotes à l'origine :

$$\frac{1}{6 \sin 3\omega_1} = \frac{1}{6}$$

---

728. — $\rho = \operatorname{tg} 3\omega$.



R. — 3 axes de symétrie :

$\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

Branches infinies correspondant à $\omega = (2K+1)\frac{\pi}{6}$.

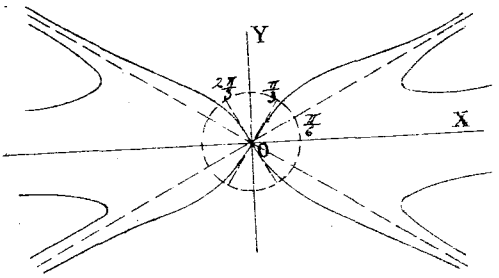
L'asymptote à la distance $\frac{1}{3}$ de l'origine

L'origine est centre.

La branche OA suffit pour construire le reste par symétrie.

---

729. — $\rho = \frac{\operatorname{tg} 3\omega}{\operatorname{tg}^3 \omega}$.



R. —

$$\operatorname{tg} 3\omega = \frac{3\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}^3\omega}{1 - 3\operatorname{tg}^2\omega}.$$

Donc :

$$\rho = \frac{3 - \operatorname{tg}^2\omega}{\operatorname{tg}^2\omega\,(1 - 3\operatorname{tg}^2\omega)}.$$

ρ s'annule pour

$\operatorname{tg}^2\omega = 3$ ou $\operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{3}$

et $\operatorname{tg}\omega = \infty$, ce qui donne

$$\omega = K\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \omega = K\pi + \frac{\pi}{2}.$$

ρ est infini pour $\omega = K\pi$ et pour $\omega = K\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

L'origine est centre ; et Ox et Oy axes de symétrie. — Pour $\omega = 0$, $\lim \rho \sin\omega$ est infini, il n'y a donc pas d'asymptote. — Pour $\omega = \frac{\pi}{6}$ l'asymptote est le rayon vecteur lui-même ; dans l'intervalle, ρ passe par un minimum correspondant à $\rho' = 0$ ou :

$$1 - 6\operatorname{tg}^2\omega + \operatorname{tg}^4\omega = 0.$$

ce qui donne $\operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{8}} = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$

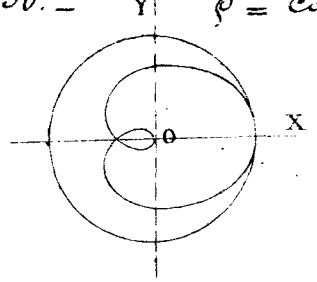
La valeur qui convient ici est $\sqrt{2} - 1$, ce qui fait :

$$\omega = \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad \rho = 17 + 12\sqrt{2}.$$

ω variant entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$, ρ part de 0 pour revenir à 0 et passe par un maximum correspondant à

$\operatorname{tg}\omega = \sqrt{2} + 1$, $\quad \omega = \frac{3\pi}{8} \quad \rho = 17 - 12\sqrt{2}$.

730. — $\rho = \cos\frac{1}{3}\omega$.

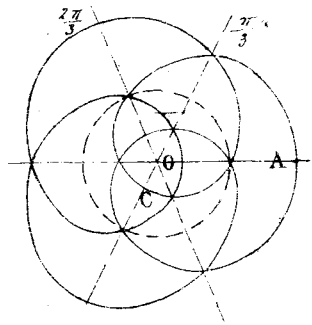


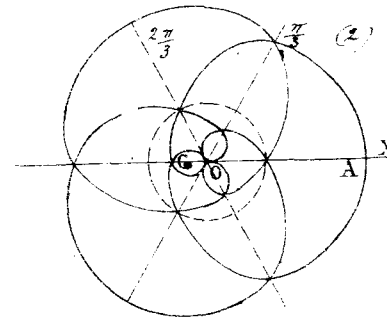
R. — Axe de symétrie :

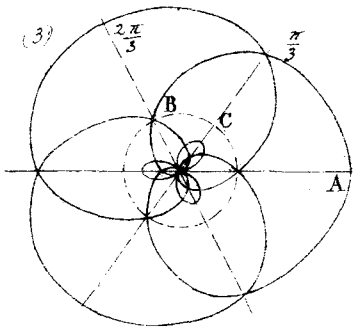
$$\omega = 0.$$

On a à construire la moitié de la courbe, c'est-à-dire faire varier ω de 0 à $\frac{3\pi}{2}$.

731. — $\rho = b + \cos\frac{3}{4}\omega$.







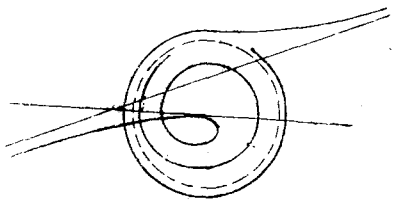
R. — 3 axes de symétrie :

$$\omega = 0$$
$$\omega = \frac{\pi}{3}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{3}$$

ω variant de 0 à $\frac{4\pi}{3}$ on obtient la branche ABC ; le reste, par symétrie. Les 3 figures correspondent à $b > 1$, $b = 1$, $b < 1$. Le cercle figuré a pour rayon b.

---

732. — $\rho = \frac{2a\omega}{2\omega - 1}$



R. — ω variant de 0 à $\frac{1}{2}$, ρ varie de 0 à $-\infty$. ω variant de $\frac{1}{2}$ à $+\infty$, ρ varie de $+\infty$ à a en décroissant toujours. — Les valeurs négatives de ω donnent des valeurs positives de ρ toutes inférieures à a en ayant a pour limite. La circonférence $\rho = a$ est asymptote. L'asymptote rectiligne des branches infinies est à une distance $\frac{a}{2}$ du pôle.

XII. Chapitre complémentaire.

A. — Questions diverses.

733. — Des Diamètres.

R. — Soit la courbe : $y = x^3$.

Cherchons l'équation de son diamètre. Soit a le coefficient angulaire d'une série de courbes parallèles, x', y' les coordonnées du point milieu de l'axe de ces cordes ; je transporte l'origine en ce point, et l'équation de la courbe devient :

$$y + y' = x^3 + 3x^2x' + 3xx'^2 + x'^3.$$

Je cherche son intersection avec la corde

$$y = ax$$

$$x^3 + 3x^2x' + (3x'^2 - a)x + x'^3 - y' = 0$$

Cette équation qui donne les abscisses des points d'intersection de la corde avec la courbe, doit avoir deux racines égales et de signes contraires ; or, la somme des racines de l'équation est $-3x'$; donc $-3x'$ est racine de l'équation. — Écrivant cette condition, on a :

$$-9x'^3 + 3ax' + 3x'^3 - y' = 0$$

ou

$$y = 3ax - 8x^3$$

Telle est l'équation du diamètre.

On peut arriver autrement à cette solution. L'équation qui donne les abscisses des points d'intersection, devant avoir deux racines égales et de signes contraires, si l'on désigne par α l'une de ces racines, $x^2 - \alpha^2$ devra diviser le premier membre de l'équation, ce qui donne, en effectuant la division :

$$\alpha^2 + 3x'^2 - a = 0$$

$$x'^3 - y' + 3\alpha^2 x' = 0$$

Éliminant α entre ces deux équations, on aura l'équation du diamètre.

$$y = 3ax - 8x^3$$

2e Méthode. — Soient x', y', x'', y'' les coordonnées des extrémités d'une corde, celles du point milieu sont :

$$x = \frac{x' + x''}{2} \qquad y = \frac{y' + y''}{2}.$$

Le coefficient angulaire de la corde est constant ;

donc
$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = a$$

De plus, les deux points x', y', x'', y'' sont sur la courbe, donc on a les deux équations de condition :

$$F(x', y') = 0$$

$$F(x'', y'') = 0$$

Éliminant x', y', x'', y'' entre ces cinq équations, on aura l'équation du diamètre.

3e Méthode. — Soit $y = ax + b$, l'équation de l'une des cordes ; a est constant, et en faisant varier b, on aura toutes les cordes parallèles. Cherchons l'intersection de cette corde avec la courbe, nous aurons :

$$F(ax + b, x) = 0$$

Ce qu'on cherche, c'est l'abscisse du point milieu, qui est la demi-somme des abscisses des points extrêmes : dans le cas des courbes du second degré, on a immédiatement la demi-somme des racines de l'équation, en fonction de b ; éliminant b entre cette équation et $y = ax + b$, on a l'équation du diamètre.

Dans le cas général, on n'a pas sur l'équation la demi-somme des racines ; mais si l'on pouvait former une équation ayant pour racines les demi-sommes des racines de la proposée, la question serait résolue. Or, on peut former une équation ayant pour racines les sommes deux à deux des racines de l'équation proposée ; en effet, soient α et β deux de ces racines, et imaginons formé le produit $(x - \alpha)(x - \beta)$; il est de la forme $x^2 - mx + n$, m étant la somme des racines et n leur produit. Donc $x^2 - mx + n$ doit diviser le premier membre de l'équation proposée ; effectuant

la division, on arrivera à un reste de la forme $Mx + N$, qui doit être nul quel que soit x, ce qui exige que l'on ait $M = 0$, $N = 0$. Éliminant n entre ces deux équations, on aura une équation qui donnera les sommes deux à deux des racines, et en changeant m en $2m$, la nouvelle équation donnera les demi-sommes des racines de l'équation proposée, deux à deux. Si donc, on élimine b entre cette équation et l'équation $y = ax + b$, on aura l'équation du diamètre.

Appliquons cette méthode à la courbe $y = x^3$.

L'équation qui donne les abscisses des points d'intersection est :

$$x^3 - ax - b = 0$$

divisons par $x^2 - mx + n$, nous aurons les conditions :

$$m^2 - n - a = 0$$

$$mn = -b.$$

Éliminant n, il vient :

$$m^3 - am + b = 0.$$

Cette équation est précisément la transformée en $-x$ de la proposée, et cela doit être ; car si l'on appelle α, β, γ, les racines de la proposée, on a :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad \text{ou} \quad \alpha + \beta = -\gamma \; ; \qquad \text{Or} \quad m = c.$$

Pour avoir l'équation qui donne les demi-sommes des racines, je pose $m = 2x$, et il vient :

$$8x^3 - 2ax + b = 0$$

Éliminant b entre cette équation et

$$y = ax + b$$

Il vient pour l'équation du diamètre :

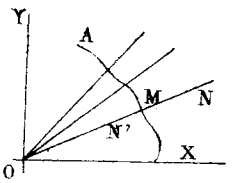
$$y = 3ax - 8x^3.$$

734. — *Équation de la courbe, telle que toutes les cordes passant par un point donné P, de son plan, sont égales.* R. — Soient A, le diamètre de ces cordes ; la courbe est une

conchoïde par rapport à A ; Soient $y = f(x)$, son équation ; $y = \alpha x$ l'équation d'une corde.

Pour le point milieu, on aura :

$$\alpha x = f(x), \quad x = \varphi(\alpha), \quad y = \alpha\varphi(\alpha).$$



Le point correspondant est donné par les équations :

$$y = \alpha x$$

$$[x - \varphi(\alpha)]^2 + [y - \alpha\varphi(\alpha)]^2 = d^2$$

Éliminant α, il vient :

$$(x^2 + y^2)\left[x - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]^2 = d^2 x^2$$

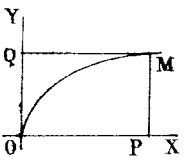
Faisant varier d et φ, on a toutes les courbes répondant à la question.

Exemple. — Si l'équation de A est $y = 0$, on aura $\varphi(\alpha) = 0$ identiquement.

Par suite, le lieu est $x^2 + y^2 = d^2$

Si l'on donne l'équation $x = \varphi(\alpha)$, on aura $y = \alpha x$, et, éliminant α, on aura $y = f(x)$ pour l'équation de A.

735. — *Équation de la courbe telle, que l'aire MOP a un rapport constant avec l'aire OQMP.*



R. — Les accroissements de ces aires doivent être proportionnels aussi ; on doit donc avoir :

$$\lim \frac{y\,\Delta x}{y\,\Delta x + x\,\Delta y} = K$$

ou

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - K}{Kx}.$$

en remontant aux fonctions primitives :

$$l\,Cy = \frac{1-K}{K}\,l\,x \quad \text{ou} \quad Cy = X^{\frac{1-K}{K}}.$$

736. — *Courbe dont toutes les normales passent au point* (α, β).

R. — Équation d'une normale $Y - y = \frac{1}{y'}(X - x)$.

Comme elle doit passer par (α, β)

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x)$$

ou

$$y'(y-\beta) + x - \alpha = 0.$$

Remontant aux fonctions primitives :

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = C,$$

équation d'un cercle dont le centre est (α, β).

737. — Trouver l'équation d'une courbe, telle qu'à une asymptote ne corresponde pas une branche infinie.

R. — Il suffit que dans le voisinage de l'asymptote, l'une des coordonnées soit imaginaire.

Ainsi

$$y^2 = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}.$$

La droite $x = 1$ semble être asymptotique ; mais y n'est réel que pour $x > 2$.

738. — Écrire l'équation d'une courbe ayant pour asymptote la parabole $y^2 = 2px$.

R. —

$$y = \sqrt{2px} + F(x)$$

$F(x)$ s'annulant pour x infini.

739. — Quelles relations y a-t-il entre les courbes définies par les équations :

$$f(x, y) = 0 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad f(x, y) + K = 0 \quad (2)$$

K étant une constante ?

R. — Elles sont asymptotiques. — En effet, si l'on fait $f(x, y) = 0$ dans l'équation (2), il reste $K = 0$, impossibilité répondant à des valeurs infinies pour x et y.

740. — Dans une équation de degré m, que représente l'ensemble des termes de degré m égalé à zéro ?

R. — Les parallèles menées par l'origine aux asymptotes non parallèles à l'axe des y.

741. — *Exprimer que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $f(x, y) = 0$; — quelle lui est tangente.*

R. — 1° *Asymptote*: Soit $f = f_m + f_{m-1} + \ldots\ldots$

f_p désignant une fonction homogène de degré p. On devra avoir:

$$f_m(1, a) = 0 \qquad \text{et} \qquad f = \frac{f_{m-1}(1, a)}{f'_m(1, a)}.$$

2° *Tangente*:

L'équation $f(x, ax + b) = 0$, qui donne les points de rencontre de la droite et de la courbe, doit avoir 2 racines égales. Elle aura donc une racine commune avec l'équation dérivée

$$f'_x + a f'_y = 0.$$

Et si l'on élimine x et y entre ces 2 équations et celle de la droite, on aura une condition entre a et b.

---

742. — *Étant données 2 courbes $y = f(x)$ et $y_1 = \varphi(x)$, et telles que $y^2 - y_1^2 = K^2$, trouver une relation entre les tangentes aux points correspondant à une même abscisse.*

R. — Équations des tangentes:

$$Y - y = y'(X - x) \qquad (1)$$

$$Y - y_1 = y'_1(X - x) \qquad (2)$$

On a $\qquad yy' - y_1 y'_1 = 0$.

Multipliant (1) par y et (2) par y_1, puis retranchant, il vient

$$Y(y - y_1) = y^2 - y_1^2.$$

$$Y = y + y_1$$

C'est l'équation d'une droite qui passe au point de rencontre des tangentes.

Ce point a donc pour ordonnée la somme des ordonnées des points de contact.

---

743. — *On donne un nombre quelconque de points dans un plan. 1° Trouver parmi les droites parallèles à une*

même direction, celle dont la somme des carrés des distances aux points donnés est un minimum;

2° Lorsque la direction de cette droite varie, elle passe par un point fixe;

3° Mener par un point donné des droites telles, que la somme des carrés de leurs distances aux points donnés soit un carré donné;

4° Lorsque les droites de la question précédente sont imaginaires, le point est à l'intérieur d'une courbe dont on demande l'équation;

5° On peut trouver dans le plan 3 points tels, que le rapport de la somme des carrés de leurs distances à une droite quelconque du plan, à la somme correspondante pour les points donnés, soit constant;

6° Ces 3 points sont indéterminés; trouver la courbe sur laquelle ils se trouvent.

R. — 1° Soient x', y' les coordonnées de l'un des points, a le coefficient angulaire de la direction donnée, Σ une somme s'étendant à tous les points donnés. On doit rendre minimum $\Sigma(y'-ax'-b)^2$, donc prenant la dérivée par rapport à b,

$$\Sigma(y'-ax'-b)=0$$

D'où
$$b=\frac{\Sigma y'-a\Sigma x'}{n}.$$

2° La droite cherchée a donc pour équation :

$$y=ax+\frac{\Sigma y'-a\Sigma x'}{n}$$

ou
$$y-\frac{\Sigma y'}{n}=a\left(x-\frac{\Sigma x'}{n}\right).$$

Elle passe donc, quel que soit a, par le centre des moyennes distances des points donnés.

3° Soient x_1, y_1 les coordonnées du point donné. On doit avoir :

$$\Sigma[y'-y_1-a(x'-x_1)]^2=K^2$$

ou
$$a^2\Sigma(x'-x_1)^2-2a\Sigma(x'-x_1)(y'-y_1)+\Sigma(y'-y_1)^2-K^2=0$$

4° L'équation précédente donne des valeurs réelles pour a,

tant pour le point (x_1, y_1) n'est pas à l'intérieur de la courbe :

$$\Sigma\overline{(x'-x_1)(y'-y_1)}^2 = \Sigma(x'-x_1)^2\left[\Sigma(y'-y_1)^2 - K^2\right]$$

5° Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des 3 points cherchés : On doit avoir

$$\frac{(y_1-ax_1-b)^2+(y_2-ax_2-b)^2+(y_3-ax_3-b)^2}{\Sigma(y'-ax'-b)^2} = \text{Const}^{\text{te}}$$

et comme cela doit avoir lieu quels que soient a et b,

$$\frac{3}{n} = \frac{x_1+x_2+x_3}{\Sigma x'} = \frac{y_1+y_2+y_3}{\Sigma y'} = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{\Sigma x'^2} = \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\Sigma x'y'} = \frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{\Sigma y'^2}$$

6° Si on élimine (x_1, y_1), (x_2, y_2) entre ces 5 équations, on aura une relation entre x_3 et y_3, qui sera l'équation du lieu cherché.

$$x_1^2 = \left(\frac{3}{n}\Sigma x' - x_2 - x_3\right)^2 = \frac{3}{n}\Sigma x'^2 - x_2^2 - x_3^2$$

ou
$$2x_2^2 - 2x_2\left(\frac{3}{n}\Sigma x' - x_3\right) + \left(\frac{3}{n}\Sigma x' - x_3\right)^2 - \frac{3}{n}\Sigma x'^2 + x_3^2\,\frac{2}{3} = 0$$

Par suite :
$$x_1 = \frac{\frac{3}{n}\Sigma x' - x_3 \pm \sqrt{-\left(\frac{3}{n}\Sigma x' - x_3\right)^2 + \frac{6}{n}\Sigma x'^2 - 2x_3^2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{n}\Sigma x' - x_3 \mp \sqrt{-\left(\frac{3}{n}\Sigma x' - x_3\right)^2 + \frac{6}{n}\Sigma x'^2 - 2x_3^2}}{2}$$

$$y_1 = \frac{\frac{3}{n}\Sigma y' - y_3 \mp \sqrt{-\left(\frac{3}{n}\Sigma y' - y_3\right)^2 + \frac{6}{n}\Sigma y'^2 - 2y_3^2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\frac{3}{n}\Sigma y' - y_3 \pm \sqrt{-\left(\frac{3}{n}\Sigma y' - y_3\right)^2 + \frac{6}{n}\Sigma y'^2 - 2y_3^2}}{2}$$

Portant dans l'équation aux produits, il vient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\Sigma x' - x_3\right)\left(\frac{3}{n}\Sigma y' - y_3\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{6}{n}\Sigma x'^2 - 2x_3^2 - \left(\frac{3}{n}\Sigma x' - x_3\right)^2\right]\left[\frac{6}{n}\Sigma y'^2 - 2y_3^2 - \left(\frac{3}{n}\Sigma y' - y_3\right)^2\right]}$$
$$+ x_3 y_3 = \frac{3}{n}\Sigma x'y'.$$

ou, chassant les radicaux,

$$0 = \left\{\begin{array}{l} y^2\left(\Sigma x'^2 - \frac{1}{2}\overline{\Sigma x'}^2\right) - xy\left(\Sigma x'y' - \frac{1}{n}\Sigma x'\Sigma y'\right) + x^2\left(\Sigma y'^2 - \frac{1}{n}\overline{\Sigma y'}^2\right) + \frac{2}{n}\,y \\ \left(\Sigma x'\Sigma x'y' - \Sigma y'^2\Sigma x'^2\right) + \frac{2}{n}\,x\left(\Sigma y'\Sigma x'y' - \Sigma x'\Sigma y'^2\right) + \frac{2}{n}\left(\overline{\Sigma x'y'}^2 - \right. \\ \left.\Sigma x'^2\Sigma y'^2\right) + \frac{3}{n}\left(\overline{\Sigma x'}^2\Sigma y'^2 - \Sigma x'\Sigma y'\Sigma x'y' + \overline{\Sigma y'}^2\Sigma x'\right)\Big] \end{array}\right.$$

C'est donc une courbe du 2° degré.

---

744. Théorème. — Lorsqu'un lieu est donné par un

système de courbes dont l'une passe par un point fixe, l'analyse donne ce point comme faisant partie du lieu.

R. — On peut toujours supposer par des éliminations successives, les équations de condition réduites à deux

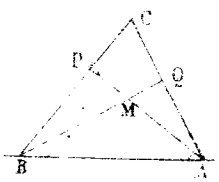
(1) $F(x\ y\ a) = 0$ et $F_1(x, y, a) = 0$ (2)

l'équation du lieu résulte donc de l'élimination de a entre (1) et (2).

Soit $\varphi(x, y) = 0$, (3), cette équation. La courbe (1) passe par un point fixe (x_1, y_1); Si dans (2), on fait $x = x_1$, $y = y_1$, l'équation $F_1(x_1, y_1, a) = 0$ donne une certaine valeur de a, $a = a_1$. Pour cette valeur a_1, x_1 et y_1 vérifient (1) et (2), donc aussi (3). Donc le lieu passe au point fixe. C.q.f.d.—

B. Lieux géométriques.

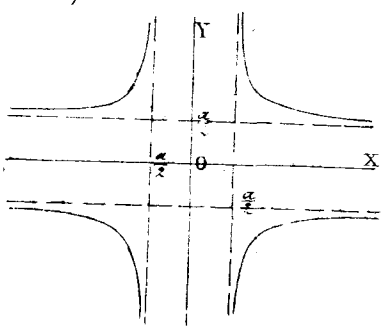
745. — Lieu des points de rencontre des hauteurs d'un triangle, dont la base et l'angle au sommet sont constants.



R. — Le quadrilatère CPMQ étant inscriptible, l'angle en M est supplémentaire de C. Le lieu est donc le cercle symétrique de celui sur lequel se déplace le point C, par rapport à la droite AB.

---

746. — Lieu du milieu de la portion de la tangente au cercle comprise entre 2 diamètres rectangulaires.



R. — Soient pris ces diamètres pour axes. — L'équation de la tangente peut s'écrire :

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = a.$$

Le point du lieu aura donc pour coordonnées :

$$x = \frac{a}{2\cos\alpha} \qquad y = \frac{a}{2\sin\alpha},$$

et l'équation du lieu sera :

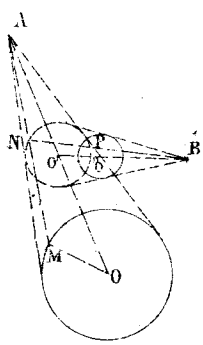
$$\frac{a^2}{4x^2} + \frac{a^2}{4y^2} = 1.$$

C'est une courbe composée de 8 branches infinies ayant pour asymptotes les droites :

$$x = \pm \frac{a}{2} \qquad y = \pm \frac{a}{2}$$

---

747. — Étant donnés un cercle O et deux points fixes A et B, on joint un point M du cercle à A, on prend le milieu N qu'on joint à B, et on prend le tiers de NB. Lieu du point P ainsi obtenu.



R. — D'après ce que l'on sait sur les courbes homothétiques, le lieu de N est un cercle dont le centre O' est au milieu de OA, et le rayon égal à $\frac{1}{2}$ OM; et le lieu de P est un 3e cercle, dont le centre O'' est au tiers de O'B à partir de O', et dont le rayon est égal aux $\frac{2}{3}$ de celui de O', ou à $\frac{1}{3}$ OM.

---

748. — Un point O étant donné dans le plan de 2 droites, trouver le lieu des points qui divisent en moyenne et extrême raison les portions des droites passant par O, qui sont comprises entre les 2 droites.

R. — Soient (α, β) les coordonnées de O, a l'abscisse à l'origine de l'une des droites mobiles, et prenons pour axes, les 2 droites fixes.

Équation de condition :

$$y = \frac{-\beta}{\alpha - a}(x - a) \qquad x^2 = a(a - x).$$

De là
$$a = \frac{\alpha y - \beta x}{y - \beta}$$
et l'équation du lieu est :
$$x^2 = \frac{y(\alpha - x)(\alpha y - \beta x)}{(y-\beta)^2}$$
ou
$$y^2(x^2 + \alpha x - \alpha^2) + \beta x y(\alpha - 3x) + \beta^2 x^2 = 0$$
ou encore
$$y = \frac{\beta x(3x - \alpha) \pm \beta x(x - \alpha)\sqrt{5}}{2(x^2 + \alpha x - \alpha^2)}.$$

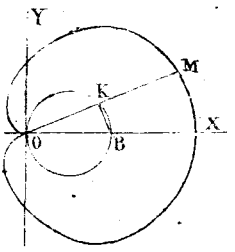
On a donc les 2 courbes :
$$y = \frac{\beta x[x(3+\sqrt{5}) - \alpha(1+\sqrt{5})]}{2(x^2 + \alpha x - \alpha^2)}$$
$$y = \frac{\beta x[x(3-\sqrt{5}) - \alpha(1-\sqrt{5})]}{x^2 + \alpha x - \alpha^2}$$

Ces équations peuvent s'écrire :
$$y = \frac{(3+\sqrt{5})\beta x[x - \frac{\alpha}{2}(-1+\sqrt{5})]}{2[x + \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5})][x - \frac{\alpha}{2}(-1+\sqrt{5})]}$$
$$y = \frac{(3-\sqrt{5})\beta x[x + \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5})]}{2[x + \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5})][x - \frac{\alpha}{2}(-1+\sqrt{5})]}$$

Elles se réduisent donc à
$$y = \frac{(3+\sqrt{5})\beta x}{2[x + \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5})]}$$
$$y = \frac{(3-\sqrt{5})\beta x}{2[x - \frac{\alpha}{2}(-1+\sqrt{5})]}$$
et représentent 2 hyperboles rapportées à des parallèles à leurs asymptotes et passant toutes deux à l'origine et au point (α, β).

---

749. — On donne dans une ellipse, un foyer et l'un des sommets du petit axe. Lieu du centre et lieu du sommet du grand axe.



R... Soient O le foyer, B le sommet donné. — Le lieu des centres sera la circonférence décrite sur OB comme diamètre. Le sommet M du grand axe de l'une des courbes s'obtient

en prenant KM = OB. L'équation du lieu de M est donc

$$\rho = a(1 + \cos\omega).$$

C'est une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle égal au cercle OKB roulant sur celui-ci.

750. — Lieu des projections d'un point sur les tangentes à une courbe.

R. — Prenons le point pour origine, en supposant l'équation de la tangente écrite :

$$y = mx + \varphi(m).$$

Celle de la perpendiculaire sera : $y = -\frac{1}{m}x$

et l'équation du lieu $x^2 + y^2 = y\varphi\left(-\frac{x}{y}\right)$

ou en coordonnées polaires $\rho = \sin\theta\,\varphi(-\cot\theta)$.

Exemple : — Projection du foyer de l'ellipse sur les tangentes :

$$\varphi(m) = -mc + \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Donc on aura : $$x^2 + y^2 = cx + \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

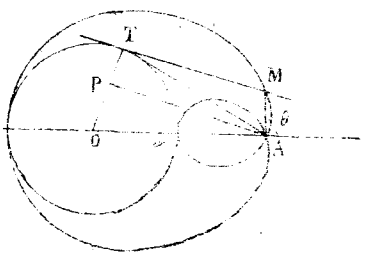
Ou $$(x^2+y^2)^2 - 2cx(x^2+y^2) = b^2(x^2+y^2)$$

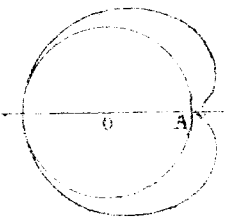
ou encore $$x^2 + y^2 - 2cx = b^2$$

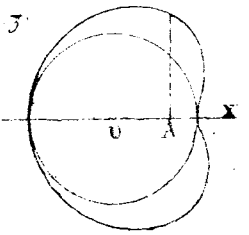
ou enfin $$(x-c)^2 + y^2 = a^2.$$

C'est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre

751. — Lieu des projections d'un point sur les tangentes au cercle.







R. — Soit A le point donné. — On peut trouver facilement la forme du lieu. — La tangente au lieu en A est la perpendiculaire à la tangente au cercle issue de A. — La courbe pouvant être coupée en 4 points par une droite, sera du 4e degré. — Son équation s'obtient en remarquant que :

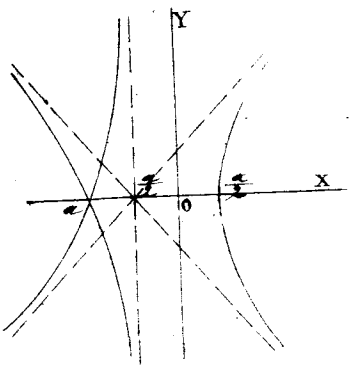
$$\rho = AM = TP = OT - OP$$

$$= r - a\cos\theta$$

Quand A est sur le cercle (2) ou au-dedans (3), la courbe change de forme.

---

752. — Lieu du sommet d'un triangle dont la base est constante et dont l'un des angles est le tiers de l'autre.



R. — Soit 2a la base. Prenons cette droite pour axe des x, et la perpendiculaire au milieu pour axe des y. Nous aurons

$$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{y}{a+x}$$

$$\operatorname{Tg}3\alpha = \frac{y}{a-x} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Éliminant $\operatorname{Tg}\alpha$, on a pour l'équation du lieu

$$y = \pm(a+x)\sqrt{\frac{2x-a}{2x+a}}.$$

y est imaginaire entre $x = -\frac{a}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$.

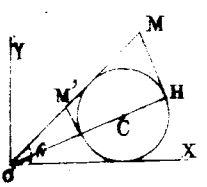
Asymptotes : $y = \pm\left(x + \frac{a}{2}\right)$

Au point $x = -a$ les tangentes sont inclinées à 60° sur l'axe des x. La courbe coupe ses asymptotes pour :

$$x = -\frac{5}{6}a \qquad y = +\frac{1}{3}a.$$

---

753. — Une circonférence constante C roulant sur Ox, on mène OCH et les tangentes OM et HM. Lieu du point M de rencontre de ces tangentes.



R. $OM = \rho = \frac{OH}{\cos\frac{1}{2}\theta} = OC\cos\frac{1}{2}\theta + OH\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta.$

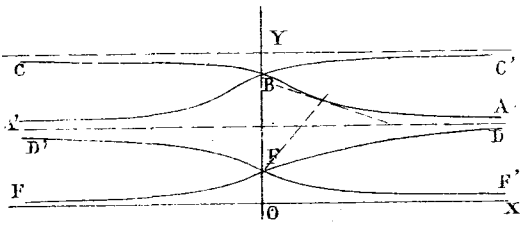
$$= OH\left(\cos\tfrac{1}{2}\theta + tg\tfrac{1}{2}\theta\right) - r\cos\tfrac{1}{2}\theta$$

L'équation du lieu est donc

$$\rho = \rho\cos\tfrac{1}{2}\theta\left(\cos\tfrac{1}{2}\theta + tg\tfrac{1}{2}\theta\right) - r\cos\tfrac{1}{2}\theta$$

ou

$$\rho = r\,\frac{\cot\tfrac{1}{2}\theta}{1-\sin\tfrac{1}{2}\theta} = 2r\,\frac{1+\sin\tfrac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$



De 0 à π, on obtient la branche ABC ; de π à 2π, C'BA' ; de 2π à 3π, DEF ; de 3π à 4π, D'EF'. Ces 2 dernières répondent au point M'

On a :

$$\rho' = 2r\,\frac{2\left(\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\theta}$$

Donc le minimum OK a lieu pour $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ ou

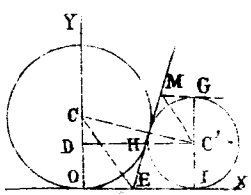
$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

K est un point d'inflexion.

Les asymptotes s'obtiennent en prenant $\lim y \sin\theta$ pour $\theta = K\pi$; ce qui donne pour leur distance à Ox

$$\underline{2r \text{ et } 4r}.$$

754. — *Un cercle C' étant assujetti à toucher une droite fixe Ox et un cercle fixe C, on mène la tangente commune et la tangente horizontale à C'. Lieu du point M de rencontre.*



R. — $(R+r)^2 = (R-r)^2 + C'D^2$ (1)

$2r = y$ (2)

Les triangles MGC' et COE, semblables donnent :

$$\frac{C'D - x}{r} = \frac{OE}{R}$$

Mais $OE = EH = EI$;

Donc $OE = \frac{C'D}{2}$ et $C'D = \frac{4Rx}{4R-y}$;

D'ailleurs, les équations (1) et (2) donnent

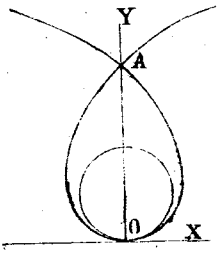
$$C'D^2 = 2Ry$$

L'équation du lieu est donc :

$$8Rx^2 = (4R - y)^2 y.$$

Ou
$$x^2 + y^2 - 2Ry - \frac{y^3}{8R} = 0$$

Pour les petites valeurs de y, elle diffère peu de celle du cercle fixe



$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0.$$

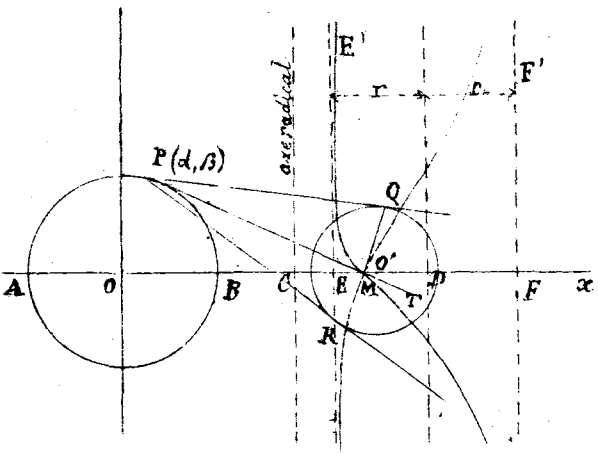
Elle a un point double en A pour $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4R. \end{cases}$

Les tangentes en ce point ont pour coefficient angulaire

$$\pm\sqrt{2}.$$

---

755. — Étant données 2 circonférences O et O', on mène, par un point P de l'une d'elles, les tangentes PQ, PR, PT. Lieu du point M de rencontre de PT avec la corde QR.



R. — Soient r et r' les rayons des 2 cercles, et $OO' = a$. Les équations de QR et de PT seront

$$(\alpha - a)(x - a) + \beta y = r'^2 \qquad\qquad ax + \beta y = r^2$$

De là
$$x + \alpha = a + \frac{r^2 - r'^2}{a} = \text{Constante}$$

On peut d'après cela se rendre compte de la forme générale de la courbe.

Soit $m = a + \frac{r^2 - r'^2}{a}$. L'axe radical des 2 cercles

a pour équation $x = \frac{m}{2}$.

1° Les cercles extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre. Les tangentes issues des points A et B donnent des points à l'infini, et comme on doit avoir $x + \alpha = m$, on aura pour les asymptotes $x = m \pm r$.

Soit OD = m. EE' et FF' seront les asymptotes. La courbe rencontre le cercle O' aux points de contact des tangentes communes aux 2 cercles. — Par raison de symétrie le point double est sur la ligne des centres.

2° Les 2 cercles tangents. — Le point de contact fait partie du lieu; il n'y a plus qu'une asymptote. — Reste à savoir si le point sur Ox est un point de rebroussement ou un sommet.

3° Les 2 cercles se coupent. — Il n'y a plus de point sur la ligne des centres. Les points d'intersection des cercles font partie du lieu.

Détails fournis par le Calcul. — Equation de la courbe :

$$(m-x)^2 + \frac{1}{y^2}(r^2 - mx + x^2)^2 = r^2$$

Portant l'origine au point D ($x = m$, $y = 0$), on la change en

$$y^2 = \frac{(r^2 + mx + x^2)^2}{r^2 - x^2}.$$

Asymptotes limitant la courbe $x = \pm r$.

Point sur l'axe des x. — Il est donné par

$$x^2 + mx + r^2 = 0$$

Il est donc réel quand $\frac{m^2}{4} - r^2 \geqq 0$, c'est-à-dire quand $m = \pm 2r$, et quand $\frac{m}{2} + r$ et $\frac{m}{2} - r$ sont de même signe. De là 3 cas :

1. $\frac{m}{2} + r < 0$ et par suite $\frac{m}{2} - r < 0$
2. $\frac{m}{2} + r > 0$ avec $\frac{m}{2} - r < 0$
3. $\frac{m}{2} - r > 0$ ce qui entraîne $\frac{m}{2} + r > 0$.

Comme cas intermédiaire, on aura :

entre 1 et 2 $\qquad \frac{m}{2} + r = 0$

et entre 2 et 3 $\qquad \frac{m}{2} - r = 0$

Tangente horizontale. Équation donnant le coefficient angulaire :

$$yy'(r^2 - x^2) - xy^2 - (r^2 + mx + x^2)(m + 2x) = 0$$

De là pour la tangente horizontale :

$$r^2 + mx + x^2 = 0 \qquad (1)$$

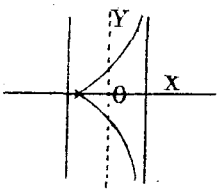
$$x(r^2 + mx + x^2) + (r^2 - x^2)(m + 2x) = 0 \qquad (2)$$

La 1re équation ne donne quelque chose que quand

$$\frac{m^2}{4} - r^2 \geqq 0 \quad .$$

et qu'en même temps l'une des racines est entre $-r$ et $+r$.

Nous pouvons supposer $m > 0$. On doit avoir $\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - r^2} < r$.



ou $\sqrt{\frac{m^2}{4} - r^2} < r - \frac{m}{2}$

ce qui est impossible si $r - \frac{m}{2} < 0$.

Si $m = \pm r$ l'équation (1) donne

$$x = \mp r \, .$$

La courbe (2') a donc un point de rebroussement.

L'équation (2) devient :

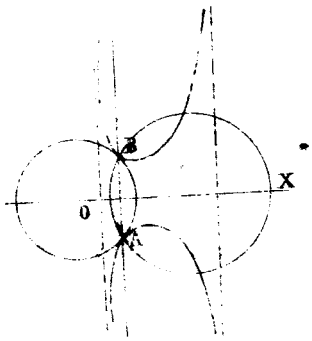
$$x^3 - 3r^2 x - mr^2 = 0 \, .$$

Elle a toujours une racine réelle; les 3 le seront, si on a $m^2 - 4r^2 < 0$

1er Cas. — $m + 2r < 0$. Une seule racine réelle, comprise entre $-\infty$ et $-r$; elle est donc inadmissible.

2e Cas. $m^2 - 4r^2 < 0$.

$m > 0$ racines entre $-\infty$ et $-r$, $-r$ et 0 et $+r$ et $+\infty$.
$m = 0$ racines $\quad x = 0 \qquad x = \pm r\sqrt{3}$.
$m < 0$ racines entre $-\infty$ et $-r$, 0 et $+r$, $+r$ et $+\infty$.



Dans chaque cas, il y a une seule racine réelle.

Aux points A et B la courbe est tangente au cercle O. On peut le vérifier en prenant la valeur de y' pour ces points. On peut s'assurer que, pour $m = \pm 2r$, il n'y a pas d'autre racine que $x = \mp r$. En effet $m = 2r$ réduit l'équation (2) à

$$x^3 - 3r^2 x - 2r^3 = 0$$

d'où les racines $x = -r$ $\qquad x = \frac{r}{2} \pm \sqrt{-\frac{7r^2}{4}}$.

Tangente au point situé sur l'axe des x. — En ce cas, on peut voir que $F'_x = 0$ et $F'_y = 0$. Il faut donc avoir recours à l'équation du 2e degré

$$F''_{x^2} + 2F''_{xy} \cdot y' + F''_{y^2} \cdot y'^2 + F'_y \cdot y'' = 0$$

dans laquelle le dernier terme disparaît ; d'où, pour $y = 0$,

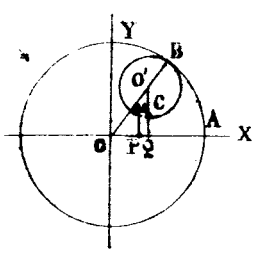
$$y' = \pm \frac{2x + m}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

On retrouve la tangente horizontale quand $m \pm 2r = 0$.

Point d'inflexion. — Annulant le terme en y'' dans l'équation dérivée du 2e ordre, on arrive, après un assez long calcul, à $x^2 + mx + r^2 = 0$; donc, le point d'inflexion est sur Ox.

---

756. — *Un cercle roule à l'intérieur d'un autre. Équation du lieu décrit par un point du cercle mobile.*



R. — Soit A le 1er point de contact. Le cercle mobile venu en O', l'arc BM est égal à BA.

Soient r le rayon du petit cercle et nr celui du grand. Posant $BOA = \alpha$, on a :

$$MO'B = n\alpha \qquad \text{et} \qquad MO'C = (n-1)\alpha - \frac{\pi}{2}.$$

$$x = OQ - MC = (n-1)\, r \cos\alpha + r \cos(n-1)\alpha.$$

$$y = O'Q - O'C = (n-1)\, r \sin\alpha - r \sin(n-1)\alpha.$$

Si n est indéterminé, l'élimination ne peut se faire, il faudra garder la variable α. En introduisant le rayon OM, on aurait :

$$\rho^2 = r^2\left((n-1)^2 + 1 + 2(n-1)\cos n\alpha\right)$$

La courbe ainsi obtenue (épicycloïde intérieure), peut être engendrée par un point d'une autre circonférence, roulant à l'intérieur de la grande.

En effet, posons $R = \frac{n}{n-1} r'$ ou $R = r' + r$,

d'où $$r' = (n-1)\, r.$$

L'épicycloïde correspondante aura pour équation :

$$\rho^2 = r\left(n^2 + (n-1)^2 + 2(n-1)\cos\frac{n}{n-1}\alpha'\right)$$

Les 2 valeurs de ρ^2 sont égales si l'on a entre α et α' la relation

$$2\left(\cos n\alpha - \cos\frac{n\alpha'}{n-1}\right) = n+1. \qquad \text{C.q.f.d.}$$

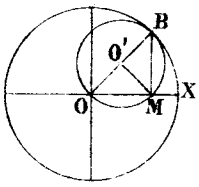
Cas particuliers. — 1° $n = 2$. On aura

$$x = 2r\cos\alpha \qquad\qquad y = 0$$

Le lieu décrit est l'axe des x.—

On aurait aussi $\rho^2 = 2r^2(1 + \cos 2\alpha) = 4r^2\cos^2\alpha$

$$\rho = \pm 2r\cos\alpha.$$



Or, OM est précisément $2r\cos\alpha$, donc, le lieu est Ox.

On peut le voir directement. Car, si M est un point du lieu, $BO'M = 2\alpha$; donc $O'OM$, qui est la moitié de $BO'M$, est égal à α ; donc M est sur Ox.

C.q.f.d.

2° $n = 4$.

$$x = r(3\cos\alpha + \cos 3\alpha) = 4r\cos^3\alpha = R\cos^3\alpha$$

$$y = r(3\sin\alpha - \sin 3\alpha) = 4r\sin^3\alpha = R\sin^3\alpha$$

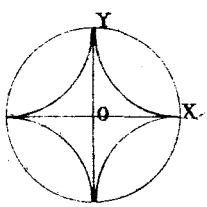
Donc la courbe a pour équation :

$$\left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Le coefficient angulaire de la tangente est

$$y' = \frac{3R\sin^2\alpha\cos\alpha}{-3R\cos^2\alpha\sin\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

La courbe a donc la forme ci-contre :



On peut regarder cette courbe comme l'enveloppe d'une droite de longueur R s'appuyant sur les axes.

En effet, cette droite aura pour équation :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ou $\quad bx + ay = ab \quad (1) \quad$ avec $\quad a^2 + b^2 = R^2. \quad (2)$

Prenant les dérivées par rapport à α,

$$b'x + y = b + ab' \quad (3)$$

$$a + bb' = 0 \quad (4)$$

Éliminant b' entre les 2 dernières équations, il vient

$$ax - by = a^2 - b^2 \quad (5)$$

De (1) et de (5) on tire

$$x = \frac{a^3}{a^2 + b^2} \qquad y = \frac{b^3}{a^2 + b^2}$$

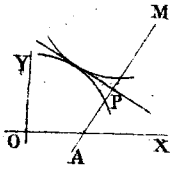
d'où $\quad a = R^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \qquad b = R^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}},$

et, par suite, pour le lieu :

$$\left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

C. q. f. d.

757. — On donne une courbe fixe et une autre courbe égale à celle-là. Lieu décrit par un point lié à la courbe roulante.



R. — Les 2 courbes sont, à chaque instant, symétriques par rapport à la tangente commune. Le point M du lieu est symétrique du point A homologue de la courbe fixe; la droite AM coupe la tangente au point P, projection de A sur la tangente.

Si donc $F(x, y) = 0$ est l'équation du lieu de P, et α, β les coordonnées de A, le lieu de M aura pour équation:

$$F\left(\frac{\alpha + x}{2}, \frac{\beta + y}{2}\right) = 0$$

Si l'équation de la tangente peut s'écrire:

$$y = mx + \varphi(m)$$

celle de la perpendiculaire menée du point A, pris pour origine, sera:

$$y = -\frac{1}{m}x,$$

et le lieu de P aura, pour équation:

$$y = -\frac{x^2}{y} + \varphi\left(-\frac{x}{y}\right)$$

ou en coordonnées polaires

$$\frac{r}{\sin\theta} = \varphi(-\cot\theta).$$

L'équation du lieu de M, sera donc:

$$r = 2\sin\theta \times \varphi(-\cot.\theta)$$

Exemple: — Courbes du 2e ordre. Lieu du sommet. — L'équation de ces courbes étant

$$y^2 = 2px + qx^2$$

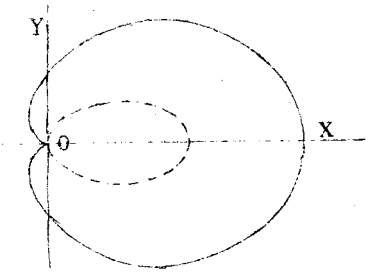
l'équation d'une tangente sera:

$$y = mx + \frac{p}{q}\left(m \pm \sqrt{m^2 - q}\right)$$

et le lieu cherché aura pour équation

$$r = -\frac{2p}{q}\left(\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - q\sin^2\theta}\right).$$

1° Ellipse.

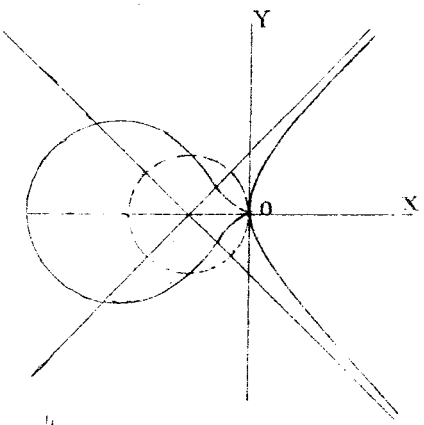


$$p = \frac{b^2}{a} \qquad q = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$r = 2\left[a\cos\theta \pm \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\right]$$

Cercle : $r = 2a(\cos\theta \pm 1)$. Epicycloïde.

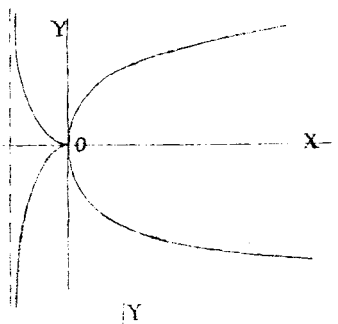
2° Hyperbole.



$$p = \frac{b^2}{a} \qquad q = \frac{b^2}{a^2}$$

$$r = -2\left(a\cos\theta \pm \sqrt{a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta}\right)$$

De $\theta = 0$ à $\theta = \text{arc Tg}\,\frac{a}{b}$, r est réel et varie de $-4a$ à $\frac{-2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et de 0 à la même valeur. Quand $\text{Tg}\,\theta = \frac{a}{b}$, la courbe coupe le cercle diamétral $r = -2a\cos\theta$; puis r est imaginaire jusqu'à $\text{Tg}\,\theta = -\frac{a}{b}$. Puis r repasse symétriquement par les mêmes valeurs.



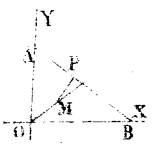
3° Parabole. r peut s'écrire :

$$r = \frac{-2p\sin^2\theta}{\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - q\sin^2\theta}}$$

Faisant $q = 0$, il vient :

$$r = \frac{-p\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

Cette courbe a pour asymptote la droite $x = -p$.



758. — Une droite AB, de longueur constante a, se meut sur deux axes rectangulaires Ox et Oy ; d'un point M pris sur la bissectrice de l'angle des axes, on abaisse une perpendiculaire sur AB, et l'on demande le lieu des pieds P de cette perpendiculaire.

R. — Soient α l'abscisse du point B, et β l'ordonnée du point A ; soit de plus b l'ordonnée et l'abscisse du point M. L'équation de AB est :

$$(1) \qquad y - \beta = -\frac{\beta}{\alpha} x$$

et l'on a la condition

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = a^2$$

L'équation de MP est :

$$(3) \qquad y - b = \frac{\alpha}{\beta}(x - b)$$

Eliminant α et β entre ces 3 équations, on aura le lieu cherché. De l'équation (3) on tire :

$$\beta = \frac{\alpha(x-b)}{y-b}$$

et substituant dans (1), il vient :

$$y - \frac{\alpha(x-b)}{y-b} = -\frac{x-b}{y-b}\, x$$

ou

$$y(y-b) + x(x-b) = \alpha(x-b)$$

$$\alpha = \frac{y(y-b)+x(x-b)}{x-b}$$

substituant dans la valeur de β, on a :

$$\beta = \frac{y(y-b)+x(x-b)}{y-b}$$

Posons ces valeurs de α et de β dans l'équation (2), il vient :

$$[y(y-b)+x(x-b)]^2[(x-b)^2+(y-b)^2] = a^2(x-b)^2(y-b)^2$$

ou $[y^2(y-b)^2+x^2(x-b)^2+2xy(y-b)(x-b)][(x-b)^2+(y-b)^2] = a^2(x-b)^2(y-b)^2$

Je divise les deux membres par le produit

$$[(x-b)^2+(y-b)^2](x-b)^2(y-b)^2$$

$$\frac{y^2}{(x-b)^2} + \frac{x^2}{(y-b)^2} + \frac{2xy}{(x-b)(y-b)} = \frac{a^2}{(x-b)^2+(y-b)^2}.$$

Telle est l'équation du lieu cherché ; on voit qu'elle est du 6e degré, et elle représente une courbe, qu'on appelle la scarabée. Pour plus de simplicité supposons $b = 0$, auquel cas les perpendiculaires sont abaissées de l'origine. L'équation devient :

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + 2 = \frac{a^2}{x^2+y^2}$$

$$(y^4 + x^4 + 2x^2y^2)(y^2+x^2) = a^2x^2y^2$$

$$(y^2+x^2)^3 = a^2x^2y^2.$$

x et y n'entrant dans l'équation qu'à des puissances paires, les axes de coordonnées sont des axes de la courbe; de plus, l'équation ne change pas si l'on change x en y et y en x; donc, la courbe est symétrique par rapport aux bissectrices des angles des axes. Pour construire la courbe, posons

$$y = tx$$

t étant une variable auxiliaire, ce qui revient à couper la courbe par des droites variables passant par l'origine. Il vient :

$$[x^2(t^2+1)]^3 = a^2 t^2 x^4$$

$$x^2(t^2+1)^3 = a^2 t^2$$

$$x = \pm \frac{at}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

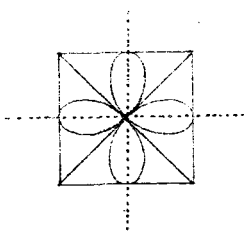
On en déduit :

$$y = \pm \frac{at^2}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le coefficient angulaire est le rapport des dérivées de y et de x, par rapport à t; or, on a :

$$y'_t = \frac{2at(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - 3at^3(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(t^2+1)^3} = \frac{2at(t^2+1) - 3at^3}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{at(2-t^2)}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$x'_t = \frac{a(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - 3at^2(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(t^2+1)^3} = \frac{a(t^2+1) - 3at^2}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{a(1-2t^2)}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$



Donc I étant le coefficient angulaire, on a

$$I = \frac{t(2-t^2)}{1-2t^2}$$

Pour $t = 0$, on a $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$. Donc la courbe passe à l'origine et est tangente en ce point à l'axe des x; t croissant, x croît, puisque la dérivée x'_t est positive, jusqu'à ce que l'on ait :

$$1 - 2t^2 = 0$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour cette valeur de t, x est maximum, et sa valeur

est

$$x \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{27}{8}}} = \frac{2a}{\sqrt{27}}$$

$$I = \infty$$

t croissant à partir de cette valeur, x décroît, mais y continue à croître, parce que y'_t est positif; pour $t = 1$, $I = -1$; la tangente est perpendiculaire en ce point à la bissectrice. Puis, t croissant toujours, y continue à croître, et atteint son maximum lorsque

$$t^2 = 2$$

$$t = \pm \sqrt{2}$$

et l'on a :

$$y = \frac{2a}{\sqrt{27}}$$

$$I = 0.$$

Enfin, pour $t = \infty$, $x = 0$, $y = 0$, $I = \infty$. La courbe se reproduit identique dans les quatre angles des axes.

Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées polaires.

On a

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$x = \rho \cos \omega \qquad y = \rho \sin \omega$$

Substituant, il vient :

$$\rho^6 = a^2 \rho^4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega$$

$$\rho^2 = a^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega$$

$$\rho = a \sin \omega \cos \omega = \frac{a}{2} \sin 2\omega.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
A
TROIS DIMENSIONS.

I. De la ligne droite et du plan.

759. — *Équations de la droite.*

R. — On met ordinairement les équations de la droite sous la forme : $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$ cette forme n'est pas générale.

Elle ne peut, en effet, représenter aucune droite parallèle au plan XOY, à moins d'admettre des valeurs infinies pour les coefficients.

Une droite parallèle au plan XOY sera :

$$\begin{cases} z = p' \\ y = bz + q. \end{cases}$$

On déduit cette 2de forme de la première en faisant $a = \infty$, après avoir posé $p = -ap'$.

760. — *Mettre l'équation du plan sous la forme :*

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

R. — Soit le plan ABC ; abaissons de l'origine la perpendiculaire $OP = p$ sur ce plan, et considérons un point M de ce plan, dont les coordonnées sont OI, IK, MK. Pour achever la détermination du plan, donnons à OP, une direction déterminée et soient α, β, γ, les angles de OP avec OX, OY, OZ.

La figure OIKMPO est un polygone fermé, projetons-la sur OP, en prenant pour la direction des côtés du polygône, celle qui est donnée par les x positifs.

On aura :

$$OI \cos\alpha + IK \cos\beta + MK \cos\gamma + MP \cos\frac{\pi}{2} + PO \cos\pi = 0$$

d'où
$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

761. — Propriétés communes à tous les plans :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

qui interceptent sur les axes de coordonnées des longueurs a, b, c, liées entre elles par la relation :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{K^2}. \quad (K \text{ étant une constante})$$

R. — Soit p la longueur de la perpendiculaire OP abaissée de l'origine sur le plan ABC, je dis que l'on a :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

En effet, les triangles rectangles OPA, OPB, OPC donnent :

$$p = a \cos\alpha = b \cos\beta = c \cos\gamma.$$

d'où
$$p = \frac{\cos\alpha}{\frac{1}{a}} = \frac{\cos\beta}{\frac{1}{b}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

d'où
$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{K^2}$$

Donc tous les plans en question sont tangents à la surface : $x^2 + y^2 + z^2 = K^2$ qui est, par conséquent, l'enveloppe de ce plan.

---

762. — Démontrer que l'équation :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

représente un plan, en montrant que toute droite ayant 2 points $(x', y' z')$ et $(x'' y'' z'')$ sur cette surface y est contenue toute entière.

R. — Les équations de la droite passant par ces 2 points sont :

$$(1) \qquad \frac{x-x'}{x'-x''} = \frac{y-y'}{y'-y''} = \frac{z-z'}{z'-z''}$$

On a, en outre, les 2 équations de condition :

$$(2) \qquad \begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0 \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$(3) \qquad A(x'-x'') + B(y'-y'') + C(z'-z'') = 0$$

et

$$(4) \qquad A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0$$

Pour montrer que tous points de la droite est sur cette surface, il faut montrer, que si (x, y, z) satisfont aux équations (1), ils satisfont à (4).

Or, si dans l'identité (3) on remplace $(x'-x'')$, $(y'-y'')$, $(z'-z'')$ par les quantités proportionnelles tirées de (2), il vient :

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0;$$

en sorte que les coordonnées (x, y, z) d'un point quelconque de la droite satisfont aux équations du plan.

---

763. — Plan passant par 3 points :

$$(x'\,y'\,z'),\ (x''\,y''\,z''),\ (x'''\,y'''\,z''').$$

R. — Le plan cherché a une équation de la forme :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

On a les 3 équations de condition :

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0 \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0 \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0 \end{aligned}$$

A, B, C, D sont des inconnues, qui doivent satisfaire à ces 4 équations, qui sont homogènes par rapport à A, B, C, D ; donc pour qu'on trouve des valeurs différentes de zéro, il faut que le dénominateur commun du système de ces 4 équations soit nul.

Ce dénominateur est un déterminant qui, égalé à 0,

donnera une équation du 1er degré, liant x, y, z aux autres quantités connues.

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui peut s'écrire encore :

$$x \begin{vmatrix} y', z', 1 \\ y'', z'', 1 \\ y''', z''', 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z', x', 1 \\ z'', x'', 1 \\ z''', x''', 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x', y', 1 \\ x'', y'', 1 \\ x''', y''', 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x', y', z' \\ x'', y'', z'' \\ x''', y''', z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on veut que le plan de ces 3 points passe par l'origine, il faut que le terme constant soit nul :

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x', & y''', & z''' \end{vmatrix} = 0$$

764. — *Distance de la droite* $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$ *à l'origine.*

R. — Nous considérerons cette distance comme la longueur minimum de la droite, qui joint l'origine à un point de la droite donnée.

Soit (x', y', z') un point de la droite donnée, sa distance à l'origine est

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (az' + p)^2 + (bz' + q)^2 + z'^2$$

Il faut donc trouver le minimum de :

$$(a^2 + b^2 + 1) z'^2 + 2 (ap + bq) z' + p^2 + q^2$$

quand le point (x', y', z') se déplace sur la droite.

Mettons cette expression sous la forme de la somme de deux carrés dont l'un seulement contient z' ; cette expression est :

$$\left(\sqrt{a^2+b^2+1}\,z' + \frac{ap+bq}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)^2 + \left[p^2+q^2-\frac{(ap+bq)^2}{a^2+b^2+1}\right];$$

Le 2e terme peut s'écrire :

$$\frac{p^2+q^2+(bp-ay)^2}{a^2+b^2+1}$$

Le minimum aura lieu quand le 1er terme sera nul, c'est-à-dire quand

$$z' = -\frac{ap+bq}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

et alors la distance cherchée

$$\delta = \frac{\sqrt{p^2+q^2+(bp-ay)^2}}{a^2+b^2+1}.$$

---

765. — Étant données les droites :

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{\cos\alpha} = \dfrac{y-b}{\cos\beta} = \dfrac{z-c}{\cos\gamma} \\[2ex] \dfrac{x-a'}{\cos\alpha'} = \dfrac{y-b'}{\cos\beta'} = \dfrac{z-c'}{\cos\gamma'} \end{cases}$$

trouver l'équation du plan mené par l'origine et parallèle à chacune de ces droites.

R. — Menons par l'origine 2 droites parallèles aux droites données, leurs équations seront :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{\cos\beta} = \dfrac{z}{\cos\gamma} \\[2ex] \dfrac{x}{\cos\alpha'} = \dfrac{y}{\cos\beta'} = \dfrac{z}{\cos\gamma'} \end{cases}$$

Soit en outre $Ax + By + Cz + D = 0$, l'équation du plan cherché. Ce plan contient chacune des 2 dernières droites; pour qu'il contienne la 1re de ces droites, il faut que son équation soit satisfaite par les valeurs quelconques de x, y, z, satisfaisant aux équations

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$$

Par suite, en remplaçant x, y, z par les quantités proportionnelles $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on doit avoir :

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0;$$

et de même puisque le plan contient la droite :

$$\frac{x}{\cos\alpha'} = \frac{y}{\cos\beta'} = \frac{z}{\cos\gamma'},$$

On aura :

$$A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' = 0$$

D'où l'on tire :

$$\frac{A}{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'} = \frac{B}{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'} = \frac{C}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}$$

L'équation du plan cherché devient alors :

$$(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')x + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')y + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')z = 0.$$

766. — *Lieu des points dont la somme des carrés des distances à 2 droites données est constante.*

R. — Prenons pour axe des z, la perpendiculaire commune aux 2 droites, pour origine le milieu de cette perpendiculaire, et pour plan des xy un plan mené par l'origine perpendiculairement à l'axe des z. Enfin, dans ce plan des xy prenons pour axes des x et des y, 2 droites rectangulaires, qui soient les bissectrices des angles des deux projections des 2 droites.

Alors les 2 droites auront des équations de la forme

$$z - h = 0 \qquad\qquad z + h = 0$$
$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = 0 \qquad\qquad y\cos\alpha + x\sin\alpha = 0$$

Le carré de la distance d'un point quelconque (x, y, z) du lieu à la 1re droite sera :

$$(z-h)^2 + (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2;$$

et à la 2e droite :

$$(z+h)^2 + (y\cos\alpha + x\sin\alpha)^2$$

L'équation du lieu est donc :

$$(z-h)^2 + (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 + (z+h)^2 + (y\cos\alpha + x\sin\alpha)^2 = K.$$

En développant et réduisant, on a :

$$x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha + z^2 = \frac{K^2 - 2h^2}{2}.$$

767. — Caractères communs à tous les plans représentés par :

$$(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+(C+\lambda C')z+D+\lambda D'=0$$

λ étant une indéterminée.

R. — Ces plans passent tous par l'intersection des 2 plans

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

768. — Bissectrice de l'angle de 2 droites.

R. Soient les 2 droites :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos\alpha}=\dfrac{y}{\cos\beta}=\dfrac{z}{\cos\gamma}. \\ \dfrac{x}{\cos\alpha'}=\dfrac{y}{\cos\beta'}=\dfrac{z}{\cos\gamma'}. \end{cases}$$

Si OA et OB sont ces 2 droites, les bissectrices OC et OC' de leurs angles sont les intersections du plan AOB, par le lieu des points équidistants des droites OA et OB.

Le plan aura pour équation :

$$\frac{x\cos\gamma-z\cos\alpha}{\cos\alpha'\cos\gamma-\cos\gamma'\cos\alpha}=\frac{y\cos\gamma-z\cos\beta}{\cos\beta'\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma'}.$$

Quant au lieu des points équidistants des 2 droites, il sera donné par

$$\delta^2=\delta'^2$$

en désignant par δ et δ' la distance d'un point (x, y, z) aux 2 droites.

Or $$\delta^2=x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$

$$\delta'^2=x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma')^2.$$

Le lieu cherché est donc :

$$(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=(x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma')^2$$

ou $$x(\cos\alpha\mp\cos\alpha')+y(\cos\beta\mp\cos\beta')+z(\cos\gamma\mp\cos\gamma')=0$$

Ce lieu est le système de 2 plans, qui passent par

l'intersection des 2 plans :

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

$$x \cos\alpha' + y \cos\beta' + z \cos\gamma' = 0$$

Or ces dernières équations représentent, l'une le plan perpendiculaire à la 1re droite en passant par l'origine, l'autre le plan perpendiculaire à la 2e droite en passant par l'origine ; l'intersection de ces 2 plans est une droite perpendiculaire au plan AOB à l'origine.

769. — *Lieu des points équidistants d'une droite et d'un plan donnés.*

R. — Prenons la droite donnée pour axe des z, et pour plan des zx, un plan mené par cette droite perpendiculairement au plan donné. Les axes étant rectangulaires, on a pour la distance du point (x, y, z) à l'axe des z :

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le plan donné étant perpendiculaire au plan des zx est parallèle à OY, et par suite, son équation est de la forme :

$$Ax + Bz + D = 0$$

L'équation du lieu est donc :

$$x^2 + y^2 = \frac{(Ax + Bz + D)^2}{A^2 + B^2}$$

Ou :

$$(A^2 + B^2)(x^2 + y^2) = (Ax + Bz + D)^2$$

770. — *Exprimer que 3 droites passant par un même point sont dans un même plan, connaissant les cosinus des angles que ces 3 droites font avec les axes rectangulaires.*

R. — Soient α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus de ces angles, les 3 droites forment dans l'espace un angle trièdre, qui doit se réduire à un plan. Il suffit pour cela que :

$$AOB = AOC + BOC ;$$

ou $\cos AOB = \cos(AOC + BOC) = \cos AOC \cos BOC - \sin AOC \sin BOC$;

faisons passer tous les sinus dans le 2e membre, et élevons au carré, il vient :

$$(\cos AOB - \cos AOC \cos BOC)^2 = (1 - \cos^2 AOC)(1 - \cos^2 BOC)$$

ou: $1 - \cos^2 AOC - \cos^2 AOB - \cos^2 BOC + 2 \cos AOB . \cos AOC . \cos BOC = 0$

Cette équation est symétrique en AOB, AOC, BOC ; elle exprime donc que l'un quelconque des 3 angles est la différence des 2 autres, et non pas seulement l'un d'entre-eux, comme nous avons été obligés de le supposer.

Cette équation exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les 3 droites soient dans un même plan.

On a :

$$\cos AOB = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

$$\cos AOC = \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma''$$

$$\cos BOC = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma''$$

substituant ces valeurs dans l'équation, il vient :

$$1 - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2 - (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')^2 - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2 +$$
$$2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')(\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'') = 0$$

Simplifions cette expression, et pour cela, rendons-la d'abord homogène, en multipliant le 1er terme par

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) = 1$$

le 2e par $(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) = 1$

le 3e par $(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) = 1$

et le 4e par $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 1$

il vient :

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')$$
$$- (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')^2 - (\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2)(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2 + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')$$
$$(\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0$$

Cherchons d'abord les termes en α^2 qui sont :

$$\alpha^2 \{(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2 - \alpha''^2(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$$
$$= \alpha'^2(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) + 2\alpha'\alpha''(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')\}.$$

Réduisant, il vient :

$$\alpha^2(\beta'^2\gamma''^2+\gamma'^2\beta''^2-2\beta'\beta''\gamma'\gamma'')=\alpha^2(\beta'\beta''-\gamma'\beta'')^2$$

Par des permutations tournantes, on obtiendrait les termes en α'^2 et α''^2.

Si donc on achevait le calcul on aurait une expression qui serait le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

Donc, la condition pour que les 3 droites soient dans un même plan est que le déterminant des 9 cosinus soit nul.

---

771. — On a 2 droites par lesquelles on fait passer 2 plans perpendiculaires entre eux, trouver le lieu de l'intersection de ces 2 plans.

R. — Prenons pour axe des z la plus courte distance des 2 droites, pour origine le milieu de cette plus courte distance, et pour plan des xy, un plan perpendiculaire à l'axe des z, et en outre dans ce plan, prenons pour axe des x et des y les bissectrices des angles adjacents, que forment entre elles sur le plan xy les projections des 2 droites données.

Alors les 2 droites auront des équations de la forme :

$$z = c \qquad\qquad z = -c$$
$$\text{et}$$
$$y = mx \qquad\qquad y = -mx.$$

Les équations des plans passant par ces 2 droites seront :

$$(z-c)+\lambda(y-mx)=0 \quad \text{et} \quad (z+c)+\lambda'(y+mx)=0$$

λ et λ' étant 2 paramètres liés entre eux par la condition que les 2 plans soient perpendiculaires, c'est-à-dire qu'on a :

$$\lambda\lambda'(1-m^2)+1=0$$

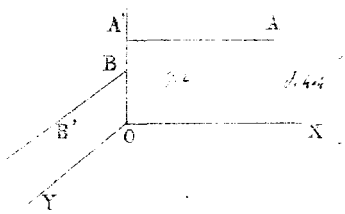
Éliminant λ et λ' entre ces 3 dernières équations, il vient :

$$\frac{x^2}{\frac{c^2(1-m^2)}{m^2}} - \frac{y^2}{c^2(1-m^2)} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

qui est l'équation du lieu.

772. — On donne trois axes rectangulaires; par un point A de l'axe des z on mène une parallèle à Ox, et par le point B une parallèle à Oy; trouver l'équation générale des surfaces, qui passent par l'origine et par ces 2 droites.

R. — L'axe des z aura 3 points O, A, B sur la surface, il fera donc partie de la surface; par suite, le plan des xz coupe la surface suivant le système des 2 droites $x = 0$, $z = a$; de même le plan des yz la coupe suivant les 2 droites



$$y = 0 \quad \text{et} \quad z = b$$

En faisant $y = 0$ dans l'équation, on devra trouver

$$x(z-a) = 0$$

L'équation cherchée est donc de la forme

$$\lambda x(z-a) + y(\nu x + \beta y + \gamma z + p) = 0.$$

Or, en faisant $x = 0$, on doit trouver

$$y(z-b) = 0,$$

et comme alors l'équation devient :

$$y(\beta y + \gamma z + p) = 0$$

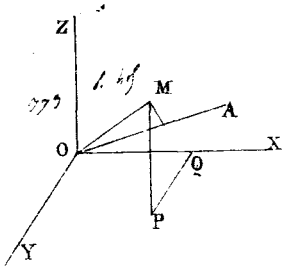
il faut remplacer $\beta y + \gamma z + p$ par $\mu(z-b)$.

Ainsi donc l'équation sera :

$$\lambda x(z-a) + \mu y(z-b) + \nu xy = 0$$

773. — On donne une droite OA passant par l'origine et faisant avec les axes des angles α, β, γ; trouver l'équation de la surface formée par une droite OM, faisant avec OA et OX des angles dont la somme soit donnée.

R. — Soit $\widehat{MOA} + \widehat{MOX} = 2V$.



Soient $(x\,y\,z)$ les coordonnées d'un point du lieu. On a :

$$\cos MOA = \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

De même

$$\cos MOX = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Mais $MOA = 2V - MOX$,

Donc : $$\cos MOA = \cos 2V \cos MOX + \sin 2V . \sin MOX .$$

On $$\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \cos 2V . \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sin 2V \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Donc pour l'équation du lieu :

$$(y^2+z^2)\sin^2 2V - \left[x(\cos\alpha - \cos 2V) + y\cos\beta + z\cos\gamma\right]^2 = 0$$

774. — Une droite fait des angles égaux avec les 3 axes de coordonnées, trouver quel est ces angles.

R. — Soient α, β, γ les 3 angles que fait cette droite avec les axes supposés rectangulaires.

On a : $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Dans ce cas $$\alpha = \beta = \gamma$$

Donc $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

On a ainsi l'angle cherché α.

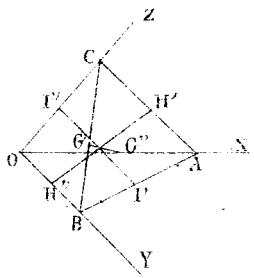
Si les axes étaient obliques, on aurait :

$$\cos\alpha = \frac{(\sin\lambda + \sin\mu + \sin\nu)^2 - 2(\cos\lambda + \cos\mu + \cos\nu)}{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda.\cos\mu.\cos\nu} .$$

775. — Dans un tétraèdre, les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées passent par un même point et y sont partagées en 2 parties égales.

R. — Prenons pour axes, 3 des arêtes partant d'un même sommet, et appelons $2a, 2b, 2c$ leurs longueurs.

La droite I, I' passant par les milieux de OC et BA



a pour équation :

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y-b}{b} = -\frac{z}{c}$$

La droite H'H'' est :

$$\frac{x-a}{a} = -\frac{y}{b} = \frac{z-c}{c}$$

et G'G'' est :

$$-\frac{x}{a} = \frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c}$$

Pour que ces 3 droites se coupent en un même point, il faut que l'on trouve un système de valeurs de x, y, z satisfaisant à ces 6 équations.

On a donc des rapports communs, il n'y a en réalité qu'un système de 3 équations à 3 inconnues, on trouvera donc un système de valeurs de x, y, z satisfaisant à ces équations.

Les 3 droites se coupent donc en un même point.

On trouve, en effet, en divisant ces équations membre à membre

$$\frac{y-b}{-b} = \frac{z-c}{-z} = \frac{x-a}{-x} = 1;$$

D'où $$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}.$$

Ce point coïncide avec le milieu d'une quelconque des 3 lignes H'H'', G'G'', I'I''.

---

776. — *Les 6 plans bissecteurs des dièdres d'un tétraèdre se coupent en un même point.*

R. — Le tétraèdre étant formé par l'intersection des 4 plans

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0;$$

les plans bissecteurs du 1er et du 2e, du 1er et du 3e, du 1er et du 4e, ont les équations :

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{q} \quad ; \quad \frac{P}{R} = \frac{p}{r} \quad ; \quad \frac{P}{S} = \frac{p}{s}$$

Le plan d'intersection de ces 3 plans a des coordonnées (x, y, z), satisfaisant à la fois à ces 3 équations, et, par suite, aux 3 équations :

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r}, \quad \frac{Q}{S} = \frac{q}{s}, \quad \frac{R}{S} = \frac{r}{s}$$

qui on déduit des précédentes.

Or, ces 3 dernières équations représentent précisément les 3 autres plans bissecteurs.

Donc, il existe un point commun aux 6 plans bissecteurs, point dont on obtiendrait les coordonnées, en résolvant les 3 prées équations.

---

777. — Si l'on a un polygone plan ou gauche, dont a, b, c, ... sont les côtés, on a entre eux la relation :

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \ldots\ldots - 2bc\cos(b,c) - 2bd\cos(b,d)\ldots$$

R. — En effet, projetons les côtés b, c, d ..... sur le côté a, puis les côtés a, c, d ....., sur b ; et ainsi de suite, on a :

$$a = b(\cos a,b) + c\cos(a,c) + \ldots\ldots$$

$$b = a\cos(b,a) + c\cos(b,c) + \ldots\ldots$$

$$c = a\cos(c,a) + b\cos(c,b) + \ldots\ldots$$

Multiplions la 1re par a, le 2e par b, la 3e par c, ... et ainsi de suite, et retranchons de la 1re la somme de toutes les autres, il vient :

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \ldots\ldots = -2bc\cos(b,c) - 2bd\cos(b,d)\ldots\ldots$$

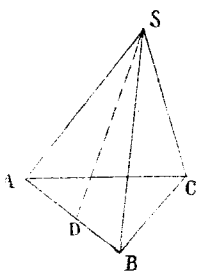
ce qui est la formule énoncée.

---

778. Le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{ab\sin(a,b)}{3l};$$

en désignant par a et b deux faces adjacentes et par l leur arête commune



R. — En effet, on a :

$$V = \frac{a}{3} \cdot h;$$

en appelant h la hauteur correspondante à la face dont l'aire est a.

Or, on a $\qquad b = SH = SD \sin(a, b)$

Mais $\qquad b = SD . AB = l . SD$

Donc $\qquad V = \dfrac{ab \sin(a, b)}{3l}$

779. — *Connaissant les cosinus des angles de 2 droites avec les 3 axes rectangulaires, trouver les cosinus des angles que la bissectrice de ces 2 droites fait avec les axes.*

R. — Soient α, β, γ ; α', β', γ' les cosinus des angles des 2 droites avec les 3 axes, et λ, μ, ν ceux de la bissectrice. Soit, en outre, V l'angle des 2 droites.

La bissectrice doit faire des angles égaux avec chacune des 2 droites, donc :

$$(1) \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = \alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu.$$

$$(2) \qquad \lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

Mais la relation (1) exprime seulement que cette droite fait des angles égaux dans l'espace avec les 2 droites données. Pour qu'elle soit bissectrice, il faut en outre qu'elle soit dans le plan de ces droites, et pour cela, il faut (en vertu d'un problème précédent) que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Ainsi :

$$(3) \qquad \lambda(\beta\gamma' - \gamma\beta') + \mu(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + \nu(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0$$

Il faut déterminer λ, μ, ν au moyen des équations (1), (2), (3).

Éliminons ν entre ces 2 dernières ; pour cela multiplions la 1re par $\gamma - \gamma'$ et la 2e par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')$ et retranchons, il vient :

$$\frac{\lambda}{(\beta - \beta')(\alpha\beta' - \beta\alpha') - (\gamma - \gamma')(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')} = \frac{\mu}{(\gamma - \gamma')(\beta\gamma' - \gamma\beta') - (\alpha - \alpha')(\alpha\beta' - \beta\alpha')}$$

De même si l'on éliminait μ, on aurait une relation analogue à celle-ci ; et de même, si l'on éliminait ν ; on peut trouver ces relations par une permutation tournante, et l'on

aura en définitive :

$$\frac{\lambda}{(\gamma-\gamma')(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')-(\beta-\beta')(\alpha\beta'-\beta\alpha')}=\frac{\mu}{(\alpha-\alpha')(\alpha\beta'-\beta\alpha')-(\gamma-\gamma')(\beta\gamma'-\gamma\beta')}$$

$$=\frac{\nu}{(\beta-\beta')(\beta\gamma'-\gamma\beta')-(\alpha-\alpha')(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')}$$

Simplifions le dénominateur de λ, en ordonnant le par rapport à α et α', il vient :

$$[\cos V-(1-\alpha^2+\alpha\alpha')]+\alpha'[\cos V-(1-\alpha'^2+\alpha\alpha')]$$

Car $$\cos V=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'.$$

Ou bien $$\cos V(\alpha+\alpha')-(\alpha+\alpha')=(\alpha+\alpha')(\cos V-1)$$

On a alors, en changeant de signe :

$$\frac{\lambda}{(\alpha+\alpha')(1-\cos V)}=\frac{\mu}{(\beta+\beta')(1-\cos V)}=\frac{\nu}{(\gamma+\gamma')(1-\cos V)}.$$

D'où : $$\frac{\lambda}{\alpha+\alpha'}=\frac{\mu}{\beta+\beta'}=\frac{\nu}{\gamma+\gamma'}=\frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}{\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2+(\gamma+\gamma')^2}}=\frac{1}{\sqrt{2(1+\cos V)}}.$$

Or : $$\frac{1}{\sqrt{2(1+\cos V)}}=\frac{1}{\sqrt{4\cos^2\frac{V}{2}}}=\frac{1}{2\cos\frac{V}{2}}.$$

Donc enfin : $$\lambda=\frac{\alpha+\alpha'}{2\cos\frac{V}{2}}\ ;\quad \mu=\frac{\beta+\beta'}{2\cos\frac{V}{2}}\ ;\quad \nu=\frac{\gamma+\gamma'}{2\cos\frac{V}{2}}.$$

---

781. — Lieu des points équidistants de 2 droites données non situées dans le même plan.

R. — On prend pour axe des x, la commune perpendiculaire aux 2 droites, et pour plan des yz le plan perpendiculaire sur le milieu de cette perpendiculaire commune, et, en outre, on prend dans ce plan pour axe des y et des z les bissectrices des angles supplémentaires que font les projections des 2 droites données sur le plan des yz ; comme ces deux bissectrices sont perpendiculaires l'une sur l'autre, il en résulte que nos 3 axes de coordonnées sont rectangulaires.

Les équations des 2 droites sont :

$$x=a \qquad \text{et} \qquad x=-a$$
$$y=mz \qquad\qquad y=-mz.$$

Si (x, y, z) est un point du lieu, on doit avoir :

$$\frac{(4m^2)(x-a)^2+(y-mz)^2}{1+m^2} = \frac{(1+m^2)(x+a)^2+(y+mz)^2}{1+m^2}$$

L'équation du lieu est donc :

$$myz + a\underline{(1+m^2)}x = 0.$$

781. — Étant donnés les 3 plans :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

faire passer par l'intersection des 2 premiers un plan perpendiculaire au 3e.

R. — Tout plan passant par l'intersection des 2 premiers sera donné par :

$$(a + a'\lambda)x + (b + b'\lambda)y + (c + c'\lambda)z + d + d'\lambda = 0,$$

pour qu'il soit perpendiculaire au 3e, il faut que

$$a''(a + a'\lambda) + b''(b + b'\lambda) + c''(c + c'\lambda) = 0$$

D'où $$\lambda = -\frac{aa'' + bb'' + cc''}{a'a'' + b'b'' + c'c''}.$$

Le plan cherché est donc :

$$(ax + by + cz + d)(a'a'' + b'b'' + c'c'') = (a'x + b'y + c'z + d')(aa'' + bb'' + cc'')$$

782. — Caractère commun à tous les plans représentés par :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sachant que $$Aa + Bb + Cc + Dd = 0.$$

R. — L'équation de ces plans peut s'écrire :

$$A\left(x - \frac{a}{d}\right) + B\left(y - \frac{b}{d}\right) + C\left(z - \frac{c}{d}\right) = 0$$

Tous ces plans passent donc par le même point :

$$x = \frac{a}{d}, \quad y = \frac{b}{d}, \quad z = \frac{c}{d}.$$

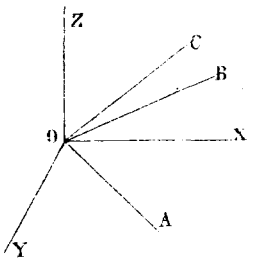
D'une manière générale, on peut dire que si l'on a une

relation entre les coefficients de l'équation d'un plan, ce plan passe par un point fixe. — Si l'on a 2 relations, le plan passe par 2 points fixes, c'est-à-dire par une droite fixe.

783. — On donne dans le plan des xy, 2 droites OA et OB, trouver le lieu des droites OC telles que :

$$AOB + BOC = 2\theta$$

R. — Prenons des axes rectangulaires, et pour axe des x la bissectrice de l'angle AOB des 2 droites.



Les équations des deux droites sont :

$$OA \begin{cases} z = 0 \\ y = mx \end{cases} \qquad OB \begin{cases} z = 0 \\ y = -mx \end{cases}$$

Soient $\begin{cases} y = px \\ z = qx \end{cases}$ les équations de OC dans une de ses positions ; posons $AOC = \theta + \varepsilon$, alors $BOC = \theta - \varepsilon$.

On aura :

$$\cos(\theta+\varepsilon) = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos COX . \cos AOX + \cos COY . \cos AOY.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \qquad \cos\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Donc
$$\cos(\theta+\varepsilon) = \pm\frac{pm+1}{\sqrt{(m^2+1)(p^2+q^2+1)}}$$
$$\cos(\theta-\varepsilon) = \pm\frac{-pm+1}{\sqrt{(m^2+1)(p^2+q^2+1)}}$$

D'où
$$\cos\theta . \cos\varepsilon = \pm\frac{1}{\sqrt{(m^2+1)(p^2+q^2+1)}}$$

Et
$$\sin\theta . \sin\varepsilon = \pm\frac{pm}{\sqrt{(m^2+1)(p^2+q^2+1)}}$$

Éliminant ε, il vient :

$$\frac{1}{\cos^2\theta . (m^2+1)(p^2+q^2+1)} + \frac{p^2m^2}{\sin^2\theta . (m^2+1)(p^2+q^2+1)} = 1$$

D'où
$$p^2+q^2+1 = \frac{1}{(m^2+1)\cos^2\theta} + \frac{p^2m^2}{\sin^2\theta\,(m^2+1)}$$

Remplaçant p et q par leurs valeurs, on a enfin pour

l'équation du lieu :

$$x^2(m^2 - \cot^2\theta) + y^2(m^2 - \operatorname{tg}^2\theta) + z^2(m^2+1) = 0$$

784. — Longueur d'un diamètre qui, dans l'ellipse, fait avec les axes des angles α, β, γ.

R. — Les équations de ce diamètre sont :

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$$

Appelons δ la valeur commune de ces rapports, δ sera la longueur du demi-diamètre. On aura :

$$\delta = \frac{\frac{x}{a}}{\frac{\cos\alpha}{a}} = \frac{\frac{y}{b}}{\frac{\cos\beta}{b}} = \frac{\frac{z}{c}}{\frac{\cos\gamma}{c}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}}}$$

II. Surfaces du 2e degré, en général.

785. Classification des surfaces représentées par l'équation générale du 2e degré à 3 variables.

R. Résolvant l'équation générale du 2e degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0$$

par rapport à z ; on a une expression de la forme :

$$z = mx + ny \pm \sqrt{ay^2 + bxy + cx^2 + f}$$

Discussion : 1° Un seul Centre.

A ou A' ou $A'' = 0$, et $b^2 - 4ac = AB'^2 + A'B''^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''$.

$$b^2 - 4ac < 0 \begin{cases} a < 0 \begin{cases} f > 0 & \text{Ellipsoïde réel.} \\ f < 0 & \text{Hyperboloïde à une nappe.} \end{cases} \\ a > 0 \begin{cases} f > 0 & \text{Hyperboloïde à 2 nappes} \\ f < 0 & \text{surface imaginaire.} \end{cases} \\ f = 0 \begin{cases} a > 0 & \text{Cône} \\ a < 0 & \text{Un point} \end{cases} \end{cases}$$

$b^2 - 4ac > 0$ $\begin{cases} f > 0 & \text{Hyperboloïde à une nappe} \\ f < 0 & \text{Hyperboloïde à 2 nappes.} \\ f = 0 & \text{Cône} \end{cases}$

$A = 0, A' = 0, A'' = 0$ $\begin{cases} D' = 0 \text{ et } BB'B'' = 0 & \text{Cône.} \\ D' = 0 \begin{cases} D' > 0 & \text{Hyperboloïde à une nappe.} \\ D' < 0 & \text{Hyperboloïde à 2 nappes.} \end{cases} \end{cases}$

2° Une droite de Centres.

A ou A' ou $A'' = 0$ et $b^2 - 4ac = 0$

$a < 0$ $\begin{cases} f > 0 & \text{Cylindre elliptique.} \\ f < 0 & \text{Cylindre hyperbolique.} \end{cases}$

$a > 0$ $\begin{cases} f > 0 & \text{Cylindre hyperbolique ou 2 plans qui se coupent.} \\ f < 0 & \text{Surface imaginaire.} \end{cases}$

$f = 0 \quad a > 0$ Une droite.

$A = 0, A' = 0, A'' = 0$ $\begin{cases} D' = 0 & \text{Cylindre Hyperbolique.} \\ D' = 0 & \text{2 plans qui se coupent.} \end{cases}$
$B = 0$ et $B'B'' = 0$

3° Un plan de Centres.

$b = 0, \qquad a = 0, \qquad c = 0$

$f > 0$ 2 plans parallèles.
$f = 0$ Un plan.
$f < 0$ 2 plans parallèles imaginaires.

4° Pas de Centres.

$b^2 - 4ac = 0.$

On distingue alors, les 2 Paraboloïdes en ce que parmi les sections par les 3 plans de coordonnées, il y en a qui sont du genre ellipse ou hyperbole suivant que le Paraboloïde est elliptique ou hyperbolique.

Quand les sections sont toutes du genre Parabole, on a le cylindre parabolique.

---

786. — *Formes caractéristiques des surfaces du 2e degré.*

R. — Si on désigne par u, v, W des fonctions du 1er degré de x, y, z et par K une constante, on a les formes caractéristiques suivantes :

$u^2 + v^2 + W^2 = K^2$	Ellipsoïde réel.
$u^2 + v^2 + W^2 = 0$	Un point.
$u^2 + v^2 + W^2 = -K^2$	Ellipsoïde imaginaire.
$u^2 + v^2 - W^2 = K^2$	Hyperboloïde à 1 nappe.
$u^2 + v^2 - W^2 = -K^2$	Hyperboloïde à 2 nappes.
$u^2 \pm v^2 - W^2 = 0$	Cône.
$u^2 + v^2 = K^2$	Cylindre elliptique.
$u^2 + v^2 = 0$	Droite.
$u^2 + v^2 = -K^2$	Surface imaginaire
$u^2 - v^2 = K^2$	Cylindre Hyperbolique
$u^2 - v^2 = 0$	2 plans qui se coupent
$u^2 = K^2$	2 plans parallèles
$u^2 = 0$	Un seul plan.
$u^2 = -K^2$	2 plans imaginaires.
$u^2 + v^2 = W$	Paraboloïde elliptique.
$u^2 - v^2 = W$	Paraboloïde hyperbolique.
$u^2 = W$	Cylindre Parabolique.

---

787. — *Que représente :*

$$x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz - 4xz + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0$$

R. — Un hyperboloïde à 2 nappes.

En effet, les équations du centre sont :

$$\left|\begin{array}{l} x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 2 = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

C'est une surface à un seul centre, si l'on substitue les coordonnées du centre, on reconnaît que ce n'est pas un cône.

Si l'on prend la projection sur le plan des xy, on a :

$$x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0$$

qui représente une hyperbole.

La surface est donc un hyperboloïde ; et comme on reconnaît qu'elle n'admet pas de génératrices rectilignes, il s'ensuit que c'est :

un hyperboloïde à 2 nappes.

---

788. — *Que représente* : $x^2 - yz + 1 = 0$.

R. Un hyperboloïde à 2 nappes.

En effet, on voit d'abord en prenant les équations au centre, que c'est une surface à un seul centre autre qu'un cône.

Si on la coupe par un plan quelconque :

$$z = mx + ny,$$

passant par le centre, on reconnaît que c'est un hyperboloïde, car on a :

$$x^2 - mx - ny^2 + 1 = 0,$$

et le caractère $b^2 - 4ac$ donne ici $m^2 + 4n$ qui peut être positif, nul ou négatif.

La surface n'admet pas de génératrices rectilignes, car si on élimine z entre

$$x = mz + p$$

$$y = nz + q,$$

et l'équation donnée, il vient :

$$(m^2 - n)z^2 + (2mp - q)z + p^2 + 1 = 0$$

Pour qu'il y eut des génératrices rectilignes, il faudrait :

$$m^2 - n = 0$$

$$2mp - q = 0$$

$$p^2 + 1 = 0$$

La dernière relation est impossible ; donc la surface est un hyperboloïde à 2 nappes.

---

789. — *Que représente* :

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (mx + ny + pz + q)^2$$

R. — Le 1er membre représente le carré de la distance du point $(x' y' z')$ d'un point quelconque de la surface, tandis que le 2e membre, à un facteur constant près, la distance de ce point au plan $mx + ny + pz + q = 0$.

L'équation proposée représente donc une surface telle que le rapport de la distance d'un point donné $(x' y' z')$ à la surface et à un plan donné est constant.

Prenons ce plan pour plan des xy et pour axe des z, la perpendiculaire abaissée du point donné $(x' y' z')$ sur ce plan, l'équation de la surface devient :

$$x^2 + y^2 + (1 - K^2) z^2 - 2zz' + z'^2 = 0$$

790. Discutons donc cette équation

Les équations au centre sont :

$$x = 0.$$
$$y = 0$$
$$z = \frac{z'}{1 - K^2}$$

1° Soit $1 - K^2, > 0$; la surface est un Ellipsoïde de révolution, car si on fait disparaître le terme du 1er degré en z dans l'équation, elle devient :

$$x^2 + y^2 + (1 - K^2) z^2 = \frac{K^2 z'^2}{1 - K^2}.$$

2° $1 - K^2 < 0$; on a un Hyperboloïde de révolution à 2 nappes.

3° Si $z' = 0$ On a un Cône réel imaginaire suivant que $1 - K^2 < 0$ ou > 0. Ce cône se réduit à un point qui est l'origine si $1 - K^2 = 1$.

4° Si $z' = 0$ et $1 - K^2 = 0$, l'équation proposée représente une surface de courbe de centre, et comme elle se réduit alors à

$$x^2 + y^2 - 2zz' + z'^2 = 0,$$

c'est un Paraboloïde Elliptique de révolution.

5° Si $z' = 0$ et $1 - K^2 = 0$, l'équation représente une surface ayant une infinité de centres ; et comme alors la trace de la surface sur le plan des xy est $x^2 + y^2 = 0$ c'est-à-dire l'origine, l'équation représente l'axe des z.

791. — Que représente :

$$4x^2 - 2y^2 - 12z^2 + 12yz + 4xy + 4x + 2y + 3z = 0?$$

R. — Un Paraboloïde hyperbolique.

En effet, les équations au centre sont :

$$2x + y + 1 = 0$$

$$2x - 2y + 6z + 1 = 0$$

$$4y - 8z + 1 = 0$$

Ces équations sont incompatibles, car de deux 1ère on tire par l'élimination de x, $y = 2z$, équation qui est incompatible avec la 3e.

On a donc une surface dénuée de centre, et comme la projection sur le plan zy est du genre hyperbole ; on a bien un paraboloïde hyperbolique.

792. — Que représente :

$$(Ax + By + Cz + D)(A'x + B'y + C'z + D') + K = 0$$

R. — Les équations au centre sont :

$$(Ax + By + Cz + D)A' + (A'x + B'y + C'z + D')A = 0$$

$$(Ax + By + Cz + D)B' + (A'x + B'y + C'z + D')B = 0$$

$$(Ax + By + Cz + D)C' + (A'x + B'y + C'z + D')C = 0$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que :

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}$$

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}$$

$$\frac{B'}{C'} = \frac{B}{C}$$

Si cela a lieu les 3 équations se réduisent à une seule, et la surface représentée est un système de 2 plans parallèles, en supposant toutefois que $K = 0$.

Ce que nous venons de dire, suppose en outre que les 2 plans

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{et} \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

ne se coupent pas ; par suite que ces 2 équations n'ont pas de solutions communes.

Si les 2 plans se coupaient, alors en prenant ces deux plans pour plans des xy et des zx, l'équation donnée prendrait la forme :

$$mz \times ny + K = 0$$

qui représente un cylindre hyperbolique.

793. — Que représente :

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xy + 2x - 2y - 4 = 0 \ ?$$

R. — Un Cylindre Elliptique.

En effet, les équations au centre se réduisent à deux, et la trace de la surface sur le plan des xy est une ellipse.

794. — Quelles sont les surfaces représentées par :

$$x^2 + (2m^2+1)y^2 + (2m^2+1)z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 2m^2 - 3m + 1$$

quand on fait varier m de $-\infty$ à $+\infty$.

R. — Pour $m = -\infty$, on a un cylindre elliptique.

Pour toute valeur de m comprise entre $-\infty$ et -1 on a un Ellipsoïde réel

Pour $m = -1$, on a un cylindre elliptique.

Pour toute valeur de m comprise entre -1 et 0, on a : un hyperboloïde à 1 nappe.

Pour $m = 0$, on a un hyperboloïde de révolution à 1 nappe.

Pour toute valeur de m comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, on a un hyperboloïde à une nappe.

Pour $m = \frac{1}{2}$ on a un Cône.

Pour toute valeur de m comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, on a un hyperboloïde à 2 nappes

Pour $m = 1$, on a une droite.

Pour toute valeur de m comprise entre 1 et $+\infty$, on a un Ellipsoïde.

Pour $m = +\infty$, on a un cylindre Elliptique.

795. — Equation générale des surfaces contenant les 4 côtés d'un quadrilatère gauche ABCD.

R. — Assujettir une surface du 2e degré à contenir les 4 côtés d'un quadrilatère gauche, c'est l'assujettir à faire

conditions, savoir 4 conditions pour exprimer qu'elle contient les 4 sommets, et 4 autres pour exprimer qu'elle contient un autre point de chaque côté; car alors, chacun des côtés ayant 3 points sur la surface, y sera entièrement contenu.

L'équation cherchée n'aura plus alors qu'un seul paramètre arbitraire.

Si l'on veut chercher le lieu des centres, on n'aura qu'à éliminer ce paramètre entre les 3 équations du centre.

---

796. — *Trouver le cône asymptote de la surface :*

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

R. — Si l'on rapporte la surface à son centre (a, b, c) son équation devient :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By + 2B'xz + 2B''xy + Ca + C'b + C''c + D = 0$$

Le cône asymptote est alors :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0.$$

Or, si l'on transporte maintenant les axes parallèlement à eux-mêmes à la 1re origine, qui a pour coordonnées $(-a, -b, -c)$, l'équation du cône asymptote devient :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z - Ca - C'b - C''c = 0$$

---

797. — *Que représente :* $x^2 = y^2 = z^2$?

R. — Ces équations représentent le lieu des points également distants des 3 plans coordonnés rectangulaires.

En effet, elles se décomposent en :

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad y^2 - z^2 = 0$$

La 1re : $x = \pm y$, représente dans le plan des xy, les deux bissectrices des axes de coordonnées, et dans l'espace les deux plans bissecteurs des deux dièdres ayant pour arête oz.

La 2e : $y = \pm z$ représente les deux plans bissecteurs des deux dièdres ayant pour arête ox.

---

798. — Que représente :

$$x^2+y^2+z^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

sachant que : $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$?

R. — Une droite perpendiculaire au plan :

$$\alpha x+\beta y+z\gamma=0,$$

en passant par l'origine.

En effet, l'équation s'écrit

$$x^2(1-\alpha^2)+y^2(1-\beta^2)+z^2(1-\gamma^2)-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz-2\alpha\beta xy=0$$

ou $x^2(\beta^2+\gamma^2)+y^2(\alpha^2+\gamma^2)+z^2(\alpha^2+\beta^2)-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz-2\alpha\beta xy=0$

ou enfin : $(\beta x-\alpha y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\gamma y-\beta z)^2=0$

Cela ne peut avoir lieu que si :

$$\left|\begin{array}{l}\beta x-\alpha y=0\\ \gamma x-\alpha z=0\\ \gamma y-\beta z=0\end{array}\right.$$

Ces 3 équations se réduisent à : $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, qui est l'équation d'une droite, passant par l'origine et perpendiculaire au plan $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$.

799. — Que représente :

$$x^2+y^2+z^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+\alpha x+\beta y+\gamma z,$$

sachant que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$?

R. — Considérons le plan $P=\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ et un point quelconque du lieu.

On sait que $\alpha x+\beta y+\gamma z$ représente exactement la distance de ce point au plan P, car ici :

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=1$$

Si donc, nous changeons de coordonnées, et que nous prenions le plan $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ pour plan des xy, la

distance d'un point du lieu à ce plan, sera représentée par le z de ce point.

On devra donc dans l'équation donnée remplacer $(\alpha x + \beta y + \gamma z)$, par z.

D'ailleurs l'expression $(x^2 + y^2 + z^2)$ représente la distance de l'origine au point (x, y, z); l'origine ne changeant pas et les nouveaux axes étant rectangulaires, cette distance se trouve encore représentée par la même fonction $x^2+y^2+z^2$ dans le nouveau système.

L'équation proposée devient donc :

$$x^2 + y^2 + z^2 = z^2 + z$$

ou $x^2 + y^2 = z$, qui représente un Paraboloïde de révolution autour de l'axe des z.

Ainsi la surface proposée représente un Paraboloïde de révolution autour d'une droite, passant par l'origine et Normale au plan :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

---

800. — *Mener par un point d'une surface du 2e degré une droite tangente à cette surface, et à une 2e surface donnée.*

R. — De ce point comme sommet, on mènera le Cône circonscrit à la 2e surface, et l'on mènera ensuite le plan tangent en ce point à la 1re surface.

Les 2 équations simultanées représentent l'intersection. — Un plan, passant par le sommet d'un Cône du 2e degré, le coupe généralement suivant deux droites, le problème aura donc deux solutions.

---

801. — *Quand on donne une génératrice d'une surface du 2e degré, combien donne-t-on de conditions ?*

R. — On en donne trois ; car soit une droite :

$$\left| \begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array} \right.$$

si l'on cherche les z des points d'intersection de la surface avec cette droite, on aura une équation :

$$Mz^2 + Nz + P = 0$$

qui admettra une infinité de solutions.

Donc, les 3 conditions :

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad P = 0.$$

802. — Lieu des centres des surfaces représentées par :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2qyz + 2pzx - 2ax - 2by + 2cz = 0,$$

a, b, c étant 3 nombres positifs donnés ; p et q variant de toutes les manières possibles. (Donné au Concours d'admission pour l'École Polytechnique. — 1862)

R. — Le centre est fourni par les équations :

$$\left|\begin{array}{l} x + pz = a \\ y + qz = b \\ z - px - qy = c \end{array}\right.$$

Éliminons p et q entre ces équations, et nous aurons le lieu cherché.

Les deux premières donnent :

$$p = \frac{a-x}{z} \qquad q = \frac{b-y}{z}$$

portant ces valeurs dans la 3e, on a :

$$z - \frac{a-x}{z}x - \frac{b-y}{z}y = c$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0;$$

qui représente une sphère dont le centre est $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ et le rayon $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}}$, si les axes de coordonnées sont rectangulaires. S'ils sont obliques, c'est un Ellipsoïde.

803. — Trouver le lieu des centres, dans le cas où p et q sont liés de telle manière, que l'équation représente un cône.

R. — Pour que la surface soit un cône, x, y, z étant un centre, il faut que $ax + by - cz = 0$. Dans ce cas,

le lieu des centres est fourni par l'intersection des surfaces :

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0 \\ \qquad\qquad\qquad ax+by-cz=0 \end{array}\right.$$

C'est donc un cercle passant par l'origine, dans le cas où les axes sont rectangulaires et une ellipse dans le cas où ils sont obliques.

---

804. — *Indiquer la partie du lieu, qui répond à des hyperboloïdes à 1 nappe, et celle qui répond à des hyperboloïdes à 2 nappes, que peut représenter la surface donnée.*

R. — Si l'on rapporte la surface à son centre, l'équation devient :

$$x^2+y^2-z^2+2pxz+2qyz=a\alpha+b\beta-c\gamma$$

ou $$(x+pz)^2+(y+qz)^2-(1+p^2+q^2)z^2=a\alpha+b\beta-c\gamma.$$

(α,β,γ) étant les coordonnées du centre de la surface, par rapport aux anciens axes.

On voit alors, que la surface est un hyperboloïde à une nappe, si $a\alpha+b\beta-c\gamma>0$, et réciproquement.

La surface est un hyperboloïde à 2 nappes, si $a\alpha+b\beta-c\gamma<0$, et réciproquement.

La surface est un Cône si $a\alpha+b\beta-c\gamma=0$

On voit, du reste que : $a\alpha+b\beta-c\gamma$ est >0, si (α,β,γ) est au-dessus du plan $ax+by-cz=0$; tandis que $a\alpha+b\beta-c\gamma$ est <0, si (α,β,γ) est au-dessous de ce plan. Enfin : $a\alpha+b\beta-c\gamma=0$, si (α,β,γ) est dans ce plan.

---

805. — *Quand une surface du 2e degré est rapportée à son centre, les carrés des longueurs des demi-axes sont les inverses des racines de l'équation en S.*

R. — L'équation de la surface est alors :

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=1$$

Les équations d'une droite passant par le centre sont :

$$(1)\qquad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\rho.$$

ρ représentant la longueur du rayon, interceptée sur cette droite à partir de l'origine. On obtiendra ρ en éliminant x, y, z entre les équations de la droite, et celle de la surface, ce qui donnera :

$$(2) \qquad (A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta)\rho^2 = 1$$

Les équations d'où l'on tire l'équation en S sont :

$$A\alpha + B''\beta + B'\gamma = \alpha S$$

$$B''\alpha + A'\beta + B\gamma = \beta S$$

$$B'\alpha + B\beta + A''\gamma = \gamma S.$$

Multiplions-les respectivement par α, β, γ et ajoutons, il vient :

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta = S(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = S.$$

α, β, γ étant les cosinus des angles, que fait la direction d'une corde principale avec les 3 axes de coordonnées.

L'équation (2) devient alors :

$$S\rho^2 = 1 \qquad\qquad \rho^2 = \frac{1}{S}$$

A chaque valeur de S correspond une valeur de ρ, qui donne la longueur du rayon dirigé suivant la droite (1), qui est alors un axe, puisque c'est une corde principale passant par le centre.

---

806. — Équation générale des surfaces du 2e degré, dont les sections parallèles au plan des xy sont des cercles.

R. — L'équation générale des surfaces du 2e degré étant :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

En faisant $z = 0$, on doit avoir l'équation d'un cercle, ce qui exige :

$$A = A' \qquad \text{et} \qquad B'' = 0$$

L'équation pourra alors s'écrire :

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Cela posé, on demande de trouver l'autre série de sections circulaires, (car on sait que l'existence d'une 1re série de sections circulaires entraîne celle d'une 2e série, sauf dans les surfaces de révolution où les 2 séries sont confondues en une seule).

Pour résoudre la question, faisons passer une sphère par le cercle donné sur le plan des xy. Cette sphère coupera la surface suivant une courbe plane, puisque la courbe d'entrée est plane, ce sera donc un cercle, et un cercle de la 2e série.

Il suffira donc de chercher un système de plans passant par les points communs à cette sphère et à la surface (1); l'un d'eux sera le plan des xy, l'autre donnera la direction des plans cherchés.

L'équation de la section circulaire fournie par le plan des xy est

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2Cx + 2C'y + D = 0$$

L'équation d'une surface du 2e degré, passant par ce cercle est :

$$x^2+y^2+2Cx+2C'y+D+z(\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda)=0$$

puisqu'en faisant $z = 0$, on trouve la courbe (2).

Pour que cette surface soit une sphère, il faut que :

$$\alpha = \beta = 0$$

L'équation générale de ces sphères sera donc :

$$x^2+y^2+z^2+2Cx+2C'y+2\lambda z+D=0.$$

---

807. – Les axes de coordonnées étant rectangulaires, toute équation du 2e degré $f(x, y, z) = 0$ symétrique en x, y, z, représente une surface de révolution autour de la droite $x = y = z$.

R. – L'équation proposée étant symétrique par rapport à x et à y, le plan qui divise en deux parties égales le dièdre oz, est nécessairement un plan principal.

Car si nous considérons un point $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$ de la surface,

le point $\begin{cases} x = b \\ y = a \\ z = c \end{cases}$ appartiendra aussi à la surface. Ces 2 points sont dans le même plan $z = c$, et les 2 points $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, $\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}$ sont sur le plan des xy, symétriquement placés par rapport à la bissectrice de OXY.

Ainsi, les 3 plans bissecteurs :

$$x = y, \qquad x = z, \qquad y = z$$

sont des plans principaux.

Ils passent tous par la droite $x = y = z$.

Si nous coupons la surface par un plan perpendiculaire à cette droite en un point, on aura une courbe du 2e degré, ayant 3 axes passant par ce point, axes, qui seront les intersections de ce plan perpendiculaire, par les 3 plans bissecteurs. Cette courbe du 2e degré est donc une circonférence, dont le centre se trouve au point choisi sur la droite $x = y = z$.

La surface est donc de révolution autour de cette droite.

---

808. — *Trouver l'équation générale des surfaces qui ont leur centre à l'origine, un axe dirigé suivant la droite :*

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0, \end{cases}$$

et qui sont coupées suivant une hyperbole équilatère, par l'un des plans principaux qui passent par cette droite, de manière que cette droite soit l'axe transverse de l'hyperbole.

R. — Prenons pour équation générale des surfaces du 2e degré, ayant leur centre à l'origine :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 1.$$

Le plan diamétral des cordes parallèles à la droite donnée est :

$$(A + B'')x + (A' + B'')y + z(B + B') = 0.$$

Ce plan devant en outre être principal, il faut que :

$$A + B'' = A' + B'' \quad \text{et} \quad B + B' = 0.$$

c'est-à-dire : $A = A'$ et $B = -B'$

L'équation devient alors :

$$A(x^2 + y^2) + A''z^2 + 2Bz(y - x) + 2B''xy = 1.$$

Le terme constant étant 1, les racines de l'équation en S sont les inverses des carrés des axes (d'après un problème précédent). Exprimons que l'un des axes imaginaires est égal à l'axe réel, ce qu'on fera en exprimant que deux des racines de l'équation en S sont égales et de signe contraire ; et, en outre, que la droite $x = y$ est un axe transverse, ce qu'on fera en écrivant, que cette droite rencontre la surface.

L'équation en S étant ici :

$$(S - A)^2 (S - A') - 2B^2 (S - A) - B''^2 (S - A'') + 2B^2 B'' = 0$$

ou :

$$(S - A - B'')\left[(S - A'')(S - A + B'') - 2B^2\right] = 0$$

L'une des racines est $S = A + B''$; c'est à celle-là que correspond la direction conjuguée

$$\left| \begin{array}{l} x = y \\ z = 0. \end{array} \right.$$

Exprimons que $S = -(A + B'')$ est racine de l'équation obtenue en égalant à 0 la quantité entre crochets, on aura :

$$2A(A + B'' + A'') - 2B^2 = 0$$

On pourra tirer de là B'' ou A'' et porter cette valeur dans l'équation trouvée précédemment. — On aura ainsi l'équation cherchée ; qui ne contiendra plus que 3 paramètres variables.

---

809. — *Équation générale des surfaces de révolution du 2e degré, qui contiennent l'axe des x et l'axe des y.*

R. — L'équation générale des surfaces du 2e degré, passant par l'axe des x et par l'axe des y est :

$$A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2C''z = 0.$$

Pour que la surface soit de révolution, il faut que :

$$-\frac{B'B''}{B} = -\frac{BB''}{B'} = \frac{A''-BB'}{B''};$$

ou

$$B'^2B''^2 = B^2B''^2 = BB'(BB'-A'').$$

On peut y satisfaire : 1° en posant $B''=0$, et alors $B=0$ ou $B'=0$; de sorte que l'équation cherchée devenant :

$$A''z^2+2Byz+2C''z=0$$

représente 2 plans qui se coupent.

2° En faisant $A''=BB'$, l'équation devient alors :

$$BB'z^2+2Byz+2B'xz+2C''z=0$$

qui représente encore 2 plans qui se coupent.

Dans ces deux cas, on n'a pas véritablement une surface de révolution.

Mais si l'on pose : $B'=\pm B$, $-B''=A''-\frac{B^2}{B''}$

d'où $A''=\frac{B^2-B''^2}{B''}$, on aura les 2 équations générales :

$$\frac{B^2-B''^2}{B''}z^2+2Byz+2Bxz+2B''xy+2C''z=0$$

$$\frac{B^2-B''^2}{B''}z^2-2Byz+2Bxz+2B''xy+2C''z=0$$

Ces deux équations ne comportent plus que 3 paramètres variables.

---

810. — *On donne une surface du 2e degré, on la coupe par un plan $lx+my+nz=0$, on demande quelles sont les conditions nécessaires pour que la section soit un cercle.*

R. — Soit l'équation générale :

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2By^2+2B'xz+2B''xy-D=0$$

L'équation des surfaces du 2e degré coupées suivant un cercle par le plan $lx+my+nz=0$ est :

$$\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)+(lx+my+nz)(\alpha x+\beta y+\gamma z)=0$$

$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, étant le 2e plan des sections circulaires.

En identifiant ces 2 équations, on trouvera six relations contenant les quatre indéterminées $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$; en les éliminant,

on trouvera 2 relations qui permettront de déterminer les coefficients de l'équation du plan.

On obtient ainsi :

$$(1)\qquad A = \lambda + l\alpha \qquad\qquad (4)\qquad 2B = n\beta + m\gamma$$

$$(2)\qquad A' = \lambda + m\beta \qquad\qquad (5)\qquad 2B' = l\gamma + n\alpha$$

$$(3)\qquad A'' = \lambda + n\gamma \qquad\qquad (6)\qquad 2B'' = m\alpha + l\beta$$

D'où l'on déduit :

$$\alpha = \frac{-lB + mB' + nB''}{m\,n},$$

$$\beta = \frac{lB - mB' + nB''}{n\,l},$$

$$\gamma = \frac{lB + mB' - nB''}{m\,l}.$$

Les premières relations deviennent alors :

$$A - \frac{l}{mn}(-lB + mB' + nB'') = A' - \frac{m}{nl}(lB - mB' + nB'') = A'' - \frac{n}{lm}(lB + mB' - nB'');$$

ce sont les relations cherchées.

---

811. — *Démontrer, que si l'on coupe une surface du 2e degré circonscrite à une sphère par un plan tangent à la sphère, la section ainsi obtenue aura pour foyer le point de contact de la sphère et du plan tangent.*

R. — Prenons pour plan des xy, le plan sécant, et pour origine, le point de contact de ce plan et de la sphère, l'équation de la sphère est alors :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$$

L'équation de la surface circonscrite est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz + \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0$$

en appelant $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, le plan de la courbe de contact.

Si dans cette équation on fait $z = 0$, on a l'équation de la section qui est :

$$x^2 + y^2 + \lambda(\alpha x + \beta y + \delta)^2 = 0.$$

C'est bien l'équation d'une courbe ayant pour foyer, l'origine, et pour directrice la droite $\alpha x + \beta y + \delta = 0$; de

sorte que la directrice est l'intersection du plan sécant avec celui de la courbe de contact des 2 surfaces.

812. — Que représente

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\frac{1}{6}(x+y-2z)^2\ ?$$

R. — On voit immédiatement que c'est une surface de révolution, puisqu'elle est de la forme :

$$F\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2,(ax+by+cz+d)\right]=0$$

qui est l'équation générale des surfaces de révolution.

En outre, comme le premier membre représente le carré de la distance d'un point (x,y,z) au point

$$x=1,\qquad y=2,\qquad z=-1,$$

tandis que le 2e représente le carré de la distance du même point au plan $x+y-2z=0$; on en conclut que la surface donnée est le lieu des points également distants du point

$$x=1,\qquad y=2\qquad z=-1$$

et du plan $\qquad x+y-2z=0.$

C'est donc un Paraboloïde de révolution, dont le foyer est le point, et le plan directeur sont le point et le plan précédents.

813. — Que représente :

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=0\ ?$$

R. — Un Paraboloïde de révolution dont le foyer est :

$$x=1,\qquad y=-1,\qquad z=-2;$$

mais on reconnaît que le paramètre est nul, de sorte que ce Paraboloïde se réduit à son axe.

814. — Que représente :

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{1}{2}(x+y-2z+A)^2.$$

R. — Un Cône.

En effet, la distance du point (x,y,z) au point $(1,-1,2)$ est trois fois plus grande, que la distance de ce point au

plan $x + y - 2z + 4 = 0$; le lieu est donc du genre hyperboloïde; et comme le plan directeur passe par le foyer, il s'ensuit, que c'est un Cône.

---

815. — *Lieu des centres de toutes les surfaces du 2e degré qui contiennent l'axe des x, l'axe des y et une droite située dans le plan des z x.*

R. — Soit $\begin{cases} y = 0 \\ x = mz + p \end{cases}$ les équations de cette droite.

Le plan des xy devant couper la surface suivant les deux droites OX et OY, on doit trouver en faisant $z = 0$ dans l'équation du lieu : $\lambda x y = 0$.

L'équation du lieu est donc de la forme :

$$\lambda xy + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

De plus, ce lieu devant contenir la droite $\begin{cases} y = 0 \\ x = mz + p \end{cases}$, quand on fait $y = 0$, dans son équation, on doit avoir :

$$x - mz - p = 0$$

L'équation cherchée est donc :

$$\lambda xy + z(x - mz - p + \mu y) = 0.$$

Elle renferme deux paramètres arbitraires λ et μ. Eliminons ces deux paramètres entre les trois équations du centre :

$$\left| \begin{array}{r} \lambda y + z = 0 \\ \lambda x + \mu z = 0 \\ x - 2mz - p + \mu y = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui donne pour le lieu cherché :

$$x = mz + \frac{p}{2}.$$

C'est donc un plan parallèle à OY et dont la trace, sur le plan des zx, est parallèle à la droite donnée. En outre ce plan est équidistant de OY et de la droite donnée.

816. — *Lieu des centres des surfaces du 2e degré, qui passent*

par deux droites situées dans un même plan, et par deux points donnés (p, q) et (r, s).

R. — Prenons pour plan des xy, le plan des 2 droites, et pour axe des x et des y, ces deux droites, et, en outre, pour plan des xz, un plan passant par OY et l'un des points donnés, et pour plan des yz un plan passant par OX et l'autre point donné.

L'équation de la surface est de la forme :

$$xy + z(ax + by + cz + d) = 0;$$

a, b, c, d étant 4 paramètres variables.

Exprimons que cette surface contient les deux points donnés. On aura :

$$\left|\begin{array}{l} ap + cq + d = 0 \\ br + cs + d = 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} (1)\ ap + cq + d = 0 \\ (2)\ ap + br + c(q-s) = 0. \end{array}$$

Les équations du centre sont :

$$\begin{array}{l|l} (3) & y + az = 0 \\ (4) & x + bz = 0 \\ (5) & ax + by + 2cz + d = 0. \end{array}$$

Il faut éliminer a, b, c, d entre ces cinq relations, et l'équation ainsi obtenue sera le lieu cherché.

On trouve ainsi :

$$(q-s)xy + 2rzx - 2pzy - rqx + sy = 0.$$

Cette surface est telle, que si on la coupe par le plan des yz, on trouve pour sections, l'axe des z et une parallèle à l'axe des y.

---

817. — On donne dans le plan des xy une courbe quelconque du 2e degré, trouver la surface engendrée par une parabole invariable, dont le plan est parallèle à celui des xz, dont le diamètre est parallèle à l'axe des z, et qui est assujettie à rencontrer en deux points, la courbe donnée.

R. — Soit la courbe du 2e degré $z = 0$,

et $$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + D = 0$$

Les équations de la Parabole génératrice sont :

$$y = K \qquad \text{et} \qquad (x - a)^2 = 2p(z - \gamma)$$

Il faut exprimer, que les équations de ces 2 courbes ont 2 solutions communes, ou que les 2 relations, obtenues en éliminant y et z entre trois des quatre équations, sont identiques.

Ces 2 relations sont :

$$\frac{B''K + C}{A} = -\alpha$$

et $$\frac{A'K^2 + 2C'K + D}{A} = \alpha^2 + 2p\gamma.$$

Il s'agit d'éliminer α, γ, K entre ces deux équations et les deux équations de la Parabole génératrice, ce qui donne pour la surface cherchée :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y - 2Apz + D = 0$$

Lorsque la courbe donnée est une ellipse ou une hyperbole, cette surface est un Paraboloïde elliptique ou hyperbolique.

Si la Courbe donnée est une Parabole, la surface est un cylindre parabolique, car alors les termes du 2e degré forment un carré parfait.

---

818. — On donne dans le plan des xy une ellipse, dont les axes sont dirigés suivant ox et oy. — Dans deux plans parallèles équidistants de xy, on a deux ellipses égales placées dans les mêmes conditions ; trouver le lieu engendré par une droite, qui s'appuie sur ces trois ellipses.

R. — Soit h la distance du plan xy à chacun des plans donnés.

Les trois ellipses sont :

$$\left|\begin{array}{ll} z = h \text{ et } & \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = \lambda^2 \\ z = 0 \ , & \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ z = -h \ , & \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = \lambda^2 \end{array}\right.$$

Les équations de la droite génératrice sont :

$$(1) \qquad x = mz + p$$

$$(2) \qquad y = nz + q.$$

On a donc trois équations de condition :

$$(3) \qquad \frac{(mh+p)^2}{a^2} + \frac{(nh+q)^2}{b^2} = h^2$$

$$(4) \qquad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$$

$$(5) \qquad \frac{(p-mh)^2}{a^2} + \frac{(q-nh)^2}{a^2} = \lambda^2$$

L'élimination de m, n, p, q entre ces cinq équations, donnera le lieu cherché.

Pour faire cette élimination, retranchons l'équation (5) de l'équation (4) et multiplions par z, il viendra :

$$(6) \qquad \frac{2pmz}{a^2} + \frac{2qnz}{b^2} = 0$$

Si l'on ajoute (3) et (5) et que l'on retranche de cette somme le double de (4), il vient :

$$\frac{m^2h^2}{a^2} + \frac{n^2h^2}{b^2} = h^2 - 1,$$

d'où on tire en divisant par h^2 et multipliant par z^2 :

$$(7) \qquad \frac{m^2z^2}{a^2} + \frac{n^2z^2}{b^2} = \frac{h^2-1}{h^2}\, z^2$$

Additionnant (4), (6), (7), il vient :

$$\left(\frac{mz+p}{a}\right)^2 + \left(\frac{nz+q}{b}\right)^2 = \frac{h^2-1}{h^2}\, z^2 + 1.$$

Et alors, en vertu de (1) et (2), on trouve pour le lieu cherché :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(1-h^2)z^2}{h^2} = 1.$$

Cette équation représente un cylindre elliptique si $h = 1$, et un Ellipsoïde si $h < 1$.

On a ainsi un exemple d'un Ellipsoïde engendré par une droite ; mais remarquons que dans ce cas l'ellipse du milieu étant plus grande que les deux autres, il est impossible de trouver une droite réelle qui s'appuierait à la fois sur les trois ellipses.

---

813. — Soient prenons les équations d'une même surface dans

deux systèmes différents d'axes rectangulaires, il y a trois fonctions des coefficients qui ne changent pas; ce sont les suivantes :

$$A + A' + A''$$

$$B^2 + B'^2 + B''^2 - AA' - AA'' - A'A''$$

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''.$$

R. — Soit une surface à centre que nous supposons rapportée à ce centre, son équation sera de la forme :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = F.$$

Supposons maintenant qu'on le rapporte à un nouveau système d'axes rectangulaires, ayant même origine que le 1er. Alors pour passer du 1er système d'axes au 2e, il faut remplacer x, y, z par des fonctions homogènes telles que

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$$

$$y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'$$

$$z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'$$

ce qui n'altérera pas le terme constant, et ramènera l'équation à la forme :

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 xz + 2B''_1 xy = F$$

Imaginons que dans les deux cas, on forme l'équation en S, les racines de cette équation étant dans l'un et l'autre cas égales à

$$\frac{F}{\delta^2}, \quad \frac{F}{\delta'^2}, \quad \frac{F}{\delta''^2},$$

(en appelant $\delta^2, \delta'^2, \delta''^2$ les carrés des demi-axes de la surface), il en résulte que les équations en S devront être identiques.

Le coefficient de S^3 étant 1, il faudra que les coefficients des termes en S^2, en S et du terme indépendant soient égaux, ce qui donnera précisément :

$$A + A' + A'' = A_1 + A'_1 + A''_1$$

$$B^2 + B'^2 + B''^2 - AA' - A'A'' - A''A = B_1^2 + B'^2_1 + B''^2_1 - A_1A'_1 - A_1A''_1 - A'_1A''_1$$

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = A_1B_1^2 + A'_1B'^2_1 + A''_1B''^2_1 - A_1A'_1A''_1 - 2B_1B'_1B''_1$$

820. — Les trois arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle sont tangentes à une surface du 2e degré, on demande le lieu décrit par le sommet de cet angle.

R. — Considérons l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Soit (α, β, γ) un point du lieu, transportons l'origine en ce point et prenons pour axes les trois tangentes rectangulaires, menées par ce point.

On devra remplacer x, y, z par des expressions de la forme :

$$x = \alpha + mx' + ny' + pz'$$

$$y = \beta + m_1 x' + n_1 y' + p_1 z'$$

$$z = \gamma + m_2 x' + n_2 y' + p_2 z'$$

et comme la transformation est pour passer de coordonnées rectangulaires à d'autres coordonnées rectangulaires, il existe les 6 relations connues entre les coefficients $m, n, p, m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2$.

L'équation de l'ellipsoïde devient alors :

$$\frac{(\alpha + mx' + ny' + pz')^2}{a^2} + \frac{(\beta + m_1 x' + n_1 y' + p_1 z')^2}{b^2} + \frac{(\gamma + m_2 x' + n_2 y' + p_2 z')}{c^2} = 1$$

Exprimons que les axes actuels de coordonnées sont tangents à cette surface, par exemple que l'axe des x est tangent. Alors l'équation

$$x'^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2} + \frac{m_2^2}{c^2}\right) + 2x\left(\frac{\alpha m}{a^2} + \frac{\beta m_1}{b^2} + \frac{\gamma m_2}{c^2}\right) + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0$$

obtenue en faisant $y' = 0$, $z' = 0$ devra avoir ses racines égales, il faut donc que :

$$\left(\frac{\alpha m}{a^2} + \frac{\beta m_1}{b^2} + \frac{\gamma m_2}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2} + \frac{m_2^2}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) = 0$$

ce qui devient en réduisant :

$$m m_1 \frac{2\alpha\beta}{a^2 b^2} + m m_2 \frac{2\alpha\gamma}{a^2 c^2} + m_1 m_2 \frac{2\beta\gamma}{b^2 c^2} = \frac{m^2}{a^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) + \frac{m_1^2}{b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) + \frac{m_2^2}{c^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) - \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2} + \frac{m_2^2}{c^2}\right)$$

En écrivant que les deux autres axes sont tangents, on aurait deux nouvelles relations, qui se déduiraient très simplement de celle-là.

Il s'agit d'éliminer les 9 indéterminées que nous avons

introduites entre ces 3 dernières relations, en les six relations connues, ce qui est possible à cause de l'homogénéité de ces six d'entre-elles.

On aura ainsi entre α, β, γ une relation constante qui sera l'équation du lieu.

En opérant le calcul, on trouve :

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

C'est l'équation d'un Ellipsoïde ayant même centre et mêmes axes que celui que nous avons considéré.

---

821. — Surfaces représentées par :

$$z=\frac{ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f}{lx+my+n}.$$

R. — On sait qu'on peut toujours mettre l'équation du 2e degré à trois variables sous cette forme, quand l'un des carrés manque.

Remarquons d'abord que, quelque soit z, l'équation est identiquement satisfaite par :

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \quad \text{et} \quad lx+my+n=0.$$

La 1re représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z.

La 2e représente un plan parallèle à l'axe des z. Leur ensemble représente donc en général, deux droites parallèles à l'axe des z.

Il peut se présenter ici divers cas :

1° La droite $lx+my+n=0$ coupe la courbe du 2e degré en deux points réels.

Alors on trouve que la surface est un hyperboloïde à une nappe.

2° La droite coupe la courbe en deux points imaginaires.

On trouve que la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

3° Les deux points d'intersection de la droite et de la courbe sont confondus en un seul.

La surface est un Cône.

4°. L'un des points d'intersection est transporté à l'infini. La surface est un Paraboloïde hyperbolique.

5°. Les deux points d'intersection sont à l'infini. La surface est alors un système de deux plans parallèles ou un cylindre hyperbolique. — On peut encore avoir dans ce cas des cylindres.

---

822. — Surfaces représentées par :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0,$$

sachant que A est > 0.

R. — Cette équation représente un Cône ayant son sommet à l'origine, ou les diverses variétés du genre Cône.

1°. $B''^2 - AA' < 0$. — Trois cas à examiner suivant le signe de

$$\Delta = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''.$$

Si $\Delta > 0$ On a un Cône.
Si $\Delta = 0$ Une droite.
Si $\Delta < 0$ Un point.

2°. $B''^2 - AA' > 0$

Si $\Delta > 0$ Cône.
Si $\Delta = 0$ Deux plans qui se coupent.
Si $\Delta < 0$ Cône.

3°. $B''^2 - AA' = 0$.

Si $BB'' - A'B' \lesseqgtr 0$. Cône.

$$BB'' - A'B' = 0 \left\{ \begin{array}{ll} B^2 - A'A'' < 0. & \text{Un point.} \\ B^2 - A'A'' = 0 & \text{Un plan.} \\ B^2 - A'A'' > 0 & \text{Deux plans qui se coupent.} \end{array} \right.$$

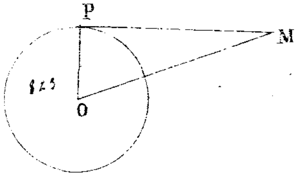
III. Sphère

III. Sphère.

823. — Le premier membre de l'équation d'une sphère représente le carré de la longueur de la tangente, menée du point (x, y, z) à cette sphère.

R. — Soit $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0$,

l'équation de la sphère en axes rectangulaires.



Soit M le point donné, MP la tangente. Menons OP, le triangle rectangle OPM donne :

$$PM^2 = OM^2 - R^2.$$

Or $OM^2 = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$

Donc $PM^2 = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2$.

824. — Le lieu des sommets des angles trièdres tri-rectangles, tangents à trois surfaces du 2e degré homofocales est une sphère.

R. — Soient les trois ellipsoïdes homofocaux de révolution autour de l'axe des x.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a''^2}+\frac{y^2}{b''^2}+\frac{z^2}{c''^2}=1$$

On a alors les relations $a^2-b^2=a'^2-b'^2=a''^2-b''^2=K^2$ qui expriment que les sections méridiennes par le plan des xy sont homofocales.

Soient (x', y', z') les coordonnées d'un des sommets qui satisfont aux équations des trois plans tangents aux trois ellipsoïdes

$$(x'^2-a^2)\cos^2\alpha+(y'^2-b^2)\cos^2\beta+(z'^2-c^2)\cos^2\gamma+2x'y'\cos\alpha\cos\beta+2x'z'\cos\alpha\cos\gamma+2y'z'\cos\beta\cos\gamma=0$$

$(x'^2-a'^2)\cos^2\alpha'+$ - $=0$

$(x'^2-a''^2)\cos^2\alpha''+$ - $=0$

En ajoutant ces trois équations en tenant compte des

relations qui existent entre les neuf cosinus, il vient :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b'^2 + b''^2$$

qui est l'équation d'une sphère.

825. — On donne la sphère : $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ayant son centre sur l'axe des x, trouver l'équation du conoïde engendré par une droite parallèle au plan XOY et qui glisse sur l'axe des Z et sur la sphère.

R. — Un plan $z = y$ renfermera deux génératrices, il est facile d'avoir leurs projections sur le plan XOY.

En effet, ce plan rencontre la sphère suivant le cercle :

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2 - y^2.$$

Pour avoir les projections des génératrices correspondant à ce plan, il suffit de mener par l'origine deux tangentes à ce cercle. L'équation de la corde de contact de ces tangentes sera :

$$ax + R^2 - a^2 - y^2$$

(d'après la formule : $x f'_x + y f'_y + \varphi_{m-1} + 2\varphi_{m-2} = 0$.)

L'équation générale des courbes du 2e degré passant par les points communs au cercle et à la droite, tangentes au cercle suivant la droite comme corde de contact est :

$$(x-a)^2 + y^2 + y^2 - R^2 + \lambda(ax + R^2 - a^2 - y^2)^2 = 0$$

Parmi ces courbes se trouve le système de nos deux tangentes, il suffit donc de déterminer λ, de telle sorte que ce lieu passe par l'origine, ce qui donne :

$$\lambda = -\frac{1}{a^2 + y^2 - R^2}$$

Le système des tangentes dans l'espace est donc :

$$z = y$$

$$[(x-a)^2 + y^2 + y^2 - R^2](a^2 + y^2 - R^2) - (ax + R^2 - a^2 - y^2)^2 = 0$$

Pour avoir le lieu de ces tangentes, il faut éliminer y entre ces deux équations, ce qui donne pour la surface

cherchée :

$$[(x-a)^2+y^2+z^2-R^2](a^2+z^2-R^2)-(ax-z^2+R^2-a^2)^2=0$$

826. — *Trouver la projection sur le plan XOY de la ligne de contact de ce Conoïde avec la sphère.*

R. — Il suffit pour cela d'éliminer z entre les 2 équations

$$(x-a)^2+y^2+z^2-R^2=0$$
$$[(x-a)^2+y^2+z^2-R^2](a^2+z^2-R^2)-(ax+R^2-a^2-z^2)^2=0$$

Ce qui conduit, après réduction, au cercle :

$$x^2+ax+y^2=0$$

Mais il n'y a qu'une partie de ce cercle qui convient à la question.

L'Algèbre a donné ce cercle tout entier, parce que pour éliminer z, nous avons combiné d'une certaine manière les équations du Conoïde et de la sphère, nous avons cherché, en un mot, un cylindre passant par les points communs aux deux surfaces, qui nous a été donné par : $x^2+ax+y^2=0$; ce qui ne signifie pas que tous les points du cylindre fassent partie de l'intersection cherchée.

827. — *Déduire de l'équation du plan du cercle commun à deux sphères et de l'équation de la ligne des centres de ces sphères, la condition pour que la droite :*

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p},$$

soit perpendiculaire au plan $Ax+By+Cz=0$. *(Opérer en coordonnées obliques).*

R. — Soient les deux sphères :

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2xz\cos\mu+2xy\cos\nu+2ax+2by+2cz+d=0$$
$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2xz\cos\mu+2xy\cos\nu+2a'x+2b'y+2c'z+d'=0.$$

L'équation est, en appelant α, β, γ, les coordonnées du centre :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+2(y-\beta)(z-\gamma)\cos yz+2(z-\gamma)(x-\alpha)\cos xz+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos xy=r^2.$$

Soient x', y', z' les coordonnées du centre de l'une des sphères et x'', y'', z'' celles de l'autre.

On a dû poser pour les ramener aux formes précédemment écrites :

$$x' + y' \cos\nu + z' \cos\mu + a = 0 \qquad x'' + y'' \cos\nu + z'' \cos\mu + a' = 0$$

$$x' \cos\nu + y' + z' \cos\lambda + b = 0 \qquad x'' \cos\nu + y'' + z'' \cos\lambda + b' = 0$$

$$x' \cos\mu + y' \cos\lambda + z' + c = 0 \qquad x'' \cos\mu + y'' \cos\lambda + z'' + c' = 0$$

Le plan du cercle commun aux deux sphères est parallèle à :

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c')z = 0$$

ou :

$$Ax + By + Cz = 0$$

et la ligne des centres à :

$$\frac{x}{x' - x''} = \frac{y}{y' - y''} = \frac{z}{z' - z''}.$$

Pour avoir les conditions cherchées, il faut exprimer $x' - x''$, $y' - y''$, $z' - z''$ en fonction des coefficients : $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ de l'équation du plan.

Pour cela retranchons deux à deux les six équations précédentes, il vient :

$$(x'' - x') + (y'' - y') \cos\nu + (z'' - z') \cos\mu = a - a' = A,$$

$$(x'' - x') \cos\nu + (y'' - y') + (z'' - z') \cos\lambda = b - b' = B,$$

$$(x'' - x') \cos\mu + (y'' - y') \cos\lambda + (z'' - z') = c - c' = C,$$

qui déterminent les trois quantités que nous cherchons.

Le dénominateur commun déterminant de $\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$

ou :

$$1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda \cos\mu \cos\nu = \Delta$$

Le numérateur relatif à $x'' - x'$ s'obtient en mettant le dénominateur commun sous la forme générale

$$a(bc'' - cb'') + a'(bc - cb) + a''(bc' - cb'),$$

ou en remplaçant a, a', a'' par d, d', d'', ce qui donne dans le cas actuel :

$$A(1-\cos^2\lambda)+B(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+C(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)$$

Donc :

$$x''-x' = \frac{1}{\Delta}\cdot A\sin^2\lambda+B(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+C(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)$$

$$y''-y' = \frac{1}{\Delta}\cdot B\sin^2\mu+C(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+A(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)$$

$$z''-z' = \frac{1}{\Delta}\cdot C\sin^2\nu+A(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)+B(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)$$

Donc la droite perpendiculaire au plan $Ax+By+Cz=0$ est :

$$\frac{x}{A\sin^2\lambda+B(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+C(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)} = \frac{y}{B\sin^2\mu+C(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+A(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu)}$$

$$= \frac{z}{C\sin^2\nu+\text{------}}$$

Donc si une droite $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ est perpendiculaire à ce même plan, on doit avoir les relations :

$$\frac{m}{A\sin^2\lambda+B(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+C(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)} = \frac{y}{B\sin^2\mu+\cdots\cdots} = \frac{z}{C\sin^2\nu+\cdots\cdots}$$

Ce sont là les 2 conditions cherchées.

IV. Ellipsoïde.

828. — *Par le centre d'un ellipsoïde, on mène des plans qui interceptent des ellipses d'aire constante, trouver le lieu des Normales, menées par le centre à chacun de ces plans.*

R. — Prenons le centre pour origine, et supposons les axes rectangulaires.

Un plan passant par le centre est

$$(1) \qquad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$

La Normale à ce plan, passant par l'origine est :

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$$

Cherchons le lieu de ces normales, et pour cela voyons

à quelles conditions $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ doivent être assujettis, pour que la section opérée par le plan (1) dans l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ait une aire constante.

Le carré d'une aire quelconque est égale à la somme des carrés des projections de cette aire sur trois plans rectangulaires ; cette dernière somme doit donc être constante.

Écrivons cela comme il suit :

La projection de l'intersection sur le plan des xy, est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x\cos\alpha + y\cos\beta)^2}{c^2\cos^2\gamma} = 1$$

ou

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2\alpha}{c^2\cos^2\gamma}\right) + 2xy\,\frac{\cos\alpha\cos\beta}{c^2\cos^2\gamma} + y^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\cos^2\beta}{c^2\cos^2\gamma}\right) = 1.$$

L'aire S_1 de cette ellipse, s'écrit :

$$S_1^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2 c^2 \cos^2\gamma}{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}.$$

La symétrie de cette expression, nous permet de trouver les expressions S_2 et S_3 de la projection de la surface sur les deux autres plans rectangulaires.

On doit avoir :

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \text{Constante} = \pi^2 z^4$$

ou (2)

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{z^4} = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

Telle est la relation qui lie α, β, γ. Éliminant ces variables entre les deux équations de la génératrice et l'équation (2), on aura l'équation du lieu.

Les équations de la génératrice sont :

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma},$$

d'où :

$$\frac{x'^2}{\cos^2\alpha} = \frac{y'^2}{\cos^2\beta} = \frac{z'^2}{\cos^2\gamma}$$

Les coordonnées d'un point quelconque du lieu satisfaisant aux premières équations, satisferaient à celles-ci, et par suite à :

$$\frac{x'^2}{\cos^2\alpha} = \frac{y'^2}{\cos^2\beta} = \frac{z'^2}{\cos^2\gamma} = \frac{a^2x'^2}{a^2\cos^2\alpha} = \frac{b^2y'^2}{b^2\cos^2\beta} = \frac{c^2z'^2}{c^2\cos^2\gamma} = \frac{a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^2z'^2}{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos\beta + c^2\cos^2\gamma}$$

$$= \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1}.$$

d'où : $$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma = \frac{a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Portant dans (2) on a l'équation du lieu :

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2 = \left[x'^2 + y'^2 + z'^2\right] \frac{a^2 b^2 c^2}{z^4}.$$

Ordonnant en supprimant les accents, il vient :

$$x^2\left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{b^2c^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{a^2c^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{b^2c^2}\right) = 0$$

C'est l'équation d'un cône du 2e degré, dont les axes coïncident avec ceux de l'ellipsoïde.

§29. — *Chaque plan tangent à l'ellipsoïde parallèle à l'un des plans diamétraux, qui forment une section d'aire constante, est situé à une distance constante du centre de l'ellipsoïde, c'est-à-dire est aussi tangent à une certaine sphère.*

R. — Soit le plan : $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$, donnant une relation d'aire πr^2.

On sait (d'après le problème précédent) que :

$$(1) \qquad \frac{a^2 b^2 c^2}{z^4} = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma.$$

Le plan tangent à l'ellipsoïde parallèle au plan considéré est :

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma}.$$

La distance de l'origine à ce plan, est :

$$\delta = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma},$$

qui en vertu de la relation (1) se réduit à :

$$\delta = \frac{abc}{z^2}$$

ce qui montre, que tous ces plans sont tangents à la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{z^4}.$$

§30. — *On joint le centre aux points de contact des plans, tangents à l'ellipsoïde, satisfaisant aux conditions précédentes, on demande le lieu de ces droites.*

R. — Le diamètre conjugué du plan $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$

est :
$$\frac{x}{a^2\cos\alpha} = \frac{y}{b^2\cos\beta} = \frac{z}{c^2\cos\gamma}$$

D'ailleurs on a
$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma = \delta^2$$

Il s'agit d'éliminer $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ entre ces trois équations.

Pour cela écrivons la première ainsi :
$$\frac{\frac{x}{a^2}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{b^2}}{\cos\beta} = \frac{\frac{z}{c^2}}{\cos\gamma}.$$

D'où
$$\frac{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}{\cos^2\beta} = \frac{\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}{\cos^2\gamma} = \frac{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}{1} = \frac{a^2\left(\frac{x}{a^2}\right)^2}{a^2\cos^2\alpha} = \frac{b^2\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}{b^2\cos^2\beta} = \frac{c^2\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}{c^2\cos^2\gamma} = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{\delta^2}$$

Donc
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \delta^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$$

ou enfin, on a pour l'équation du lieu :
$$x^2\,\frac{\delta^2 - a^2}{a^4} + y^2\,\frac{\delta^2 - b^2}{b^4} + z^2\,\frac{\delta^2 - c^2}{c^4} = 0$$

C'est un cône du 2e degré.

831. — *Lieu des sommets des trièdres tri-rectangles, circonscrits à un Ellipsoïde.*

R. — Soit l'ellipsoïde : $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$.

L'équation des trois plans tangents sera :
$$\begin{cases} z = mx + ny \pm \sqrt{\dfrac{H(P'P''m^2 + PP''n^2 + PP')}{P''}} \\[2ex] z = m'x + n'y \pm \sqrt{\dfrac{H(P'P''m'^2 + PP''n'^2 + PP')}{P''}} \\[2ex] z = m''x + n''y \pm \sqrt{\dfrac{H(P'P''m''^2 + PP''n''^2 + PP')}{P''}} \end{cases}$$

Ces plans devant être perpendiculaires deux à deux, on aura les relations :
$$\begin{cases} mm' + nn' + 1 = 0 \\ mm'' + nn'' + 1 = 0 \\ m'm'' + n'n'' + 1 = 0 \end{cases}$$

ou si l'on désigne par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, les cosinus des angles, que fait l'axe du premier plan avec les trois axes de coordonnées; par $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ ceux du 2e; par $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$ ceux du 3e, on aura :

$$\left|\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0 \\ \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = 0 \\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0 \end{array}\right.$$

En outre, on a les relations :

$$\left|\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1 \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1 \end{array}\right.$$

Mais de ces relations on déduit :

$$\left|\begin{array}{l} \cos\alpha.\cos\beta + \cos\alpha'.\cos\beta' + \cos\alpha''.\cos\beta'' = 0 \\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' = 0 \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1 \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1 \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1 \end{array}\right.$$

Or, pour avoir l'équation du lieu, il faut éliminer les neuf paramètres arbitraires, entre 9 équations. L'élimination se fait très simplement, en remarquant que les 3 plans tangents peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = \frac{H}{P''}\left(P'P''\cos^2\alpha + PP''\cos^2\beta + PP'\cos^2\gamma\right) \\ (x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma')^2 = \frac{H}{P''}\left(P'P''\cos^2\alpha' + PP''\cos^2\beta' + PP'\cos^2\gamma'\right) \\ (x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'')^2 = \frac{H}{P''}\left(P'P''\cos^2\alpha'' + PP''\cos^2\beta'' + PP'\cos^2\gamma''\right) \end{array}\right.$$

Si l'on ajoute ces trois équations membre à membre, il vient :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{H}{P''}\left(P'P'' + PP'' + PP'\right)$$

Le lieu est donc une sphère concentrique à l'Ellipsoïde.

---

832. Dans un Ellipsoïde, la somme des carrés des inverses de trois demi-diamètres conjugués, est égale à la somme des carrés inverses des trois demi-axes.

R. — Soient $\delta, \delta', \delta''$ les trois demi-diamètres; α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$, les angles qu'ils font avec les axes OX, OY, OZ. On a :

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

$$\frac{1}{\delta'^2} = \frac{\cos^2\alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{c^2}$$

$$\frac{1}{\delta''^2} = \frac{\cos^2\alpha''}{a^2} + \frac{\cos^2\beta''}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma''}{c^2}$$

d'où, en ajoutant :

$$\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta'^2} + \frac{1}{\delta''^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

---

833. — *Si un Ellipsoïde et une sphère concentriques sont tangents, ce ne peut être qu'aux extrémités d'un des axes, en un sommet.*

R. — En effet, au point de contact, les deux surfaces ont même plan tangent; le plan tangent à l'ellipsoïde est donc perpendiculaire au rayon qui va du centre au point de contact. — Ce point de contact est donc, par définition, un sommet.

Il en résulte, que si l'on prend une sphère concentrique à l'ellipsoïde, et que l'on cherche à déterminer son rayon de manière, qu'elle soit tangente à l'ellipsoïde, on trouvera une équation du 3e degré en R^2, ayant pour racines a^2, b^2, c^2.

---

834. — *Lieu des sommets des trièdres circonscrits à l'ellipsoïde :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et dont les faces sont parallèles à un système de plans diamétraux conjugués.

R. — Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point du lieu, ce point devra appartenir à 3 plans tangents de la forme :

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma},$$

D'où en élevant au carré :

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma \\ (x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma')^2 = a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma' \\ (x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'')^2 = a^2\cos^2\alpha'' + b^2\cos^2\beta'' + c^2\cos^2\gamma'' \end{array}\right.$$

Ces plans doivent être parallèles à trois plans diamétraux conjugués ; donc les trois plans :

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0 \\ x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = 0 \\ x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'' = 0 \end{array}\right.$$

doivent être diamétraux conjugués.

Pour l'exprimer, on aura trois équations exprimant que ces plans sont diamétraux, conjugués deux à deux.

Eliminant les 9 cosinus entre ces trois équations, les trois équations (1) et les trois équations

$$\left|\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1 \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1 \end{array}\right.$$

On aura une relation constante entre x, y, z, a, b, c qui sera l'équation du lieu.

On trouve ainsi en effectuant les calculs :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$$

L'équation du lieu est donc un Ellipsoïde concentrique et homothétique avec l'ellipsoïde donné.

---

835. — Lieu des sommets des trièdres tri-rectangles, dont les faces sont tangentes aux trois ellipsoïdes :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ \dfrac{x^2}{a^2+h^2} + \dfrac{y^2}{b^2+h^2} + \dfrac{z^2}{c^2+h^2} = 1 \\ \dfrac{x^2}{a^2+k^2} + \dfrac{y^2}{b^2+k^2} + \dfrac{z^2}{c^2+k^2} = 1 \end{array}\right.$$

R..

R. — Désignons par (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque du lieu ; par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$; $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$, les cosinus des angles de chacune des trois faces du trièdre avec les plans de coordonnées.

En exprimant que ces faces sont tangentes aux trois ellipsoïdes, on aura les conditions :

$$(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$$

$$(x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma')^2 = a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma'$$

$$(x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'')^2 = a^2\cos^2\alpha'' + b^2\cos^2\beta'' + c^2\cos^2\gamma''$$

Ces plans doivent être rectangulaires, donc :

$$\cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0$$

$$\cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = 0$$

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$$

De plus :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

$$\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1.$$

Si l'on ajoute les trois 1res équations en tenant compte des relations qui suivent, on a pour l'équation du lieu :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + h^2 + k^2$$

C'est donc une sphère.

V. — Hyperboloïde.

836. — *Lieu des points d'un Hyperboloïde à une nappe, où passent deux génératrices à angle droit.*

R. — Soit (α, β, γ) un point du lieu. Pour exprimer que les deux génératrices qui passent par ce point, sont rectangulaires, nous chercherons les coëfficients angulaires des

projections sur deux plans rectangulaires des coordonnées.

Le point (α, β, γ) se projette sur le plan des xy suivant le point (α, β); et les deux génératrices passent par le point (α, β, γ) suivant deux tangentes à l'ellipse de gorge, menées par le point (α, β).

L'équation d'une tangente à l'ellipse de gorge :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

m étant son coefficient angulaire.

Cette tangente passant par (α, β), on a :

$$\beta - m\alpha = \sqrt{a^2 m^2 + b^2};$$

ou

$$m^2(\alpha^2 - a^2) - 2m\alpha\beta + \beta^2 - b^2 = 0,$$

équation qui donne le coefficient angulaire m_1 et m_2, des deux tangentes que l'on peut mener par (α, β) à l'ellipse de gorge.

On effectuera le même calcul sur le plan des xz, par exemple, et on arrivera en changeant β en γ et b^2 en $-c^2$, à une équation analogue, qui donnera :

$$m^2(\alpha^2 - a^2) - 2m\beta\gamma + \beta^2 + c^2 = 0$$

pour déterminer les coefficients angulaires m'_1, m'_2.

On doit avoir :

$$m_1 m_2 + m'_1 m'_2 + 1 = 0$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

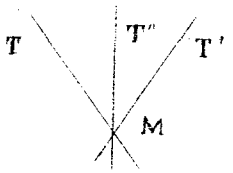
qui est l'équation du lieu.

Le lieu est donc une sphère.

837. — *La sphère, trouvée dans le problème précédent, n'est autre chose, que le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'hyperboloïde.*

R. — Ce résultat s'explique facilement. Considérons les deux génératrices à angle droit MT, M'T'. Le plan MTM' est tangent à l'hyperboloïde au point M.

Imaginons par MT un plan perpendiculaire au plan MTM', il sera tangent en un certain point de l'hyperboloïde;



car contenant la génératrice MT, il en contient nécessairement une deuxième, et il est tangent à l'hyperboloïde au point de rencontre des deux génératrices.

De même, nous pouvons mener par MT' un plan perpendiculaire à MTM', ce plan sera tangent à l'hyperboloïde.

Le point M sera donc le sommet d'un triangle trirectangle, dont les trois faces seront tangentes à l'hyperboloïde.

---

838. — *Tout hyperboloïde à une nappe peut être considéré comme engendré par la droite intersection de deux plans perpendiculaires entre eux, qu'on fait passer par deux droites données.*

R. — Soit l'hyperboloïde $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$. Pour qu'il puisse être engendré, comme on le dit, il faut qu'on puisse identifier cette équation avec l'équation :

$$\frac{x^2}{\frac{c^2(1-m^2)}{m^2}} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2(1-m^2)} = 1.$$ (*Voir un des Problèmes précédents*).

Il faudrait donc que :

$$\alpha^2 = c^2\frac{1-m^2}{m^2}, \qquad \beta^2 = c^2(1-m^2), \qquad \gamma^2 = c^2.$$

Ce qui donne trois relations entre deux indéterminées, donc le problème est, en général, impossible. — Pour qu'il soit possible, il faut qu'il existe entre α, β, γ une certaine relation qu'on obtient en éliminant c et m ; il vient alors :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{b^2}.$$

Il faut donc que l'axe non transverse soit égal à la hauteur du triangle rectangle, qui aurait pour cotés les deux autres axes.

---

839. — *Couper l'hyperboloïde à une nappe par un plan,*

de manière que la section soit une hyperbole équilatère.

R. — Comme les sections faites par des plans parallèles sont des courbes homothétiques, il suffit de considérer des plans passant par le centre, et de chercher la condition pour que le plan :

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

coupe suivant une hyperbole équilatère l'hyperboloïde :

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nous exprimerons que la courbe de section est une hyperbole équilatère, en exprimant que les asymptotes sont rectangulaires, c'est-à-dire en exprimant que les coefficients angulaires $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, des projections de ces droites sur deux des plans coordonnés, satisfont à la relation :

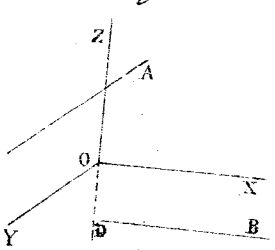
$$(3) \qquad \lambda\lambda' + \mu\mu' + 1 = 0.$$

Pour avoir les coefficients $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$, remarquons que les projections des asymptotes, sont les asymptotes des courbes projections. — Nous chercherons donc les projections de l'intersection sur les plans xy et xz, et on obtiendra les valeurs $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$.

Portant ces valeurs dans la relation (3), on aura une seule équation de condition entre les coefficients variables de l'équation du plan, en sorte qu'il ne restera plus qu'un seul paramètre variable ; il y a donc une infinité de plans, satisfaisant à la condition demandée.

---

840. — *Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur deux droites données, et à rester constamment parallèle à une génératrice d'un cône du 2e degré donné.*



R. — Soient les droites A et B, on peut supposer le sommet du cône sur un plan passant par A. Ce plan coupe le cône suivant deux génératrices. Par la droite B, on peut mener un

plan parallèle à l'une ou à l'autre de ces deux génératrices.

L'intersection de ces deux plans sera une génératrice de la surface; on peut ainsi construire une génératrice quelconque.

Pour trouver l'équation de la surface, nous prendrons pour axe des z une génératrice de la surface, pour origine le milieu O de BD, pour axes des x et des y des parallèles aux droites A et B, menées par l'origine.

Si on transporte le cône parallèlement à lui-même, de manière que son sommet soit en O, son équation sera:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0 .$$

La droite A $\begin{cases} y = 0 \\ z = -d \end{cases}$, La droite B $\begin{cases} x = 0 \\ z = d \end{cases}$

Une génératrice quelconque de la surface est l'intersection de deux plans passant par chacune des droites A et B, elle a pour équations :

$$\begin{cases} x - \lambda\,(z - d) = 0 \\ y - \mu\,(z + d) = 0 \end{cases}$$

La parallèle, menée par l'origine, doit être située dans le cône, ce qui donne entre λ et μ, la relation :

$$A\lambda^2 + A'\mu^2 + A'' + 2B\mu + 2B'\lambda + 2B''\lambda\mu = 0$$

Il faut éliminer λ et μ entre ces trois équations, ce qui donne :

$$A\frac{x^2}{(z-d)^2} + A'\frac{y^2}{(z+d)^2} + A'' + 2B\frac{y}{z+d} + 2B'\frac{x}{z-d} + 2B''\frac{xy}{z^2-d^2} = 0$$

Exprimons maintenant que nous avons pris pour axe des z une génératrice, c'est-à-dire que cette droite se trouve sur le cône; son équation sera satisfaite par :

$$x = 0 \quad , \quad y = 0$$

ce qui exige $\qquad A'' = 0 .$

Si une des génératrices du cône est parallèle à la droite A, il faut que l'équation du cône soit satisfaite par $x = 0$, $y = 0$ d'où $A = 0$. Alors, on a $z + d$ en facteur et une surface du 3e ordre.

Si enfin, une des génératrices est aussi parallèle à la droite B, on a : $A' = 0$ et la surface se réduit aux deux plans :

$$z - d = 0 \quad , \quad z + d = 0$$

et à l'hyperboloïde à une nappe :

$$By(z-d) + B'x(z+d) + B''xy = 0.$$

841. — *Quand l'équation du 2e degré représente un hyperboloïde, l'ensemble des termes du 2e degré égalé à zéro représente le cône asymptote.*

R. — La démonstration se fait identiquement de la même manière, que celle que nous donnons plus loin dans la question analogue qui se rapporte au Paraboloïde.

842. — *Par un point de l'hyperboloïde :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on mène deux génératrices de cette surface, trouver l'équation du plan de ces deux droites.

R. — On a les deux systèmes de génératrices :

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{array} \right.$$

Ces génératrices doivent passer par le point (x', y', z'), ce qui déterminera λ et μ. Ces deux génératrices sont :

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x'}{a} + \frac{z'}{c}\right) = \left(1 + \frac{y'}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x'}{a} - \frac{z'}{c}\right) = \left(1 - \frac{y'}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x'}{a} + \frac{z'}{c}\right) = \left(1 - \frac{y'}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x'}{a} - \frac{z'}{c}\right) = \left(1 + \frac{y'}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{array} \right.$$

Additionnant, membre à membre, les deux équations (1),

on a l'équation d'un plan passant par cette génératrice (1), c'est

$$(3)\qquad \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x'}{a}+\frac{z'}{c}\right)+\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x'}{a}-\frac{z'}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y'}{b}\right)+\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y'}{b}\right)$$

Additionnant les deux équations (2) on a un plan contenant la génératrice (2). Or l'équation ainsi obtenue ne diffère pas de l'équation (3) qui, par conséquent, représente le plan des deux génératrices passant par le point (x', y', z').

On peut mettre l'équation sous la forme:

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=1.$$

843. — Reconnaître lequel des deux hyperboloïdes est représenté par l'équation:

$$ayz+bxz+cxy+d=0.$$

R. — Remarquons que d'après la forme même des équations de l'hyperboloïde à une et deux nappes, sur trois diamètres conjugués, il y en a toujours deux de réels dans le premier cas et l'autre imaginaire, et, dans le second cas, deux d'imaginaires et un de réel.

Il en résulte que si l'on considère des plans passant par le centre et donnant des ellipses, le diamètre conjugué sera imaginaire dans l'hyperboloïde à une nappe, parce que deux diamètres conjugués réels de l'ellipse et celui-là donnent un système de trois diamètres conjugués, il faut donc que ce dernier soit imaginaire.

Mais dans l'hyperboloïde à deux nappes, il n'existe pas de sections centrales elliptiques, on considère alors les sections hyperboliques.

En faisant les calculs auxquels on serait conduit par ce que nous venons de dire, on trouve que si:

$\frac{d}{abc}>0$, l'équation proposée représente une hyperboloïde à une nappe.

si $\frac{d}{abc}<0$; elle représente une hyperbole à deux nappes.

VI. — Cône du 2e degré.

844. — *Si deux trièdres tri-rectangles ont même sommet, les six arêtes sont sur un même cône du 2e degré.*

R. — Prenons pour axes de coordonnées les arêtes de l'un des trièdres.

Les arêtes de l'autre auront des équations de la forme :

$$\left|\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma} \\ (2) & \dfrac{x}{\alpha'} = \dfrac{y}{\beta'} = \dfrac{z}{\gamma'} \\ (3) & \dfrac{x}{\alpha''} = \dfrac{y}{\beta''} = \dfrac{z}{\gamma''}. \end{array}\right.$$

L'équation du cône du 2e degré passant par OX, OY, OZ sera :

$$Byz + B'xz + B''xy = 0.$$

Elle contient deux indéterminées, nous allons voir si on peut en disposer de manière que le cône contienne les trois droites (1), (2), (3); autrement dit si les trois équations auxquelles on parvient se réduisent à deux.

Ces trois équations sont :

$$(4) \quad B\beta\gamma + B'\alpha\gamma + B''\alpha\beta = 0$$

$$(5) \quad B'\beta'\gamma' + B'\alpha'\gamma' + B''\alpha'\beta' = 0$$

$$(6) \quad B''\beta''\gamma'' + B'\alpha''\gamma'' + B''\alpha''\beta'' = 0$$

Si on les ajoute, on trouve l'équation :

$$(7) \quad B(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'') + B'(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'') + B''(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'') = 0$$

Cette équation est identique, car on a entre les coefficients, les relations :

$$\begin{array}{lcl} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 & & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 & \text{et} & \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 & & \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \end{array}$$

qui expriment que les trois droites sont rectangulaires.

Mais on a aussi les relations :

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \qquad \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$$

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \qquad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0$$

Ces relations expriment que les axes OX, OY, OZ, sont rectangulaires deux à deux.

Les équations (4), (5), (6) se réduisant à deux, il s'ensuit que les six arêtes sont sur le cône.

---

845. — Tout cône du 2e degré peut être engendré par une droite OC qui fasse avec deux droites OA, OB situées dans le plan des xy, des angles tels que :

$$AOB + BOC = 2\theta.$$

R. — L'équation d'un cône du 2e degré peut s'écrire :

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = 0.$$

Si nous identifions cette équation avec celle que nous avons trouvée, quand nous avons cherché le lieu des droites OC (Voir un des problèmes précédents), on aura :

$$\frac{b^2c^2}{m^2 - \cot^2\theta} = \frac{a^2b^2}{m^2+1} = -\frac{a^2c^2}{m^2 - \operatorname{tg}^2\theta}$$

L'identification est possible, en de deux manières.

On a ainsi deux générations d'un cône du 2e degré.

846. — Exprimer qu'on peut placer sur un cône du 2e degré un trièdre tri-rectangle, dont les arêtes soient trois génératrices.

R. — Pour exprimer qu'un cône du 2e degré contient un trièdre tri-rectangle, il faut qu'il existe entre les coefficients de son équation, une relation, et une seule.

En effet, considérons une face d'un pareil trièdre, on peut, en général, trouver un plan coupant un cône du 2e degré suivant trois axes rectangulaires ; en achevant le trièdre tri-rectangle, on n'aura qu'à exprimer une seule

condition, savoir : que la troisième arête a un point sur le cône autre que le sommet. Alors à tout plan sécant, donnant, comme section, deux droites rectangulaires, correspondra un trièdre tri-rectangle situé sur la surface.

La condition dont nous parlons est facile à trouver.

En effet, considérons un cône ayant son sommet à l'origine et dont l'équation est :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

et imaginons que par une transformation de coordonnées, on prenne pour nouveaux axes les trois arêtes du trièdre tri-rectangle.

Alors le cône aura une équation de la forme :

$$\lambda yz + \mu xz + \nu xy = 0,$$

puisqu'il doit contenir les trois axes des coordonnées. Mais sous cette forme, on voit que la somme des coefficients des carrés des termes en x^2, y^2, z^2 est 0, puisque chacun d'eux est nul.

D'ailleurs, on sait, d'après un problème précédent, que quelque soit le système d'axes que l'on considère, cette fonction ne change pas ; donc, elle doit toujours être nulle. On doit donc avoir, en particulier, dans l'ancien système de coordonnées :

$$A + A' + A'' = 0$$

Ainsi, en résumé, pour que sur le cône :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0,$$

on puisse placer un trièdre tri-rectangle, est que :

$$\underline{A + A' + A''} = 0.$$

847. — *Equation générale des cônes du 2e degré ayant leur sommet à l'origine et tangents aux trois plans coordonnés.*

R. — Soit : $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$, l'équation générale des cônes ayant leur sommet à l'origine.

Pour que la surface soit tangente au plan des xy, il faut qu'en faisant $z = 0$, on obtienne pour courbe d'intersection une droite double ; ce qui aura lieu si nous exprimons

que cette courbe est du genre parabole, car, comme elle passe par son sommet, elle représentera alors un système de deux droites confondues en une seule.

Faisant $z = 0$, il vient :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0.$$

Il faut que le 1er membre soit un carré parfait, donc :

$$B''^2 = AA'.$$

On aurait, de même, en faisant $y = 0$ et puis $x = 0$:

$$B'^2 = AA'' \qquad \text{et} \qquad B^2 = A'A''.$$

Ces égalités montrent que A, A', A'' sont des quantités de même signe. Supposons-les positives.

Pour éviter les radicaux, nous pourrons donc écrire l'équation de ces cônes ainsi :

$$a^2x^2 + a'^2y^2 + a''^2z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0$$

et alors on aura :

$$b = \pm\, a'a''$$

$$b' = \pm\, aa'$$

$$b'' = \pm\, aa''$$

en sorte que les cônes satisfaisant au problème, auront pour équation :

$$a^2x^2 + a'^2y^2 + a''^2z^2 \pm 2a'a''yz \pm 2aa''xz \pm 2aa'xy = 0$$

---

848. — *Exprimer que l'on peut circonscrire à un cône du 2e degré, un trièdre tri-rectangle ayant même sommet.*

R. — Imaginons que l'on prenne pour plans coordonnés ces trois plans rectangulaires ; soit :

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0, \text{ le cône.}$$

D'après le problème précédent, pour qu'il soit tangent aux trois plans coordonnés, il faut que :

$$b^2 = a'a'' \qquad b'^2 = aa'' \qquad b''^2 = aa'.$$

Donc $\qquad b^2 + b'^2 + b''^2 - aa' - aa'' - a'a'' = 0,$

pour un pareil cône et comme cette quantité reste toujours la même, quelque soit le système d'axes auquel on rapporte la surface; pour exprimer que sur le cône :

$$a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2 b y z + 2 b' x z + 2 b'' x y = 0,$$

on peut placer un trièdre tri-rectangle de même sommet et dont les faces lui soient tangentes, on exprime que :

$$b^2 + b'^2 + b''^2 - a a' - a a'' - a' a'' = 0.$$

---

849. — Conditions nécessaires pour que l'équation du 2e degré représente un cône droit circulaire. (Les axes de coordonnés étant rectangulaires).

R. — Si nous supposons l'origine au centre du cône, son équation sera de la forme :

$$(1) \qquad P x^2 + P' y^2 + P'' z^2 + 2 \varphi y z + 2 \varphi' x z + 2 \varphi'' x y = 0$$

Coupons-le par une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Les points communs aux deux surfaces satisferont à l'équation :

$$(P + \lambda) x^2 + (P' + \lambda) y^2 + (P'' + \lambda) z^2 + 2 \varphi y z + 2 \varphi' x z + 2 \varphi'' x y - \lambda R^2 = 0$$

Or, cette équation doit représenter un système de deux plans parallèles équidistants de l'origine; donc les trois équations du centre doivent se réduire à une seule.

Ces trois équations sont :

$$\left| \begin{array}{l} (P + \lambda) x + \varphi' z + \varphi'' y = 0 \\ (P' + \lambda) y + \varphi z + \varphi'' x = 0 \\ (P'' + \lambda) z + \varphi y + \varphi' x = 0 \end{array} \right.$$

Ces trois équations devant représenter le plan, qui est le lieu des centres de l'équation trouvée, doivent être identiques; donc, si on multiplie la 1re par φ, la 2e par φ', la 3e par φ'';

On devra avoir :

$$\left|\begin{array}{l}(P+\lambda)\,\varphi = \varphi'\varphi'' \\ (P'+\lambda)\,\varphi' = \varphi\varphi'' \\ (P''+\lambda)\,\varphi'' = \varphi\varphi'\end{array}\right.$$

D'où $$\lambda = \frac{\varphi'\varphi''}{\varphi} - P = \frac{\varphi\varphi''}{\varphi'} - P' = \frac{\varphi\varphi'}{\varphi''} - P''$$

Ainsi, les conditions nécessaires pour que l'équation (1) représente un cône droit circulaire, sont :

$$\frac{\varphi'\varphi''}{\varphi} - P = \frac{\varphi\varphi''}{\varphi'} - P' = \frac{\varphi\varphi'}{\varphi''} - P''$$

---

850. — Trouver l'équation d'un cône ayant son sommet à l'origine et dont la directrice serait l'intersection des surfaces :

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ f(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

R. — La question revient à trouver une équation homogène qui soit une conséquence des deux proposées, et pour cela, on rendra les deux équations homogènes par l'introduction d'une variable t, et on éliminera ensuite cette variable entre les deux équations.

En effet, si $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ satisfont au système :

$$\begin{cases} (1) \quad F(x,y,z) = 0 \\ (2) \quad f(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

trois équations jointes à $t = 1$, satisferont au système :

$$\begin{cases} (3) \quad F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0 \\ (4) \quad f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0 \end{cases}$$

et par suite à l'équation

$$(5) \quad \varphi(x,y,z) = 0$$

obtenue en éliminant t, entre ces deux dernières équations.

Ainsi, les solutions communes à (1) et à (2) conviennent aussi à (5). D'ailleurs, cette équation (5) est homogène ; en effet, elle provient de l'élimination de t entre

les deux équations homogènes du système (1) et (2); par suite, ce système est équivalent au système :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z, t) = 0. \end{array} \right.$$

Mais le système des équations (1) et (2) étant satisfait par certaines valeurs de x, y, z, t, le sera par les valeurs de Kx, Ky, Kz, Kt, et, en particulier, l'équation (5) sera satisfaite, quelque soit K, par Kx, Ky, Kz, si elle l'est pour x, y, z ; c'est-à-dire qu'elle sera satisfaite par une infinité de valeurs de x, y, z ; donc, elle est homogène.

---

851. — *Exprimer que deux surfaces du 2e degré sont tangentes.*

R. — Il suffit, pour cela, de chercher le cône ayant son sommet à l'origine et passant par l'intersection des deux surfaces, et exprimer que ce cône se réduit à son axe.

---

852. *Trouver l'équation du cône ayant son sommet au point (a, b, c) et dont la directrice serait l'intersection des deux surfaces :*

$$\left| \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

R. — On prend pour origine le point (a, b, c) et alors on a à faire passer un cône par l'origine et par l'intersection des deux surfaces :

$$F(x+a, y+b, z+c) = 0$$

$$f(x+a, y+b, z+c) = 0$$

ce qui se fera en éliminant t, entre les équations :

$$F\left(\frac{x}{t}+a, \frac{y}{t}+b, \frac{z}{t}+c\right) = 0$$

$$f\left(\frac{x}{t}+a, \frac{y}{t}+b, \frac{z}{t}+c\right) = 0$$

et pour revenir aux anciens axes, on remplacera dans

l'équation obtenue x, y, z par $x-a$, $y-b$, $z-c$.

853. — *Trouver l'équation du cône, dont le sommet est à l'origine et dont la directrice est la courbe d'intersection de la surface du 2e degré :*

$$f(x, y, z) = 0$$

avec le plan :

$$Ax + By + Cz = 1.$$

R. — Décomposons $F(x, y, z) = 0$ en polynomes homogènes, et soient F_2, F_1, F_0 l'ensemble des termes du 2e degré, du 1er degré et des termes constants.

On a : $$F(x, y, z) = F_2 + F_1 + F_0.$$

L'équation cherchée est :

$$F_2 + F_1(Ax + By + Cz) + F_0(Ax + By + Cz)^2 = 0$$

854. — *Combien peut-on faire passer de cônes du 2e degré par les points d'intersection de deux surfaces du 2e degré ?*

R. — Soient les deux surfaces du 2e degré :

$$F(x, y, z) = 0$$

$$f(x, y, z) = 0.$$

L'équation générale des surfaces du 2e degré passant par les points communs est :

$$F(x, y, z) + \lambda f(x, y, z) = 0$$

équation qui est de la forme :

$$(A + \lambda a)x^2 + (A' + \lambda a')y^2 + (A'' + \lambda a'')z^2 + 2(B + \lambda B)yz + \ldots D + \lambda d = 0$$

Il s'agit de déterminer λ de manière que cette équation représente un cône. Pour cela, il faut et il suffit que le centre soit sur la surface ; il faut donc déterminer λ de manière que les quatre équations :

$$\left|\begin{array}{l}(A+\lambda a)x+(B''+\lambda b'')y+(B'+\lambda b')z+C+\lambda c=0\\(B''+\lambda b'')x+(A'+\lambda a')y+(B+\lambda b)z+C'+\lambda c'=0\\(B'+\lambda b')x+(B+\lambda b)y+(A''+\lambda a'')z+C''+\lambda c''=0\\(C+c\lambda)x+(C'+\lambda c')y+(C''+\lambda c'')z+D+\lambda d=0\end{array}\right.$$

aient une solution commune, ce qui exige que le dénominateur commun, ou que le déterminant des valeurs de x, y, z, soit nul.

Ce déterminant sera en général du 4e degré en λ. — Il y a donc, en général, 4 cônes du 2e degré satisfaisant à l'énoncé.

855. — L'équation :

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0=f(x,y,z)$$

représentant un cône, que représente :

$$f(x,y,z)+K=0\ ?$$

(K est une constante).

R. — Si l'on avait :

$$f(x,y,z)+(ax+by+cz+d)^2=0$$

ce serait une surface tangente au cône suivant son intersection avec :

$$ax+by+cz+d=0$$

Si les coefficients de x, y, z deviennent nuls, le plan s'éloigne à l'infini, en sorte que :

$$f(x,y,z)+K=0$$

représente une surface tangente à la 1re, seulement la courbe de contact s'est éloignée à l'infini.

856. — Le lieu des sommets des cônes du 2e degré, passant par une courbe plane donnée et par un point donné est un cône du 2e degré, passant par cette courbe et ayant son sommet au point donné.

R. — Prenons pour plan des xy, celui de la courbe, et pour axes des x et des y, les axes de la courbe. — Prenons

en outre l'axe des z perpendiculaire au plan XOY.

La courbe aura une équation de la forme :

$$Mx^2 + Ny^2 + P = 0$$

Soient (x', y', z') les coordonnées du sommet de l'un des cônes, c'est-à-dire d'un point du lieu. Ce cône aura une équation de la forme :

$$A(x-x')^2 + A'(y-y')^2 + A''(z-z')^2 + 2B(y-y')(z-z') + 2B'(z-z')(x-x') + 2B''(x-x')(y-y') = 0.$$

En faisant $z = 0$ dans cette équation, on obtient une courbe qui doit se confondre avec la courbe donnée, ce qui fournit les relations suivantes entre les paramètres inconnus et les paramètres donnés :

$$M = A \qquad N = A' \qquad B'' = 0$$

$$Ax' + B''y' + B'z' = 0$$

donne (4) $$B' = -\frac{Mx'}{z'}$$

$$B''x' + A'y' + Bz' = 0$$

donne (5) $$B = -\frac{My'}{z'}$$

$$Ax^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' + PB''x'y' = P$$

donne $$-A''z'^2 = Ax'^2 + A'y'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' - P$$

d'où, en vertu de (4) et (5), on a :

(6) $$A'' = \frac{Mx'^2 + Ny'^2 + P}{z'^2}.$$

Le coefficient de z est :

$$-2(B'x' + By' + A''z'),$$

en vertu des relations (4), (5), (6), et devient :

$$-\frac{2P}{z'}.$$

L'équation du lieu devient alors :

$$Mx^2 + Ny^2 + \frac{Mx'^2 + Ny'^2 + P}{z'^2} z^2 - 2N\frac{y'}{z'} yz - 2M\frac{x'}{z'} xz - 2\frac{P}{z'} z + P = 0.$$

en exprimant que cette surface passe par le point (a, b, c) on a le lieu cherché. On a, pour cela, qu'à remplacer x, y, z par a, b, c et à regarder x', y', z' comme des coordonnées

courantes, il viennent alors, en supprimant les accents :

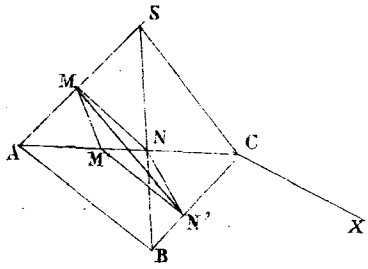
$$Mc^2x^2 + Nc^2y^2 + (Ma^2 + Nb^2 + P)z^2 - 2Nbyz - 2Macxz - 2cPz + Pc^2 = 0$$

C'est le lieu cherché. — On voit facilement que c'est bien un cône du 2e degré satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

VII. — Paraboloïde.

857. — Si l'on considère un tétraèdre SABC et un plan SCX passant par SC et parallèle à AB, la surface engendrée par une droite MN, qui se mouvrait en s'appuyant sur les deux arêtes SA, BC, et en restant parallèle au plan SCX sera un Paraboloïde hyperbolique. — Démontrer que ce Paraboloïde divise le volume du tétraèdre en deux parties égales.

R. — Pour avoir une génératrice du Paraboloïde, on mènera un plan quelconque parallèle à SCX ; la droite qui joint les points M et N, où ce plan rencontre les deux génératrices SA, BC, est une génératrice de la surface.



Le plan coupe le tétraèdre suivant un parallélogramme dont MN sera une diagonale.

La figure MM'NN' est un parallélogramme comme ayant ses côtés parallèles deux à deux. En effet NN' et SC sont parallèles, comme intersections des deux plans parallèles MN, SCX par le plan SBC. — De même MM' et SC sont parallèles.

Donc MM' et NN' sont parallèles, et MN' et M'N' sont parallèles comme parallèles à CX.

Ainsi, la génératrice divise la surface du parallélogramme en deux parties égales, puisqu'elle en est la diagonale. Si maintenant on imagine que cette génératrice se déplace d'une manière continue, le parallélogramme se modifiera, il se mouvra d'une manière continue, et engendrera le volume du tétraèdre, et comme la génératrice divisera toujours en deux parties égales les parallélogrammes, le lieu des génératrices divisera en deux parties égales le lieu des

parallélogrammes.

Ainsi, le Paraboloïde divisera en deux parties égales le volume du tétraèdre.

---

858. — *Trouver l'équation du Paraboloïde hyperbolique, rapporté à deux génératrices prises pour axes des x et des y, et au diamètre passant par leur intersection, pris pour axe des z.*

R. — Il faudra qu'en coupant la surface par le plan $z = 0$, on trouve $xy = 0$.

Donc $$xy + z(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0$$

Tous les plans diamétraux doivent être parallèles à l'axe des z.

L'équation diamétral correspondant à la direction (α, β, γ), est :

$$\alpha(y + az) + \beta(x + bz)\gamma(ax + by + 2cz + d) = 0$$

ou $$x(\alpha\gamma + \beta) + y(\beta\gamma + \alpha) + z(\alpha a + \beta b + 2\gamma c) + d = 0$$

Il faut donc que quels que soient α, β, γ, les plans soient parallèles à l'axe des z.

Ainsi $$a\alpha + b\beta + 2c\gamma = 0$$

ou $$a = b = c = 0$$

L'équation du Paraboloïde est donc :

$$xy = dz.$$

---

859. — *Trouver l'équation d'un Paraboloïde hyperbolique, qui contiendra les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.*

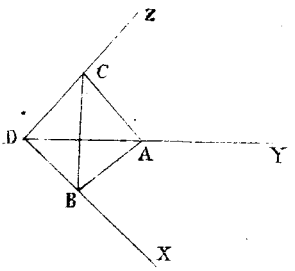
R. — Prenons pour plans coordonnés, les plans déterminés par deux côtés consécutifs.

L'équation des surfaces du 2e degré, qui contiennent l'axe des y et l'axe des z, est

$$Ax^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx = 0$$

La droite AB a pour équation :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$
$$z = 0$$



Si donc, on fait $z = 0$, on devra trouver :

$$x\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0.$$

Donc l'équation est de la forme :

$$\lambda yz + x\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 + \mu z\right) = 0$$

et comme en faisant $y = 0$, on doit trouver :

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 1\right)x = 0 \qquad \mu = \frac{1}{c}$$

l'équation devient :

$$\lambda yz + x\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right) = 0.$$

Il s'agit de déterminer λ de manière que la surface soit une Parabole hyperbolique.

Les équations qui donnent le centre sont :

$$2\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$
$$\frac{x}{b} + \lambda z = 0$$
$$\frac{x}{c} = \lambda y = 0$$

Il faut exprimer que ces équations sont incompatibles, ce qui se fera en égalant à 0, le dénominateur commun, ou en tirant les valeurs d'y et de z des deux dernières équations, pour les porter dans l'autre, et exprimant qu'on a une relation impossible. On arrive ainsi à :

$$\lambda\left(\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{bc}\right) = 0,$$

d'où
$$\lambda = \frac{a}{bc}$$

et l'équation cherchée est :

$$\frac{a}{bc}yz + x\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right) = 0.$$

---

860. — Quand l'équation du 2e degré $F(x, y, z) = 0$

représente un Paraboloïde hyperbolique, l'équation homogène obtenue en égalant à zéro l'ensemble des termes du 2e degré représente l'ensemble des deux plans directeurs du paraboloïde.

K. — Par une transformation de coordonnées, l'équation

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

se réduit à

$$(2) \qquad p^2x^2 - p'^2y^2 = qz,$$

et dans ce nouveau système, l'ensemble des deux plans directeurs est représenté par :

$$(3) \qquad p^2x^2 + p'y^2 = 0.$$

En revenant aux coordonnées primitives l'équation (2) devient :

$$(4) \qquad p^2(\alpha + ax + by + cz)^2 - p'^2(\beta + a'x + b'y + c'z)^2 = q(\gamma + a''x + b''y + c''z)$$

et l'ensemble des deux plans directeurs devient :

$$(5) \qquad p^2(\alpha + ax + by + cz)^2 - p'^2(\beta + a'x + b'y + c'z)^2 = 0$$

L'équation (4) peut donc s'écrire :

$$(6) \qquad p^2(\alpha + ax + by + cz)^2 - p'^2(a'x + b'y + c'z)^2 + Cx + C'y + C''z + D = 0.$$

Or, ces équations (1) et (6) du 2e degré représentent alors la même surface et sont identiques à un terme constant près. Donc, les termes du 2e degré de $F(x, y, z)$ sont à un facteur constant près :

$$p^2(ax + by + cz)^2 - p'^2(a'x + b'y + c'z)^2$$

Or, cette expression, égalée à zéro, donne deux plans respectivement parallèles aux plans (5), et par conséquent aux deux plans directeurs.

---

861. — Par un point du Paraboloïde :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

on mène deux génératrices de la surface, trouver l'équation

du plan de ces deux droites.

R. — On opère, comme on l'a fait, pour la question analogue, concernant l'hyperboloïde, et on trouve pour l'équation du plan :

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = z + z'$$

862. — Les seuls plans qui puissent couper le Paraboloïde hyperbolique suivant une droite unique, sont des plans parallèles aux plans directeurs.

R. — Soit le Paraboloïde $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$; On sait que les plans non parallèles à l'axe OX donnent pour section, des hyperboles ou un système de deux droites.

Considérons le plan : $y = cz + d$ parallèle à OX. Pour qu'il coupe le paraboloïde suivant une droite, il faut que la projection de l'intersection sur le plan des xz soit une droite, car la projection sur le plan des xy est déjà une droite.

Il faut donc que :

$$\frac{(cz+d)^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$$

ou :

$$z^2\left(\frac{c^2}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{2cd}{p}z - 2x + \frac{d^2}{p} = 0$$

Or, cette équation ne peut représenter deux droites confondues en une seule, que si le premier membre est un carré parfait, ce qui est impossible, puisqu'il y a un terme en x, et qu'il n'y en a pas en x^2.

Il faut donc que cette équation représente une seule droite, ce qui aura lieu si :

$$\left(\frac{c^2}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0$$

ou

$$c = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

On a donc deux plans parallèles aux plans directeurs.

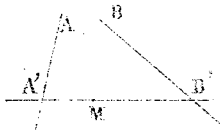
863. — On donne deux génératrices AA', BB' d'un même système du Paraboloïde hyperbolique, on mène des droites telles que A'B' qui rencontrent ces deux génératrices et qui soient parallèles à un même plan ; on prend sur A'B' le point

M, tel que $\frac{A'M}{B'M} = K$;

Trouver le lieu du point M.

R. — Imaginons par AA' et BB' des plans parallèles au plan directeur du 1er système, et par le point M, menons un plan parallèle à celui-là.

Toutes les droites allant du plan AA' au plan BB' seront (d'après un théorème de géométrie dans l'espace) divisées par ce troisième plan, dans le rapport :



$$\frac{A'M}{B'M} = K.$$

Donc tous les points du lieu sont sur ce plan, mais ils sont aussi sur le paraboloïde hyperbolique, qu'engendre la droite A'B' dans son mouvement. — Donc ils sont à l'intersection du paraboloïde et du plan mené par M parallèlement à un plan directeur du 1er système.

Le lieu sera donc une génératrice du 1er système.

VIII. Surfaces Cylindriques et Coniques.

864. — Discuter l'équation générale des cylindres du 2e degré :

$$aP^2 + bPP' + cP'^2 + dP + eP' + f = 0$$

P et P' étant des fonctions linéaires.

R. — Résolvant par rapport à P, il vient :

$$P = -\frac{bP'+d}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)P'^2 + 2(bd-2ae)P' + d^2 - 4af}.$$

Posons $P' = \alpha$, nous tirerons de cette équation deux valeurs pour P, donc deux génératrices parallèles situées sur la surface.

1° Si le cylindre est elliptique, les plans parallèles aux

génératrices ne coupent pas toujours le cylindre, on trouvera des valeurs de P imaginaires pour des valeurs de α positives ou négatives, suffisamment grandes en valeur absolue.

Dans ce cas il faudra que $b^2 - 4ac < 0$, afin que le binome sous radical soit < 0, pour des valeurs suffisamment grandes de P.

2° Si le cylindre est Parabolique, on aura $b^2 - 4ac = 0$

3° Si le cylindre est hyperbolique, on aura $b^2 - 4ac > 0$

865. — Trouver l'équation d'un cône ayant son sommet au point (α, β, γ), et dont la directrice est l'intersection des deux surfaces :

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - Rx = 0. \end{array} \right.$$

R. — La question se résout sans difficulté et on trouve un cône d'un degré supérieur au 2e. — Nous allons voir pour quelles valeurs de α, β, γ ce cône sera du 2e degré.

Les surfaces du 2e degré passant par l'intersection des deux surfaces données sont :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + \lambda (x^2 + y^2 - Rx) = 0$$

Pour que la surface soit un cône, il faut que le centre soit sur la surface, et comme les coordonnées du centre sont :

$$x = \frac{\lambda R}{2(1+\lambda)} \qquad y = 0 \qquad z = 0,$$

il faut que :

$$-\frac{\lambda^2 R^2}{4(1+\lambda)} - R^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2.$$

On a alors le cône du 2e degré :

$$(x - R)^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

qui est de révolution, dont le sommet est au point $(x = R,\ y = 0,\ z = 0)$, et dont l'axe est l'axe des x.

Donc le cône ne pourra être du 2e degré, qu'autant que : $\alpha = R \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0.$

Ces conditions sont suffisantes, et de plus le cône sera de révolution.

IX. Problèmes divers.

866. — Trouver dans une surface du 3e ordre le lieu des centres des moyennes distances, correspondant aux points d'intersection de la surface avec une droite de direction constante.

R. — Soit (1) $f(x, y, z) = 0$ l'équation proposée;

et

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} x = mz + p \\ y = nz + q \end{array} \right. \quad \text{une corde.}$$

Cherchons les z des points d'intersection de la corde avec la surface; il suffit pour cela d'éliminer x et y entre (1) et (2), ce qui donne une équation de la forme :

$$(3) \qquad Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0$$

Appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point du lieu qui se trouve sur (2).

On aura : $$(4) \qquad z_1 = \frac{z' + z'' + z'''}{3} = -\frac{Q}{3P}$$

$$(5) \qquad x_1 = mz_1 + p$$

$$(6) \qquad y_1 = nz_1 + q.$$

Il s'agit d'éliminer p et q entre ces trois équations pour avoir l'équation du lieu.

L'équation (4) s'écrit : $3Pz_1 + Q = 0$; c'est la dérivée seconde de (3). Or (3) n'est autre chose que (1) dans laquelle x et y sont remplacés par $mz + p$, $nz + q$.

Ainsi pour avoir (4) nous n'avons qu'à prendre la dérivée seconde de (1), en y considérant x et y comme liés à z par les relations :

$$x = mz + p$$

$$y = nz + q.$$

L'écrivant deux fois de suite, d'après la règle des

fonctions composées, on aura pour l'équation (4) :

$$m\left(m f''_{x^2} + n f''_{x,y} + f''_{x,z}\right) + n\left(m f''_{y,x} + n f''_{y^2} + f''_{y,z}\right) + m f''_{x,z} + n f''_{y,z} + f''_{z^2} = 0.$$

Il faut éliminer p et q entre cette équation et les équations (5) et (6). Où cette dernière ne contient ni p ni q, que la dérivation a fait disparaître, donc c'est l'équation du lieu.

Le lieu est donc un plan.

867. — Equation d'une surface réglée rapportée à deux de ses génératrices prises pour axes des x et des y.

R. — Ce sera : $xy + z(ax + by + cz + d) = 0.$

Cette équation peut représenter un hyperboloïde à une nappe, ou un paraboloïde hyperbolique ; on distinguera ces deux surfaces au moyen des équations du centre.

On trouve que si $ab \lesseqgtr c$ $\begin{cases} d \lesseqgtr 0 & \text{hyperboloïde à une nappe.} \\ d = 0 & \text{Cône} \end{cases}$

si $ab = c$: Paraboloïde hyperbolique.

868. — Que deviendra l'équation de cette surface réglée, si on prend l'axe des z parallèle à une génératrice du cône asymptote dans le cas de l'hyperboloïde, et à l'un des plans directeurs dans le cas du Paraboloïde hyperbolique ?

R. — Dans les deux cas, on exprimera cette condition, en exprimant, que l'axe des z ne rencontre la surface qu'en un point, c'est-à-dire que l'équation obtenue en faisant $x = 0$, $y = 0$ est du 1er degré en z.

L'équation devient : $z(ax + by + d) + xy = 0$

si $ab \lesseqgtr 0$ $\begin{cases} d \gtreqless 0 & \text{Hyperboloïde à une nappe.} \\ d = 0 & \text{Cône.} \end{cases}$

si $ab = 0$ Paraboloïde hyperbolique.

869. — Que deviendra l'équation de cette même surface, si l'on prend pour axe des z, la direction conjuguée du plan des xy ?

R. — Le centre doit être sur l'axe des z ; les équations

centre doivent être satisfaites par $x = 0$, $y = 0$.

Donc $a = 0$ $b = 0$

L'équation devient : $xy + z(cz + d) = 0$.

870. — La projection d'une section plane du cône circulaire droit sur un plan perpendiculaire à l'axe, mené par le sommet du cône, a pour l'un de ses foyers le sommet du cône ; et pour directrice correspondante, la droite suivant laquelle les deux plans se coupent.

R. — Prenons l'axe du cône pour axe des z, son équation sera de la forme :

$$x^2 + y^2 - tg^2\alpha \cdot z^2 = 0.$$

Coupons ce cône par un plan quelconque :

$$z = mx + ny + p$$

en projetant sur le plan des xy, ce qui se fera en éliminant z, la projection sera :

$$x^2 y^2 = tg^2\alpha (mx + ny + p)^2.$$

Équation d'une courbe du 2e degré ayant son foyer à l'origine, sommet du cône, et pour directrice dans le plan $z = 0$, la droite $mx + ny + p = 0$.

D'ailleurs cette projection est de même nature, que la courbe même de l'espace.

COMPOSITIONS ÉCRITES

pour l'admission

A L'ÉCOLE CENTRALE.

Arithmétique.

Pour obtenir avec m chiffres exacts le produit de deux nombres qui ont l'un et l'autre un chiffre différent de 1 pour premier chiffre significatif à gauche, il suffit de prendre chacun de ces nombres avec m + 1 chiffres exacts. Démontrer ce théorème et l'appliquer au calcul du produit de $\pi\sqrt{7}$ à 0,001 près.

Géométrie.

Dans un triangle rectangle, on donne la somme S des deux côtés de l'angle droit B et la longueur b de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. — On demande de calculer la longueur de l'hypoténuse, de déduire de la formule trouvée une construction géométrique de cette longueur, et d'achever la construction du triangle.

Trigonométrie.

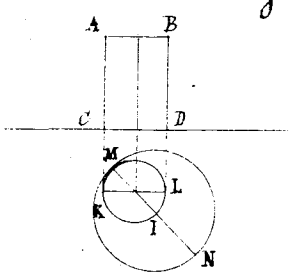
On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a = 11331^{m}.75$$
$$b = 27196.20$$
$$c = 29462.55.$$

Calculer la surface.

Géométrie descriptive.

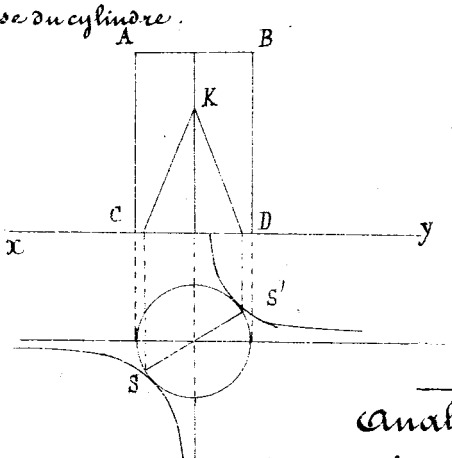
On donne un cylindre de révolution reposant sur le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles au plan vertical



On demande l'intersection de ce cylindre avec un cône de révolution, dont le sommet est sur l'axe du cylindre, et dont la base est sur le plan horizontal qui est un cercle de même rayon que la section droite du cylindre

Épure de l'intersection du cylindre droit

circulaire ABCD avec la sphère dont le centre est au point I du plan horizontal (La droite MN fait 45° avec xy;) et dont le rayon est égal au diamètre de la base du cylindre.

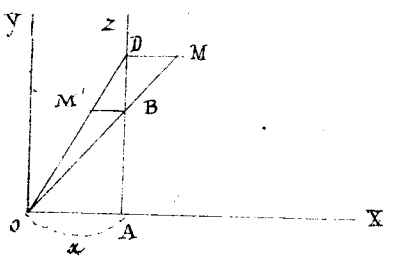


Intersection du cylindre droit circulaire ABCD avec un cône dont la base horizontale est une hyperbole.

(La droite des sommets SS' fait 45° avec xy) et dont le sommet est sur l'axe du cylindre.

Analytique.

On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy et une parallèle Az à l'axe des y qui intercepte sur l'axe des x un segment $OA = a$



M étant un point quelconque du plan, on le projette en D sur Az et l'on mène OM qui coupe Az en B. Enfin on mène par le point B une parallèle à l'axe des x, qui coupe OD en M'.

On demande : 1° D'exprimer les coordonnées de M' en fonction de celles du point M et de prouver que la droite MM' passe par un point fixe, c'est-à-dire indépendant de la position du point M.

2° De trouver le lieu décrit par le point M' lorsque le point M décrit un cercle, dont le rayon est donné, et dont le centre est un point donné de l'axe des x. — Discuter.

Physique.

Une éprouvette cylindrique à fond plat, ayant à l'intérieur une longueur l, est originairement pleine d'air sous la pression atmosphérique H. On l'enfonce verticalement dans le mercure en ayant soin de tenir l'ouverture tournée par le bas. — On demande à quelle pression le gaz sera soumis, lorsque le plan de l'ouverture se trouvera à une distance h du niveau du mercure dans la cuve, qui sert à l'expérience. — Appliquer la formule trouvée au cas où :

$h = 0^m,35$ $\qquad$ $H = 0^m,76$ $\qquad$ $l = 0^m,40$.

Chimie.

Préparation du chlore à l'état gazeux et indissolution dans l'eau.

Dessin.

Lavis d'un chapiteau. — Dessin d'architecture avec ornement. — Dessin à main levée.

(Compositions de 1862.)

COMPOSITIONS ÉCRITES

pour l'admission

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Composition de Mathématiques (4h.)

On donne le cercle représenté par l'équation : $x^2 + y^2 = 1$. et la parabole représentée par l'équation : $\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2 y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = \frac{3\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2}$

où α et β sont des paramètres positifs quelconques.

On propose de déterminer 1° le nombre des points réels communs aux deux courbes pour les différentes valeurs de α et de β, 2° les coordonnées des quatre points communs lorsque $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, lorsque $\alpha = 1$ avec $\beta > 1$, lorsque $\beta = \sqrt{(\alpha^2 = 1)(4\alpha^2 = 1)}$.

Dessin d'imitation (4h.)

Une Académie de Jullien, une partie ombrée.

Composition Française (4h.)

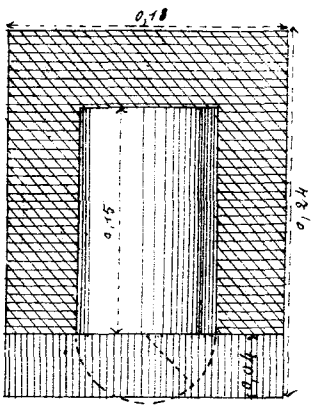
Jacques Molay, grand-maître des Templiers, au moment de sa mort.

Foule assemblée à l'extrémité de la Cité pour voir mourir les Templiers. Jacques Molay paraît. Il proclame ses compagnons innocents. Ce n'est pas leurs prétendus crimes qu'on poursuit, c'est leurs richesses qu'on convoite. — Quelle ne sera pas la joie des Sarrazins s'ils apprennent l'extermination des Templiers ? Ils appellent du pape Clément et de Philippe le Bel au Tribunal de Dieu.

La flamme s'élève, les chants se font entendre, s'affaiblissent et cessent. Mort du pape et du Roi.

Lavis à l'encre de Chine (5h.)

Faire le lavis à l'encre de chine, d'une surface cylindrique de



dix centimètres de diamètre sur quinze centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond formé d'une teinte plate grise, il reposera sur un socle, dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très faible intensité.

Le modèle de cette surface cylindrique pourra être fait à teintes fondues ou adoucies, ou bien à teintes plates superposées.

ÉCOLE CENTRALE LYONNAISE

On admettra que le rayon de lumière a pour projections horizontale et verticale des lignes inclinées à 45° sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de haut sur 18 centimètres de large.

Composition de Trigonométrie (1 h)

Étant donnés dans un triangle rectiligne deux côtés et l'angle qu'ils comprennent, savoir :

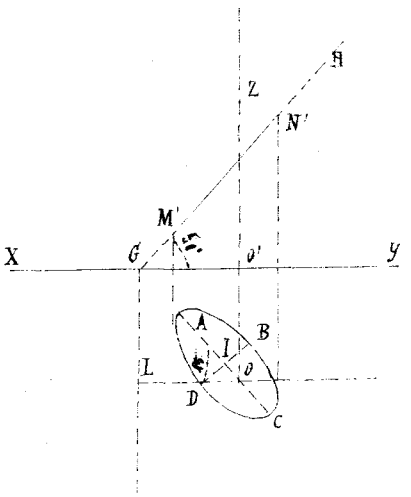
$a = 23824^m,52$ $\quad b = 15642^m,34$ $\quad c = 84°,32',18'',4$

Calculer les deux autres angles A et B et le troisième côté c

$A = 60°,34',45'',5$ $\quad B = 24°,52',56'',1$ $\quad c = 27227,80$

Composition de Géométrie descriptive (4 h.).

Le problème consiste à représenter la surface engendrée par la révolution d'une ellipse autour d'une droite située hors du plan de cette courbe.



L'axe de révolution est la droite verticale (O, O', Z). L'ellipse génératrice est donnée dans sa position initiale par ses projections (ABC, M'N') et par les traces LG et GH de son plan. Ce plan est perpendiculaire au plan vertical.

Le grand axe de l'ellipse ABCD passe par la trace horizontale O de l'axe de révolution.

On tracera le contour apparent de la surface sur chacun des plans de projection. Les deux courbes méridiennes situées dans le plan vertical OL seront entièrement construites et on distinguera par la ponctuation celles de leurs parties qui sont vues de celles qui sont cachées.

Les projections ABCD et M'N' de l'ellipse génératrice sont tracées en trait plein sur le croquis ci-joint, mais dans leur ponctuation sur l'épure on devra avoir égard aux parties vues et aux parties cachées.

Ellipse ABCD { Grand axe AC = 90 millimètres
petit axe BD = 44 m/m

$OO' = 72$ m/m $\quad OL = 68$ m/m $\quad OI = 15$ m/m

$\widehat{AOL} = 45$ $\quad yGH = 50°$

La droite OL est parallèle à la ligne de terre Xy.

(Compositions de 1864.)

Fin.